Zusammenfassung der Vorlesung

Analysis 3

Stefan Müller
Universität Bonn
Wintersemester 2016-2017

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

Ba Heinz Bauer, Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter

Kö2 Konrad Königsberger, Analysis II, Springer

WZ Richard L. Wheeden und Antoni Zygmund, Measure and Integral: An introduction to real analysis, Marcel Dekker, Inc.

Insbesondere enthalten diese Notizen nur ausgewählte Beweise.
Hinweise auf Tippfehler und Korrekturen bitte an `sm@hcm.uni-bonn.de`.

Diese Zusammenfassung basiert auf den oben genannten Büchern, einer Vorlesungszuammenfassung von Prof. S. Conti und weiteren Quellen und ist nur für Hörer der Vorlesung V2B1 Analysis 3 an der Universität Bonn, Wintersemester 2016-2017, bestimmt. Die verwendeten Quellen werden nicht im einzelnen angegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Das Problem der Volumendefinition

Für eine Menge A bezeichte $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von A. Gesucht wird eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ für die gilt:

(i) Ist $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie);

(ii) Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Isometrie und $A \subset \mathbb{R}^n$, so gilt $\mu(TA) = \mu(A)$ (Euklidische Invarianz);

(iii) $\mu([0, \ell]^n) = \ell^n$ für alle $\ell > 0$ (Normierung);

(iv) Sind $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ abzählbar viele paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j) \tag{1.1}$$

(σ-Additivität).

Wir werden demnächst sehen, dass keine solche Abbildung existiert. Die Anforderungen werden deshalb ab Kapitel 2 abgeschwächt.

Man kann (iii) durch die scheinbar schwächere Bedingung $\mu([0, 1]^n) = 1$ ersetzen.

1.2 Das Beispiel von Vitali

Satz 1.1 (Vitali 1905)**.** *Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften (i)–(iv). Das gilt auch wenn (ii) durch die schwächere Bedingung*

(ii') Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(x + A) = \mu(A)$

ersetzt wird.

Notation: Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Menge $a + M$ durch

$$a + M := \{a + x : x \in M\}.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass eine Abbildung μ existiert, so dass (i), (ii'), (iii), (iv) erfüllt sind, und suchen einen Widerspruch. Wir betrachten auf $A = [0,1]^n$ folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y, \text{ falls } x - y \in \mathbb{Q}^n\,. \tag{1.2}$$

Sei $M_0 \subset A$ eine Teilmenge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält (hier wird das Auswahlaxiom benutzt!). Das bedeutet, dass: (i) für jedes $x \in A$ ein $y \in M_0$ existiert, so dass $x \sim y$; und (ii) falls $x, y \in M_0$ mit $x \sim y$ gegeben sind, dann $x = y$.

Die Menge $\mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$ ist abzählbar. Daher gibt es eine bijektive Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$. Wir fassen x als Folge auf und schreiben x_k statt $x(k)$. Wir können annehmen, dass $x_0 = 0$. Wir definieren $M_k = M_0 + x_k$. Dann folgt:

(a) für $h \neq k$ gilt $M_h \cap M_k = \emptyset$.
Beweis: sonst gäbe es $y, z \in M_0$ mit $y + x_h = z + x_k$, was $y \sim z$ impliziert. Aus der Definition von M_0 folgt dann $y = z$. Aber aus $x_h \neq x_k$ folgt $y \neq z$, ein Widerspruch.

(b) für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt $\mu(M_h) = \mu(M_0) \leq \mu(A) = 1$.
Beweis: folgt aus (i), (ii').

(c) $[0,1]^n \subset \bigcup\limits_{h \in \mathbb{N}} M_h$.
Beweis: Sei $y \in [0,1]^n$. Dann gibt es $z \in M_0$ mit $y \sim z$. Dann gilt $y - z \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$. Deshalb gibt es ein h mit $x_h = y - z$, und $y = z + x_h \in M_h$.

(d) $\bigcup\limits_{h \in \mathbb{N}} M_h \subset [-1,2]^n$.
Beweis: Sei $y \in M_h$. Dann gibt es $z \in M_0$ mit $y = x_h + z$. Aus $x_h \in [-1,1]^n$ und $z \in [0,1]^n$ folgt $y \in [-1,2]^n$.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle. Falls $\mu(M_0) = 0$, dann führt (c) zu

$$1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} M_h\right) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \mu(M_h) = 0\,, \tag{1.3}$$

einem Widerspruch. Falls $\mu(M_0) > 0$, dann folgt aus (d) dass

$$3^n = \mu([-1,2]^n) \geq \mu\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} M_h\right) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \mu(M_h) = \infty\,, \tag{1.4}$$

ebenfalls ein Widerspruch. □

1.3 Die Beispiele von Hausdorff und Banach-Tarski

Eine natürliche Abschwächung von (iv) ist folgende:

(iv') Sind $A_0, A_1, \ldots, A_k$ endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j\right) = \sum_{j=0}^{k} \mu(A_j)\,. \tag{1.5}$$

Wir zeigen demnächst, dass für $n \geq 3$ keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ existiert, die (i), (ii), (iii), (iv') erfüllt. Die Situation in Dimension $n = 1$ und $n = 2$ ist aber anders[1].

Notation: $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ist die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, wobei $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ die euklidische Norm bezeichnet.

Satz 1.2 (Hausdorff 1914)**.** *Es gibt abzählbar viele Vektoren $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$, so dass die Menge*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\,, x \neq \lambda v_h \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N}\} \tag{1.6}$$

folgende Eigenschaft hat:

Es gibt fünf paarweise disjunkte Teilmengen $K_1, \ldots, K_5 \subset K$ und zwei Rotationen φ, $\psi \in SO(3)$, so dass:

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \tag{1.7}$$

und

$$K = K_1 \cup \varphi K_2 = K_3 \cup \psi K_4, \quad K_1 \cap \varphi K_2 = K_3 \cap \varphi K_4 = \emptyset \tag{1.8}$$

gilt.

Satz 1.3. *Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ die (i), (ii), (iii), (iv") erfüllt.*

Beweis. Sei μ eine solche Abbildung. Aus $[-1/2, 1/2]^3 \subset B_1 \subset [-1, 1]^3$ folgt, dass

$$\mu(B_1) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}) \in [1, 8]\ . \tag{1.9}$$

Seien jetzt v_h Vektoren wie im Satz 1.2, und

$$M = B_1 \setminus K = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\,, x = \lambda v_h \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } h \in \mathbb{N}\}\,. \tag{1.10}$$

Wir können annehmen, dass $|v_h| = 1$ für alle h und dass $v_h \neq v_k$ und $v_h \neq -v_k$ für alle $h \neq k$.

Wir zeigen zuerst, dass $\mu(M) = 0$ (und deshalb $\mu(K) = \mu(B_1)$).

[1] vgl. z.B. Jürgen Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer-Lehrbuch

Behauptung 1 Es gibt ein $e \in \partial B_1$ so dass

$$e \notin \bigcup_{k,h \in \mathbb{N}: k \neq h} \operatorname{span}(v_k, v_h).$$

Beweis: Sei S die Menge der Vektoren in ∂B_1, die zu einer der Ebenen $E_{k,h} := \operatorname{span}(v_k, v_h)$, $h \neq k$, senkrecht sind. Da für jede Ebene zwei solche Vektoren existieren, ist S abzählbar. Da ∂B_1 überabzählbar ist, existiert ein $d \in \partial B_1 \setminus S$. Man betrachte jetzt die Menge $T = \{x \in \partial B_1 : x \cdot d = 0\}$. Die Ebene $d^\perp := \{x : x \cdot d = 0\}$ ist nicht parallel zu einer der Ebenen $E_{k,h}$ und beide Ebenen enthalten den Nullpunkt. Daher ist $d^\perp \cap E_{k,h}$ eine Gerade. Somit gilt $\#(T \cap E_{k,h}) = 2$ für alle $h \neq k$. Da T überabzählbar ist, gibt es $e \in T$ so dass $e \notin E_{k,h}$ für alle $h \neq k$.

Behauptung 2 $\mu(M) = 0$.
Beweis: Sei, für $t \in [-1, 1]$, $M_t = M + te$. Für $s \neq t$ sind M_s und M_t disjunkt, weil aus $\lambda v_h + se = \lambda' v_k + te$ und $s \neq t$ folgt, dass $e \in \operatorname{span}\{v_k, v_h\}$. Aus der Translationsinvarianz folgt $\mu(M_t) = \mu(M)$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\cup_{n=1}^k M_{2^{-n}} \subset [-2, 2]^3$, und mit

$$k\mu(M) = \sum_{n=1}^{k} \mu(M_{2^{-n}}) = \mu\left(\cup_{n=1}^k M_{2^{-n}}\right) \leq \mu([-2, 2]^3) = 64\,, \tag{1.11}$$

folgt $\mu(M) = 0$.

Aus $\mu(B_1) = \mu(K) + \mu(M)$ und Behauptung 2 folgt $\mu(K) = \mu(B_1) \in [1, 8]$. Aber aus Satz 1.2 folgt

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(K_1) + \mu(K_2) + \mu(K_3) + \mu(K_4) + \mu(K_5) && (1.12)\\ &= \mu(K_1) + \mu(K_2) && (1.13)\\ &= \mu(K_3) + \mu(K_4)\,, && (1.14) \end{aligned}$$

was $\mu(K) \geq 2\mu(K)$ impliziert, ein Widerspruch. □

[18.10. 2016, Vorlesung 1]

[20.10. 2016, Vorlesung 2]

Der Beweis von Satz 1.2 besteht aus drei Schritten

- Konstruktion einer abstrakten abhzählbaren Gruppe $\mathcal{W}$, welche disjunkte Zerlegungen

  $$\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{5} \mathcal{W}_i = \mathcal{W}_1 \cup \varphi\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 \cup \psi\mathcal{W}_4$$

  besitzt (einfach, siehe Lemma 1.4)

- Realisierung der abstrakten Gruppe $\mathcal{W}$ als Untergruppe G der Rotationsgruppe $SO(3)$ (siehe Lemma 1.5)

- Die Menge K wird so definiert, das G fixpunktfrei auf K operiert, d.h.

$$\forall g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\} \ \forall x \in K \quad gx \neq x$$

. Dann lässt sich die Zerlegung aus der Zerlegung von G eine disjunkte Zerlegung $K = \bigcup_{i=1}^{5} K_i$ analog zur Konstruktion im Beispiel von Vitali (Satz 1.1) konstruieren.

Konstruktion der abstrakten Gruppe $\mathcal{W}$ Zur Konstruktion der abstrakten Gruppe $\mathcal{W}$ betrachten wir zwei abstrakte Elemente φ und ψ sowie deren formale Inverse φ^{-1} und ψ^{-1} (man kann sich φ und ψ als invertierbare Matrizen vorstellen, siehe unten).

Wir nennen ein k-Tupel $w = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ *Wort der Länge k*, falls $\rho_j \in \{\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}\}$ und $\rho_j \rho_{j+1} \neq \mathrm{Id}$ für alle j mit $1 \leq j < k$. Die leere Menge $\emptyset$ ist ein Wort der Länge 0. Die Menge der Wörter wird mit $\mathcal{W}$ bezeichnet.

Wir definieren jetzt ein Produkt $\cdot : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$. Falls $w_1 = (\rho_1, \ldots, \rho_j)$ und $w_2 = (\rho'_1, \ldots, \rho'_k) \in \mathcal{W}$, dann entsteht das Wort $w_1 \cdot w_2$ aus dem Tupel $(\rho_1, \ldots, \rho_j, \rho'_1, \ldots, \rho'_k)$ durch iteratives Kürzen aller Paare $\varphi\varphi^{-1}$, $\varphi^{-1}\varphi$, $\psi\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\psi$. Falls sich alle Terme wegkürzen ist $w_1 \cdot w_2$ das leere Wort $\emptyset$. Weiterhin definieren wir $w \cdot \emptyset = \emptyset \cdot w = w$.

Man sieht leicht, dass $\mathcal{W}$ mit diesem Produkt eine Gruppe bildet. Das neutrale Element ist $\emptyset$. Das inverse Element zu $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ ist durch $(\rho_k^{-1}, \ldots, \rho_1^{-1})$ gegeben. Beispiele:

$$(\psi, \varphi, \varphi) \cdot (\varphi^{-1}, \psi, \varphi^{-1}) = (\psi, \varphi, \psi, \varphi^{-1}), \qquad (\psi^{-1}, \varphi, \varphi)^{-1} = (\varphi^{-1}, \varphi^{-1}, \psi). \tag{1.15}$$

Man nennt $\mathcal{W}$ die freie Gruppe mit Erzeugern φ, ψ.

Wir kommen jetzt zu den gewünschten Zerlegungen. Sei $\mathcal{W}_\sigma$ die Menge der Wörter, die mit $\sigma \in \{\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}\}$ anfangen, und $\mathcal{W}_e = \{\emptyset\}$. Dann ist klar, dass $\mathcal{W}$ die Vereinigung der fünf disjunkten Mengen $\mathcal{W}_e$, $\mathcal{W}_\varphi$, $\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}$, $\mathcal{W}_\psi$, $\mathcal{W}_{\psi^{-1}}$ ist.

Lemma 1.4. *Die Gruppe $\mathcal{W}$ besitzt die disjunkten Zerlegungen*

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\varphi \cup \varphi\mathcal{W}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{W}_\psi \cup \psi\mathcal{W}_{\psi^{-1}}$$

Beweis. Sei $w \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_\varphi$, dann fängt w nicht mit φ an. Deshalb gibt es im Produkt $\varphi^{-1}w$ keine Kürzung, und $w' = \varphi^{-1}w \in \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}$. Daher gibt es für alle $w \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_\varphi$ ein $w' \in \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}$, so dass $w = \varphi w'$. Daher gilt

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\varphi \cup \varphi\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}. \tag{1.16}$$

Außerdem gilt

$$\mathcal{W}_\varphi \cap \varphi \mathcal{W}_{\varphi^{-1}} = \emptyset.$$

Falls nämlich $w' = (\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_k) \in \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}$ so ist $\rho'_1 = \varphi^{-1}$ und somit $\rho'_2 \neq \varphi$. Daher ist $\varphi w' = (\rho'_2, \dots, \rho'_k) \notin \mathcal{W}_\varphi$ (für $k = 1$ ist $\varphi w' = \emptyset \notin \mathcal{W}_\varphi$). Analog zeigt man die disjunkte Zerlegung $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\psi \cup \psi \mathcal{W}_{\psi^{-1}}$. □

Realisierung von $\mathcal{W}$ als Untergruppe von $SO(3)$. Sei

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Es ist klar, dass

$$\varphi, \psi \in SO(3) = \{F \in \mathbb{R}^{3\times 3} : F^T F = \mathrm{Id}\,, \det F = 1\}. \tag{1.18}$$

Zu einem Wort $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ assozieren wir die Matrix

$$F((\rho_1, \dots, \rho_k)) := \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k.$$

Wir definieren $F(\emptyset) = \mathrm{Id}$. Damit gilt $F : \mathcal{W} \to SO(3)$.

Lemma 1.5. *Es gilt $F(w_1 w_2) = F(w_1)F(w_2)$, und die Menge $G = F(\mathcal{W})$ ist eine Untergruppe von $SO(3)$. Weiterhin $F : \mathcal{W} \to G$ ist bijektiv und somit ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Definition des Produkts auf $\mathcal{W}$. Aus der ersten Aussage folgt, dass da $F(w^{-1})F(w) = F(w^{-1}w) = F(\emptyset) = \mathrm{Id}$. Daher ist $F(w^{-1})$ das inverse Element zu $F(w)$ und G eine Untergruppe von $SO(3)$

Es bleibt zu zeigen, dass F injektiv ist (hierfür ist die spezielle Form von φ und ψ relevant!). Falls $F(w_1) = F(w_2)$, dann $F(w_1 w_2^{-1}) = \mathrm{Id}$. Es reicht deshalb zu zeigen, dass für alle Wörter mit einer Länge größer 0 die Bedingung $F(w) \neq \mathrm{Id}$ erfüllt ist. Der Beweis wird unten ausgeführt. □

Beweis des Satzes 1.2. Definiere $G_\sigma = F(\mathcal{W}_\sigma)$. Da F bijektiv ist, besitzt G die disjunkte Zerlegung

$$G = G_e \cup G_\varphi \cup G_{\varphi^{-1}} \cup G_\psi \cup G_{\psi^{-1}}, \tag{1.19}$$

wobei $G_e = F(\emptyset) = \{\mathrm{Id}\}$. Aus Lemma 1.4 folgt außerdem, dass G die disjunkten Zerlegungen

$$G = G_\varphi \cup \varphi G_{\varphi^{-1}} = G_\psi \cup \psi G_{\psi^{-1}}, \tag{1.20}$$

besitzt.

Für $g \in G$ sei $r_g = \{x \in \mathbb{R}^3 : gx = x\}$. Da $G \subset SO(3)$, ist für jedes $g \neq \mathrm{Id}$ die Menge r_g ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ (d.h., eine Gerade, die 0 enthält). Sei

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\} \setminus \bigcup_{g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}} r_g \,. \tag{1.21}$$

Auf K sei die Äquivalenzrelation

$$x \sim y, \text{ falls } \exists g \in G \text{ mit } x = gy \tag{1.22}$$

definiert. Sei $A \subset K$ so gewählt, dass A genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält (Auswahlaxiom !). Aus dieser Definition folgt:

$$\text{für jedes } x \in K \text{ gibt es genau ein } g \in G \text{ und genau ein } y \in A \text{ mit } x = gy. \tag{1.23}$$

Beweis: Existenz von y und g und Eindeutigkeit von y folgen aus der Definition von A. Falls $x = gy = g'y$, so folgt $g^{-1}g'y = y$, oder $y \in r_{g^{-1}g'}$. Aus der Definition von K, und der Eigenschaft $y \in K$ folgt, dass $g^{-1}g' = \mathrm{Id}$ und somit $g = g'$.

Aus (1.23) und (1.19) folgt, dass K die disjunkte Vereinigung der fünf Mengen

$$A = G_e A\,, \;\; G_\varphi A\,, \;\; G_{\varphi^{-1}} A\,, \;\; G_\psi A\,, \;\; G_{\varphi^{-1}} A \tag{1.24}$$

ist. Hierbei haben wir die Notation

$$G_\varphi A := \{gy : g \in G_\varphi,\, y \in A\}$$

benutzt. Gleichzeitig folgt aus (1.23) und (1.20), dass K die disjunkte Vereinigung der zwei Mengen

$$G_\varphi A \quad \text{und} \quad \varphi G_{\varphi^{-1}} A \tag{1.25}$$

ist. Analog ist K die disjunkte Vereinigung von

$$G_\psi A \quad \text{und} \quad \psi G_{\psi^{-1}} A\,. \tag{1.26}$$

$\square$

[20.10. 2016, Vorlesung 2]

[25.10. 2016, Vorlesung 3]

Schluß des Beweises von Lemma 1.5. Wir betrachten wie oben

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Inversen sind gegeben durch $\varphi^{-1} = \varphi^T$ und $\psi^{-1} = \psi^T$ also durch

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_k \neq \mathrm{Id} \tag{1.27}$$

falls

$$\rho_j \in \{\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}\} \quad \text{und} \quad \rho_j\rho_{j+1} \neq \mathrm{Id} \quad \text{für } j = 1, \ldots, k-1, \tag{1.28}$$

d.h., falls $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ ein Wort der Länge $k \geq 1$ ist.

Dieses Problem vereinfacht sich erheblich durch einen geschickten Koordinatenwechsel (statt der Koordinaten (x_1, x_2, x_3) im $\mathbb{R}^3$ benutzen wir Koordinaten $(y_1, \sqrt{2}y_2, y_3)$; dadurch verschwinden die Terme mit $\sqrt{2}$ aus den Matrizen). Sei allgemein H eine invertierbare 3×3 Matrix und sei

$$\tilde{\rho} := H^{-1}\rho H.$$

Dann reicht es zu zeigen, dass für jedes nichtleere Wort $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ gilt

$$\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2\ldots\tilde{\rho}_k \neq \mathrm{Id}\,. \tag{1.29}$$

[Beweis der Äquivalenz (1.29) und (1.27): setze die Definition $\tilde{\rho}_j = H^{-1}\rho_j H$ ein, multipliziere beiden Seiten in (1.29) mit H von links und H^{-1} von rechts und ersetze alle Produkte HH^{-1} durch Id.]

Wir wählen nun

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt (zweite Spalte wird mit $\sqrt{2}$ multipliziert, zweite Zeile wird durch $\sqrt{2}$ dividiert)

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\varphi^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

$$\widetilde{\psi} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\psi^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

Die Behauptung (1.29) folgt nun aus den folgenden Aussagen. Für jedes Wort der Länge $k \geq 1$ gilt:

(i) Alle Einträge der Matrix $3^k\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_k$ sind ganzzahlig;

(ii) nicht alle Einträge der Matrix $3^k\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_k$ sind durch 3 teilbar.

Aus ii) folgt sofort, dass $\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_k \neq \mathrm{Id}$.

Aussage i) ist klar, da das Produkt der ganzzahligen Matrizen $3\widetilde{\rho}_j$ ganzzahlig ist.

Zum Beweis von ii) kann man mit Restklassen bei Teilung durch 3 argumentieren. Wir führen für $x, y \in \mathbb{Z}$ die folgende Notation ein:

$$x \equiv y \quad \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x - y \text{ ist durch 3 teilbar}$$

(ausführlicher kann man auch $x \equiv y \mod 3$ schreiben). Man sieht leicht, dass aus $x \equiv x'$ und $y \equiv y'$ die Relationen $x+y \equiv x'+y'$ und $xy \equiv x'y'$ folgen. Für jede Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt es genau ein $y \in \{-1, 0, 1\}$ mit $x \equiv y$. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnet $a \otimes b$ die Matrix mit den Einträgen $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$3\widetilde{\varphi} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \equiv v_\varphi \otimes v_\varphi \tag{1.32}$$

$$3\widetilde{\varphi^{-1}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) \equiv v_{\varphi^{-1}} \otimes v_{\varphi^{-1}} \tag{1.33}$$

$$3\widetilde{\psi} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (e_2 + e_3) \otimes (e_2 + e_3) \equiv v_\psi \otimes v_\psi \tag{1.34}$$

$$3\widetilde{\psi^{-1}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3) = v_{\psi^{-1}} \otimes v_{\psi^{-1}} \tag{1.35}$$

Es gilt

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)\,(a \otimes d).$$

Außerdem sieht man leicht, dass

$$v_\rho \cdot v_{\rho'} \equiv \pm 1 \quad \text{falls } \rho\rho' \neq \mathrm{Id}\,.$$

Da $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ ein Wort ist (und somit $\rho_j\rho_{j+1} \neq \mathrm{Id}$), folgt dass

$$3^k\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_k \equiv (3\widetilde{\rho}_1) \dots (3\widetilde{\rho}_k) \equiv \pm v_{\rho_1} \otimes v_{\rho_k}.$$

Nun gilt $v_{\rho_1} \otimes v_{\rho_k} \not\equiv 0$ und daraus folgt die Behauptung ii). □

Alternativer Beweis von Lemma 1.5. Der folgende Beweis basiert auf der gleichen Idee, ist aber etwas weniger abstrakt. Dafür sind eine Reihe ähnlicher Fälle zu betrachten, die nicht alle im Einzelnen ausgeführt werden. Sei w ein Wort, $w \neq \emptyset$. Wir nehmen an, dass das letzte Element von w entweder φ oder φ^{-1} ist, und werden zeigen, dass $F(w)e_1 \neq e_1$. Das impliziert $F(w) \neq \mathrm{Id}$. Im anderen Fall argumentiert man analog mit $F(w)e_3$.

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

(i) für alle Wörter $w = (\rho_1, \ldots, \rho_k)$ der Länge k, mit $\rho_k = \varphi$ oder $\rho_k = \varphi^{-1}$, gibt es $a, b, c \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$F(w)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

(ii) Für $k \geq 1$ ist b in (1.36) nicht durch 3 teilbar.

Beide Aussagen werden mittels Induktion bewiesen. Wir fangen mit (i) an. Für $k = 1$ ist das Ergebnis klar. Für $k \geq 2$, unterscheiden wir vier Fälle, je nach Wert von ρ_1. Falls $\rho_1 = \varphi$, dann gilt $w = \varphi w'$, wobei w' ein Wort der Länge $k - 1$ ist. Da (1.36) für w' gilt, erhalten wir

$$F(w)e_1 = F(\varphi w')e_1 = \varphi F(w')e_1 = \varphi\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}a-4b\\(2a+b)\sqrt{2}\\3c\end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

was die Aussage in diesem Fall beweist. Für $\rho_1 = \psi$ liefert die analoge Rechnung

$$\psi\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}3a\\(b-2c)\sqrt{2}\\4b+c\end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

Die Ergebnisse für φ^{-1} und ψ^{-1} unterscheiden sich nur in einigen Vorzeichen. Das beweist (i).

Um (ii) zu zeigen, stellen wir zuerst fest, dass die Aussage für $k = 1$ wahr ist (weil dann $w = \varphi$ oder $w = \varphi^{-1}$).

Ist ein Vektor v der Form $F(w)e_1$ gegeben, bezeichnen wir mit $a(v)$, $b(v)$, $c(v)$ die drei Koeffizienten in (1.36). Sei $k \geq 2$. Um die Notation zu vereinfachen, identifizieren wir w mit $F(w)$. Hier gibt es mehrere Fälle zu unterscheiden.

Sei $w = \varphi\psi w'$, mit w' ein Wort (möglicherweise $w' = \emptyset$). Aus der induktiven Annahme folgt, dass $b(\psi w' e_1)$ nicht durch 3 teilbar ist. Aus (1.38) folgt, dass $a(\psi w' e_1) = 3a(w' e_1)$ durch 3 teilbar ist, deshalb – mit (1.37) – ist $b(we_1) = 2a(\psi w' e_1) + b(\psi w' e_1)$ nicht durch 3 teilbar. Analoge Argumente gelten in allen Fällen, in denen $w = \varphi^\sigma\psi^\tau w'$ oder $w = \psi^\sigma\varphi^\tau w'$, mit $\sigma, \tau \in \{\pm 1\}$ gilt.

Falls $w = \varphi\varphi w'$, dann zeigt eine leichte Rechnung, dass

$$(a+b)(\varphi w' e_1) = (a - 4b + 2a + b)(w' e_1) = 3(a-b)(w' e_1) \tag{1.39}$$

durch 3 teilbar ist. Die induktive Annahme zeigt, dass $b(\varphi w' e_1)$ nicht durch 3 teilbar ist. Deshalb ist auch

$$b(\varphi\varphi w' e_1) = (2a+b)(\varphi w' e_1) = (2(a+b) - b)(\varphi w' e_1) \tag{1.40}$$

nicht durch 3 teilbar. Falls $w = \varphi^{-1}\varphi^{-1}w'$, argumentiert man analog mit $a - b$, für ψ benutzt man $b + c$ und $b - c$. $\square$

Eine Erweiterung dieser Beweismethode auf die abzählbar vielen Geraden liefert:

Satz 1.6 (Banach-Tarski 1924)**.** *Es gibt $2k$ disjunkte Teilmengen $M_1, \ldots, M_k$ und $N_1, \ldots, N_k$ des $\mathbb{R}^3$, und $2k$ affine Isometrien $I_1, \ldots, I_k$ und $J_1, \ldots, J_k$, so dass gilt:*

$$B_1 = \bigcup_{j=1}^{k} (M_j \cup N_j) = \bigcup_{j=1}^{k} I_j(M_j) = \bigcup_{j=1}^{k} J_j(N_j). \tag{1.41}$$

Man kann also eine endliche Zerlegung der Einheitskugel und Isometrien finden, so dass aus einer Kopie der Einheitskugel zwei Kopien der Einheitskugel entstehen. Einen Beweis des Satzes von mit dem Anspruch, auf der Basis von Schulmathematik lesbar zu sein, finden Sie unter

http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/bantar.pdf

Auch in diesem Beweis wird zunächst die Konstruktion von Hausdorff beschrieben.

1.4 Rechnen mit $\pm\infty$

Wir erwarten, dass das Volumen vieler Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (wie z.B. $\mathbb{R}^n \setminus (0,1)^n$) unendlich ist. Daher ist es nützlich, die bekannten Rechenregeln von $\mathbb{R}$ auf die erweiterten reellen Zahlen

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{1.42}$$

auszudehnen.

Ordnung Falls $a = \pm\infty$ oder $b = \pm\infty$ definieren wir

$$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad a = -\infty \text{ oder } b = \infty.$$

Außerdem setzen wir wie üblich

$$\begin{aligned} a < b \quad &:\Longleftrightarrow \quad a \leq b \text{ und } a \neq b, \\ a \geq b \quad &:\Longleftrightarrow \quad b \leq a, \\ a > b \quad &:\Longleftrightarrow \quad b < a. \end{aligned}$$

Damit können wir wie üblich offene, halboffene und abgeschlossene Intervalle definieren. Beispiele:

$$[-\infty, a) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : -\infty \leq x < a\} = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{-\infty\},$$

$$[-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}}, \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Außerdem kann man wie üblich das Supremum und das Infimum einer Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ definieren. Mit der Konvention $\sup \emptyset = -\infty$ gilt insbesondere

$$\sup A := \begin{cases} \infty & \text{falls } \infty \in A \\ \sup A \setminus \{-\infty\} & \text{falls } \infty \notin A. \end{cases}$$

wobei $\sup A \setminus \{-\infty\}$ das in Analysis I definierte Supremum von Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezeichnet. Eine analoge Identität gilt für $\inf A$.

Grundrechenarten Wir definieren

$$a + b = b + a := \begin{cases} \infty & \text{falls } a = \infty \text{ und } b \neq -\infty \\ -\infty & \text{falls } a = -\infty \text{ und } b \neq \infty. \end{cases}$$

Der Ausdruck $\infty + (-\infty)$ ist *nicht definiert*. Wie üblich definiert man $a - b := a + (-b)$ wobei $-(-\infty) := \infty$.

Zur Erweiterung der Multiplikation definieren wir

$$a \cdot b = b \cdot a := \begin{cases} \infty & \text{falls } a = \infty,\ b > 0 \text{ oder } a = -\infty,\ b < 0, \\ -\infty & \text{falls } a = -\infty,\ b > 0 \text{ oder } a = \infty,\ b < 0. \end{cases}$$

Die Produkte $0 \cdot \infty$ und $0 \cdot (-\infty)$ sind *nicht definiert*[2]. Für $b \notin \{-\infty, 0, \infty\}$ definiert man $a/b = a\frac{1}{b}$.

Es gelten die üblichen Rechenregeln (Assosiativgesetz, Distributivgesetz) solange alle Ausdrücke definiert sind.

[2]Manchmal ist es nützlich die Konvention $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$ zu treffen. Wenn wir dies tun, wird immer ausdrücklich darauf hingeweisen.

$\bar{\mathbb{R}}$ als kompakter metrischer Raum, Konvergenz und Stetigkeit Die Begriffe von Konvergenz, Offenheit, Kompaktheit und Stetigkeit lassen sich auf $\bar{\mathbb{R}}$ übertragen, indem man $\bar{\mathbb{R}}$ bijektiv und monoton auf $[-1,1]$ abbildet und die entsprechenden Begriffe auf $[-1,1]$ benutzt. Genauer kann man die folgende bijektive Abbildung $\Phi : \bar{\mathbb{R}} \to [-1,1]$:

$$\Phi(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

und den Ausdruck

$$d_{\bar{\mathbb{R}}}(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$$

betrachten. Man sieht leicht, dass $d_{\bar{\mathbb{R}}}$ eine Metrik und $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$ ein kompakter metrischer Raum ist. Insbesondere hat jede Folge $a : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{R}}$ eine konvergente Teilfolge. Eine Folge konvergiert gegen ∞ in $\bar{\mathbb{R}}$ genau dann wenn es für jedes $M > 0$ ein k_0 gibt, so dass $a_k \geq M$ für alle $k \geq k_0$.

Der Limes superior und der Limes inferior einer Folge lassen sich wie üblich definieren und eine Folge konvergiert genau dann in $(\bar{\mathbb{R}}, d_{\bar{\mathbb{R}}})$, falls der Limes superior und der Limes inferior übereinstimmen.

Die Operation $+$ ist eine stetige Abbildung von

$$D_+ := \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \setminus \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$$

nach $\bar{\mathbb{R}}$. Es gibt keine stetige Fortsetzung dieser Abbildung auf $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ (dies ist ein Grund, warum wir $\infty + (-\infty)$ nicht definiert haben). Analog ist die Multiplikation eine stetige Abbildung von

$$D_\cdot := \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \setminus (\{0\} \times \{-\infty, \infty\} \cup \{-\infty, \infty\} \times \{0\})$$

nach $\bar{\mathbb{R}}$.

Der Raum $(\bar{\mathbb{R}})^n = [-\infty, \infty]^n$ wird durch komponentenweise Abbildung auf $[-1,1]^d$ zu einem kompakten metrischen Raum mit Metrik $d_{(\bar{\mathbb{R}})^n}(x,y) := \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$.

Summen über eine beliebige Indexmenge Die Summe zwei Zahlen in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wurde oben definiert. Damit läßt sich durch Induktion die Summe von endlich vielen Zahlen definieren. Sei nun A eine beliebige Indexmengen und

$$b : A \to [0, \infty].$$

Dann definieren wir

$$\sum_{a \in A} b(a) := \sup \left\{ \sum_{a \in A'} b(a) : A' \subset A \text{ endlich} \right\}. \tag{1.43}$$

Falls $A = \mathbb{N}$ stimmt dies mit der Definition aus Analysis I überein.[3] Außerdem sieht man leicht, dass $\sum_{a\in A} b(a) < \infty$ genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind: i) $b(a) < \infty$ für alle A, ii) die Menge $A'' := \{a : b(a) > 0\}$ ist endlich oder abzählbar unendlich, iii) falls A'' abzählbar unendlich ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{a\in A''} b(a)$ im Sinne von Analysis I.

Falls b positive und negative Werte annimmt, definieren wir den positiven Teil b^+ und den negativen Teil b^- durch

$$b^+ = \max(b, 0), \quad b^- = \max(-b, 0).$$

Damit gilt

$$b = b^+ - b^-, \quad |b| = b^+ + b^-.$$

Für eine beliebige Indexmenge A und

$$b : A \to \bar{\mathbb{R}}$$

definieren wir

$$\sum_{a\in A} b(a) := \sum_{a\in A} b^+(a) - \sum_{a\in A} b^-(a)$$

$$\text{falls } \sum_{a\in A} b^+(a) < \infty \text{ oder } \sum_{a\in A} b^-(a) < \infty.$$

Falls $\sum_{a\in A} b^+(a) = \infty$ und $\sum_{a\in A} b^-(a) = \infty$, so ist $\sum_{a\in A} b(a)$ *nicht definiert.*[4]

Man sieht leicht, dass die Existenz und Definition der Summe invariant ist unter bijektiven Abbildungen. Genauer sei $\varphi : A \to \tilde{A}$ bijektiv und sei $\tilde{b} : \tilde{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert durch $\tilde{b} = b \circ \varphi^{-1}$. Dann ist $\sum_{\tilde{a}\in\tilde{A}} b(\tilde{a})$ genau dann definiert, wenn $\sum_{a\in A} b(a)$ definiert ist, und in diesem Fall stimmen beide Ausdrücke überein.

1.5 Notation

Falls A eine Menge ist, dann bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von A. Man schreibt auch $2^A = \mathcal{P}(A)$.

---

[3] Beweis: Sei $M \in [0, \infty]$ die rechte Seite von (1.43). Falls $M < \infty$, so gilt $\sum_{i=0}^{h} b(i) \le M$ für alle $h \in \mathbb{N}$. Daher ist die Reihe konvergent im Sinne von Analysis I und es gilt $S := \sum_{i=0}^{\infty} b(i) \le M$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge A', so dass $\sum_{i\in A'} b(i) \ge M - \varepsilon$. Sei $h = \max A'$. Dann folgt $S \ge \sum_{i=0}^{h} b(i) \ge \sum_{i\in A'} b(i) \ge M - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $S \ge M$ und somit $S = M$. Falls $M = \infty$, so gibt es für jedes $K > 0$ eine endliche Menge A' mit $\sum_{i\in A'} b(i) \ge K$. Mit $h = \max A'$ folgt $\sum_{i=0}^{h} b(i) \ge K$. Da K beliebig war, ist die Reihe im Sinne von Analysis I bestimmt divergent gegen ∞.

[4] Man vergleiche dazu den Satz aus Analysis I, dass man durch Umordnen einer konvergenten, aber nicht absoluten konvergenten, Reihe jeden Grenzwert erreichen kann. Auf einer beliebigen Indexmenge A gibt es keine kanonische Ordnung. Daher kann die Definition nicht eine spezielle Ordnung benutzen.

Mit $\mathbb{N}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Mit $\#A \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wird die Anzahl der Elemente der Menge A bezeichnet. Insbesondere $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{R} = \infty$.

Falls F eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist, dann ist F° die Vereinigung aller offenen Mengen, die in F enthalten sind. Analog ist $\overline{F}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die F enthalten. Sei X ein normierter Raum. Dann bezeichnet $B_1 := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskugel. Auf $\mathbb{R}^n$ wird die euklidische Norm $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ verwendet, wenn nichts anderes gesagt wird.

Für $F \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ schreibt man

$$a + \lambda F = \{a + \lambda x : x \in F\}. \tag{1.44}$$

Zum Beispiel $B_r(x) = x + rB_1$.

Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Für $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, definieren wir die lineare Abbildung $a \otimes b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $(a \otimes b)(v) = a(b \cdot v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Wie üblich wird die Abbildung $a \otimes b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit einer Matrix $a \otimes b \in \mathbb{R}^{m \times n}$ identifiziert. Insbesondere gilt $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

Sei $A \subset B$. Die charakteristische Funktion $\chi_A : B \to \mathbb{R}$ ist durch $\chi_A(x) = 1$ falls $x \in A$, und 0 sonst, definiert. Alternativ verwendet man statt $\chi_A(x)$ auch die Notation $\mathbf{1}_A(x)$.

1.6 Wiederholung der Rechenregeln für Mengen

Die folgenden Regeln wurden in den Anwesenheitsübungen besprochen.

Sei X ein Menge und M einer Menge von Indices (endlich, abzählbar oder überabzählbar). Seien $A \subset X$ und $B_\alpha \subset X$ für alle $\alpha \in M$. Das Komplement A^c einer Menge A ist durch $A^c = X \setminus A$ definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
A \cup \bigcap_{\alpha \in M} B_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in M} (A \cup B_\alpha) && (1.45)\\
A \cap \bigcup_{\alpha \in M} B_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in M} (A \cap B_\alpha) && (1.46)\\
\left(\bigcup_{\alpha \in M} B_\alpha\right)^c &= \bigcap_{\alpha \in M} B_\alpha^c && (1.47)\\
\left(\bigcap_{\alpha \in M} B_\alpha\right)^c &= \bigcup_{\alpha \in M} B_\alpha^c && (1.48)\\
A \setminus B &= A \cap B^c && (1.49)
\end{aligned}$$

2 Maße, σ-Algebren, das Lebesguesche Maß in $\mathbb{R}^n$

2.1 Volumen von Quadern

In diesem Abschnitt wird das Volumen von Quadern definiert. Diese elementare Definition ist die Basis, auf der wir das Konzept des Volumen für allgemeinere Mengen später einführen werden.

Definition 2.1. *Ein Quader in $\mathbb{R}^n$ ist das Produkt von n beschränkten Intervallen (möglicherweise leer). Man bezeichnet mit $\mathcal{Q}$ die Menge aller Quader in $\mathbb{R}^n$. Man definiert* $\mathrm{Vol} : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ *durch*

$$\mathrm{Vol}\,(Q) = \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \left[\varepsilon^n \,\#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q)\right] . \tag{2.1}$$

Beispiele: $Q_1 = [0,1]^2$, $Q_2 = (0,1] \times [2,5]$, $Q_3 = \{(1,5)\}$ und $Q_4 = \emptyset$ sind Quader in $\mathbb{R}^2$ (wobei Q_3 aus einem Punkt besteht). Man kann leicht sehen, dass $\mathrm{Vol}\,(Q_3) = \mathrm{Vol}\,(\emptyset) = 0$.

Lemma 2.2. *(i) Sei Q ein nichtleerer Quader, $a, b \in \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\overline{Q} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] . \tag{2.2}$$

Dann existiert der Limes $\lim_{\varepsilon \searrow 0} [\varepsilon^n \,\#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q)]$ *und es gilt*

$$\mathrm{Vol}\,(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) . \tag{2.3}$$

(ii) Falls Q_0, $Q_1, \dots, Q_k$ Quader in $\mathbb{R}^n$ sind, folgt aus

$$Q_0 \subset \bigcup_{j=1}^{k} Q_j \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Vol}\,(Q_0) \le \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}\,(Q_j) . \tag{2.5}$$

(iii) Falls $Q_1, \dots Q_k$ disjunkte Quader in $\mathbb{R}^n$ sind und falls $Q_0 := \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$ ist, so gilt

$$\mathrm{Vol}\,(Q_0) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}\,(Q_j).$$

(iv) Für alle Quader Q und $\varepsilon > 0$ gibt es einen offenen Quader Q_ε so dass $Q \subset Q_\varepsilon$ und $\mathrm{Vol}\,(Q_\varepsilon) \le \mathrm{Vol}\,(Q) + \varepsilon$.

Beweis. (i): Sei $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, mit alle $I_i \neq \emptyset$, dann gilt

$$\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q = (\varepsilon\mathbb{Z} \cap I_1) \times \cdots \times (\varepsilon\mathbb{Z} \cap I_n)\,, \tag{2.6}$$

und

$$\varepsilon^n \#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon\, \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap I_i)\,. \tag{2.7}$$

Es reicht deshalb zu zeigen, dass für ein beschränktes Intervall I mit $\overline{I} = [a, b]$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap I) = b - a\,. \tag{2.8}$$

Um (2.8) zu beweisen, bestimmen wir die Menge explizit:

$$\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a, b] = \varepsilon \left(\mathbb{Z} \cap \left[\frac{a}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon} \right] \right) = \varepsilon \left\{ \left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil, \left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lfloor \frac{b}{\varepsilon} \right\rfloor \right\}\,. \tag{2.9}$$

Wir erinnern uns, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}\,, \qquad \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\} \tag{2.10}$$

die Eigenschaften $|x - \lceil x \rceil| \leq 1$, $|x - \lfloor x \rfloor| \leq 1$ haben. Deshalb gilt $\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a, b]) = \lceil \frac{a}{\varepsilon} \rceil - \lfloor \frac{b}{\varepsilon} \rfloor + 1$, und mit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left(\left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil - \left\lfloor \frac{b}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) = b - a \tag{2.11}$$

ist (2.8) für kompakte Intervalle bewiesen (um (2.11) zu beweisen benutzt man die Relation $|\varepsilon\lceil a/\varepsilon \rceil - a| = \varepsilon|\lceil a/\varepsilon \rceil - (a/\varepsilon)| \leq \varepsilon$, und analog für b). Aus

$$\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a, b]) - 2 \leq \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a, b)) \leq \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a, b]) \tag{2.12}$$

folgt, dass (2.8) für alle beschränkten Intervalle gilt.

(ii): Für alle $\varepsilon > 0$ folgt aus (2.4) dass

$$(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_0) \subset (\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap \bigcup_j Q_j) = \bigcup_j (\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_j)\,, \tag{2.13}$$

und deshalb

$$\varepsilon^n\, \#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_0) \leq \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^n\, \#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_j)\,. \tag{2.14}$$

(iii): Dies folgt aus $\varepsilon^n \#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_0) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^n\, \#(\varepsilon\mathbb{Z}^n \cap Q_j)$ und (i).

(iv): Sei $Q \neq \emptyset$ ein Quader mit $\overline{Q} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Sei $\delta > 0$ und

$$Q_{(\delta)} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \delta, b_i + \delta)\,. \tag{2.15}$$

Da die Funktion $\delta \mapsto \mathrm{Vol}\,(Q_{(\delta)})$ stetig ist, gilt für genügend kleine δ die Abschätzung $\mathrm{Vol}\,(Q_{(\delta)}) \leq \mathrm{Vol}\,(Q) + \varepsilon$. Es ist auch klar, dass $\overline{Q} \subset Q_{(\delta)}$ für alle $\delta > 0$, und dass alle Quader Q_δ offen sind. $\square$

Lemma 2.3. *Seien Q, $R \in \mathcal{Q}$. Dann gibt es endlich viele disjunkte Quader $q_1, \ldots, q_k \in \mathcal{Q}$, so dass*

$$Q \setminus R = \bigcup_j q_j \tag{2.16}$$

und

$$\mathrm{Vol}\,(Q) = \mathrm{Vol}\,(Q \cap R) + \sum_j \mathrm{Vol}\,(q_j)\,. \tag{2.17}$$

Beweis. Es reicht (2.16) zu zeigen. Dann folgt (2.17) aus der disjunkten Zerlegung $Q = (Q \cap R) \cup Q \setminus R$, der Gleichung (2.16) und Lemma 2.2 (iii)

Beweis von (2.16) mit Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $I \setminus J = I$, falls $J = \emptyset$ und

$$I \setminus J = \{x \in I : x < y \,\forall y \in J\} \cup \{x \in I : x > y \,\forall y \in J\}\,, \tag{2.18}$$

falls $J \neq \emptyset$. Die zwei Mengen sind disjunkt (da $J \neq \emptyset$) , und man kann leicht verifizieren, dass beide Mengen Intervalle sind. Das beweist den Fall $n = 1$.

Sei $n > 1$, es gelte die Aussage für $n-1$, und sei $Q = Q' \times I$, $R = R' \times J$ (wobei I, $J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, und $Q', R' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Quader sind). Es ist klar, dass dann $I = (I \setminus J) \cup (I \cap J)$, und dass die beiden Mengen disjunkt sind. Deshalb ist Q die disjunkte Vereinigung der beiden Mengen $Q' \times (I \setminus J)$ und $Q' \times (I \cap J)$, und

$$\begin{aligned} Q \setminus R &= \left[(Q' \times (I \setminus J)) \cup (Q' \times (I \cap J))\right] \setminus R &(2.19)\\ &= \left[(Q' \times (I \setminus J)) \setminus R\right] \cup \left[(Q' \times (I \cap J)) \setminus (R' \times J)\right] &(2.20)\end{aligned}$$

Die beiden Mengen sind offensichtlich disjunkt. Sei $I \setminus J = I' \cup I''$, mit den disjunkten Intervallen I', I'' (hier wird der bereits bewiesene Fall $n = 1$ angewendet), dann ist die erste Menge in (2.20) gleich

$$(Q' \times (I \setminus J)) \setminus R = Q' \times (I \setminus J) = Q' \times (I' \cup I'') = (Q' \times I') \cup (Q' \times I'') \tag{2.21}$$

und damit die Vereinigung von zwei disjunkten Quadern. Seien $S_1, \ldots, S_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ disjunkte Quader mit

$$Q' \setminus R' = S_1 \cup \cdots \cup S_k \tag{2.22}$$

(diese existieren wegen der Induktionsannahme), dann ist

$$\begin{aligned} (Q' \times (I \cap J)) \setminus (R' \times J) &= (Q' \times (I \cap J)) \setminus (R' \times (I \cap J)) &(2.23)\\ &= (Q' \setminus R') \times (I \cap J) &(2.24)\\ &= [S_1 \times (I \cap J)] \cup \cdots \cup [S_k \times (I \cap J)] &(2.25)\end{aligned}$$

auch die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Quadern. Das beendet den Beweis. Diese Menge ist aber disjunkt von der Menge in (2.21). Deshalb gilt

$$Q \setminus R = [Q' \times I'] \cup [Q' \times I''] \cup [S_1 \times (I \cap J)] \cup \cdots \cup [S_k \times (I \cap J)] \tag{2.26}$$

und alle diese Quader sind disjunkt. $\square$

2.2 Äußere Maße

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Definition des Volumens von der Menge der Quader auf allgemeine "messbare" Mengen zu erweitern. Um die abstrakte Struktur klar zu zeigen und die Ergebnisse für andere Beispiele anwenden zu können, wird hier kein Bezug auf das spezifische Beispiel des Euklidischen Volumens in $\mathbb{R}^n$ gemacht.

Definition 2.4. *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt* äußeres Maß auf X *falls*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) falls $A \subset B \subset X$, dann $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) für alle Folgen $A : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$ gilt $\mu^* \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} A_h \right) \leq \sum_{h \in \mathbb{N}} \mu^*(A_h)$.

Die Eigenschaft (iii) nennt man σ-Subadditivität oder kürzer Subadditivität.

Beispiele. Sei X eine nichtleere Menge.

(i) $\mu_0^* : X \to [0, \infty]$, $\mu_0^*(A) = 0$ für alle A ist ein äußeres Maß.

(ii) $\mu_1^* : X \to [0, \infty]$,

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.27}$$

ist ein äußeres Maß.

(iii) $\mu_2^* : X \to [0, \infty]$, $\mu_2^*(A) = \#A$, ist ein äußeres Maß (mit $\#A = \infty$ falls A unendlich ist).

(iv) Sei $x \in X$ fest. Dann ist

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.28}$$

ein äußeres Maß (und wird Dirac-Maß genannt).

Satz 2.5. *Seien eine Menge X, eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ und eine Abbildung $v : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ gegeben, so dass $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $v(\emptyset) = 0$. Dann ist die Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$,*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{h\in\mathbb{N}} v(F_h) : \text{ die Folge } F : \mathbb{N} \to \mathcal{R} \text{ erfüllt } E \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h \right\} \tag{2.29}$$

ein äußeres Maß auf X (wie üblich, $\inf \emptyset = \infty$).

Beispiel. Sei X eine nichtleere Menge, $x \in X$ fest, $\mathcal{R} = \{\emptyset, \{x\}, X \setminus \{x\}\}$, $v : X \to [0, \infty]$ durch $v(\{x\}) = 1$, $v(\emptyset) = 0$, $v(X \setminus \{x\}) = 0$ definiert. Dann ist das erzeugte äußere Maß δ_x.

Beweis. Wir müssen die drei Eigenschaften in Definition 2.4 beweisen.

(i): Da $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $v(\emptyset) = 0$, folgt $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii): Sei $A \subset B \subset X$. Falls $\mu^*(B) = \infty$ folgt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. Sei $\mu^*(B) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Sei $F : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$, so dass

$$B \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h \,, \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} v(F_h) \le \mu^*(B) + \varepsilon \tag{2.30}$$

gilt. Aus $A \subset B$ folgt $A \subset \cup_{h\in\mathbb{N}} F_h$ und damit

$$\mu^*(A) \le \sum_{h\in\mathbb{N}} v(F_h) \le \mu^*(B) + \varepsilon \,. \tag{2.31}$$

Da ε beliebig war, folgt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii): Sei $C : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mu^* \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h \right) \le \sum_{h\in\mathbb{N}} \mu^*(C_h) \,. \tag{2.32}$$

Wir können oBdA annehmen, dass $\mu^*(C_h) < \infty$ für alle h gilt. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es für jedes h eine Folge $F_h : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$, so dass gilt

$$C_h \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{h,k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} v(F_{h,k}) \le \mu^*(C_h) + \frac{\varepsilon}{2^h} \,. \tag{2.33}$$

Aus $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h \subset \bigcup_{h,k\in\mathbb{N}} F_{h,k}$ folgt

$$\mu^* \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h \right) \le \sum_{h,k\in\mathbb{N}} v(F_{h,k}) \le \sum_{h\in\mathbb{N}} \left(\mu^*(C_h) + \frac{\varepsilon}{2^h} \right) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mu^*(C_h) + 2\varepsilon \,. \tag{2.34}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Definition 2.6. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt μ^*-messbar, falls für alle $E \subset X$ gilt*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)\,. \tag{2.35}$$

Die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von X wird mit $\sigma(\mu^*)$ bezeichnet.

Die Bedingung (2.35) lässt sich auch schreiben als

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\,. \tag{2.36}$$

wobei $A^c := X \setminus A$ das Komplement von A bezeichnet. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \tag{2.37}$$

da die umgekehrte Ungleichung aus der Subadditivität des äußeren Maßes folgt.

2.3 Maßräume

Definition 2.7. *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine* σ-Algebra, *falls folgendes gilt:*

(i) $\mathcal{S}$ ist nicht leer;

(ii) Für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt $A^c := X \setminus A \in \mathcal{S}$;

(iii) Für jede Folge $A : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ gilt

$$\bigcup_{h \in \mathbb{N}} A_h \in \mathcal{S}\,. \tag{2.38}$$

Bemerkung: Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra über X. Dann gilt:

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{S}$;

(ii) falls $A, B, A_h \in \mathcal{S}$, so folgt: $A \cup B$, $A \setminus B$, $\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h \in \mathcal{S}$

Beweis. (ii): $A \cup B \in \mathcal{S}$ ist ein Spezialfall von (2.38) (setze $A_0 = A$, $A_h = B$ für $h \geq 1$). Die dritte Aussage wurden in den Anwesenheitsübungen besprochen. Die zweite Aussage folgt aus $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

(i): Nach der Definition gibt es eine Menge $A \in \mathcal{S}$. Dann gilt $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{S}$, und analog $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{S}$. □

Weitere Eigenschaften von σ-Algebren (Anwesenheitsübung)

- Sei X eine Menge, sei A eine beliebige Indexmenge und für $\alpha \in A$ sei $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{S} := \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{S}_\alpha$ eine σ-Algebra. (Beweis: Anwesenheitsübung)

- Sei $M \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\sigma(M) := \bigcap_{\mathcal{S} \supset M,\, \mathcal{S}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{S} \tag{2.39}$$

  die kleinste σ-Algebra, die M enthält (beachte, dass der Durchschnitt nichtleer ist, da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, die M enthält). Man nennt $\sigma(M)$ die von M erzeugte σ-Algebra.

- Die Vereinigung von σ-Algebren ist im allgemeinen keine σ-Algebra.

Definition 2.8. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X, $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$. Das Tripel $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt Maßraum, und μ ein Maß auf $\mathcal{S}$, falls:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) μ σ-additiv ist, d.h., für $A : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ mit $A_h \cap A_k = \emptyset$ für alle $h \neq k$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mu(A_h)\,. \tag{2.40}$$

Eine Menge $N \in \mathcal{S}$ heißt Nullmenge falls $\mu(N) = 0$. Der Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge M einer Nullmenge N eine Nullmenge ist.[5]

Bemerkung. Seien $A, B \in \mathcal{S}$. Falls A und B disjunkt sind, folgt unmittelbar aus (ii), dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Falls $A \subset B$, folgt aus $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ dass $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Notation: Man nennt häufig die Mengen in $\mathcal{S}$ „messbare Mengen“. Vollständigkeit lässt sich dann so formulieren: „Jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.“ Diese Verwendung des Begriffs „messbar“ ist konsistent mit der Definition „messbare Menge“ für äußere Maße in Definition 2.6: wir werden in Satz 2.9 sehen, dass die messbaren Mengen $\sigma(\mu^*)$ eines äußeren Maßes μ^* eine σ-Algebra bilden und die Einschränkung von μ^* auf $\sigma(\mu^*)$ ein Maß ist.

Beispiel.

(i) Sei X eine nichtleere Menge. Dann ist $(X, \mathcal{P}(X), \#)$ ein Maßraum. Die einzige Nullmenge ist die leere Menge.

(ii) Sei X eine Menge, $x \in X$, $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ wie in (2.28) definiert. Dann ist $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ ein Maßraum. Alle Mengen, die x nicht enthalten, sind Nullmengen.

Satz 2.9. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf X, dann gilt:*

[5] Es reicht, dass jede Teilmenge M einer Nullmenge in $\mathcal{S}$ liegt. Dann folgt $\mu(M) = 0$.

(i) $(X, \sigma(\mu^*), \mu^*|_{\sigma(\mu^*)})$ *ist ein Maßraum;*

(ii) Falls $N \subset X$ *die Eigenschaft* $\mu^*(N) = 0$ *hat, dann ist* N *eine Nullmenge; insbesondere ist* $(X, \sigma(\mu^*), \mu^*|_{\sigma(\mu^*)})$ *vollständig.*

Beweis. (i): **Schritt 1** Wir zeigen zuerst, dass $\sigma(\mu^*)$ eine Algebra ist.[6]

Aus $\mu^*(\emptyset) = 0$ folgt $\mu^*(E \cap \emptyset) = 0$ für alle E, und deshalb $\mu^*(E) = \mu(E \cap \emptyset) + \mu(E \setminus \emptyset)$ für alle $E \subset X$. Das zeigt, dass $\emptyset \in \sigma(\mu^*)$ und insbesondere dass $\sigma(\mu^*)$ nicht leer ist.

Sei $A \in \sigma(\mu^*)$, $E \in \mathcal{P}(X)$. Dann ist $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$, und $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Da A messbar ist, folgt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap (X \setminus A)) + \mu^*(E \setminus (X \setminus A)) . \quad (2.41)$$

Deshalb gilt $X \setminus A \in \sigma(\mu^*)$.

Damit bleibt noch zu zeigen:

$$A_0, A_1 \in \sigma(\mu^*) \Longrightarrow A_0 \cup A_1 \in \sigma(\mu^*) \quad (2.42)$$

Die analoge Aussage für endliche Vereinigungen messbarer Menge folgt dann mit vollständiger Induktion. Zum Beweis von (2.42) reicht es zu zeigen, dass für alle $E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A_0 \cup A_1)) + \mu^*(E \setminus (A_0 \cup A_1)), \quad (2.43)$$

da die umgekehrte Ungleichung aus der Subadditivität von μ^* folgt. Es gilt

$$E \setminus (A_0 \cup A_1) = (E \setminus A_0) \setminus A_1. \quad (2.44)$$

[Ein möglicher Beweis: $E \cap (A_0 \cup A_1)^c = E \cap A_0^c \cap A_1^c = (E \setminus A_0) \cap A_1^c$.] Daher wenden wir zum Beweis von (2.43) die Definition messbarer Mengen zweimal an: zunächst mit E und A_0, dann mit $E \setminus A_0$ und A_1. Dies liefert

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_0) + \mu^*(E \setminus A_0) \\ &= \mu^*(E \cap A_0) + \mu^*((E \setminus A_0) \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_0) \setminus A_1) \\ &= \mu^*(E \cap A_0) + \mu^*((E \setminus A_0) \cap A_1) + \mu^*(E \setminus (A_0 \cup A_1)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Weiterhin gilt

$$(E \cap A_0) \cup \big((E \setminus A_0) \cap A_1\big) = E \cap (A_0 \cup A_1). \quad (2.46)$$

[Beweis: Es gilt $A_0 \cup (A_0^c \cap A_1) = (A_0 \cup A_0^c) \cap (A_0 \cup A_1) = A_0 \cup A_1$. Schnitt mit E liefert die Behauptung.]
Die Subadditivität von σ^* liefert

$$\mu^*(E \cap A_0) + \mu^*((E \setminus A_0) \cap A_1) \geq \mu^*(E \cap (A_0 \cup A_1)) \quad (2.47)$$

[6] Man kann auch direkt zeigen, dass $\sigma(\mu^*)$ eine σ-Algebra ist (siehe Schritt 2). Der Beweis für Vereinigung zweier messbare Mengen liefert aber in natürlicher Weise die richtige Idee für Schritt 2.

Damit folgt die Behauptung (2.43) aus (2.45) und (2.47).

Schritt 2 $\sigma(\mu^*)$ ist eine σ-Algebra.

Sei $A : \mathbb{N} \to \sigma(\mu^*)$, $A^* = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h$. Um $A^* \in \sigma(\mu^*)$ zu zeigen, reicht es zu beweisen, dass für alle $E \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^*) + \mu^*(E \setminus A^*) \tag{2.48}$$

(die andere Ungleichung folgt wieder aus der Subadditivität). Wir dürfen voraussetzen, dass $\mu^*(E) < \infty$, da sonst (2.48) trivial ist.

Analog zu Schritt 1 wenden wir die Definition der Messbarkeit iterativ auf E, $E \setminus A_0$, $E \setminus (A_0 \cup A_1)$, ... an. Dann benutzen wir die Subadditivität um die Beiträge der verbleibenden Mengen abzuschätzen.

Der Beweis wird übersichtlicher, wenn wir A^* als Vereinigung einer *aufsteigenden* Folge von Menge F_h schreiben und die disjunkten Komplemente $G_h = F_h \setminus F_{h-1}$ betrachten (diese Idee wird im Folgenden noch häufig benutzt). Wir definieren

$$F_h := \bigcup_{k=0}^{h} A_k, \quad F_{-1} = \emptyset,$$

$$G_h := F_h \setminus F_{h-1} = A_h \setminus F_{h-1}.$$

Dann gilt

$$A^* = \bigcup_{h=0}^{\infty} F_h = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k. \tag{2.49}$$

Die Mengen G_k sind disjunkt und es gilt

$$(E \setminus F_{k-1}) \setminus A_k = E \setminus F_k,$$

$$(E \setminus F_{k-1}) \cap A_k = E \cap F_{k-1}^c \cap A_k = E \cap G_k.$$

Aus der Messbarkeit von A_k folgt

$$\mu^*(E \setminus F_{k-1}) = \mu^*(E \setminus F_k) + \mu^*(E \cap G_k). \tag{2.50}$$

Anwendung dieser Ungleichung für $k = 0, \ldots, h$ und Summation liefert

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus F_h) + \sum_{k=0}^{h} \mu^*(E \cap G_k) \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu^*(E \setminus A^*) + \sum_{k=0}^{h} \mu^*(E \cap G_k). \tag{2.51}$$

Da $\mu^*(E) < \infty$ folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap G_k)$ konvergiert und im Limes $h \to \infty$ erhalten wird

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus A^*) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap G_k). \tag{2.52}$$

Jetzt benutzen wir die σ-Subadditivität: es gilt $A^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$ und somit $E \cap A^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E \cap G_k$. Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap G_k) \geq \mu^*(E \cap A^*). \tag{2.53}$$

Aus (2.52) und (2.53) erhalten wir die gewünschte Ungleichung (2.48).

[27.10. 2016, Vorlesung 4]

[3.11. 2016, Vorlesung 5]

Schritt 3 Wir zeigen jetzt, dass $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ ein Maß ist.
Es reicht, die σ-Additivität zu beweisen. Sei $A : \mathbb{N} \to \sigma(\mu^*)$, mit $A_h \cap A_k = \emptyset$ für $h \neq k$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\mu^*(A^*) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k), \tag{2.54}$$

da die umgekehrte Gleichung aus der Subadditivität folgt. Daher können wir oBdA annehmen, dass $\mu^*(A) < \infty$.

Seien F_h und G_h wie in Schritt 2 definiert. Da die Mengen A_k disjunkt sind, gilt $G_k = A_k$ und $A^* \cap G_k = A_k$. Daher folgt (2.54) aus (2.52) mit $E = A^*$

(ii): Sei $N \subset X$ mit $\mu^*(N) = 0$. Zu zeigen ist, dass $N \in \sigma(\mu^*)$. Sei $E \subset X$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus N) + \mu^*(E \cap N) \tag{2.55}$$

(weil die andere Ungleichung aus der Subadditivität folgt). Aus $E \cap N \subset N$ und der Monotonie folgt, dass $\mu^*(E \cap N) = 0$. Aus $E \setminus N \subset E$ und der Monotonie von μ^* folgt, dass $\mu^*(E \setminus N) \leq \mu^*(E)$. Damit ist (2.55) bewiesen und deshalb ist N eine Nullmenge.

Sei jetzt $M \subset N$. Aus der Monotonie folgt $\mu^*(M) = 0$, und deshalb ist M ebenfalls eine Nullmenge. Das zeigt, dass der Maßraum vollständig ist. □

Satz 2.10. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $E : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$. Dann gilt:*

(i) Falls $E_h \subset E_{h+1}$ für alle $h \in \mathbb{N}$, folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h\right) = \lim_{h\to\infty} \mu(E_h)\,. \tag{2.56}$$

(ii) Falls $E_h \supset E_{h+1}$ für alle $h \in \mathbb{N}$, und $\mu(E_0) < \infty$, folgt:

$$\mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h\right) = \lim_{h\to\infty} \mu(E_h)\,. \tag{2.57}$$

Bemerkung. Die Annahme $\mu(E_0) < \infty$ ist wichtig, wie das Beispiel $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \#)$ oder $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ mit $E_h = [h, \infty)$ zeigt.

Beweis. (i): Sei $F_h = E_h \setminus E_{h-1}$ für $h \geq 1$, $F_0 = E_0$. Aus der Monotonie der Folge E_h folgt, dass die F_h paarweise disjunkt sind. Deshalb gilt

$$\mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{h=0}^{k} F_h\right) = \sum_{h=0}^{k} \mu(F_h)\,. \tag{2.58}$$

Da μ σ-additiv ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h\right) = \mu\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(F_h) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)\,. \tag{2.59}$$

Um (ii) zu beweisen, benutzen wir das Komplementbildung Durchschnitte in Vereinigungen verwandelt. Definiere

$$\tilde{E}_h := E_0 \setminus E_h.$$

Dann ist $\tilde{E}_h \subset \tilde{E}_{h+1}$ und nach (i) gilt

$$\mu(E_0 \setminus \bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h) = \mu(\bigcup_{h\in N} \tilde{E}_h) = \lim_{h\to\infty} \mu(\tilde{E}_h) = \lim_{h\to\infty} (\mu(E_0) - \mu(E_h)).$$

Für die letzte Gleichheit haben wir $\mu(E_0) < \infty$ benutzt. Weiterhin gilt

$$\mu(E_0 \setminus \bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h) = \mu(E_0) - \mu(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} E_h)$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

□

In Satz 2.9 haben wir gesehen, dass man zu jedem äußerem Maß μ^* eine σ-Algebra $\mathcal{S}$ finden kann, so dass die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{S}$ ein Maß ist. Umgekehrt kann man jedes Maß wie folgt zu einem äußeren Maß erweitern.

Lemma 2.11. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{h\in\mathbb{N}} \mu(F_h) : \text{ die Folge } F : \mathbb{N} \to \mathcal{S} \text{ erfüllt } E \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h\right\}. \tag{2.60}$$

Dann gilt

(i) μ^* ist ein äußeres Maß auf X;

(ii) $\mu^*(E) := \inf\{\mu(F) : F \in \mathcal{S}, E \subset F\}$, für alle $E \subset X$;

(iii) Falls $A \in \mathcal{S}$, so ist A μ^*-messbar und $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Bemerkung. Häufig wird das Infimum in (ii) als Definition von μ^* gewählt. Aus dem Beweis des Lemmas folgt, dass dies zu der Definition (2.60) äquivalent ist.

Bemerkung. Das Maß $\mu^*_{|\sigma(\mu^*)}$ ist die Fortsetzung von μ auf einen vollständigen Maßraum, vgl. Satz 2.9. Falls μ σ-endlich ist (d.h., falls es $A_h \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A_h) < \infty$ gibt, so dass $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h = X$), dann ist $\mu^*_{|\sigma(\mu^*)}$ die kleinste Fortsetzung von μ auf einen vollständigen Maßraum, die sogenannte Vervollständigung (zur Konstruktion der Vervollständigung vgl. Übungsblatt 3, Aufgabe 2).

Beweis. (i): Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.5.
(ii): Sei $\bar{\mu}(E) := \inf\{\mu(G) : F \in \mathcal{S}, E \subset G\}$. Dann gilt $\mu^* \leq \bar{\mu}$, da man in der Definition von μ^* die Folge $F_0 = G$, $F_h = \emptyset$ für $h \geq 1$ wählen kann. Da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, folgt aus $F : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$, dass $\cup_{h\in\mathbb{N}} F_h \in \mathcal{S}$. Daher gilt auch $\bar{\mu} \leq \mu^*$.
(iii): Da $A \in S$, gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Wegen der Monotonie von μ gilt auch $\mu(F) \geq \mu(A)$ falls $F \in \mathcal{S}$ und $F \supset A$. Daraus folgt $\mu^*(A) = \mu(A)$. Für die Meßbarkeit von A müssen wir zeigen, dass für alle $E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E). \tag{2.61}$$

Falls $\mu^*(E) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mu^*(E) < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $F \in \mathcal{S}$ mit

$$\mu(F) \leq \mu^*(E) + \varepsilon, \quad E \subset F. \tag{2.62}$$

Aus (ii) und der Additivität von μ folgt:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) &\leq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \\ &= \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A) = \mu(F) \\ &\leq \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2.61). □

2.4 Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.12. *Das äußere n-dimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^{n*} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wird durch*

$$\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf \left\{ \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(Q_h) : E \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} Q_h, Q_h \text{ Quader} \right\} \tag{2.63}$$

definiert. Die Menge $\mathcal{M}_n = \sigma(\mathcal{L}^{n*})$ heißt die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen, und $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n*}|_{\mathcal{M}_n}$ heißt Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 2.13. *(i) Aus Satz 2.5 folgt, dass $\mathcal{L}^{n*}$ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist.*

(ii) Aus Satz 2.9 folgt, dass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mathcal{L}^n)$ ein vollständiger Maßraum ist.

(iii) Aus der Definition von $\mathcal{L}^n$ folgt unmittelbar die Translationsinvarianz,

$$\mathcal{L}^n(A + x) = \mathcal{L}^n(A) \tag{2.64}$$

für alle $A \in \mathcal{M}_n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 2.14. *Sei Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(i) Q ist Lebesgue-messbar;

(ii) $\mathcal{L}^n(Q) = \mathrm{Vol}\,(Q)$.

Beweis. (i): Sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{n*}(E) \geq \mathcal{L}^{n*}(E \cap Q) + \mathcal{L}^{n*}(E \setminus Q)\,. \tag{2.65}$$

Falls $\mathcal{L}^{n*}(E) = \infty$, dann ist (2.65) wahr. Wir betrachten den Fall $\mathcal{L}^{n*}(E) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Definition von $\mathcal{L}^{n*}(E)$ folgt, dass eine Folge von Quadern $\{F_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$\sum_{h\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(F_h) \leq \mathcal{L}^{n*}(E) + \varepsilon \text{ und } E \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h\,. \tag{2.66}$$

Für alle $h \in \mathbb{N}$ ist $q_{h,0} = F_h \cap Q$ ebenfalls ein Quader. Aus Lemma 2.3 folgt, dass Quader $q_{h,1}, \ldots, q_{h,N_h}$ existieren, so dass gilt:

$$\mathrm{Vol}\,(F_h) = \sum_{j=0}^{N_h} \mathrm{Vol}\,(q_{h,j}) \text{ und } F_h = \bigcup_{j=0}^{N_h} q_{h,j}\,. \tag{2.67}$$

Aus

$$E \cap Q \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h \cap Q = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} q_{h,0} \tag{2.68}$$

folgt

$$\mathcal{L}^{n*}(E \cap Q) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(q_{h,0})\,, \tag{2.69}$$

und aus

$$E \setminus Q \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h \setminus Q = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{N_h} q_{h,j} \tag{2.70}$$

folgt

$$\mathcal{L}^{n*}(E \setminus Q) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{N_h} \mathrm{Vol}\,(q_{h,j})\,. \tag{2.71}$$

Aufsummieren und Umordnen liefert

$$\mathcal{L}^{n*}(E \setminus Q) + \mathcal{L}^{n*}(E \cap Q) \leq \sum_{h \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{N_h} \mathrm{Vol}\,(q_{h,j}) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(F_h) \leq \mathcal{L}^{n*}(E) + \varepsilon\,. \tag{2.72}$$

Da ε beliebig war, ist (2.65) bewiesen.

[3.11. 2016, Vorlesung 5]

[8.11. 2016, Vorlesung 6]

(ii): Aus der Definition ist klar, dass $\mathcal{L}^n(Q) \leq \mathrm{Vol}\,(Q) < \infty$. Deshalb reicht es zu zeigen, dass

$$\mathrm{Vol}\,(Q) \leq \mathcal{L}^n(Q)\,. \tag{2.73}$$

Die Aussagen, die wir in Lemma 2.2 für das Volumen von Quadern bewiesen haben, beziehen sich auf endliche Vereinigungen von Quadern. Um abzählbare Vereinigungen auf endliche zu reduzieren benutzen wir Kompaktkeit.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass Q kompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei F_h eine Folge von Quadern, so dass gilt:

$$Q \subset \bigcup_{h \in \mathbb{N}} F_h\,, \qquad \sum_{h \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(F_h) \leq \mathcal{L}^n(Q) + \varepsilon\,. \tag{2.74}$$

Aus Lemma 2.2(iv) folgt, dass für jedes h ein offener Quader F_h^* existiert, so dass gilt:

$$F_h \subset F_h^* \text{ und } \mathrm{Vol}\,(F_h^*) \leq \mathrm{Vol}\,(F_h) + \frac{\varepsilon}{2^h}\,. \tag{2.75}$$

Da Q kompakt ist und $Q \subset \bigcup_{h \in \mathbb{N}} F_h^*$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$Q \subset \bigcup_{h=0}^{k} F_h^*\,. \tag{2.76}$$

Mit Lemma 2.2 (ii) folgt

$$\mathrm{Vol}\,(Q) \leq \sum_{h=0}^{k} \mathrm{Vol}\,(F_h^*) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{Vol}\,(F_h^*) \leq 2\varepsilon + \sum_{h \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(F_h)\,. \tag{2.77}$$

Mit (2.74) folgt

$$\mathrm{Vol}\,(Q) \leq \mathcal{L}^n(Q) + 3\varepsilon\,. \tag{2.78}$$

Da ε beliebig war, folgt (2.73) und deshalb ist der Satz für kompakte Q bewiesen.

Sei jetzt Q ein nichtkompakter Quader. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ einen kompakten Quader $q \subset Q$, so dass

$$\mathrm{Vol}\,(Q) \leq \mathrm{Vol}\,(q) + \varepsilon \tag{2.79}$$

(Beweis: Übungsaufgabe). Aus dem ersten Teil des Beweises und der Monotonie von $\mathcal{L}^n$ folgt

$$\mathrm{Vol}\,(Q) \leq \mathrm{Vol}\,(q) + \varepsilon = \mathcal{L}^n(q) + \varepsilon \leq \mathcal{L}^n(Q) + \varepsilon\,. \tag{2.80}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (2.73) auch in diesem Fall bewiesen. □

Satz 2.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:*

(i) Es gibt es gibt abzählbar viele offene Quader U_h, so dass

$$\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} U_h.$$

(ii) Es gibt abzählbar viele disjunkte Quader Q_h, so dass

$$\Omega = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} Q_h.$$

(iii) $\Omega \in \mathcal{M}_n$ und

$$\mathcal{L}^n(\Omega) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(Q_h) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(Q_h).$$

Beweis. (i): Übungsblatt 3, Aufgabe 4 (betrachten Sie die Vereinigung offener Quader mit rationalen Mittelpunkten und rationaler Kantenlänge, die in Ω enthalten sind).
(ii): Seien U_h die Quader in (i) und seien

$$F_h = U_h \setminus \bigcup_{l<h} U_l\,. \tag{2.81}$$

Mit Lemma 2.3 kann durch Induktion über l beweisen, dass F_h die Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Quadern ist. Die Mengen F_h sind disjunkt und es gilt $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} U_h = \Omega$. Daher ist Ω die abzählbare Vereinigung disjunkter Quader.
(iii) Die Aussage $\Omega \in \mathcal{M}_n$ folgt aus (i) und Satz 2.14, da $\mathcal{M}_n$ eine σ-Algebra ist. Die Formel für $\mathcal{L}^n(\Omega)$ folgt aus (ii), da $\mathcal{L}^n$ σ-additiv ist. □

Definition 2.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X.Die* Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ *ist die kleinste σ-Algebra auf X, die $\mathcal{U}(X)$ enthält, d.h.*

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U}(X)) := \bigcap_{\mathcal{S}\supset\mathcal{U}(X),\ \mathcal{S}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{S}$$

(vgl. (2.39)*). Die Mengen in $\mathcal{B}(X)$ werden* Borel-Mengen *genannt.*

Beispiel: $A \subset \mathbb{R}^n$, d Standardmetrik (= euklidische Metrik) auf $\mathbb{R}^n$, eingeschränkt auf A. Dann ist

$$\mathcal{U}(A) := \{A \cap U : U \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{B}(A) = \{A \cap E : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.82}$$

Falls $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ so folgt, dass $\mathcal{B}(A) := \{E \subset A : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$.
Beweis von (2.82): Übungsaufgabe. Tip: Zeige, dass $\mathcal{S}_A := \{A \cap E : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ und $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n} := \{E \subset \mathbb{R}^n : A \cap E \in \mathcal{B}(A)\}$ σ-Algebren sind.

Satz 2.17. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist das Urblid jeder Borelmenge unter f wieder eine Borelmenge, d.h.*

$$E \in \mathcal{B}(Y) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X).$$

Bemerkung. Seien X, Y Mengen, und $f : X \to Y$. Sei $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$. Dann gilt (vgl. Anwesenheitsübung)

(i) Für alle $A, B \subset Y$,

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \tag{2.83}$$

insbesondere $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

(ii) Für alle $A : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(Y)$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_h) \tag{2.84}$$

und

$$f^{-1}\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_h)\ . \tag{2.85}$$

Beweis. Betrachte die Menge $\mathcal{S}$ aller Teilmengen von Y, welche die gewünsche Eigenschaft haben:

$$\mathcal{S} := \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}(Y)$.

Die Menge $\mathcal{S}$ enthält $\mathcal{U}(Y)$, da das Urbild jeder offenen Menge eine offene Menge ist, also in $\mathcal{B}(X)$ liegt. Außerdem ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, da $\mathcal{B}(X)$ eine σ-Algebra ist. Also gilt $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}(Y)$, da $\mathcal{B}(Y)$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{U}(Y)$ enthält.[7] □

[7] Der Beweis zeigt, dass die Bedingung „f stetig“ sogar noch etwas abgeschwächt werden, kann. Es reicht vorauszusetzen, dass das Urbild jeder offenen Menge eine Borelmenge ist. Solche Abbildungen heißen Borel messbar.

Satz 2.18. *Es gilt:*

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$*;*

(ii) $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$*.*

Beweis. (i): Nach Satz 2.15 gilt $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_n$. Da $\mathcal{M}_n$ eine σ-Algebra ist, folgt (i).
(ii): Falls $\mathcal{M}_n = \mathcal{P}(X)$ wäre $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung, welche die Eigenschaften (i), (ii'), (iii), (iv) in Kapitel 1 erfüllt. Dies widerspricht dem Satz von Vitali (Satz 1.1). □

Satz 2.19. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}_n$.

Beweis. Übungsaufgabe für $n = 1$ (mit Tip). Man zum Beispiel eine Teilmenge der Cantormenge finden, die keine Borelmenge ist. □

Wir untersuchen jetzt die Regularitätseigenschaften von $\mathcal{L}^n$, insbesondere die Approximation von messbaren Mengen durch offene und kompakte Mengen.

Lemma 2.20. *Sei* $A \in \mathcal{M}_n$*,* $\varepsilon > 0$*, dann gibt es eine offene Menge* $O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $A \subset O_\varepsilon$ *und* $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus A) \leq \varepsilon$*.*

Beweis. Teil 1: wir betrachten zuerst den Fall $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Aus der Definition von $\mathcal{L}^{n*}$ folgt, dass eine Folge von Quadern F_h existiert, so dass

$$A \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h \qquad \text{und} \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(F_h) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon/3 \,. \tag{2.86}$$

Aus Lemma 2.2(iv) folgt, dass für jedes h ein offener Quader G_h existiert, so dass

$$F_h \subset G_h \,, \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}^n(G_h) \leq \mathcal{L}^n(F_h) + 2^{-h}\varepsilon/3 \,. \tag{2.87}$$

Die Menge $O_\varepsilon = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} G_h$ ist offen, erfüllt $A \subset O_\varepsilon$, und

$$\mathcal{L}^n(O_\varepsilon) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(G_h) \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(F_h) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A) \,. \tag{2.88}$$

Aus $A \subset O_\varepsilon$ und der Additivität von $\mathcal{L}^n$ folgt

$$\mathcal{L}^n(O_\varepsilon) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus A) \tag{2.89}$$

und damit

$$\mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus A) = \mathcal{L}^n(O_\varepsilon) - \mathcal{L}^n(A) \leq \varepsilon \,. \tag{2.90}$$

Da ε beliebig war, ist der Beweis beendet.

Teil 2: Wir betrachten jetzt den Fall $\mathcal{L}^n(A) = \infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_k = \{x \in A : k \leq |x| < k+1\} = A \cap (B_{k+1} \setminus B_k) \,. \tag{2.91}$$

Die Mengen A_k sind messbar und paarweise disjunkt. Für jedes k gibt es eine offene Menge O^k, so dass $A_k \subset O^k$ und $\mathcal{L}^n(O^k \setminus A_k) \leq 2^{-k-1}\varepsilon$. Die Menge $O_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O^k$ erfüllt $A \subset O_\varepsilon$ und $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus A) \leq \varepsilon$. □

Bemerkung. In Teil 2 haben wir eine Eigenschaft des Lebesguemaßes benutzt, die noch häufig eine Rolle spielen wird: Das Lebesguemaß ist σ-*endlich*, d.h., des gibt abzählbar viele Lebesgue messbare Mengen E_h mit $\mathcal{L}^n(E_h) < \infty$ und $\mathbb{R}^n = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E_h$.
Da man die Mengen E_h als kompakte Mengen wählen kann (z.B. $E_h = [-h,h]^n$) ist $\mathbb{R}^n$ auch σ-kompakt, d.h. eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.
Ein Beispiel für ein Maß, das nicht σ-endlich ist, ist das Zählmaß auf $\mathbb{R}$.

Satz 2.21. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $A \in \mathcal{M}_n$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset O_\varepsilon$ und $\mathcal{L}^{n*}(O_\varepsilon \setminus A) \leq \varepsilon$;

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $C_\varepsilon \subset A$ und $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): folgt aus Lemma 2.20.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei O_k offen mit $A \subset O_k$ und $\mathcal{L}^{n*}(O_k \setminus A) \leq 2^{-k}$. Sei

$$B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_k\,. \tag{2.92}$$

Es ist klar, dass $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_n$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{n*}(B \setminus A) = 0. \tag{2.93}$$

Dann ist $B\setminus A$ eine Nullmenge, also in $\mathcal{M}_n$, da $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mathcal{L}^n)$ nach Satz XXX vollständig ist. Da $A = B \setminus (B \setminus A)$ folgt $A \in \mathcal{M}_n$, da $\mathcal{M}_n$ eine σ-Algebra ist.
Beweis von (2.93): aus $B\setminus A \subset O_k \setminus A$ folgt, dass $\mathcal{L}^{n*}(B\setminus A) \leq \mathcal{L}^{n*}(O_k\setminus A) \leq 2^{-k}$ für alle k. Das beendet den Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i).

Deshalb sind (i) und (ii) äquivalent. Da $\mathcal{M}_n$ eine σ-Algebra ist, gilt $A \in \mathcal{M}_n \iff \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}_n$. Daher ist (ii) auch zu

(ii') Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset O_\varepsilon$ und $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) \leq \varepsilon$

äquivalent. Mit $C_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus O_\varepsilon$ ist das genau (iii), da $O_\varepsilon \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A) = O_\varepsilon \cap A = A \cap O_\varepsilon = A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus O_\varepsilon)$. □

Lemma 2.22. *Für $N \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) N ist eine ($\mathcal{L}^n$-)Nullmenge;

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $N \subset O_\varepsilon$ und $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{N} \to (0, \infty)$, so dass gilt:

$$N \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} (x_h + [0, r_h]^n) , \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} r_h^n \leq \varepsilon . \tag{2.94}$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Aus Satz 2.21 folgt, dass eine offene Menge O_ε existiert, so dass $N \subset O_\varepsilon$ und $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus N) \leq \varepsilon$. Dann folgt $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon) = \mathcal{L}^n(O_\varepsilon \setminus N) + \mathcal{L}^n(N) \leq \varepsilon$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Folgt aus Satz 2.15, es disjunkte Quader Q_h gibt mit da $O_\varepsilon = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} Q_h \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \overline{Q_h}$, $\overline{Q_h} = x_h + [0, r_h]^n$ und $\mathrm{Vol}\,(Q_h) = \mathrm{Vol}\,(\overline{Q_h}) = r_h^n$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Für alle $\varepsilon > 0$ gilt wegen Monotonie

$$\mathcal{L}^{n*}(N) \leq \mathcal{L}^{n*}(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} (x_h + [0, r_h]^n)) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} r_h^n \leq \varepsilon , \tag{2.95}$$

und deshalb $\mathcal{L}^{n*}(N) = 0$. Die Aussage folgt aus Satz 2.9(ii). □

Beispiele. Jede abzählbare Menge ist eine Lebesgue Nullmenge.
Die Cantormenge ist eine überabzählbare Lebesgue Nullmenge (vgl. Übgungsblatt 4).

Lemma 2.23. *Sei $A \in \mathcal{M}_n$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &= \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt, } K \subset A\} \quad \textit{(innere Regularität)} \qquad (2.96)\\ &= \inf\{\mathcal{L}^n(O) : O \text{ offen, } A \subset O\} \quad \textit{(äußere Regularität).} \qquad (2.97) \end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren $m = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt, } K \subset A\}$ und $M = \inf\{\mathcal{L}^n(O) : O \text{ offen, } A \subset O\}$. Aus der Monotonie folgt, dass für alle K und O wie oben gilt:

$$\mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(O) , \tag{2.98}$$

und deshalb $m \leq \mathcal{L}^n(A) \leq M$.

Aus Satz 2.21 folgt, dass eine Folge O_k von offenen Mengen mit $A \subset O_k$ und $\mathcal{L}^n(O_k) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(O_k \setminus A) \leq \mathcal{L}^n(A) + 1/k$ existiert, und damit $M \leq \mathcal{L}^n(A)$.

Aus Satz 2.21 folgt, dass eine Folge C_k von abgeschlossenen Mengen mit $C_k \subset A$ und $\mathcal{L}^n(A \setminus C_k) \leq 1/k$ existiert. Aus Satz 2.10 (i) folgt, dass für jedes k gilt:

$$\sup_{h\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}^n(\overline{B}_h \cap C_k)\} = \sup_{h\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}^n(\{x \in C_k : |x| \leq h\})\} = \mathcal{L}^n(C_k) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{k} . \tag{2.99}$$

Deshalb gilt:

$$\sup_{h\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}} \{\mathcal{L}^n(\overline{B}_h \cap C_k)\} = \mathcal{L}^n(A) , \tag{2.100}$$

und alle Mengen $\overline{B}_h \cap C_k$ sind kompakt. Daraus folgt $m \geq \mathcal{L}^n(A)$. Das beendet den Beweis. □

Lemma 2.24 (Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes). *(i) Sei $\mathcal{Q}$ die Menge der Quader in $\mathbb{R}^n$ und sei $\nu : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften*

(a) $\nu(a + Q) = \nu(Q)$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{Q}$ (Translationsinvarianz);

(b) $\nu([0, 1]^n) = 1$ (Normierung);

(c) falls ein Quader Q die disjunkte Vereinigung von zwei Quadern Q_1 und Q_2 ist, so gilt $\nu(Q) = \nu(Q_1) + \nu(Q_2)$ (endliche Additivität).

Dann gilt $\nu(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, falls $\bar{Q} = [a, b]^n$
(ii) Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n$ eine tranlationsinvariante σ-Algebra, die alle Quader enthält, und sei $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß, d.h.

$$x + A \in \mathcal{S}, \quad \nu(x + A) = \nu(A), \qquad \forall A \in \mathcal{S}. \tag{2.101}$$

Sei

$$\nu([0, 1]^n) = \alpha. \tag{2.102}$$

Dann gilt

$$\nu(E) = \alpha \mathcal{L}^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{S}. \tag{2.103}$$

Beweis. (i): Für $n = 2$ und $Q = [a, b]^2$, s. Übungsaufgabe 2, Blatt 2. Aus Eigenschaft (c) und Lemma 2.3 folgt, dass ν monoton auf Quadern ist. Damit folgt $\nu(Q) = \prod_{i=1}^{2}(b_i - a_i)$, falls $\bar{Q} = [a, b]^2$. Der Fall $n > 2$ ist analog.
(ii): Es reicht, den Fall $\alpha = 1$ zu betrachten. Falls nämlich $\alpha = 0$, so folgt aus der Translationsinvarianz und der σ-Additivität $\nu(\mathbb{R}^n) = 0$. Falls $\alpha > 0$ kann man das Maß $\frac{1}{\alpha}\nu$ betrachten. Für $\alpha = 1$ folgt aus (i), dass ν und $\mathcal{L}^n$ auf $\mathcal{Q}$ übereinstimmen. Aus Satz 2.15 folgt, dass $\mathcal{S}$ alle offenen Mengen, und somit alle Borelmengen, enthält und dass die beiden Maße auf offenen Mengen übereinstimmen. Sei K kompakt und $U \supset K$ offen und beschränkt. Dann ist auch $U \setminus K$ offen und es gilt

$$\nu(K) = \nu(U) - \nu(U \setminus K) = \mathcal{L}^n(U) - \mathcal{L}^n(U \setminus K) = \mathcal{L}^n(K). \tag{2.104}$$

Sei $A \in \mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n$ und sei $\varepsilon > 0$. Es folgt aus Lemma 2.23, dass es eine kompakte Menge K und eine offene Menge U gibt mit $K \subset A \subset U$ und

$$\nu(A) - \varepsilon \le \nu(U) - \varepsilon = \mathcal{L}^n(U) - \varepsilon < \mathcal{L}^n(A) < \mathcal{L}^n(K) + \varepsilon = \nu(K) + \varepsilon \le \nu(A) + \varepsilon. \tag{2.105}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

2.5 Lipschitz-stetige Funktionen und der Transformationssatz

Definition 2.25. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, nichtleer. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \qquad \forall x, y \in A\,. \tag{2.106}$$

$\mathrm{Lip}\,(A; \mathbb{R}^m)$ *ist die Menge all dieser Funktionen. Für $f \in \mathrm{Lip}\,(A; \mathbb{R}^m)$ wird die Lipschitz-Konstante* $\mathrm{Lip}\,(f)$ *von f durch*

$$\mathrm{Lip}\,(f) = \inf\{M \geq 0 : \text{(2.106)} \ \textit{gilt}\} \tag{2.107}$$

definiert.

Bemerkung. $\mathrm{Lip}\,(A; \mathbb{R}^m) \subset C^0(A; \mathbb{R}^m)$; für $\#A \geq 2$ gilt

$$\mathrm{Lip}\,(f) = \sup_{x \neq y \in A} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\,. \tag{2.108}$$

Falls A offen und konvex ist und f differenzierbar ist, so ist f Lipschitz mit Lipschitzkonstante $L := \sup_{x \in A} \|Df(x)\|$, falls $L < \infty$ (hierbei bezeichnet $\|A\|$ die Operatornorm einer linearen Abbildung A), vgl. Analysis II. Die Klasse der lipschitzstetigen Funktionen ist aber robuster als die Klasse der differenzierbaren Funktionen. So ist z.B. das Maximum oder Minimum zweier lipschitzstetiger Funktionen wieder lipschitzstetig. Allgemeiner gilt folgender Aussage.

Lemma 2.26. *Sei $L > 0$, sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer. Sei F eine beliebige Indexmenge. Für $\alpha \in F$ seien $f_\alpha : A \to \mathbb{R}$ Funktionen mit* $\mathrm{Lip}\,(f_\alpha) \leq L$ *und sei f definiert durch*

$$f(x) := \inf\{f_\alpha(x) : \alpha \in F\}. \tag{2.109}$$

Falls $f(x) \neq -\infty$ für alle $x \in A$, so ist f lipschitzstetig und $\mathrm{Lip}\,(f) \leq L$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass gilt

$$f(y) - f(x) \leq L|y - x|, \quad \forall x, y \in A, \tag{2.110}$$

denn durch Vertauschen von x und y folgt daraus die Behauptung. Seien also x, y in A und sei $\varepsilon > 0$. Da $f(x) \neq -\infty$ gibt es ein $\alpha \in F$, so dass $f(x) \geq f_\alpha(x) - \varepsilon$. Nach Definition ist $f(y) \leq f_\alpha(y)$. Daher gilt

$$f(y) - f(x) \leq f_\alpha(y) - f_\alpha(x) + \varepsilon \leq L|y - x| + \varepsilon. \tag{2.111}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2.110). □

Wir zeigen jetzt, dass sich jede lipschitzstetige Funktion auf einer Teilmenge zu einer lipschitzstetigen Funktion auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen läßt.

Satz 2.27. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, $f \in \mathrm{Lip}\,(A; \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es $g \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, so dass $f = g$ auf A und* $\mathrm{Lip}\,g \leq \sqrt{m}\mathrm{Lip}\,f$.

Bemerkung. Es gibt auch eine Fortsetzung mit $\mathrm{Lip}\, g = \mathrm{Lip}\, f$, die Konstruktion ist aber wesentlich komplizierter (Kirszbraun 1934).

Beweis. Teil 1: Wir betrachten zuerst den Fall $m = 1$. Sei $L = \mathrm{Lip}\,(f)$, und sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ durch

$$g(x) = \inf\{f(y) + L|x-y| : y \in A\} \tag{2.112}$$

definiert (es gilt $g(x) \neq \infty$, weil $A \neq \emptyset$).

Wir zeigen jetzt, dass $g(x) \neq -\infty$ für alle x. Sei $y_0 \in A$, $x \in \mathbb{R}^n$. Für alle $y \in A$ gilt

$$f(y) \geq f(y_0) - L|y - y_0| \tag{2.113}$$

und da $|y - y_0| \leq |y - x| + |x - y_0|$ folgt, dass

$$f(y) + L|x-y| \geq f(y_0) - L|x - y_0| \qquad \forall y \in A\,. \tag{2.114}$$

Deshalb gilt $g(x) > -\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Aus Lemma 2.26 folgt $g \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $\mathrm{Lip}\,(g) \leq L$.

Es bleibt zu zeigen, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$. Aus der Definition von g folgt unmittelbar, dass $g(x) \leq f(x)$. Da f Lipschitz ist, gilt für alle $y \in A$

$$f(x) \leq f(y) + L|x-y|\,. \tag{2.115}$$

Deshalb ist $f(x) \leq g(x)$. Das beendet den Beweis für $m = 1$.

Teil 2: Falls $m > 1$, dann bilden wir für jede Komponente f_i eine Fortsetzung g_i, mit $\mathrm{Lip}\,(g_i) \leq \mathrm{Lip}\,(f_i) \leq \mathrm{Lip}\,(f)$. Dann gilt:

$$|g(x) - g(y)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (g_i(x) - g_i(y))^2} \tag{2.116}$$

$$\leq \sqrt{m} \max_{i=1,\ldots,m} |g_i(x) - g_i(y)| \leq \sqrt{m}\mathrm{Lip}\,(f)|x-y|\,. \tag{2.117}$$

□

Satz 2.28. *Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(N) = 0$, $f \in \mathrm{Lip}\,(N; \mathbb{R}^n)$, dann ist $f(N) \in \mathcal{M}_n$ und $\mathcal{L}^n(f(N)) = 0$.*

Beweis. Aus Satz 2.27 folgt, dass man $f \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ annehmen kann. Sei $M = \mathrm{Lip}\,(f)$. Wir zeigen zuerst, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in [0, \infty)$ gilt

$$\mathcal{L}^n(f(x + [0,r]^n)) \leq C\mathcal{L}^n([0,r]^n) = Cr^n. \tag{2.118}$$

Die Menge $f(x+[0,r]^n)$ ist kompakt und deshalb messbar. Für $y \in x+[0,r]^n$ gilt $|f(y) - f(x)| \leq M|x-y| \leq M\sqrt{n}r$. Deshalb gilt:

$$f(x + [0,r]^n) \subset f(x) + [-M\sqrt{n}r, M\sqrt{n}r]^n\,. \tag{2.119}$$

Dies liefert (2.118), mit $C = (2M\sqrt{n})^n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.22 gibt es $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{N} \to (0, \infty)$, so dass

$$N \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} (x_h + [0, r_h]^n) , \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} r_h^n \leq \varepsilon . \tag{2.120}$$

Dann gilt:

$$f(N) \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} f(x_h + [0, r_h]^n) \tag{2.121}$$

und deshalb gilt auch:

$$\mathcal{L}^{n*}(f(N)) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(f(x_h + [0, r_h]^n)) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} C r_h^n \leq C\varepsilon . \tag{2.122}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mathcal{L}^{n*}(f(N)) = 0$, und mit Satz 2.9(ii) ist der Beweis beendet. □

Satz 2.29. *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, $\det T \neq 0$. Sei $E \in \mathcal{M}_n$. Dann ist $T(E) \in \mathcal{M}_n$ und*

$$\mathcal{L}^n(T(E)) = |\det T| \mathcal{L}^n(E) . \tag{2.123}$$

Bemerkung. (i) Wir werden nachher sehen, dass im Fall $\det T = 0$ gilt: $\mathcal{L}^n(T(E)) = 0$, für alle $E \subset \mathbb{R}^n$.
(ii) Satz 2.29 zeigt insbesondere, dass $\mathcal{L}^n$ euklidisch invariant ist, im Sinne von Bedingung (ii) in Kapitel 1.1.

Beweis. Wir betrachten zunächst Borelmengen.

Teil 1: Sei $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $T(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Da $\det T \neq 0$, ist T invertierbar. Die inverse Abbildung $S = T^{-1}$ ist linear und daher stetig und es gilt $T(E) = S^{-1}(E)$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.17.

Teil 2: Für jede lineare Abbildung T mit $\det T \neq 0$ gibt es eine Zahl $\varphi(T) \neq 0$ so dass $\mathcal{L}(T(E)) = \varphi(T)\mathcal{L}(E)$ für alle $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Wir benützen die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes. Sei $\nu(E) := \mathcal{L}((T(E))$ für $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi(T) := \nu([0, 1]^n)$. Dann gilt

$$\nu(x + E) = \mathcal{L}((T(x + E)) = \mathcal{L}((Tx + T(E)) = \mathcal{L}((T(E)) = \nu(E). \tag{2.124}$$

Daher ist ν translationsinvariant und aus Lemma 2.24 (ii) mit $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\nu(E) = \varphi(T)\mathcal{L}(E)$. Außerdem ist $\varphi(T) \neq 0$, da $T([0, 1]^n)$ die nichtleere offene Menge $T((0, 1)^n)$ enthält und somit einen offenen, nichtleeren Quader. Dies beweist die Behauptung.

Für das Produkt ST zweier linearer Abbildung gilt $(ST)(E) = S(T(E))$ und daraus folgt

$$\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T), \quad \text{falls } \det S \neq 0, \det T \neq 0. \tag{2.125}$$

Teil 3: Für längenerhaltende lineare Abbildungen $T \in O(n)$ gilt $\varphi(T) = 1$.
Sei B die offene Einheitskugel. Dann gilt $T(B) = B$ und somit $\varphi(T)\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(T(B)) = \mathcal{L}^n(B)$. Daraus folgt $\varphi(T) = 1$.

Teil 4: Es gilt $\varphi(T) = |\det T|$.
Jede invertierbare lineare Abbildung T läßt sich schreiben als $T = OS$, mit $O \in O(n)$ und S symmetrisch (Polarzerlegung: man setzt $S = (T^tT)^{1/2}$ und $O = TS^{-1}$). Weiterhin läßt sich jede symmetrische Abbildung schreiben als $S = QDQ^{-1}$ mit $Q \in SO(n)$ und D diagonal. Aus (2.125) und Teil 3 folgt $\varphi(T) = \varphi(D)$. Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gilt

$$\mathcal{L}^n(D([0,1]^n) = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |\det D|. \tag{2.126}$$

Somit folgt $\varphi(T) = |\det D| = |\det T|$, da $\det Q = \det Q^{-1} = 1$ und $|\det O| = 1$.

Damit ist gezeigt

$$\mathcal{L}^n(T(E)) = |\det T|\mathcal{L}^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{2.127}$$

Sei nun $E \in \mathcal{M}_n$. Nach Lemma 2.20 gibt es offene Mengen $O_k \supset E$ mit $\mathcal{L}^n(O_k \setminus E) \leq 1/k$. Sei $B = \cap_{k=1}^n O_k$. Dann ist $B \supset E$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N = B \setminus A$ ist eine Nullmenge. Da T bijektiv ist gilt $T(E) = T(B) \setminus T(N)$. Nach Satz 2.28 ist $T(N)$ eine Nullmenge und daher messbar. Nach Teil 1 ist $T(B)$ messbar. Daher ist $T(E)$ messbar und Satz 2.29 folgt aus (2.127). □

Bemerkung. Das Argument in Teil 3 und Teil 4 läßt sich noch abkürzen, wenn man folgende (nicht ganz triviale) Aussage aus der linearen Algebra benutzt. Sei $\varphi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Abbildung mit $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$. Dann gibt es eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\varphi(T) = \psi(\det T)$ und $\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$.[8] Benutzt man diese Aussage, so reicht es, diagonale Abbildungen T zu betrachten (oder sogar nur die Spiegelung $T = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ und die Dilatationen $T = \lambda\mathrm{Id}$).

[8] Abstrakte Beweisidee: Für $A, B \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ sei $[A, B] := ABA^{-1}B^{-1}$ der Kommutator. Da φ ein Homomorphismus von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ nach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, gilt $\varphi([A, B]) = 1$. Es gilt sogar $\varphi(A) = 1$ für alle A in der Kommutatorgruppe $K(G)$, die aus endlichen Produkten $[A_1, B_1] \ldots [A_n, B_n]$ besteht. Der wesentliche Punkt ist, zu zeigen, dass $K(G) = \mathrm{SL}(\mathbb{R}, n) = \{A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) : \det A = 1\}$. Dann folgt die Aussage, weil man jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ schreiben kann als $A = \operatorname{diag}(t, 1, \ldots, 1)B$ mit $B \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ und $t = \det A$.
Etwas konkreter kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen. Definiere $\psi(t) = \varphi(\operatorname{diag}(t, 1, \ldots 1))$. Dann gilt $\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$ und insbesondere $\psi(1) = 1$. Berücksichtigt man, dass für jede Permutation P die Identität $\psi(P)\psi(P) = \psi(P^2) = \psi(\mathrm{Id}) = 1$ gilt, so sieht man leicht, dass $\varphi(D) = \psi(\det D)$ für alle Diagonalmatrizen D. Wir nennen eine

Lemma 2.30. *Sei* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear mit* $\det T = 0$*. Dann gilt* $\mathcal{L}^n(T(E)) = 0$ *für alle* $E \subset \mathbb{R}^n$*.*

Beweis. Sei $H_0 \subset \mathbb{R}^n$ die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Dann gilt $\mathcal{L}^n(H_0) = 0$ (Beweis: Aufgabe 2, Übungsblatt 4; Tip: Zeige zunächst $\mathcal{L}^n(H_0 \cap [-k,k]^n) = 0$).

Da $\det T = 0$, ist $T(\mathbb{R}^n)$ in einer Hyperebene H enthalten. Es gibt eine lineare Abbildung $S \in SO(n)$ so dass $S(H_0) = H$. Daraus folgt $\mathcal{L}^n(H) = \mathcal{L}^n(H_0) = 0$ und somit $\mathcal{L}^n(T(E)) \le \mathcal{L}^n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$. □

2.6 Radonmaße

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen messbaren Mengen, offenen Mengen und kompakten Mengen in allgemeinerem Zusammenhang. Das folgende Kriterium ist sehr nützlich um zu zeigen, dass alle offenen Mengen (und damit alle Borelmengen) messbar sind.

Für nichtleere Mengen $A \subset X$, $B \subset X$ und einen Punkt $x \in X$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, A) &:= \inf\{d(x,y) : y \in A\} \\ \operatorname{dist}(A, B) &:= \inf\{d(x,B) : x \in A\}. \end{aligned}$$

Es gilt[9]

$$C \subset X \text{ abgeschlossen, nichtleer} \quad \Longrightarrow \quad C = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) = 0\}. \tag{2.128}$$

Matrix E elementare Dreicksmatrix, falls $E = \mathrm{Id} + te_i \otimes e_j$ mit $i \neq j$. Der Beweis reduziert sich dann auf zwei Aussagen: a) jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von elementare Dreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen; b) $\varphi(E) = 1 = \det E$. Die Aussage a) folgt aus dem Gaussschen Eliminationsverfahren und der Tatsache, dass jede Permutation ein Produkt von elementaren Dreiecksmatrizen und einer Diagonalmatrix ist. So ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis von b) setzt man $E(t) = \mathrm{Id} + te_i \otimes e_j$ und bemerkt, dass $E(t)E(s) = E(t+s)$. Außerdem gilt (für $i = 1, j = 2$) $\operatorname{diag}(\lambda, 1)E(t)\operatorname{diag}(\lambda^{-1}, 1) = E(\lambda t)$ und somit $\varphi(E(\lambda t)) = \varphi(E(t))$. Daraus folgt, dass $\varphi\big(E((\lambda - 1)t)\big) = 1$ für alle $t \neq 0$ und alle $\lambda \neq 0$. Mit $\lambda = 2$ ergibt sich b). Dieses Argument funktioniert auch, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ersetzt. Falls $\mathbb{K}$ drei oder mehr Elemente hat so kann man im Beweis von b) $\lambda \notin \{0, 1\}$ und $t = (\lambda - 1)^{-1}s$ wählen. Dann folgt $\varphi(E(s)) = 1$ für alle $s \in \mathbb{K}$. Falls $\mathbb{K}$ zwei Elemente hat, so ist $\mathbb{K} \setminus \{0\} = \{1\}$. Daher ist φ konstant auf $\mathrm{GL}(\mathbb{K}, n)$. Analog sieht man, dass det auf dieser Menge konstant ist, da $\det S \neq 0$ für alle $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}, n)$.

[9]Beweis: die Implikation $x \in C \implies \operatorname{dist}(x, C) = 0$ ist trivial. Zu zeigen ist $x \notin C \Longrightarrow \operatorname{dist}(x, C) > 0$. Sei $x \notin C$. Da $X \setminus C$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ so dass $B_\delta(x) \subset X \setminus C$. Darauf folgt $\operatorname{dist}(x, C) \ge \delta > 0$.

Satz 2.31 (Caratheodory Kriterium)**.** *Sei X ein metrischer Raum und $\mu^* : X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann sind alle offenen Menge in X messbar, genau dann wenn*

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \forall A, B \subset X \text{ mit } \operatorname{dist}(A, B) > 0. \tag{2.129}$$

Beweis. Die Notwendigkeit von (2.129) ist einfach. Seien A und B Teilmengen von X und $\varepsilon := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Sei

$$U := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}. \tag{2.130}$$

Dann ist U offen und es gilt $A \subset U$ und $B \cap U = \emptyset$. Daraus folgt $(A \cup B) \cap U = A$ und $(A \cup B) \setminus U = B$. Da U messbar ist, folgt (2.129).

Es gelte nun (2.129). Wir müssen zeigen, dass jede offene Menge messbar ist. Da die messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, reicht es zu zeigen, dass jede abgeschlossene Menge C messbar ist. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \forall E \subset X. \tag{2.131}$$

Es reicht, den Fall $\mu^*(E) < \infty$ zu betrachten. Für $k \in \mathbb{N}^*$ definiere Mengen

$$C_k := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}. \tag{2.132}$$

Dann gilt $\operatorname{dist}(E \setminus C_k, E \cap C) \geq \frac{1}{k} > 0$. Nach Voraussetzung und wegen der Monotonie von μ^* gilt

$$\mu^*(E \setminus C_k) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_k) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{2.133}$$

Die gewünschte Ungleichung (2.132) folgt, wenn wir zeigen dass

$$\lim_{k \to \infty} \mu^*(E \setminus C_k) = \mu^*(E \setminus C). \tag{2.134}$$

Definiere $R_j = C_j \setminus C_{j+1}$. Dann gilt $C_m = C_k \setminus \cup_{j=k}^{m-1} R_j$ für $m > k$. Da C abgeschlossen ist, folgt aus (2.128), dass $\cap_{m=k+1}^{\infty} C_m = C$ und somit $C = C_k \setminus \cup_{j=k}^{\infty} R_j$.

Daraus folgt $E \setminus C = E \setminus C_k \cup \cup_{j=k}^{\infty} R_j$ und daher

$$\mu^*(E \setminus C_k) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu^*(E \cap R_j) \tag{2.135}$$

Zum Beweis von (2.134) reicht es also zu zeigen, dass $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap R_j) < \infty$.

Es gilt nun $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$, falls $j \geq i + 2$ und deshalb $\operatorname{dist}(E \cap R_i, E \cap R_j) > 0$ Daher folgt durch Induktion

$$\sum_{j=1}^{m} \mu^*(E \cap R_{2j}) = \mu^*(\cup_{j=1}^{m} E \cap R_{2j}) \leq \mu^*(E), \tag{2.136}$$

and analog

$$\sum_{j=0}^{m} \mu^*(E \cap R_{2j+1}) = \mu^*(\cup_{j=0}^{m} E \cap R_{2j+1}) \leq \mu^*(E). \tag{2.137}$$

Durch Addition der beiden Ungleichungen und Übergang zum Limes $m \to \infty$ erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap R_j) \leq 2\mu^*(E) < \infty. \tag{2.138}$$

Daraus folgt (2.134) und somit (2.132). □

Definition 2.32. *Ein metrischer Raum X heißt lokal kompakt, falls es für jeden Punkt $x \in X$ eine abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ (mit $r > 0$) gibt, die kompakt ist.*

Beispiel. (i) $\mathbb{R}^n$ und jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind lokal kompakt.
(ii) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht lokal kompakt.

Definition 2.33. *Ein äußeres Maß μ^* auf einem lokal kompakten metrischen Raum X heisst Radonmaß falls jede Borelmenge messbar ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(i) Falls $K \subset X$ kompakt ist, so gilt $\mu^*(K) < \infty$.

(ii) (innere Regularität) Für alle offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu^*(V) = \sup\{\mu^*(K) : K \textit{ kompakt }, K \subset V\}. \tag{2.139}$$

(iii) (äußere Regularität) Für eine beliebige Teilmenge $E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) : V \textit{ offen }, E \subset V\}. \tag{2.140}$$

Bemerkung. (a) Für $X = \mathbb{R}^n$ ist die Bedingung (ii) immer erfüllt, da jede offenen Menge V eine abzählbare Vereinigung einer aufsteigenden Folge kompakter Menge K_k ist; dann folgt die Aussage aus Satz 2.10. Man kann z.B. $K_k = \{x \in V : |x| \leq k,\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \leq \frac{1}{k}\}$ wählen.
(b) Das Diracmaß δ_x auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Radonmaß.
(c) Das äußere Lebesguemaß $\mathcal{L}^{n*}$ ist ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$. Eigenschaft (i) ist klar, da jede kompakte Menge in einem Quader enthalten ist. Die Meßbarkeit offener Mengen wurde in Satz 2.15 gezeigt. Für äußere Regularität argumentiert man wie in Lemma 2.20. Falls $\mathcal{L}^{n*}(E) < \infty$, so gibt es eine offene Menge $O_\varepsilon \supset E$ mit $\mathcal{L}^n(O_\varepsilon) < \mathcal{L}^{n*}(E) + \varepsilon$. Falls $\mathcal{L}^{n*}(E) = \infty$ so ist die Aussage trivial wegen der Monotonie des Maßes.
(d) Wir werden später sehen, dass Radonmaße in einem sehr engem Zusammenhang mit der Integration stetiger Funktionen stehen.

Bemerkung. Viele Autoren (z.B. Bauer) definieren Radonmaße als Maße (nicht äußere Maße) auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften (lokal endlich und von innen regulär).

Die folgende Aussage ist die natürliche Verallgemeinerung der Regularität des Lebesguemaßes.

Lemma 2.34. *Sei X ein lokal kompakter metrischer Raum und $\mu^* : X \to \mathbb{R}$ ein äußeres Radonmaß. Sei $A \subset X$ messbar mit $\mu^*(A) < \infty$. Dann gibt Mengen $K, U \subset X$ so dass*

$$\mu^*(A \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu^*(U \setminus A) < \varepsilon, \quad K \subset A \subset U, \quad K \text{ kompakt}, \quad U \text{ offen}. \tag{2.141}$$

Beweis. Da A messbar ist, gilt für jede offene Menge U die Identität $\mu^*(U \setminus A) = \mu^*(U) - \mu^*(A)$. Damit folgt die zweite Abschätzung aus der aüßeren Regularität des Radonmaßes.

Zur Konstruktion von K benutzen wir, dass es eine offene Menge V gibt mit

$$A \subset V, \quad \mu^*(V \setminus A) < \varepsilon/2 \tag{2.142}$$

Wegen der inneren Regularität von μ^* gibt es eine kompakte Menge K' mit

$$K' \subset V, \quad \mu^*(V \setminus K') < \varepsilon/2.$$

Falls $K' \subset A$, sind wir fertig, da $A \setminus K' \subset V \setminus K'$. Im allgemeinen ist $K' \setminus A \neq \emptyset$. Es gilt aber

$$\mu(K' \setminus A) \leq \mu(V \setminus A) < \varepsilon/2. \tag{2.143}$$

Wegen der äußeren Regularität von μ gibt es eine offene Menge W mit

$$K' \setminus A \subset W, \quad \mu(W) < \varepsilon/2.$$

Definiere $K := K' \setminus W$. Dann ist K kompakt, $K \subset A$ und

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu(V \setminus K) \leq \mu(V \setminus K') + \mu(W) < \varepsilon.$$

□

[15.11. 2016, Vorlesung 8]

[17.11. 2016, Vorlesung 9]

3 Messbare Funktionen, Integration

3.1 Messbare Funktionen

Definition 3.1. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$. Eine Abbildung $f : E \to [-\infty, \infty]$ heißt messbar, falls*

$$\{x \in E : f(x) < a\} \in \mathcal{S} \tag{3.1}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.2. *Sie $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$, $f : E \to [-\infty, \infty]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f messbar, d.h., $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{S}$ für alle $a \in \mathbb{R}$;

(ii) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{S}$ für alle $a \in \mathbb{R}$;

(iii) $-f$ messbar, d.h., $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{S}$ für alle $a \in \mathbb{R}$;

(iv) $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{S}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Seien X, Y Mengen, und $f : X \to Y$. Sei $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$. Dann gilt:

(i) Für alle $A, B \subset Y$,

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \tag{3.2}$$

insbesondere $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

(ii) Für alle $A : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(Y)$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_h) \tag{3.3}$$

und

$$f^{-1}\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_h) \, . \tag{3.4}$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $a \in \mathbb{R}$. Aus

$$[-\infty, a] = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} [-\infty, a + 2^{-h}) \tag{3.5}$$

folgt, dass

$$f^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} [-\infty, a + 2^{-h})) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, a + 2^{-h}))\, . \tag{3.6}$$

Aus der Messbarkeit von f folgt, dass $f^{-1}([-\infty, a + 2^{-h})) \in \mathcal{S}$ für alle h, und da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, gilt auch $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{S}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ folgt analog aus

$$[-\infty, a) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} [-\infty, a - 2^{-h}] \,. \tag{3.7}$$

Deshalb sind (i) und (ii) äquivalent.

Die gleiche Argumentation mit $-f$ statt f zeigt dass (iii) und (iv) äquivalent sind.

Aus

$$f^{-1}((a, \infty]) = E \setminus f^{-1}([-\infty, a]) \tag{3.8}$$

folgt, dass $(ii) \Rightarrow (iii)$; analog zeigt man $(iv) \Rightarrow (i)$. □

Lemma 3.3. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$, $f : E \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist messbar, d.h., $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{S}$ für alle $a \in \mathbb{R}$;

(ii) $f^{-1}(O) \in \mathcal{S}$ für alle offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}$;

(iii) $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ für alle Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}$.

Beweis von Lemma 3.3. Sei $O \subset \mathbb{R}$ offen. Nach (Satz 2.15(i)) gibt es abzählbar viele offene Intervalle (a_h, b_h) so dass

$$O = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} (a_h, b_h). \tag{3.9}$$

Damit gilt:

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} f^{-1}((a_h, b_h)) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, b_h) \setminus f^{-1}([-\infty, a_h]) \right) \,. \tag{3.10}$$

Das beweist $(i) \Rightarrow (ii)$; die Folgerungen $(ii) \Rightarrow (i)$ und $(iii) \Rightarrow (ii)$ sind offensichtlich.

Es bleibt zu zeigen, dass $(ii) \Rightarrow (iii)$. Dies ist analog zum Beweis von Satz 2.17.
Details: Wir betrachten die Menge

$$B^* = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\} \,. \tag{3.11}$$

Aus (ii) folgt, dass alle offenen Mengen in B^* enthalten sind. Wir behaupten, dass die Menge B^* eine σ-Algebra ist. Sei $B \in B^*$. Dann gilt:

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{S}. \tag{3.12}$$

Deshalb ist $\mathbb{R} \setminus B \in B^*$. Sei $B : \mathbb{N} \to B^*$, dann gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h\right) = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_h) \in \mathcal{S}. \tag{3.13}$$

Deshalb ist $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} B_h \in B^*$. Deshalb ist B^* eine σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Aus der Definition von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ folgt dann $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset B^*$. $\square$

Bemerkung. Die analoge Aussage gilt für Abbildungen $f : E \to [-\infty, \infty]$, wenn wir die Metrik $d_{\bar{\mathbb{R}}}$ verwenden, die in Kapitel 1.4 eingeführt wurde. Eine Menge $V \subset [-\infty, \infty]$ ist genau dann offen, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: (i) falls $x \in V \cap \mathbb{R}$, so gibt es ein offenes Interval $I \subset \mathbb{R}$ mit $x \in I \subset V$; (ii) falls $\infty \in V$, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, \infty] \subset V$; (iii) falls $-\infty \in V$, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $[-\infty, a) \subset V$. Daraus folgt, dass jede offene Menge $V \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Intervallen ist. Daher ist der Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) der gleiche wie im Fall $f : E \to \mathbb{R}$.

Lemma 3.4. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$.*

(i) Falls $f : E \to [-\infty, \infty]$ messbar ist und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist λf messbar.

(ii) Falls $f, g : E \to [-\infty, \infty]$ messbar sind, dann sind $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und $|f|$ ebenfalls messbar.

(iii) Falls $f, g : E \to \mathbb{R}$ messbar sind, dann sind $f + g$ und $f - g$ ebenfalls messbar.

(iv) Falls $f, g : E \to \mathbb{R}$ messbar sind, dann ist fg ebenfalls messbar.

Bemerkung. Die Aussagen in (iii) und (iv) gelten auch für $f, g : E \to [-\infty, \infty]$ solange alle Ausdrücke definiert sind (d.h. solange keine Ausdrücke der Form $\infty + (-\infty)$ oder $0 \cdot \pm\infty$ auftreten).
Beweis für $f+g$: Die Mengen $f^{-1}(\mathbb{R})$ und $g^{-1}(\mathbb{R})$ sind in $\mathcal{S}$, da $\mathbb{R}$ offen in $\bar{\mathbb{R}}$ ist. Daher gilt $E' = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{S}$. Nach (iii) ist $(f+g)^{-1}([-\infty, a)) \cap E' \in \mathcal{S}$. Außerdem ist $(f + g)(x) \in \{-\infty, \infty\}$ für $x \in E \setminus E'$. Daher gilt

$$(f + g)^{-1}([-\infty, a)) \cap (E \setminus E') = (f + g)^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty)$$

und diese Menge ist in $\mathcal{S}$, da $\{-\infty\}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ abgeschlossen ist und somit $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$ und $g^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$ messbar sind. Also ist $(f+g)^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{S}$.

Beweis. (i): Für $\lambda > 0$ ist

$$(\lambda f)^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : \lambda f(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < a/\lambda\} \in \mathcal{S},$$

da f messbar ist.
Für $\lambda < 0$. Dann gilt $\lambda f = -|\lambda| f$. Wir haben schon gezeigt, dass $|\lambda| f$ messbar ist. Nach Lemma 3.2 ist auch $-|\lambda| f$ messbar.

(ii): Aus

$$\max(f,g)^{-1}([-\infty,a)) = \{x \in E : f(x) < a \text{ und } g(x) < a\} \tag{3.14}$$
$$= f^{-1}([-\infty,a)) \cap g^{-1}([-\infty,a)) \tag{3.15}$$

folgt, dass $\max(f,g)$ messbar ist. Analog zeigt man, dass $\min(f,g)$ messbar ist. Außerdem ist $|f| = \max(f,-f)$ messbar.

(iii): Nach (i) ist $-g$ messbar. Daher reicht es, zu zeigen, dass $f+g$ messbar ist. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(f+g)^{-1}([-\infty,a)) = \{x \in E : f(x) + g(x) < a\} \tag{3.16}$$
$$\stackrel{!}{=} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) < q \text{ und } g(x) < a - q\} \tag{3.17}$$
$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}([-\infty,q)) \cap g^{-1}([-\infty,a-q)) \right) . \tag{3.18}$$

Beweis der Gleichheit in (3.17): Sei $f(x) < q$ und $g(x) < a - q$. Dann folgt $f(x) + g(x) < a$. Sei $x \in E$ ein Punkt mit $f(x) + g(x) < a$. Sei $q \in \mathbb{Q} \cap (f(x), a - g(x))$. Solch ein q existiert, weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, und $f(x) < a - g(x)$. Aus dieser Definition von q folgt $f(x) < q$ und $g(x) < a - q$.

(iv): Wir beweisen die Aussage zunächst unter zusätlichen Voraussetzung $f \geq 0$ und $g \geq 0$. Dann gilt $(fg)^{-1}([-\infty,a)) = \emptyset$ für $a \leq 0$. Für $a > 0$ gilt

$$(fg)^{-1}([-\infty,a)) = \{x \in E : f(x)g(x) < a\} \tag{3.19}$$
$$\stackrel{!}{=} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) < q \text{ und } g(x) < a/q\} \tag{3.20}$$
$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}([-\infty,q)) \cap g^{-1}([-\infty,a/q)) \right) . \tag{3.21}$$

Beweis der Gleichheit in (3.20): Sei $f(x) < q$ und $g(x) < a/q$. Dann folgt $f(x)g(x) < a$. Sei $x \in E$ ein Punkt mit $f(x)g(x) < a$. Falls $g(x) = 0$, wähle $q \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < q$. Dann gilt $g(x) < a/q$. Falls $g(x) > 0$ sei $q \in \mathbb{Q} \cap (f(x), a/g(x))$. Solch ein q existiert, weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, und $f(x) < a/g(x)$. Aus der Definition von q folgt $f(x) < q$ und $g(x) < a/q$.

Für eine beliebige messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ definieren wir $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$. Dann sind $f^\pm$ nichtnegativ und $f = f^+ - f^-$. Nach (ii) ist sind $f^\pm$ und $g^\pm$ messbar. Damit folgt die Behauptung aus der Aussage für $f, g \geq 0$, der Darstellung $fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-)$ und (iii). □

Lemma 3.5. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : E \to \mathbb{R}$ messbar, $f(E) \subset U$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\varphi \circ f$ messbar.*

Beweis. Sei $V \subset \mathbb{R}$ offen. Wir müssen zeigen dass $(\varphi \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{S}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\varphi \circ f)^{-1}(V) &= \{x \in E : \varphi(f(x)) \in V\} = \{x \in E : f(x) \in \varphi^{-1}(V)\} \\ &= f^{-1}(\varphi^{-1}(V)).\end{aligned}$$

Da φ stetig ist, ist die Menge $\varphi^{-1}(V)$ offen in U und damit offen in $\mathbb{R}$. Daher ist $(\varphi \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ nach Lemma 3.3. $\square$

Beispiel: $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$. Dies liefert: falls $g : E \to \mathbb{R}$ messbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in E$, so ist $1/g$ messbar. In Verbindung mit Lemma 3.4 (iv) folgt die Messbarkeit von f/g.

Satz 3.6. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, $E \in \mathcal{S}$, $\{f_k\}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_k : E \to [-\infty, \infty]$. Dann gilt:*

(i) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *und* $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *sind messbar;*

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ *und* $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ *sind messbar.*

Notation (vgl. Kapitel 1.4): Für $A \subset [-\infty, \infty]$ ist

$$\sup A = \begin{cases} -\infty & \text{falls } A = \emptyset \text{ oder } A = \{-\infty\}; \\ \infty & \text{falls } \infty \in A; \\ \sup(A \setminus \{-\infty\}) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.22}$$

In der letzte Zeile ist $A \setminus \{-\infty\} \subset \mathbb{R}$, und sup wie in Analysis 1 definiert. Analog wird $\inf A$ definiert.

Diese Definition wird auf Funktionen fortgesetzt durch punktweise Bildung des Supremums, d.h. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k : E \to [-\infty, \infty]$ ist durch $(\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k)(x) = \sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(\sup_k f_k)^{-1}([-\infty, a]) &= \{x \in E : \sup_k f_k(x) \leq a\} && (3.23)\\ &= \{x \in E : f_k(x) \leq a \ \forall k\} && (3.24)\\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{x \in E : f_k(x) \leq a\} && (3.25)\\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}([-\infty, a]) . && (3.26)\end{aligned}$$

Deshalb ist $\sup_k f_k$ messbar. Analoges gilt für $\inf_k f_k$.

Aus

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{h\geq k} f_h \tag{3.27}$$

folgt, mit zwei Anwendungen von (i), dass auch $\limsup f_k$ messbar ist. $\square$

Lemma 3.7. *Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra.*

(i) Sei $E \in \mathcal{S}$, $F : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ mit

$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} F_h \tag{3.28}$$

Dann ist $f : E \to [-\infty, \infty]$ genau dann messbar, wenn alle $f|_{F_h} : F_h :\to [-\infty, \infty]$ messbar sind.

(ii) Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und sei $N \in \mathcal{S}$ eine Nullmenge. Dann ist jede Funktion $f : N \to [-\infty, \infty]$ messbar.

Beweis. Hausaufgabe. □

Wiederholung Sei E eine Menge und seien $f_k : E \to \mathbb{R}$ Funktionen $k \in \mathbb{N}$. Die Folge f_k *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ falls

$$\forall x \in X \quad \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x).$$

Die Folge *konvergiert gleichmäßig* gegen f, falls

$$\lim_{k \to \infty} \sup\{|f_k(x) - f(x)| : x \in E\} = 0.$$

Standardbeispiel: $E = [0, 1)$, $f_k(x) = x^k$, $f(x) = 0$. Dann gilt $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in E$, aber

$$\sup\{|f_k(x) - f(x)| : x \in E\} = 1.$$

Satz 3.8 (Egorov)**.** *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ mit $\mu(E) < \infty$. Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_k : E \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $F_\varepsilon \subset E$, so dass $\mu(E \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und $f_k \to f$ gleichmäßig auf F_ε, d.h., $\lim\limits_{k \to \infty} \sup\{|f_k(x) - f(x)| : x \in F_\varepsilon\} = 0$.*

Bemerkung. Es reicht anzunehmen, dass f_k punktweise fast überall gegen f konvergiert, d.h., dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in E \setminus N$.

Beweis. Sei gilt $f = \limsup_{k \to \infty} f_k = \liminf_{k \to \infty} f_k$. Daher ist f messbar.

Sei $h \in N$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die „schlechte“ Menge

$$B_{h,k} := \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > 2^{-l}\}$$

und definieren

$$E_{h,j} := \bigcup_{k \geq j} B_{h,k}.$$

Schritt 1 Es gilt $\lim_{j\to\infty}\mu(E_{l,j})=0$.
Aus $f_k(x)-f(x)\to 0$ punktweise folgt

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_{h,j}=\emptyset \qquad \text{für alle } h\in\mathbb{N}\,. \tag{3.29}$$

Beweis: sei $x\in E$. Dann gibt es ein j, so dass für alle $k\geq j$ gilt $|f_k(x)-f(x)|<2^{-l}$. Daraus folgt $x\notin E_{l,j}$, also gilt $x\notin\bigcap_{j\in\mathbb{N}}E_{h,j}$.

Da f messbar ist, sind alle Mengen $E_{h,j}$ messbar und es gilt

$$E_{h,j}\supset E_{h,j+1}\,. \tag{3.30}$$

Mit $\mu(E)<\infty$ folgt aus Satz 2.10(ii) dass für alle h gilt:

$$0=\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}E_{h,j}\right)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_{h,j})\,. \tag{3.31}$$

Schritt 2 Definition von F_ε.
Aus Schritt 1 folgt, dass es $J:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ gibt, so dass $\mu(E_{h,J(h)})\leq 2^{-(h+1)}\varepsilon$ für alle $h\in\mathbb{N}$. Sei

$$F_\varepsilon := E\setminus\bigcup_{h\in\mathbb{N}}E_{h,J(h)}\,. \tag{3.32}$$

Dann ist

$$\mu(E\setminus F_\varepsilon)=\mu\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}}E_{h,J(h)}\right)\leq\sum_{h\in\mathbb{N}}\mu(E_{h,J(h)})\leq\varepsilon\,. \tag{3.33}$$

Schritt 3 Gleichmäßige Konvergenz auf F_ε.
Es reicht zu zeigen, dass

$$\forall h\in\mathbb{N}\ \exists j\in\mathbb{N},\ \forall k\geq j\ \forall x\in F_\varepsilon\quad |f_k(x)-f(x)|\leq 2^{-h} \tag{3.34}$$

Sei $h\in\mathbb{N}$. Sei $j=J(h)$. Aus $x\in F_\varepsilon$ folgt $x\notin E_{h,J(h)}$. Deshalb gilt für alle $k\geq j=J(h)$ die Abschätzung $|f_k(x)-f(x)|\leq 2^{-h}$. □

Bemerkung. Das Resultat ist optimal in dem Sinne, dass die Aussage nicht mit $\mu(E\setminus F)=0$ gilt. Standardbeispiel: $E=[0,1)\subset\mathbb{R}$, $\mathcal{S}=\mathcal{M}_1$, $\mu=\mathcal{L}^1$,

$$f_k(x)=x^k,\quad f(x)=0.$$

Behauptung: für jede Lebesgue Nullmenge N gilt:

$$\sup_{[0,1)\setminus N}x^k=1.$$

Beweis: Sei $\delta \in (0,1)$. Dann hat die Menge $[1-\delta,1) \setminus N$ Maß $\delta > 0$ und ist deswegen nicht leer. Da x^k monoton ist,gilt $\sup_{[1-\delta,1)\setminus N} x^k \geq (1-\delta)^k$ für alle $\delta > 0$. Daraus folgt die Behauptung. [17.11. 2016, Vorlesung 9]

[22.11. 2016, Vorlesung 10]

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $\mathcal{S} = \mathcal{M}_n$ die σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen. Jede stetige Funktion f ist Lebesgue messbar, da das Urbild jeder offenen Menge offen, also Lebesgue messbar ist. Die Klasse der messbaren Funktionen ist wesentlich größer und robuster (vgl. z.B. Satz 3.6) als die Klasse der stetigen Funktionen. Der folgende Satz zeigt, dass dennoch messbare Funktionen sehr eng mit stetigen Funktionen verwandt sind.

Satz 3.9 (Lusin)**.** *Sei $E \in \mathcal{M}_n$, $f : E \to \mathbb{R}$.*

(i) Die Funktion f ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C_\varepsilon \subset E$ gibt, so dass die Einschränkung von f auf C_ε stetig ist, und $\mathcal{L}^n(E \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

(ii) Falls $\mathcal{L}(E) < \infty$, so ist f genau dann Lebesgue-messbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $C_\varepsilon \subset E$ gibt, so dass die Einschränkung von f auf C_ε stetig ist, und $\mathcal{L}^n(E \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Bemerkung. (i) Das bedeutet nicht, dass $f : E \to \mathbb{R}$ in alle Punkten $x \in C_\varepsilon$ stetig ist. Beispiel: $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann kann man $C_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus \bigcup_j B_{2^{-j-1}\varepsilon}(q_j)$, mit $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surjektiv, nehmen. Aus $\mathbb{Q} \cap C_\varepsilon = \emptyset$ folgt $f|_{C_\varepsilon} = 0$, deshalb ist die Einschränkung von f stetig. Aber f ist in keinem $x \in \mathbb{R}$ stetig.
(ii) Die Aussage (ii) des Satzes gilt auch wenn das Lebesguemaß durch ein beliebiges Radonmaß μ^* auf $\mathbb{R}^n$ (oder auf einem lokal kompakten metrischen Raum) ersetzt wird. Dazu muss man einfach in Teil 1 bis 3 des Beweises $\mathcal{L}^n$ durch μ^* ersetzen. Man kann die Bildmenge $\mathbb{R}$ durch einen separablen metrischen Raum ersetzen.

Beweis. Teil 1 (einfach): Wir zeigen, dass jede Funktion f mit der genannten Eigenschaft messbar ist.

Sei $C_k \subset E$ so, dass f auf C_k stetig ist, und $\mathcal{L}^n(E \setminus C_k) \leq 2^{-k}$. Dann ist $f|_{C_k}$ messbar. Sei $N = E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Aus $\mathcal{L}^n(N) \leq \mathcal{L}^n(E \setminus C_k) \leq 2^{-k}$ folgt, dass N eine Nullmenge ist. Da f auf jeder C_k messbar ist, folgt aus Lemma 3.7 dass f auch auf $E = N \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ messbar ist.

Teil 2: Wir zeigen, dass für jede messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ und jedes $\delta > 0$ eine kompakte Menge $F \subset E$ und eine Funktion $g \in C^0(F;\mathbb{R})$ existieren, so dass $\mathcal{L}^n(E \setminus F) \leq \delta$ und $|g - f|(x) \leq \delta$ für alle $x \in F$.

Sei $y : \mathbb{N} \to \delta\mathbb{Z}$ bijektiv, und $I_h = [y_h, y_h + \delta)$. Die Intervalle I_h sind paarweise disjunkt, und $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} I_h = \mathbb{R}$. Sei

$$A_h = f^{-1}(I_h)\,. \tag{3.35}$$

Die Mengen A_h sind paarweise disjunkt, und $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h = E$. Sei $g : E \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = y_h$ für $x \in A_h$ definiert. Dann gilt $|g - f|(x) \le \delta$ für alle $x \in E$.

Aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_h) = \mathcal{L}^n(E) < \infty \tag{3.36}$$

folgt, dass eine Zahl $H \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$\sum_{h=H}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_h) \le \delta\,. \tag{3.37}$$

Aus Satz 2.21(iii) folgt, dass kompakte Mengen $K_h \subset A_h$ existieren, so dass $\mathcal{L}^n(A_h \setminus K_h) \le \delta/H$. Wir definieren $F = \bigcup_{h=0}^{H-1} K_h$. Dann gilt

$$\mathcal{L}^n(E \setminus F) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h \setminus \bigcup_{h=0}^{H-1} K_h\right) \tag{3.38}$$

$$\le \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{h=H}^{\infty} A_h\right) + \sum_{h\in\mathbb{N},h<H} \mathcal{L}^n(A_h \setminus K_h) \le 2\delta\,. \tag{3.39}$$

Da die Mengen K_h endlich viele kompakte paarweise disjunkte Mengen sind, und g auf jedem K_h konstant ist, ist g auf F stetig, d.h., $g \in C^0(F)$.

Teil 3: Ende des Beweises für $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.

Für $\delta = \delta_j = 2^{-j-1}\varepsilon$ seien F_j und g_j wie in Teil 2. Die Menge

$$C_\varepsilon = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j\,. \tag{3.40}$$

ist eine kompakte Teilmenge von E, und erfüllt $\mathcal{L}^n(E \setminus C_\varepsilon) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(E \setminus F_j) \le \varepsilon$. Für alle $x \in C_\varepsilon$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $|g_j(x) - f(x)| \le 2^{-j-1}\varepsilon$. Daher gilt $\sup\{|g_j(x) - f(x)| : x \in C_\varepsilon\} \le 2^{-j-1}$ und g_j konvergiert auf C_ε gleichmässig gegen f. Da g_j auf $C_\varepsilon \subset F_j$ stetig ist ist auch f auf C_ε stetig.

Teil 4: $\mathcal{L}^n(E) = \infty$. Sei

$$E_k = \{x \in E : k < |x| < k+1\}\,. \tag{3.41}$$

Sei $C^k \subset E_k$ abgeschlossen, so dass f auf C^k stetig ist und $\mathcal{L}^n(E_k \setminus C^k) \le 2^{-k}\varepsilon$. Sei $C_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C^k$. Dann gilt $\mathcal{L}^n(E \setminus C_\varepsilon) = \sum_k \mathcal{L}^n(E_k \setminus C^k) \le 2\varepsilon$, C_ε ist abgeschlossen, und f ist auf C_ε stetig. □

Mit der folgenden Aussage läßt sich die eine Folgerung in Teil (ii) des Satzes wie folgt verschärfen:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge C_ε, so dass

$$f_{|C_\varepsilon} = g_{\varepsilon|C_\varepsilon} \quad \mathcal{L}^n(E \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Satz 3.10. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ auf K.*

Beweis. Übungsaufgabe[10] Wir nehmen zunächst an, dass es eine stetige Funktion $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gibt mit $\omega(0) = 0$ und

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x, y \in K \tag{3.42}$$

(man nennt ω einen Stetigkeitsmodul). Wir verlangen, dass ω selber gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$|\omega(a) - \omega(b)| \leq \eta(|a - b|)$$

mit

$$\lim_{s \downarrow 0} \eta(s) = 0. \tag{3.43}$$

Teil 1: Definiere

$$F(x) := \inf_{z \in K} f(z) + \omega(|x - z|).$$

Zeigen Sie, dass das Infimum ein Minimum ist und $F(x) = f(x)$ für alle $x \in K$.

Teil 2: F ist stetig auf $\mathbb{R}^n$. Tip: Argumentieren Sie ähnlich wie beim Beweis von Lemma 2.26

Teil 3: Konstruktion von ω. Für $r \geq 0$ sei

$$\rho(r) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in K, |x - y| \leq r\}.$$

Zeigen Sie:

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(|x - y|), \quad \lim_{r \downarrow 0} \rho(r) = 0.$$

Die Funktion ρ ist zwar monoton, muss aber nicht stetig sein. Daher definieren wir

$$\omega(t) := \frac{1}{t} \int_t^{2t} \rho(r)\, dr, \quad \text{für } t > 0, \quad \omega(0) = 0. \tag{3.44}$$

Zeigen Sie, dass (3.42) und (3.43) gelten, wobei

$$\eta(s) := \sup\{|\omega(a) - \omega(b)| : a, b \in [0, \infty), |a - b| \leq s\}.$$

□

[10] Die in der Übungsaufgabe skizzierte Beweisidee orientiert sich an dem Beweis der Fortsetzbarkeit lipschitzstetiger Funktionen. Einen eleganten alternativen Beweis findet man in F. Hausdorff, Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung, Mathematische Zeitschrift Bd. 5 (1919), 292–309. Der Beweis von Hausdorff funktioniert auch wenn die Menge K lediglich abgeschlossen und nicht notwendig kompakt ist.

3.2 Einfache Funktionen und deren Integration

Definition 3.11. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$.*

(i) Eine Funktion $f : E \to [0, \infty)$ heißt einfach, falls f messbar und $f(E)$ endlich oder abzählbar ist.

(ii) Eine Menge $E \in \mathcal{S}$ heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $F : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ gibt, so dass $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ und $\mu(F_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. (i) In $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mathcal{L}^n)$ ist jede Menge σ-endlich.
(ii) In der Definition von „σ-endlich“ kann die Folge F_k aufsteigend gewählt werden (betrachte $F_k' := \bigcup_{j=0}^{k} F_j$).
(iii) Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist jede abzählbare Vereinigung σ-endlicher Mengen selbst σ-endlich.

Notation Beachte, dass hier einfache Funktion nach Definition nichtnegativ sind. Einige andere Autoren nennen auch messbare Funktionen, die abzählbar viele Werte in $\mathbb{R}$ annehmen, einfach.

Lemma 3.12. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$.*

(i) $f : E \to \mathbb{R}$ ist genau dann einfach, wenn $F : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ und $c : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ existieren, so dass $F_j \cap F_k = \emptyset$ für $j \neq k$ und

$$f(x) = \sum_{h\in\mathbb{N}} c_h \chi_{F_h}(x) \,. \tag{3.45}$$

(ii) Falls f, g einfach sind, und $a, b \geq 0$, dann sind $af + bg$, fg, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ einfach.

Beweis. (i): Sei f einfach. Falls $\#f(E) = \infty$, reicht es eine bijektive Abbildung $c : \mathbb{N} \to f(E)$ zu wählen und die Mengen F_j durch $F_j := f^{-1}(\{c_j\})$ zu definieren. Falls $\#f(E)$ endlich ist, dann wird c mit 0 fortgesetzt, und F mit $\emptyset$. Falls umgekehrt F und c mit den angegeben Eigenschaften existieren, so ist f messbar und $f(E) = c(\mathbb{N})$ ist abzählbar.

(ii): Die angegeben Funktionen sind nach Lemma 3.4 messbar. Die Menge $(af + bg)(E) \subset af(E) + bg(E)$ ist abzählbar, und das gleiche gilt für die anderen Mengen. □

Lemma 3.13. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$, $f : E \to [0, \infty)$ messbar. Dann gibt es eine Folge einfacher Funktionen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so dass $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in E$ gilt.*

Beweis. Sei

$$f_k(x) = 2^{-k}\lfloor 2^k f(x)\rfloor = \max\left([0, f(x)] \cap 2^{-k}\mathbb{N}\right). \tag{3.46}$$

Aus der Definition folgt, dass $|f - f_k|(x) \leq 2^{-k}$ für alle $x \in E$, und deshalb dass f_k gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aus

$$2^{-k}\mathbb{N} \subset 2^{-(k+1)}\mathbb{N} \tag{3.47}$$

folgt

$$[0, f(x)] \cap 2^{-k}\mathbb{N} \subset [0, f(x)] \cap 2^{-(k+1)}\mathbb{N} \tag{3.48}$$

und deshalb die Monotonie. □

Bemerkung. Die Definition (3.46) kann auch so umformuliert werden: Sei, für $j \in \mathbb{N}$, $F_j = f^{-1}([j2^{-k}, (j+1)2^{-k}))$. Da f messbar ist, sind diese Mengen alle messbar. Dann setzt man $f_k = \sum_j j2^{-k}\chi_{F_j}$.

Definition 3.14. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ $\varphi : E \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion. Das Integral von φ über E ist definiert als*

$$\int_E \varphi\, d\mu := \sum_{y \in \varphi(E)\setminus\{0\}} y\, \mu(\varphi^{-1}(y)). \tag{3.49}$$

Die einfache Funktion φ heißt integrierbar falls $\int_E \varphi\, d\mu < \infty$. Man schreibt die rechte Seite von (3.49) *auch als*

$$\sum_{y \in \varphi(E)} y\, \mu(\varphi^{-1}(y)), \tag{3.50}$$

mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

Für $A \in \mathcal{S}$, $A \subset E$ definiert man

$$\int_A \varphi\, d\mu = \int_A \varphi|_A\, d\mu. \tag{3.51}$$

[22.11. 2016, Vorlesung 10]

[24.11. 2016, Vorlesung 11]

Lemma 3.15. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, sei $E \in \mathcal{S}$. Dann gilt:*

(i) Falls $\varphi : E \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion ist, und $A \subset E$ und $A \in \mathcal{S}$ dann ist $\varphi\chi_A : E \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, und

$$\int_A \varphi\, d\mu = \int_E \varphi\chi_A\, d\mu. \tag{3.52}$$

(ii) Falls $\varphi : E \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion ist und $A : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ eine Folge paarweiser disjunkter messbarer Mengen mit $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ ist, dann gilt

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_k \int_{A_k} \varphi \, d\mu \tag{3.53}$$

Insbesondere gilt für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $A \subset E$

$$\int_E \varphi \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu + \int_{E\setminus A} \varphi \, d\mu \,. \tag{3.54}$$

(iii) Falls φ, $\psi : E \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen sind, und $a, b \geq 0$, dann ist $a\varphi + b\psi$ auch eine einfache Funktion und

$$\int_E (a\varphi + b\psi) d\mu = a \int_E \varphi d\mu + b \int_E \psi d\mu \,. \tag{3.55}$$

(iv) Falls φ, $\psi : E \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen sind, und $\varphi \leq \psi$, dann gilt:

$$\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu \,. \tag{3.56}$$

Beweis. (i): $(\varphi\chi_A)(E) \subset \{0\} \cup \varphi(E)$, deshalb ist $\varphi\chi_A$ einfach. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_E \varphi\chi_A d\mu &= \sum_{y\in\varphi(E)} y\mu((\varphi\chi_A)^{-1}(y)) = \sum_{y\in\varphi(E)} y\mu(\varphi^{-1}(y) \cap A) \\ &= \sum_{y\in\varphi(A)} y\mu(\varphi|_A^{-1}(y)) = \int_A \varphi|_A d\mu \,.\end{aligned}$$

Bei der vorletzen Identität haben wir benutzt, dass für $y \in \varphi(E) \setminus \varphi(A)$ gilt $\varphi^{-1}(y) \cap A = \emptyset$.

(ii): Die Menge $\varphi^{-1}(y)$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $\varphi^{-1}(y) \cap A_k$. Damit folgt aus der σ-Additivität von μ:

$$\mu(\varphi^{-1}(y)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(\varphi^{-1}(y) \cap A_k)$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_E \varphi \, d\mu &= \sum_{y\in\varphi(E)} y\, \mu(\varphi^{-1}(y)) = \sum_{y\in\varphi(E)} \sum_{k\in\mathbb{N}} y\, \mu(\varphi^{-1}(y) \cap A_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{y\in\varphi(E)} y\, \mu(\varphi^{-1}(y) \cap A_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{y\in\varphi(A_k)} y\, \mu(\varphi^{-1}(y) \cap A_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{y\in\varphi(A_k)} y\, \mu(\varphi_{|A_k}^{-1}(y)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} \varphi \, d\mu.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Dabei haben wir im drittletzten Schritt benutzt, dass für $y \in \varphi(E) \setminus \varphi(A_k)$ gilt $\varphi^{-1}(y) \cap A_k = \emptyset$. Die Identität (3.54) ist ein Spezialfall von (3.53) (setze $A_0 = A$, $A_1 = E \setminus A$, $A_k = \emptyset$ für $k \geq 2$).

(iii): Sei $\tilde{\varphi} = a\varphi$ und $a > 0$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ einfach und messbar und mit der Substitution $y = az$ folgt

$$\int_E \tilde{\varphi}\, d\mu = \sum_{y \in \tilde{\varphi}(E)} y\, \mu(\tilde{\varphi}^{-1}(y)) = \sum_{z \in \varphi(E)} az\, \mu(\varphi^{-1}(z)) = a \int_E \varphi\, d\mu. \tag{3.58}$$

Es reicht also, im folgenden den Fall $a = b = 1$ zu betrachten.

Falls φ konstant ist, ist der Beweis einfach. Genauer sei $\varphi(x) = c$ für alle $x \in E$. Dann gilt $(\varphi+\psi)(E) = c+\psi(E)$ und für $v \in \psi(E)$ gilt $(\varphi+\psi)^{-1}(c+v) = \psi^{-1}(v)$. Daraus folgt mit der Substitution $y = c + v$

$$\begin{aligned}
&\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu \\
&= \sum_{y \in (\varphi+\psi)(E)} y\, \mu\big((\varphi + \psi)^{-1}(y)\big) = \sum_{v \in \psi(E)} (c + v)\, \mu(\psi^{-1}(v)) \\
&= c \sum_{v \in \psi(E)} \mu(\psi^{-1}(v)) + \int_E \psi\, d\mu \\
&= c\, \mu(E) + \int_E \psi\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Falls $A \subset E$, $A \in \mathcal{S}$ und $\varphi(x) = c$ für alle $x \in A$ folgt analog

$$\int_A (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_A \varphi\, d\mu + \int_A \psi\, d\mu. \tag{3.60}$$

Für eine beliebige einfache Funktion φ zerlegen wir E in höchstens abzählbar viele disjunkte Mengen $\varphi^{-1}(u)$, auf denen φ konstant ist (mit $u \in \varphi(E)$). Dann folgt die Behauptung aus (3.60) und (ii):

$$\begin{aligned}
\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu &= \sum_{u \in \varphi(E)} \int_{\varphi^{-1}(u)} (\varphi + \psi)\, d\mu \\
&= \sum_{u \in \varphi(E)} \left\{ \int_{\varphi^{-1}(u)} \varphi\, d\mu + \int_{\varphi^{-1}(u)} \psi\, d\mu \right\} \\
&= \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Alternativer Beweis (nicht im Detail in der Vorlesung besprochen):
Wir zerlegen E in disjunkte Teilmengen, auf denen sowohl φ als auch ψ konstant sind. Für $u \in \varphi(E)$ und $v \in \psi(E)$ seien

$$A_{u,v} := \varphi^{-1}(u) \cap \psi^{-1}(v).$$

Dann gilt

$$\bigcup_{v\in\psi(E)} A_{u,v} = \varphi^{-1}(u), \qquad \bigcup_{u\in\varphi(E)} A_{u,v} = \psi^{-1}(v). \tag{3.62}$$

Außerdem ist $\varphi = u$ und $\psi = v$ auf $A_{u,v}$ und somit

$$\int_{A_{u,v}} (\varphi+\psi)\, d\mu = (u+v)\,\mu(A_{u,v}).$$

Aus (ii) folgt

$$\begin{aligned}
\int_E (\varphi+\psi)\, d\mu &= \sum_{u\in\varphi(E), v\in\psi(E)} (u+v)\,\mu(A_{u,v}) \\
&= \sum_{u\in\varphi(E)} \sum_{v\in\psi(E)} u\,\mu(A_{u,v}) + \sum_{u\in\varphi(E)} \sum_{v\in\psi(E)} v\,\mu(A_{u,v}) \\
&= \sum_{u\in\varphi(E)} u \sum_{v\in\psi(E)} \mu(A_{u,v}) + \sum_{v\in\psi(E)} v \sum_{u\in\varphi(E)} \mu(A_{u,v}) \\
&\underset{(3.62)}{=} \sum_{u\in\varphi(E)} u\,\mu(\varphi^{-1}(u)) + \sum_{v\in\psi(E)} v\,\mu(\psi^{-1}(v)) \\
&= \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

(iv): Aus $\psi \geq \varphi$ folgt, dass $\psi - \varphi$ eine einfache Funktion ist. Aus (iii) folgt

$$\int_E \psi\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_E (\psi-\varphi)\, d\mu\,, \tag{3.64}$$

und mit $\int_E (\psi-\varphi)\, d\mu \geq 0$ die Aussage. □

3.3 Integration nichtnegativer messbarer Funktionen, Konvergenzsätze I

Definition 3.16. *Sei $(X,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum, $E\in\mathcal{S}$ $f: E\to[0,\infty]$ messbar. Dann ist das Integral durch*

$$\int_E f\, d\mu := \sup\left\{\int_E \varphi\, d\mu : \varphi: E\to[0,\infty) \text{ einfach, } \varphi\leq f\right\}. \tag{3.65}$$

definiert. Die Funktion f heißt μ-integrierbar falls $\int_E f d\mu < \infty$.

Für $F\subset E$, $F\in\mathcal{S}$, definiert man

$$\int_F f\, d\mu = \int_F f|_F\, d\mu\,. \tag{3.66}$$

Für $f,g: X\to Y$, bedeutet "$f=g$ fast überall" dass eine Nullmenge N existiert, so dass $f(x)=g(x)$ für alle $x\notin N$.

Bemerkung. Aus der Definition folgt, dass $\int_E f\,d\mu \in [0,\infty]$ für alle messbaren Funktionen $f : E \to [0,\infty]$.

Bemerkung. Aus der Monotonie folgt sofort, dass für einfache Funktionen die obige Definition des Integrals mit der früheren Definition 3.14 übereinstimmt.

Lemma 3.17. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ σ-endlich, $f : E \to [0,\infty]$ messbar.*

(i) Falls $f \leq g$ auf E dann $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$. Insbesondere gilt: "$g$ integrierbar, f messbar, $f \leq g$" $\Longrightarrow$ "f integrierbar".

(ii) Falls $A \subset E$ und $A \in \mathcal{S}$ dann gilt

$$\int_A f\,d\mu = \int_E f\chi_A\,d\mu\,. \tag{3.67}$$

(iii) Falls $N \subset E$ eine Nullmenge ist, dann gilt $\int_N f d\mu = 0$.

(iv) (Chebychev-Markovsche Ungleichung)
Sei f integrierbar. Dann ist $f < \infty$ fast überall,

$$\mu(f^{-1}([a,\infty])) \leq \frac{1}{a}\int_E f d\mu < \infty \text{ für alle } a > 0. \tag{3.68}$$

und $f^{-1}((0,\infty])$ ist σ-endlich.

(v) $\int_E f\,d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

(vi) Falls $f^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich ist, gilt

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{\int_F \varphi\,d\mu : F \subset E, F \in \mathcal{S}, \mu(F) < \infty,\right.$$
$$\left.\#\varphi(F) < \infty, 0 \leq \varphi \leq f\right\}. \tag{3.69}$$

Bemerkung. (Nicht in der Vorlesung besprochen) Eigenschaft (vi) spielt eine wichtige Rolle beim Beweis des Satzes von der monotonen Konvergenz. Die Annahme in (vi), dass $f^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich ist, kann nicht weggelassen werden. Beispiel: Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ durch $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = \infty$ für alle $A \neq \emptyset$. Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ ein Maßraum. Die in (vi) betrachtete Menge von Funktionen φ besteht aber nur aus der Funktion $\varphi \equiv 0$. Daher ist das Supremum auf der rechten Seite von (3.69) Null. Für die messbare Funktion $f \equiv 1$ gilt aber $\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \infty$.

Beweis. (i): Sei $\varphi : E \to [0,\infty)$ einfach, integrierbar, $\varphi \leq f$. Dann ist $\varphi \leq g$. Deshalb gilt:

$$\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu \tag{3.70}$$

für alle φ mit den obigen Eigenschaften. Bildet man das Supremum über solche φ, so folgt $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

(ii): (nicht in der Vorlesung besprochen) Dies folgt aus 3.15(i). Zur Illustration betrachten wir die Ungleichung '$\leq$' in (ii) . Nach Definition ist die linke Seite gerade $\int f_{|A} \, d\mu$. Sei $\varphi : A \to [0,\infty)$ eine einfache Funktion mit $\varphi \leq f_{|A}$. Sei $\psi = \varphi$ auf A und $\psi = 0$ auf $E \setminus A$. Dann ist ψ eine einfache Funktion und $\psi\chi_A \leq f\chi_A$. Mit 3.15(i) und der Definition des Integrals von $f\chi_A$ folgt

$$\int_A \varphi \, d\mu = \int_A \psi_{|A} \, d\mu = \int_E \psi\chi_A \, d\mu \leq \int_E f\chi_A \, d\mu \,. \tag{3.71}$$

Durch Bildung es Supremums über φ folgt die Ungleichung '$\leq$' in (ii).

(iii): Sei $\varphi : E \to [0,\infty)$ eine einfache Funktion mit $\varphi \leq f\chi_N$. Dann ist $\varphi = 0$ auf $E \setminus N$, deshalb $\int_E \varphi \, d\mu = 0$ (man beachte die Definition (3.49)). Es folgt, dass $\int_E f\chi_N d\mu = 0$.

(iv): Sei $a > 0$, $E_a = f^{-1}([a,\infty])$. Dann ist $\varphi = a\chi_{E_a}$ eine einfache Funktion mit $\varphi \leq f$, deshalb gilt:

$$a\mu(E_a) = \int_E a\chi_{E_a} d\mu \leq \int_E f d\mu \,. \tag{3.72}$$

Mit $f^{-1}(\{\infty\}) = \cap_{k\in\mathbb{N}} E_k$ und

$$f^{-1}((0,\infty]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}((\frac{1}{k},\infty]) \,. \tag{3.73}$$

folgen die anderen beiden Aussagen.

(v): Falls $f = 0$ außerhalb einer Nullmenge $N \subset E$, dann folgt $\int_E f \, d\mu = 0$ aus $\int_E f \, d\mu = \int_E f\chi_N \, d\mu = \int_N f \, d\mu$ und (iii).

Sei $\int_E f \, d\mu = 0$. Aus (iv) folgt, dass alle Mengen auf der rechten Seite von (3.73) Nullmengen sind. Deshalb ist $f^{-1}((0,\infty])$ ebenfalls eine Nullmenge. Das beendet den Beweis.

(vi): Überblick: Die Hauptidee der Reduktion von einfachen Funktionen mit abzählbar vielen Werten auf einfache Funktionen mit endlich vielen Werten ist, dass eine konvergente Reihe sich beliebig gut durch eine endliche Summe approximieren läßt (wenn man die Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ zugrunde legt gilt das auch wenn der Wert der Reihe ∞ ist). Falls f integrierbar ist, folgt die Eigenschaft $\mu(F) < \infty$ aus der Chebychev-Markovschen Ungleichung. Falls $\inf_E f \, \mu = \infty$ muss man die zusätzlich benutzen, dass $f^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich ist.

Details: Sei

$$M = \sup \left\{ \int_F \varphi \, d\mu : F \subset E, F \in \mathcal{S}, \mu(F) < \infty, \right. \tag{3.74}$$

$$\left. \varphi : F \to [0,\infty) \text{ messbar}, \#\varphi(F) < \infty, 0 \le \varphi \le f \right\} \in [0,\infty] .$$

Aus der Definition des Integrals folgt unmittelbar, dass $M \le \int_E f \, d\mu$.

Um die andere Ungleichung zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall, dass

$$\int_E f \, d\mu < \infty.$$

Sei eine Funktion φ wie in der Definition des Integrals, d.h., eine beliebige einfache Funktion $\varphi : E \to [0,\infty)$, mit $\varphi \le f$.

Wegen der Monotonie ist auch φ integrierbar. Daher ist die Reihe

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \mu(F_j) \tag{3.75}$$

konvergent. Hier sind $c_j \in [0,\infty)$ und $F_j \subset E$ wie in Lemma 3.12(i). Da die Reihe konvergiert, gibt es $J \in \mathbb{N}$ so dass gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \mu(F_j) - \varepsilon < \sum_{j=0}^{J} c_j \mu(F_j) . \tag{3.76}$$

Da die Summe endlich ist, gilt $\mu(F_j) < \infty$ für alle j mit $c_j \neq 0$. Wir definieren F als die Vereinigung der F_j mit $0 \le j \le J$ und $c_j \neq 0$, und $\tilde{\varphi}$ als die Summe der entsprechenden $c_j \chi_{F_j}$. Dann gilt $\mu(F) < \infty$, $\#\tilde{\varphi}(F) \le J + 2 < \infty$, $\tilde{\varphi} \le \varphi \le f$, und

$$M \ge \int_F \tilde{\varphi} \, d\mu = \sum_{j=0}^{J} c_j \, \mu(F_j) \ge \int_E \varphi \, d\mu - \varepsilon . \tag{3.77}$$

Da φ eine beliebige Funktion in der Definition des Integral war, und ε beliebig war, folgt die gewünschte Ungleichung

$$M \ge \int_E f d\mu . \tag{3.78}$$

Wir betrachten nun den verbleibenden Fall

$$\int_E f \, d\mu = \infty.$$

Sei $A = f^{-1}((0,\infty])$. Sei $K > 1$. Nach Definition des Integrals gibt es eine einfache Funktion $\varphi \le f$, so dass

$$K \le \int_E \varphi \, d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j \mu(F_j),$$

wobei c_j and F_j wie oben sind. Es gibt ein J, so dass

$$\sum_{j=0}^{J} c_j \mu_j(F_j) \geq K - 1.$$

Falls $\mu_j(F_j) < \infty$ für alle j definieren wir $\tilde{\varphi}$ und F wie oben und erhalten

$$M \geq \int_F \tilde{\varphi}\, d\mu \geq K - 1.$$

Falls es ein j gibt mit $\mu(F_j) = \infty$ benutzen wir, dass $F_j \subset A$ (denn für $x \in E \setminus A$ gilt $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq 0$ also $\varphi(x) = 0$) und dass A nach Voraussetzung σ-endlich ist. Nach Definition 3.11 und der darauf folgenden Bemerkung gibt es $A_k \in \mathcal{S}$ mit $A_k \subset A_{k+1}$, $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$. Dann gilt $\mu(F_j \cap A_k) < \infty$ und $F_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(F_j \cap A_k)$. Mit Satz 2.10(ii) folgt, dass $\lim_{k\to\infty} \mu(F_j \cap A_k) = \mu(F_j) = \infty$. Daher gibt es ein J, so dass $\mu(F_j \cap A_j) \geq (K-1)/c_j$. Setze $F = F_j \cap A_J$ und $\tilde{\varphi} = c_j \chi_F$. Dann gilt wiederum

$$M \geq \int_E \tilde{\varphi}\, d\mu \geq K - 1.$$

Da $K > 1$ beliebig war, folgt $M = \infty$. Damit ist die Behauptung auch für den Fall $\int_E f\, d\mu = \infty$ bewiesen. □

[24.11. 2016, Vorlesung 11]

[29.11. 2016, Vorlesung 12]

Demnächst werden wir die wichtigsten Konvergenzsätze für nichtnegative Funktionen beweisen. Die folgenden drei Beispiele zeigen, dass man bei der Vertauschung von Konvergenz und Integral vorsichtig sein muss.

Beispiele. (a) (Entweichen nach ∞): Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_k = \chi_{[k,k+1]}$ definiert. Dann gilt: (i) $f_k \to 0$ punktweise; (ii) $\int_{\mathbb{R}} f_k d\mathcal{L}^1 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) (Konzentration): Sei $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_k = k\chi_{(0,1/k)}$ definiert. Dann gilt wieder: (i) $g_k \to 0$ punktweise; (ii) $\int_{\mathbb{R}} g_k d\mathcal{L}^1 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) (Verschmieren): Sei $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h_k = 1/k\chi_{[0,k]}$ definiert. Dann gilt: (i) $h_k \to 0$ gleichmäßig; (ii) $\int_{\mathbb{R}} h_k d\mathcal{L}^1 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 3.18 (Beppo Levi, oder monotone Konvergenz)**.** *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$, und sei f_k eine monoton wachsende Folge messbarer nichtnegativer Funktionen, d.h., für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f_k : E \to [0, \infty]$ messbar und $f_k \leq f_{k+1}$. Dann gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu\,. \tag{3.79}$$

Beweis. Sei $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ (alle Grenzwerte existieren in $[0,\infty]$ wegen der Monotonie). Aus Satz 3.6 folgt, dass $f : E \to [0,\infty]$ messbar ist. Aus Lemma 3.17(i) folgt, dass $\int_E f_k \, d\mu \le \int_E f \, d\mu$ für alle k und deshalb

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu \le \int_E f \, d\mu \, . \tag{3.80}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung dürfen wir voraussetzen, dass $\int f_k \, d\mu < \infty$ für alle k, da sonst die Ungleichung trivial ist. Nach Lemma 3.17 (iv) sind die Mengen $f_k^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich. Sei $f(x) > 0$. Aus der punktweisen Konvergenz folgt, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_k(x) > 0$. Daher gilt

$$f^{-1}((0,\infty]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}((0,\infty]) \quad \text{und somit} \quad f^{-1}((0,\infty]) \ \sigma\text{-endlich.}$$

Wir können daher Lemma 3.17(vi) benutzen, um $\int_E f \, d\mu$ von oben abzuschätzen.

Sei $\varphi : F \to [0,\infty)$ eine einfache integrierbare Funktion wie in 3.17(vi), d.h. $F \subset E$, $F \in \mathcal{S}$, $\mu(F) < \infty$, $0 \le \varphi \le f$, $\#\varphi(F) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$, und

$$E_k = \{x \in F : (1-\varepsilon)\varphi(x) \le f_k(x)\} \, . \tag{3.81}$$

Aus der Monotonie folgt $E_k \subset E_{k+1}$; aus der Messbarkeit von φ und f_k folgt $E_k \in \mathcal{S}$. Sei $x \in F$. Falls $f(x) = 0$ dann $f_k(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$, und deshalb $x \in E_k$ für alle k. Falls $f(x) > 0$ dann gilt $(1-\varepsilon)\varphi(x) < f(x)$, und aus $f_k(x) \to f(x)$ folgt, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_k(x) \ge (1-\varepsilon)\varphi(x)$ (der Wert von k kann von x abhängen, da die Folge nur punktweise konvergiert!). Deshalb gilt:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = F \tag{3.82}$$

und

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (F \setminus E_k) = \emptyset \, . \tag{3.83}$$

Mit $E_k \subset E_{k+1}$, $\mu(F) < \infty$ und Satz 2.10(ii) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(F \setminus E_k) = 0 \, . \tag{3.84}$$

Da $\max \varphi(F) < \infty$, gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\max \varphi(F)\mu(F \setminus E_K) \le \varepsilon$ für alle $k \ge K$. Es gilt (Lemma 3.15(ii))

$$\int_F \varphi \, d\mu = \int_{F\setminus E_k} \varphi \, d\mu + \int_{E_k} \varphi \, d\mu \, ; \tag{3.85}$$

mit $\varphi\chi_{F\setminus E_k} \le \max \varphi(E)\chi_{F\setminus E_k}$ folgt für alle $k \ge K$:

$$\int_{F\setminus E_k} \varphi \, d\mu \le \max \varphi(E)\mu(F \setminus E_k) \le \varepsilon \tag{3.86}$$

und

$$(1-\varepsilon)\int_{E_k} \varphi\, d\mu \leq \int_{E_k} f_k d\mu \leq \int_E f_k d\mu\,. \tag{3.87}$$

Deshalb gilt:

$$(1-\varepsilon)\int_F \varphi\, d\mu \leq \varepsilon(1-\varepsilon) + \lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu\,. \tag{3.88}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\int_F \varphi\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu \tag{3.89}$$

für alle Funktionen φ wie in Lemma 3.17(vi). Durch Bildung des Supremums über solche φ folgt

$$\int_E f\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu\,. \tag{3.90}$$

□

Lemma 3.19. *Sei $(X,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$*

(i) Sei $f : E \to [0,\infty]$ messbar und $f^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich. Dann existiert eine monoton wachsende Folge integrierbarer einfacher Funktionen $f_k : E \to [0,\infty)$ die punktweise gegen f konvergieren, mit $\# f_k(E) < \infty$ für alle k, und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu\,. \tag{3.91}$$

(ii) Falls $f, g : E \to [0,\infty]$ messbar sind und $a, b \in [0,\infty)$ dann gilt:

$$\int_E (af+bg)\, d\mu = a\int_E f\, d\mu + b\int_E g\, d\mu\,, \tag{3.92}$$

wobei $0\cdot\infty = 0$.

Beweis. (i): Diese Konstruktion ist eine Variante von der in Lemma 3.13. Sei $A = f^{-1}((0,\infty])$. Wir können annehmen, dass $A = E$. Sonst führt man die Konstruktion zunächst auf A durch und setzt dann alle Funktionen mit Null auf $E \setminus A$ fort. Daher können wir annehmen, dass E σ-endlich ist. Damit die Funktion f_k integrierbar werden, muss man den Wertebereich und die Menge $\{f_k > 0\}$ geeignet einschränken. Details: Übungsaufgabe.

(ii): Falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist dies Aussage folgt die Aussage direkt aus der Definition des Integrals. Sei also $a > 0$ oder $b > 0$. Dann ist die Aussage klar, falls f oder g nicht integrierbar ist, da in diesem Fall beide Seiten der Gleichung ∞ sind. Wir können also annehmen, dass f und g integrierbar sind. Dann sind insbesondere die Mengen $f^{-1}((0,\infty])$ und $g^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich. Dann folgt die Behauptung aus (i) und dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.18). □

Satz 3.20 (Beppo Levi, oder monotone Konvergenz - 2. Formulierung)**.** *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$ *und* g_k *eine Folge messbarer nichtnegativer Funktionen, d.h., für alle* $k \in \mathbb{N}$ *ist* $g_k : E \to [0, \infty]$ *messbar. Dann ist*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E g_k \, d\mu = \int_E \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k \, d\mu \,. \tag{3.93}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 3.19(ii) und dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.18). Details: Übungsaufgabe. □

Satz 3.21 (Fatou, oder Unterhalbstetigkeit des Integrals)**.** *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$ *und sei* f_k *eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, d.h., für alle* $k \in \mathbb{N}$ *ist* $f_k : E \to [0, \infty]$ *messbar. Dann gilt:*

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu \,. \tag{3.94}$$

Beweis. Sei

$$g_k = \inf_{h\ge k} f_h \,, \qquad \text{und} \qquad g = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = \lim_{k\to\infty} g_k \tag{3.95}$$

(alles wird punktweise verstanden, d.h., für alle $x \in E$ gilt $g_k(x) = \inf\{f_h(x) : h \ge k\}$). Die Folge g_k ist monoton wachsend, und $\liminf_{k\to\infty} f_k = g$.

Aus Satz 3.18 folgt, dass

$$\int_E g \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \, d\mu \,. \tag{3.96}$$

Aus der Definition von g_k folgt $g_k \le f_k$, und aus der Monotonie des Integrals (Lemma 3.17(i)) folgt

$$\int_E g_k \, d\mu \le \int_E f_k \, d\mu \,, \tag{3.97}$$

und deshalb

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu \,. \tag{3.98}$$

Mit (3.96) ist der Beweis beendet. □

Lemma 3.22. *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$ *und* $f : E \to [0, \infty]$ *messbar. Sei* $A : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$*, paarweise disjunkt, mit* $E = \bigcup A_h$*. Dann gilt:*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{h\in\mathbb{N}} \int_{A_h} f \, d\mu \,. \tag{3.99}$$

Beweis. Man setze $g_h = f\chi_{A_h}$ in der zweiten Formulierung des Satzes von Beppo Levi. □

Satz 3.23. *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $f : X \to [0, \infty]$ *messbar. Sei* $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ *durch*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \tag{3.100}$$

definiert. Dann gilt:

(i) $(X, \mathcal{S}, \nu)$ *ist ein Maßraum.*

(ii) Falls f *integrierbar ist, dann ist* ν *bezüglich* μ *stetig, d.h., für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für alle* $E \in \mathcal{S}$ *mit* $\mu(E) \leq \delta$ *gilt:*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \leq \varepsilon \, . \tag{3.101}$$

Insbesondere gilt $\mu(N) = 0 \Longrightarrow \nu(N) = 0$.

(iii) Falls $f > 0$ *überall, dann haben* μ *und* ν *dieselben Nullmengen, d.h.,* $\mu(E) = 0$ *genau dann, wenn* $\nu(E) = 0$.

Notation: man schreibt oft $\nu = f\mu$.

Beweis. (i): Aus $\nu(\emptyset) = \int_E f\chi_\emptyset d\mu = \int_E 0 \, d\mu = 0$ folgt $\nu(\emptyset) = 0$. Die σ-Additivität folgt aus Lemma 3.22. Deshalb ist $(X, \mathcal{S}, \nu)$ ein Maßraum.

(ii): Sei f integrierbar. Sei $E_j = f^{-1}([j, j+1))$, $E_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$. Dann gilt $\mu(E_\infty) = 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k} j\chi_{E_j} \leq f \tag{3.102}$$

und deshalb

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\mu(E_j) \leq \int_X f \, d\mu < \infty \, . \tag{3.103}$$

Sei $K \geq 1$, so dass $\sum_{j=K}^{\infty} j\mu(E_j) \leq \varepsilon/4$. Sei $B = E_\infty \cup (\bigcup_{j \geq K} E_j)$. Da $f \leq j+1$ auf E_j, folgt (mit Lemma 3.17 (iii) und Lemma 3.22):

$$\int_B f \, d\mu = \int_{E_\infty} f \, d\mu + \sum_{j \geq K} \int_{E_j} f \, d\mu \leq 0 + \sum_{j=K}^{\infty} (j+1)\mu(E_j) \leq 2 \sum_{j=K}^{\infty} j\mu(E_j) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \, . \tag{3.104}$$

Sei $\delta = \varepsilon/(2K)$. Sei $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) \leq \delta$. Dann gilt

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_{A \setminus B} K d\mu + \int_B f d\mu \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \, . \tag{3.105}$$

(iii): Aus $\mu(E) = 0$ folgt mit Lemma 3.17(iii), dass $\nu(E) = 0$. Aus $\nu(E) = 0$ folgt mit Lemma 3.17(v), dass $\mu(\{x \in E : f(x) \neq 0\}) = 0$. Aber da $f^{-1}(0) = \emptyset$, folgt $\mu(E) = 0$. □

Bemerkung. Sind zwei Maßräume $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $(X, \mathcal{S}, \nu)$ gegeben, kann man sich die Frage stellen, ob es eine μ-integrierbare Funktion f gibt, so dass $\nu = f\mu$ gilt. Falls es so eine Funktion gibt, so ist sie eindeutig (bis eine μ Nullmenge) und bezeichnet man sie als Radon-Nikodym Ableitung und schreibt $f = d\nu/d\mu$.
Eine solche Funktion f existiert jedoch nicht immer. Beispiel: $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}^1)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_1, \delta_0)$, mit $\delta_0(A) = 1$ falls $0 \in A$ und 0 sonst. Für den Fall $\mu = \mathcal{L}^n$ werden wir später eine notwendige und hinreichende Bedingung für Existenz von f kennenlernen.

[29.11. 2016, Vorlesung 12]

[01.12. 2016, Vorlesung 13]

Lemma 3.24. *Sei $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und sei $f : E \to [0, \infty)$ stetig. Für $x \in [a, b]$ sei*

$$F(x) := \int_{[a,x]} f d\mathcal{L}^1.$$

Dann ist F stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Das Lebesgue Integral stimmt also mit der Stammfunktion von f überein. Daher stimmen insbesondere Lebesuge Integral und Riemann Integral für stetige Funktionen auf einem Interval überein. Für eindimensionale Integrale benutzen wir daher häufig die Notation

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(y)\, dy \quad \text{für } a \leq b.$$

Auf der linken Seite können wir $[a, b]$ durch (a, b) ersetzen, da die zweipunktige Menge $\{a, b\}$ eine $\mathcal{L}^1$ Nullmenge ist.

Beweis. Übungsaufgabe 4, Blatt 6. Tip: für $x_0 \in (a, b)$ und $h > 0$ ist $[a, x_0 + h]$ die disjunkte Vereinigung von $[a, x_0]$ und $(x_0, x_0 + h]$. Daraus folgt $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{(x_0,x_0+h]} f\, d\mathcal{L}$. Ein analoge Identität gilt für $h < 0$. □

3.4 Satz von Fubini, Transformationsformel

Satz 3.25 (Fubini)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ Lebesgue-messbar. Sei, für $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}. \tag{3.106}$$

Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist $E_x \subset \mathbb{R}^m$ $\mathcal{L}^m$-messbar;

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$,

$$f(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^m(E_x) & \textit{falls } x \notin N \\ 0 & \textit{falls } x \in N \end{cases} \tag{3.107}$$

ist messbar;

(iii) $\mathcal{L}^{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x)$.

Man schreibt manchmal

$$\mathcal{L}^{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^m(E_x) d\mathcal{L}^n(x)\,, \tag{3.108}$$

ohne die Nullmenge N explizit zu nennen. Die Funktion $x \mapsto \mathcal{L}^m(E_x)$ ist auf der Nullmenge N nicht definiert; das hat natürlich weder auf die Existenz noch auf den Wert des Integrals Einfluss.

Bemerkung. (i) Durch Anwendung der linearen Abbildung $T(x,y) = (y,x)$ sieht man, dass auch gilt: es gibt eine Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^m$, so dass $E^y = \{(x : (x,y) \in E\}$ messbar ist bezüglich $\mathcal{L}^n$ und

$$\mathcal{L}^{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^m \setminus M} \mathcal{L}^n(E^y)\, d\mathcal{L}^m(y)\,. \tag{3.109}$$

(ii) Die Nullmenge N kann nicht weggelassen werden. Beispiel: $E = \{0\} \times M$, mit $M \subset \mathbb{R}$ nicht messbar, ist eine $\mathcal{L}^2$-Nullmenge, aber $E_0 = M$ ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar.

Warnung. Aus der Messbarkeit von E_x (für fast alle x) und der Messbarkeit und Integrierbarkeit von f folgt *nicht*, dass E bezüglich des Maßes $\mathcal{L}^{n+m}$ messbar ist.

Für ein Gegenbeispiel sei $M_0 \subset \mathbb{R}$ die Vitali-Menge, und $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \chi_{M_0}(x) < y < \chi_{M_0}(x) + 1\}$. Dann ist E_x entweder $(0,1)$ oder $(1,2)$ und deshalb messbar. Die Funktion $x \mapsto \mathcal{L}^1(E_x) = 1$ ist ebenfalls messbar. Die Menge E ist aber nicht $\mathcal{L}^2$-messbar.

Beweis: Nach Bemerkung (i) wäre dann auch E^y messbar, für fast alle $y \in \mathbb{R}$. Es gilt aber $E^y = M_0$ für alle $y \in (1,2)$.

Ein noch drastischeres Gegenbeispiel hat W. Sierpinski konstruiert[11]. Er zeigt, dass es eine nicht $\mathcal{L}^2$ messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ gibt, deren Schnitt mit jeder Geraden höchstens zwei Punkte enthält. Damit ist insbesondere die oben definierte Menge E_x für alle x endlich und die Funktion f ist identisch Null.

[11] W. Sierpinski, Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, Fundamenta Mathematicae Bd. 1 (1920), S. 112–115.

Beweis von Satz 3.25. Teil 1: Offene Mengen.
Sei $O \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ offen. Nach Satz 2.15 gibt es abzählbar viele paarweise disjunkte Quader Q_k, so dass $O = \bigcup_k Q_k$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es zwei Quader $A_k \subset \mathbb{R}^n$ und $B_k \subset \mathbb{R}^m$, so dass $Q_k = A_k \times B_k$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$O_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A_k \times B_k\} = \bigcup_{\{k\in\mathbb{N}: x\in A_k\}} B_k \tag{3.110}$$

eine abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Quadern, und damit messbar. Ferner erfüllt die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $f(x) = \mathcal{L}^m(O_x)$,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}(x)\mathcal{L}^m(B_k)\,. \tag{3.111}$$

Damit ist f messbar, und aus Satz 3.20 folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mathcal{L}^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_k)\mathcal{L}^m(B_k)\,. \tag{3.112}$$

Aus

$$\mathcal{L}^{n+m}(O) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{n+m}(Q_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_k)\mathcal{L}^m(B_k) \tag{3.113}$$

folgt die Aussage (mit $N = \emptyset$).

Teil 2: Nullmengen.
Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Nullmenge, $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei O^h offen, mit $E \subset O^h$, $\mathcal{L}^{n+m}(O^h) \le 1/h$ (die Existenz von O^h folgt aus Lemma 2.20). Sei $f^h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ durch $f^h(x) = \mathcal{L}^m(O^h_x)$ definiert. Nach Teil 1 ist f^h messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^h \, d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+m}(O^h) \le \frac{1}{h}\,. \tag{3.114}$$

Die Funktion $g = \liminf\limits_{h\to\infty} f^h$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar und erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mathcal{L}^n = 0 \tag{3.115}$$

(vgl. Satz von Fatou, Satz 3.21). Sei

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0\}\,. \tag{3.116}$$

Aus (3.115) und Lemma 3.17(v) folgt, dass N eine Nullmenge ist. Für $x \notin N$, folgt aus

$$E_x \subset O^h_x \tag{3.117}$$

und $\liminf_{h\to\infty} \mathcal{L}^m(O^h_x) = 0$, dass E_x eine $\mathcal{L}^m$-Nullmenge ist. Damit ist der Satz für Nullmengen bewiesen.

Teil 3: $E \subset (-k,k)^{n+m}$.
Sei $E \subset (-k,k)^{n+m}$ messbar. Für alle $h \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine offene Menge O^h

mit $E \subset O^h$ und $\mathcal{L}^{n+m}(O^h \setminus E) \leq 1/h$ (Lemma 2.20). Man kann zusätzlich annehmen, dass $O^h \subset O^{h-1} \subset (-k,k)^{n+m}$ [sonst ersetzt man induktiv O^h durch $\tilde{O}^h = O^h \cap \tilde{O}^{h-1}$, $\tilde{O}^1 = O^1 \cap (-k,k)^{n+m}$].

Wir betrachten die Menge $S = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} O^h$. Aus Teil 1 folgt, dass O^h_x für alle x messbar ist. Da $\mathcal{M}_n$ eine σ-Algebra ist, ist $S_x = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} O^h_x$ ebenfalls messbar. Wir definieren $f^h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ durch $f_h(x) = \mathcal{L}^m(O^h_x)$. Aus Teil 1 folgt, dass f^h messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^h \, \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+m}(O^h) \,, \qquad \forall h \in \mathbb{N} \,. \tag{3.118}$$

Aus $O^h \subset (-k,k)^n$ folgt $O^h_x \subset (-k,k)^m$, deshalb $f^h < \infty$. Aus der Monotonie der Folge O^h und Satz 2.10(ii) erhält man

$$\mathcal{L}^m(S_x) = \lim_{h\to\infty} \mathcal{L}^m(O^h_x) = \lim_{h\to\infty} f^h(x) \,. \tag{3.119}$$

Aus $\mathcal{L}^{n+m}(O^h \setminus E) \leq 1/h$ folgt $\mathcal{L}^{n+m}(S \setminus E) = 0$, deshalb existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathcal{L}^m((S \setminus E)_x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ (Teil 2). Deshalb ist für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ebenfalls $E_x = S_x \setminus (S \setminus E)_x$ messbar, mit

$$f(x) = \mathcal{L}^m(E_x) = \mathcal{L}^m(S_x) = \lim_{h\to\infty} f^h(x) \,. \tag{3.120}$$

Für $x \in N$ definieren wir $f(x) = 0$.

Aus dem Satz von Fatou folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{L}^n \leq \lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^h d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+m}(S) = \mathcal{L}^{n+m}(E) \,. \tag{3.121}$$

Analog, mit $f^h \leq f^1$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^1 - f) \, d\mathcal{L}^n \leq \lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f^1 - f^h) d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+m}(O^1) - \mathcal{L}^{n+m}(E) \,. \tag{3.122}$$

Mit $\int_{\mathbb{R}^n} f^1 d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+m}(O^1)$ folgt die Aussage.

Teil 4: messbare Mengen E mit $\mathcal{L}^{n+m}(E) = \infty$.

Für $k \in \mathbb{N}$, sei $E^k = \{x \in E : |x| \leq k\}$. Für jedes E^k folgt die Aussage aus Teil 3, mit eine Nullmenge N^k.

Wir definieren $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N^k$. Dann ist N auch eine Nullmenge, und aus $E_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E^k_x$ folgt die Messbarkeit von E_x (für alle $x \notin N$). Aus der Monotonie folgt, dass $f(x) = \mathcal{L}^m(E_x) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^m(E^k_x)$ (für alle $x \notin N$), und mit Beppo Levi (Satz 3.18) erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus N} f \, d\mathcal{L}^n = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus N} f^k d\mathcal{L}^n = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^{n+m}(E^k) = \mathcal{L}^{n+m}(E) \,. \tag{3.123}$$

□

Bemerkung. Folgende Aussage wird manchmal *Prinzip von Cavalieri* (nach Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) genannt: Seien $E, F \subset \mathbb{R}^3$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die zwei Mengen E_x und F_x den gleichen Flächeninhalt haben. Dann haben E und F dasselbe Volumen. Bei dieser Aussage fehlt offensichtlich eine klare Definition von Flächeninhalt und Volumen.

Für E, F $\mathcal{L}^3$ messbar ist das Prinzip von Cavalieri ein Sonderfall des Satzes von Fubini (mit $\mathcal{L}^2$ statt Flächeninhalt, und $\mathcal{L}^3$ statt Volumen).

Beispiele. (i) Fläche des Kreises. Sei $E = B_1^{(2)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Dann gilt

$$E_x = \begin{cases} (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}) & \text{falls } |x| < 1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.124}$$

und deshalb:

$$\mathcal{L}^2(B_1^{(2)}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^1(E_x) d\mathcal{L}^1(x) = \int_{[-1,1]} 2\sqrt{1-x^2} d\mathcal{L}^1(x) = \pi, \tag{3.125}$$

da mit der Substitution $x = \sin\alpha$ und den Identitäten $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ und $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ gilt[12]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, d\mathcal{L}^1(x) &= 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, \cos\alpha\, d\alpha \\ = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\, d\alpha &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha|_{\alpha=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Volumen der Einheitskugel . Sei $E = B_1^{(3)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 < 1\}$. Dann gilt

$$E_{x_3} = \begin{cases} \sqrt{1-x_3^2} B_1^{(2)} & \text{falls } |x_3| < 1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und deshalb

$$\mathcal{L}^3(B_1^{(3)}) = \int_{(-1,1)} \mathcal{L}^2(\sqrt{1-x_3^2} B_1^{(2)}) d\mathcal{L}^1(x_3) = \int_{-1}^{1} (1-x_3^2)\pi dx_3 = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi. \tag{3.126}$$

(iii) Volumen eines abgeschlossenen Kegels. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Betrachte den abgeschlossenen Kegel K der Höhe H über A:

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in [0,H], (x_1,x_2) \in (1 - \frac{x_3}{H})A\}$$

[12] Hier benutzen wir, dass für stetige Funktionen das Lebesgue Integral mit dem Riemann Integral übereinstimmt und daher die Rechenregeln für das Riemann Integral benutzt werden können

Dann gilt

$$\mathcal{L}^3(K) = \frac{H}{3}\mathcal{L}^2(A).$$

Beweis: $K_{x_3} = (1-\frac{x_3}{H})A$, also $\mathcal{L}^2(K_{x_3}) = (1-\frac{x_3}{H})^2\mathcal{L}^2(A)$ und die Behauptung folgt mit der Substitution $y = 1 - x_3/H$ bzw. $x_3 = H - Hy$

$$\int_0^H (1 - x_3/H)^2 dx_3 = \int_0^1 y^2 H\, dy = \frac{H}{3}.$$

[01.12. 2016, Vorlesung 13]

[06.12.2016, Vorlesung 14]

Satz 3.26 (Fubini-Tonelli)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass:*

(i) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ die Funktion $f(x,\cdot)$ $\mathcal{L}^m$-messbar ist;

(ii) die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,\cdot) d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\mathcal{L}^m(y) \tag{3.127}$$

(auf $\mathbb{R}^n \setminus N$) $\mathcal{L}^n$-messbar ist;

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\, d\mathcal{L}^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n\setminus N} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(y) \right) d\mathcal{L}^n(x)\,. \tag{3.128}$$

Insbesondere ist die messbare Funktion f genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(y) \tag{3.129}$$

(definiert außerhalb einer Nullmenge) integrierbar ist.

Bemerkung. Analog zu Bemerkung (i) nach dem Satz von Fubini kann man die Rollen von x und y vertauschen.

Beweis. Falls $f = \chi_E$ ist, mit $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, folgt die Aussage aus Satz 3.25. Mit Beppo Levi folgt, dass das auch für alle nichtnegativen einfachen Funktionen gilt. Sei f_k eine monotone Folge integrierbarer einfacher Funktionen, die gegen f konvergieren (Lemma 3.19(i)). Dann folgt die Aussage aus dem Satz von Beppo Levi. $\square$

Lemma 3.27. *Sei $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{M}_m$. Dann $A \times B \in \mathcal{M}_{n+m}$ und*

$$\mathcal{L}^{n+m}(A \times B) = \mathcal{L}^n(A)\mathcal{L}^m(B) \tag{3.130}$$

(mit $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $A \times B$ messbar ist (dann folgt die Aussage von Satz 3.25). Zum Nachweis der Messbarkeit betrachtet man zunächst den Fall $\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(B) < \infty$ und approximiert A und B durch offene und kompakte Mengen. Details: Übungsaufgabe.

$\square$

Bemerkung. Die andere Richtung gilt nicht, d.h., aus der Messbarkeit von $A \times B$ kann man nicht folgern, dass A und B messbar sind. Beispiel: Sei $S = M_0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, mit M_0 die Vitali-Menge. Dann ist $S \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ eine $\mathcal{L}^2$-Nullmenge, aber $S_0 = M_0$ ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar.

Satz 3.28. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ und sei*

$$E_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq y < f(x)\big\} \tag{3.131}$$

die Menge der Punkte zwischen dem Graph von f und der Ebene $y = 0$. Dann ist E_f genau dann messbar, wenn f messbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n+1}(E_f) \, . \tag{3.132}$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$(E_f)_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E_f\} = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\} = [0, f(x)) \tag{3.133}$$

ein Intervall, und damit $\mathcal{L}^1$-messbar, mit $\mathcal{L}^1((E_f)_x) = f(x)$.

Sei E messbar. Dann folgt aus Satz 3.25, dass es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $x \mapsto \mathcal{L}^1((E_f)_x)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ messbar ist, und

$$\mathcal{L}^{n+1}(E_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^1((E_f)_x) \, d\mathcal{L}^n \, . \tag{3.134}$$

Sei f messbar. Aus

$$E_f = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)} f^{-1}((q, \infty]) \times [0, q) \tag{3.135}$$

und Lemma 3.27 folgt, dass E_f messbar ist. Beweis von (3.135):

$$\begin{aligned}
(x, y) \in E &\Leftrightarrow 0 \leq y < f(x) && (3.136)\\
&\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : 0 \leq y < q < f(x) && (3.137)\\
&\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : q > 0, \ y \in [0, q) \text{ und } x \in f^{-1}((q, \infty]) \, . && (3.138)
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 3.29. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ σ-endlich, $f : E \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_E f \, d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(f^{-1}((t, \infty]))d\mathcal{L}^1(t) \, . \tag{3.139}$$

Bemerkung. (i) Man kann auch $\mu(f^{-1}([t,\infty]))$ statt $\mu(f^{-1}((t,\infty]))$ nehmen.
(ii) Falls $(X,\mathcal{S},\mu)=(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_n,\mathcal{L}^n)$ so folgt dies sofort aus Satz 3.28, da nach dem Satz von Fubini gilt $\mathcal{L}^{n+1}(E_f)=\int_{(0,\infty)}\mathcal{L}^n((E_f)_y)\,d\mathcal{L}^1(y)$ und da $(E_f)_y=\{x\in E: f(x)>y\}=f^{-1}((y,\infty])$

Beweis. Vorbemerkung: die Funktion $t\mapsto g(t)=\mu(f^{-1}((t,\infty])$ ist monoton fallend. Jede monoton fallende Funktion ist messbar (dies folgt leicht aus Definition der Messbarkeit). Daher sind beide Seiten der Gleichung (3.139) definiert. Falls $\mu(f^{-1}(\frac{1}{k},\infty])=\infty$ für ein $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, so sieht man leicht, dass beide Ausdrücke in (3.139) ∞ sind. Wir können also annehmen, dass $\mu(f^{-1}(\frac{1}{k},\infty])<\infty$ für alle $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Damit ist insbesondere $f^{-1}((0,\infty])$ σ-endlich, so dass wir Lemma 3.19(i) anwenden können.

Zum Beweis der Behauptung betrachtet man zunächst einfache Funktionen $\varphi=\sum_j c_j\chi_{F_j}$. Für diese läßt sich die Menge $\varphi^{-1}((t,\infty])$ leicht beschreiben. Anschließend benutzt man Lemma 3.19(i) und monotone Konvergenz um beliebige messbare Funktionen durch einfach Funktionen zu approximieren und zum Grenzwert überzugehen. Details: Übungsaufgabe. □

Satz 3.30 (Transformationssatz)**.** *Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und $\varphi: U\to V$ ein C^1-Diffeomorphismus (d.h.: $\varphi\in C^1(U;V)$ ist bijektiv, und die Umkehrfunktion φ^{-1} erfüllt $\varphi^{-1}\in C^1(V;U)$). Eine Funktion $f: V\to[0,\infty]$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, wenn $(f\circ\varphi)|\det(D\varphi)|: U\to[0,\infty]$ $\mathcal{L}^n$-messbar ist. Es gilt dann*

$$\int_V f\,d\mathcal{L}^n=\int_U (f\circ\varphi)|\det(D\varphi)|d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.140}$$

Bemerkung. (i) Da φ ein Diffeomorphismus ist, gilt $0<|\det D\varphi|(x)<\infty$ für alle $x\in U$. Damit ist das Produkt $(f\circ\varphi)|\det(D\varphi)|\in[0,\infty]$ wohldefiniert. Außerdem folgt, dass $(f\circ\varphi)|\det(D\varphi)$ genau dann messbar ist, wenn $f\circ\varphi$ messbar ist. (ii) Für $n=1$ ergibt sich $\int_{\varphi(a,b)}f(y)\,d\mathcal{L}^1(y)=\int_{(a,b)}f(\varphi(x))\,|\varphi'|(x)\,d\mathcal{L}^1(x)$. Dies entspricht der Substitionsformel für das Riemannintegral.

Lemma 3.31. *Seien U, V, φ wie im Satz 3.30. Sei W ein Würfel mit $\overline{W}\subset U$. Dann gilt:*

$$\mathcal{L}^n(\varphi(W))\le\int_W|\det D\varphi|\,d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.141}$$

Beweis. Es reicht abgeschlossene (und damit kompakte) Würfel zu betrachten. Falls die Behauptung für abgeschlossene Würfel gilt, folgt sie wegen der folgenden Ungleichungskette für beliebige Würfel:

$$\mathcal{L}^n(\varphi(W))\le\mathcal{L}^n(\varphi(\overline{W}))\le\int_{\overline{W}}|\det D\varphi|\,d\mathcal{L}^n=\int_W|\det D\varphi|\,d\mathcal{L}^n.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $\overline{W} \setminus W$ eine $\mathcal{L}^n$ Nullmenge ist.

Wir zeigen die Behauptung nun für abgeschlossenen Würfel W. Sei $M = \max|(D\varphi)^{-1}|(W) = \max\{|(D\varphi(x))^{-1}| : x \in W\}$. Da W kompakt ist, gilt $M < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Da W kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|D\varphi(x) - D\varphi(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in W \text{ mit } |x - y| \leq \delta\,. \tag{3.142}$$

Sei W die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Würfeln $Q_1 \ldots, Q_K$, mit Kantenlänge $\ell \leq \delta/\sqrt{n}$. Wir werden später zeigen, dass für $k = 1, \ldots, K$ gilt

$$\mathcal{L}^n(\varphi(Q_k)) \leq (1 + 2M\varepsilon\sqrt{n})^n \int_{Q_k} |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.143}$$

Da $W = \bigcup_{k=1}^K Q_k$, und $\varphi(W) = \bigcup_{k=1}^K \varphi(Q_k)$, mit $Q_k \cap Q_h = \varphi(Q_k) \cap \varphi(Q_h) = \emptyset$ für $k \neq h$, folgt dass

$$\mathcal{L}^n(\varphi(W)) \leq (1 + 2M\varepsilon\sqrt{n})^n \int_{W} |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.144}$$

Da ε beliebig war, beweist das die Aussage.

Es bleibt, (3.143) zu beweisen. Wir betrachten einen Würfel $Q = Q_k$. Sei $z \in \mathbb{R}^n$, so dass $\overline{Q} = z + [0, \ell]^n$. Sei $x \in \overline{Q}$, so dass $T = \varphi(x)$ die Eigenschaft $|\det T| = \min|\det D\varphi|(\overline{Q})$ hat. Da φ ein Diffeomorphismus ist, gilt $\det T \neq 0$. Sei $\psi : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$ durch $\psi(y) = T^{-1}(\varphi(y) - \varphi(z))$ definiert. Dann gilt $\psi(z) = 0$, $D\psi = T^{-1}D\varphi$, und mit (3.142) folgt, dass

$$|D\psi(p) - \mathrm{Id}\,| = |T^{-1}(D\varphi(p) - T)| \leq |T^{-1}|\varepsilon \leq M\varepsilon \text{ für alle } p \in \overline{Q}. \tag{3.145}$$

Wir zeigen jetzt, dass $\psi(Q)$ in einer kleinen Umgebung von $[0, l]^n$ enthalten ist. Sei $y \in \overline{Q}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Betrachte $i \in \{1, \ldots, n\}$ Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion

$$g(t) = \psi_i((1 - t)z + ty)$$

liefert, dass es ein $\bar{t}$ gibt so, dass $g'(\bar{t}) = g(1) - g(0)$. Mit $p = (1 - \bar{t})z + \bar{t}y \in Q$ und $\psi_i(z) = 0$ folgt, dass

$$\psi_i(y) = \psi_i(y) - \psi_i(z) = (D\psi(p)(y - z))_i.$$

Deshalb gilt:

$$|\psi_i(y) - (y - z)_i| \leq |(D\psi(q) - \mathrm{Id}\,)(y - z)| \leq M\varepsilon\sqrt{n}\ell\,. \tag{3.146}$$

Für alle $y \in \overline{Q}$ gilt $(y - z)_i \in [0, \ell]$, und deshalb $-M\varepsilon\sqrt{n}\ell \leq \psi_i(y) \leq \ell + M\varepsilon\sqrt{n}\ell$. Wir haben deshalb bewiesen dass

$$\psi(Q) \subset [-M\varepsilon\sqrt{n}\ell, \ell + M\varepsilon\sqrt{n}\ell]^n\,. \tag{3.147}$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}^n(\psi(Q)) \le \mathcal{L}^n([-M\varepsilon\sqrt{n}\ell, \ell + M\varepsilon\sqrt{n}\ell]^n) \le (1 + 2M\varepsilon\sqrt{n})^n . \tag{3.148}$$

Der Transformationssatz für lineare Abbildungen (Satz 2.29) ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(\varphi(Q)) &= |\det T|\mathcal{L}^n(\psi(Q)) && (3.149)\\
&\le (1 + 2M\varepsilon\sqrt{n})^n |\det T|\mathcal{L}^n(Q) && (3.150)\\
&\le (1 + 2M\varepsilon\sqrt{n})^n \int_Q |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n , && (3.151)
\end{aligned}$$

d.h., (3.143). □

[06.12.2016, Vorlesung 14]

[8.12. 2016, Vorlesung 15]

Beweis des Transformationssatzes, Satz 3.30.
Teil 1: Seien φ und φ^{-1} lipschitzstetig und $D\varphi$ und $(D\varphi)^{-1}$ beschränkt. Dann gilt für alle messbaren Mengen E die Ungleichung $\mathcal{L}^n(\varphi(E)) \le \int_E |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n$
Jede offene Menge ist ein abzählbarer Vereinigung disjunkter Würfel. Daher folgt aus Lemma 3.31, dass

$$\mathcal{L}^n(\varphi(O)) \le \int_O |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.152}$$

für alle offenen Mengen $O \subset U$.

Sei $E \subset U$ messbar. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gibt es eine offene Menge O_j, so dass $\mathcal{L}^n(O_j \setminus E) \le 1/j$ (Lemma 2.20); wir können zusätzlich $O_j \subset U$ annehmen (sonst kann man O_j durch $O_j \cap U$ ersetzen). Dann gibt es eine Nullmenge N, so dass

$$E = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} O_j \setminus N . \tag{3.153}$$

Die Mengen $\varphi(O_j) = (\varphi^{-1})^{-1}(O_j)$ sind offen und deshalb messbar, die Menge $\varphi(N)$ ist eine Nullmenge (Satz 2.28) und deshalb messbar. Es folgt, dass

$$\varphi(E) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \varphi(O_j) \setminus \varphi(N) \tag{3.154}$$

messbar ist. Aus $\varphi(E) \subset \varphi(O_j)$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(\varphi(E)) &\le \mathcal{L}^n(\varphi(O_j)) && (3.155)\\
&\le \int_{O_j} |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n && (3.156)\\
&\le \int_E |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n + M^n \mathcal{L}^n(O_j \setminus E) , && (3.157)
\end{aligned}$$

wobei $M = \sup |D\varphi|(U)$. Da $\mathcal{L}^n(O_j \setminus E) \leq 1/j$ und M nicht von j abhängt, folgt

$$\mathcal{L}^n(\varphi(E)) \leq \int_E |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.158}$$

für alle messbare Mengen $E \subset U$.

Teil 2: Seien φ und φ^{-1} lipschitzstetig und $D\varphi$ und $(D\varphi)^{-1}$ beschränkt. Sei f messbar. Dann ist $f \circ \varphi |\det D\varphi|$ messbar und es gilt $\int_{\varphi(U)} f d\mathcal{L}^n \leq \int_U f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n$.

Sei $f : \varphi(U) \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion. Dann kann man $f = \sum_{h\in\mathbb{N}} c_h \chi_{F_h}$ schreiben, mit $F_h \subset V = \varphi(U)$ messbar und paarweise disjunkt, $c_h \in [0, \infty)$. Die Mengen $E_h = \varphi^{-1}(F_h)$ sind ebenfalls messbar und paarweise disjunkt, und

$$\int_{\varphi(U)} f d\mathcal{L}^n = \sum_{h\in\mathbb{N}} c_h \mathcal{L}^n(F_h) \tag{3.159}$$

$$\leq \sum_{h\in\mathbb{N}} c_h \int_{E_h} |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.160}$$

$$= \int_U \sum_{h\in\mathbb{N}} c_h \chi_{E_h} |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.161}$$

$$= \int_U f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.162}$$

Sei $f : \varphi(U) \to [0, \infty]$ messbar. Sei f_k eine monotone Folge nichtnegativer einfacher Funktionen, die gegen f konvergiert. Dann konvergiert die Folge $f_k \circ \varphi |\det D\varphi|$ punktweise und monoton gegen $g = f \circ \varphi |\det D\varphi|$. Damit ist g messbar, und mit Beppo Levi folgt, dass

$$\int_{\varphi(U)} f \, d\mathcal{L}^n = \lim_{k\to\infty} \int_{\varphi(U)} f_k \, d\mathcal{L}^n \tag{3.163}$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \int_U f_k \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.164}$$

$$= \int_U f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.165}$$

Deshalb gilt

$$\int_{\varphi(U)} f d\mathcal{L}^n \leq \int_U f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \,. \tag{3.166}$$

Teil 3: Seien φ und φ^{-1} lipschitzstetig und $D\varphi$ und $(D\varphi)^{-1}$ beschränkt. Sei $f \circ \varphi |\det D\varphi|$ messbar. Dann ist f messbar und es gilt $\int_{\varphi(U)} f d\mathcal{L}^n = \int_U f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n$.

Wir setzen $\psi = \varphi^{-1}$ und wenden Teil 2 auf die Abbildung $\psi : V \to U$ und die Funktion $g = (f \circ \varphi) |\det D\varphi|$ an. Dies liefert, dass $g \circ \psi |\det D\psi|$messbar ist und

$$\int_{\psi(V)} g\, d\mathcal{L}^n \le \int_V g \circ \psi\, |\det D\psi| d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.167}$$

Es gilt aber $D\psi = (D\varphi)^{-1} \circ \psi$ und somit $g \circ \psi |\det D\psi| = f$. Weiterhin gilt $\psi(V) = U$, $V = \varphi(U)$. In Verbindung mit Teil 2 folgt die Behauptung.

Teil 4: Beseitigung der Zusatzannahme φ und φ^{-1} lipschitzstetig und $D\varphi$ und $(D\varphi)^{-1}$ beschränkt.

Sei $U_k = \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \frac{1}{k}, |x| < k\}$ und $V_k = \varphi(U_k)$. Dann sind U_k und V_k offen und $\varphi_{|U_k}$ ist eine bijektive Abbildung von U_k auf V_k. Außerdem ist $\overline{U_k}$ kompakt und $\overline{U_k} \subset U$. Daraus folgt, dass $|D\varphi|$ und $|(D\varphi)|^{-1}$ auf $\overline{U_k}$ beschränkt sind (stetige Funktionen nehmenauf kompakten Mengen ihr Maximum an). Außerdem ist φ auf $\overline{U_k}$ lipschitzstetig. Schließlich ist $\varphi^{-1} \in C^1(V)$ und damit auf der kompakten Menge $\varphi(\overline{U_k}) \subset V$ lipschitzstetig. Anwendung von Teil 3 auf $\varphi_{|U_k}$ liefert

$$\int_{\varphi(U_k)} f d\mathcal{L}^n = \int_{U_k} f \circ \varphi |\det D\varphi| d\mathcal{L}^n \tag{3.168}$$

für alle k. Man betrachte die monotone Folge $f_k = f\chi_{\varphi(U_k)}$ und wende auf beide Seiten den Satz von der monotonen Konvergenz an. $\square$

Beispiel. Polarkoordinaten in der Ebene. Sei $U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times (-\infty, 0])$, $\varphi(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$. Dann ist φ ein Diffeomorphismus, und $\det D\varphi(r, t) = r$. Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine Nullmenge ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_U r f(r \cos t, r \sin t) d\mathcal{L}^2(r, t) \tag{3.169}$$

für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$. Es gilt auch die (in der Gleichung implizite) Aussage, dass f genau dann auf $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist, wenn $(r, t) \mapsto r f(r \cos t, r \sin t)$ auf U integrierbar ist.

Mit Fubini-Tonelli erhält man auch

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(-\pi,\pi)} r f(r \cos t, r \sin t) d\mathcal{L}^1(t) \right) d\mathcal{L}^1(r) \tag{3.170}$$

$$= \int_{(-\pi,\pi)} \left(\int_{(0,\infty)} r f(r \cos t, r \sin t) d\mathcal{L}^1(r) \right) d\mathcal{L}^1(t) \tag{3.171}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mathcal{L}^1(y)\,. \tag{3.172}$$

Die Formel (3.170) ist besonders nützlich für radialsymmetrische Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ heißt radialsymmetrisch, wenn es eine Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty]$ gibt, so dass

$$f(x) = g(|x|).$$

Es gilt $|\varphi(r, t)| = r$. Also folgt für radialsymmetrische Funktionen $(f \circ \varphi)(r, t) = g(|\varphi(r, t)|) = g(r)$. Damit ist nach Satz 3.30 und der darauf folgenden Bemerkung (i) f genau dann $\mathcal{L}^2$ messbar wenn g $\mathcal{L}^1$ messbar ist. Aus (3.170) folgt für radialsymmetrische Funktionen

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mathcal{L}^2 = \int_{(0,\infty)} \int_{(-\pi,\pi)} g(r)\, d\mathcal{L}^1(t)\ r\, d\mathcal{L}^1(r) = \int_{(0,\infty)} 2\pi g(r) r\, d\mathcal{L}^1(r). \tag{3.173}$$

Damit kann man zum Beispiel leicht die Fläche des Einheitskreise $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ berechnen. Die Funktion $f = \chi_{B_1(0)}$ ist radialsymmetrisch und $f(x) = \chi_{[0,1)}(|x|)$. Damit

$$\mathcal{L}^2(B_1(0)) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_1(0)}\, d\mathcal{L}^2 = \int_{(0,\infty} 2\pi r \chi_{[0,1)}\, d\mathcal{L}^1(r) = \int_0^1 2\pi r\, dr = \pi.$$

[8.12. 2016, Vorlesung 15]

[13.12. 2016, Vorlesung 16]

Beispiel. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ konnte wir die Punkte auf dem Einheitskreis S^1durch den Winkel t beschreiben. Für $n = 3$ kann man analog einen Punkt auf der Einheitssphäre S^2 durch zwei Winkel beschreiben (s. Übungblatt 8, Aufgabe 3(e)). Ein höheren Dimensionen wird die Beschreibung der Einheitssphäre durch Winkel etwas unübersichtlich. Daher ist es einfacher, die Sphäre S^{n-1} als Bildmenge einer Abbildung der $n-1$ dimensionalen Kugel zu beschreiben. Genauer gesagt beschreibt man zuerst die obere Halbsphäre. Analog kann man die untere Halbsphäre beschreiben und dann die beiden Hälften zusammensetzen. Sei

$$\psi(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \left(z_1, \ldots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2)}\right). \tag{3.174}$$

Dann ist ψ eine bijektive C^1 Abbildung der (offenen) $n-1$ dimensionalen Einheitskugel $B_1'(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ auf die offene obere Halbsphäre $S_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n > 0\}$. Für $z \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir zur Abbkürzung $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ und $r = z_n$ und definieren $\varphi(z) = r\psi(z')$. Dann ist φ ein C^1 Diffeomorphismus von $B_1'(0) \times (0, \infty)$ auf die obere Halbebene $\mathbb{R}_+^n := \{x \in$

$\mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Mit der Abkürzung $w = \sqrt{1-|z'|^2}$ gilt

$$D\varphi(z',r) = \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & \cdots & z_1 \\ 0 & r & \cdots & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r & z_{n-1} \\ -r\frac{z_1}{w} & -r\frac{z_2}{w} & \cdots & -r\frac{z_{n-1}}{w} & w \end{pmatrix}. \tag{3.175}$$

und somit

$$\det D\varphi(z',r) = r^{n-1}\frac{1}{w} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & z_{n-1} \\ -z_1 & -z_2 & \cdots & -z_{n-1} & 1-|z'|^2 \end{pmatrix} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|z'|^2}}. \tag{3.176}$$

Zum Beweis der letzten Identität subtrahiert man sukzessiv, für $k = 1, \ldots, n-1$, das z_k-fache der k-ten Zeile von der letzten Zeile.

Daher gilt für messbare $f : \mathbb{R}^n_+ \to [0,\infty]$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\, d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{B_1'(0)\times(0,\infty)} f(\varphi(z',r))r^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-|z'|^2}}\, d\mathcal{L}^n(z',r) \\ &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{B_1'(0)} f(\varphi(z',r))\frac{1}{\sqrt{1-|z'|^2}}\, d\mathcal{L}^{n-1}(z') \right) r^{n-1}\, d\mathcal{L}^1(r) \end{aligned} \tag{3.177}$$

Falls f radialsymmetrisch ist, d.h. falls es eine Funktion $g : [0,\infty) \to [0,\infty]$ gibt, so dass $f(x) = g(|x|)$, so gilt $f(\varphi(z',r)) = g(r)$. Daraus folgt, dass f messbar ist, falls g messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{B_1'(0)} \frac{1}{\sqrt{1-|z'|^2}}\, d\mathcal{L}^{n-1}(z') \right) g(r)r^{n-1}\, d\mathcal{L}^1(r) \tag{3.178}$$

Das innere Integral über z' hängt nicht von f ab, sondern nur von der Raumdimension n. Zusammen mit der analogen Formel für den unteren Halbraum $\mathbb{R}^n_-$ erhält man somit für radialsymmetrische Funktionen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{(0,\infty)} g(r)c_n r^{n-1} d\mathcal{L}^1(r) \tag{3.179}$$

Die Konstante $c_n = 2\int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1-|z'|^2}}\, d\mathcal{L}^{n-1}(z')$ lässt sich durch Rekursion bestimmen, da die Funktion $\sqrt{1-|z'|^2}$ radialsymmetrisch in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist (die Substitution $r = \sin t$ ist hilfreich). Insbesondere gilt

$$c_2 = 2\pi, \quad c_3 = 4\pi. \tag{3.180}$$

Die Konstante c_n hat auch eine einfache geometrische Interpretation. Sei f die charakterische Funktion der n-dimensionalen Einheitskugel $B_1(0)$. Dann ist $g = \chi_{[0,1)}$. Daraus folgt

$$\mathcal{L}^n(B_1(0)) = \int_{R^n} \chi_{B_1(0)} \, d\mathcal{L}^n = c_n \int_{(0,1)} r^{n-1} \, d\mathcal{L}^1(r) = c_n \frac{1}{n} \; r^n|_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{n} c_n \tag{3.181}$$

und somit

$$c_n = n\mathcal{L}^n(B_1(0)) \,. \tag{3.182}$$

Wir werden später sehen, dass c_n gerade das $(n-1)$ dimensionale Maß der Einheitsspäre ist (s. (5.17)).

Durch Anwendung des Satzes von Fubini auf die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ kann man für $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$ die Rekursionsformel

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2}$$

beweisen (Übungsblatt 8, Aufgabe 3(d)). Damit ergibt sich

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \omega_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad \ldots .$$

3.5 Allgemeine Definition des Integrals, Konvergenzsätze II

Definition 3.32. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ $f : E \to [-\infty, \infty]$ messbar. Die Funktion f heißt μ-integrierbar, falls sowohl $f_+ = \max\{f, 0\}$ als auch $f_- = \max\{-f, 0\}$ integrierbar sind. Man setzt*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu. \tag{3.183}$$

Die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ wird $L_1(E, \mu)$ (oder $L_1(E, (X, \mathcal{S}, \mu))$) genannt. Für $\mu = \mathcal{L}^n$, $E \subset \mathcal{M}_n$, schreibt man einfach $L_1(E)$. Man sagt auch "f ist integrierbar" für "f ist messbar und integrierbar".

Für $F \subset E$, $F \in \mathcal{S}$,

$$\int_F f \, d\mu = \int_E \chi_F f \, d\mu \,. \tag{3.184}$$

Bemerkung. Falls $f \geq 0$, dann ist $f_- = 0$ immer integrierbar, deshalb ist in diesem Fall diese Definition zu Def. 3.16 äquivalent. Man sollte aber beachten, dass in Def. 3.16, anders als hier, das Integral für alle messbaren Funktionen definiert ist, und den Wert ∞ annehmen kann.

Für nichtnegative Funktionen haben wir bereits die Linearität des Integrals in Lemma 3.15 bewiesen. Wir müssen zeigen, dass mit der oben gegeben Definition auch das Integral für allgemeine Funktionen linear ist. Dabei beweisen wir gleich noch einige andere elementare aber nützliche Eigenschaften.

Lemma 3.33. *(i) Sei $f : E \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann ist $|f|$ genau dann integrierbar, wenn f integrierbar ist. Ferner,*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \,. \tag{3.185}$$

(ii) Seien $u, v : E \to [0, \infty]$ integrierbar und sei $h = u - v$. Dann ist h integrierbar und

$$\int_E h \, d\mu = \int_E u \, d\mu - \int_E v \, d\mu \,. \tag{3.186}$$

(iii) $L_1(E, (X, \mathcal{S}, \mu))$ ist ein Vektorraum, das Integral ist eine lineare Abbildung $\int_E \cdot d\mu : L_1(E, \mu) \to \mathbb{R}$.

(iv) $p : L_1(E, (X, \mathcal{S}, \mu)) \to [0, \infty)$, $p(f) = \int_E |f| d\mu$ ist eine Seminorm.

Dass p eine Seminorm ist, bedeutet dass $p(f) \in [0, \infty)$ für alle f, $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$ für alle $f, g \in L_1$, und $p(\lambda f) = |\lambda| \, p(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L_1$.

Beweis. (i): Falls f integrierbar ist, so sind nach Definition f_+ und f_- integrierbar. Wegen der Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen (Lemma 3.19(ii)) folgt, dass auch $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar ist. Falls $|f|$ integrierbar ist, so folgt aus $0 \leq f_+ \leq |f|$ und $0 \leq f_- \leq |f|$ und der Monotonie (Lemma 3.17(i)) die Integrierbarkeit von f_+ und f_-. Weiterhin gilt nach Definition des Integral

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu \right| \leq \int_E f_+ \, d\mu + \int_E f_- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung und im letzten Schritt Lemma 3.19(ii)) und die Identität $|f| = f_+ + f_-$ benutzt.
(ii): Es gilt $h \leq u$ und $-h \leq v$ und somit $h_+ \leq u$ und $h_- \leq v$. Daher ist h integrierbar. Ausserdem folgt aus $h_+ - h_- = h = u - v$ die Beziehung $h_+ + v = h_- + u$. Aus der Linearität des Integrals für positive Funktionen folgt

$$\int_E h_+ \, d\mu + \int_E v \, d\mu = \int_E h_- \, d\mu + \int_E u \, d\mu \,. \tag{3.187}$$

Durch Umordnen der Terme folgt die Behauptung.

(iii) : Aus $|af + bg| \leq a|f| + b|g|$ und (i) folgt, dass L_1 ein Vektorraum ist. Es ist leicht zu zeigen, dass $\int_E af \, d\mu = a \int_E f \, d\mu$. Seien $f, g \in L_1$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$. Es gilt $f+g = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$. Aus der Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen folgt, dass $u := f_+ + g_+$ und $v := f_- + g_-$ integrierbar sind und die Behauptung folgt aus (ii) und der Linearität des Integrals für nichtnegative Funktionen.

(iv) : Aus $|f+g| \leq |f| + |g|$, Lemma 3.17(i) und Lemma 3.19 folgt dann

$$\int_E |f+g|\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu\,. \tag{3.188}$$

Die anderen Aussagen sind offensichtlich. □

Lemma 3.34. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$*

(i) Falls $f : E \to [-\infty, \infty]$ integrierbar ist, dann ist $\{x \in E : f(x) \in \{\infty, -\infty\}\}$ eine Nullmenge. Insbesondere gibt es eine Funktion $g \in L_1(E, \mu)$, so dass $f = g$ fast überall gilt.

(ii) Seien $f, g : E \to [-\infty, \infty]$. Falls $(X, \mathcal{S}, \mu)$ vollständig ist, f integrierbar, und $f = g$ fast überall, dann ist g integrierbar (und $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$).

(iii) Seien $f, g : E \to [-\infty, \infty]$. Falls g messbar ist, $|g| \leq f$ fast überall, und f integrierbar ist, dann ist g integrierbar.

Beweis. Hausaufgabe. □

Satz 3.35 (Konvergenzsatz von Lebesgue oder dominierte Konvergenz)**.** *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ und sei f_k eine Folge messbarer Funktionen, d.h., für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f_k : E \to [-\infty, \infty]$ messbar. Sei $N \in \mathcal{S}$ eine Nullmenge und es gelte $f_k \to f$ punktweise auf $E \setminus N$.*
Sei $g : E \to [0, \infty]$ integrierbar, so dass $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle k und alle alle x. Dann gilt:

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \tag{3.189}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\,d\mu = 0\,. \tag{3.190}$$

Beweis. Wir setzen $f = 0$ auf N. Aus Satz 3.6 folgt, dass f messbar ist. Sei $N' = g^{-1}(\{\infty\})$. Dann gilt $\mu(N \cup N') = 0$, und deshalb $\int_{N\cup N'} f\,d\mu = \int_{N\cup N'} f_k\,d\mu = 0$. Es reicht deshalb die Menge $E \setminus (N \cup N')$ zu betrachten. Auf $E \setminus (N \cup N')$ gilt dann auch $f_k(x) \in \mathbb{R}$. Um die Notation zu vereinfachen nehmen wir $N \cup N' = \emptyset$ an.

Weiterhin reicht es (3.190) zu zeigen. Die andere Aussage folgt dann aus der Linerität des Integrals und (3.185) angewandt auf $h = f_k - f$.

Aus dem Satz von Fatou (Satz 3.21) angewandt auf $h_k = 2g - |f_k - f|$ folgt

$$\int_E 2g\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E (2g - |f_k - f|)\, d\mu = \int_E 2g d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\, d\mu\,, \tag{3.191}$$

und deshalb

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\, d\mu \leq 0 \tag{3.192}$$

Für die Identität in (3.191) ist es wichtig, dass $\int_E g d\mu \in \mathbb{R}$, d.h., dass g integrierbar ist! □

[13.12. 2016, Vorlesung 16]

[15.12. 2016, Vorlesung 17]

Der Satz von Lebesgue gibt ein sehr wichtige und nützliche hinreichende Bedingung, um aus punktweise Konvergenz die Konvergenz der Integrale zu schliessen. Wir geben jetzt eine Bedingung an, die hinreichend und notwendig ist.

Satz 3.36 (Lebesgue II, gleichgradige Integrierbarkeit). *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ σ-endlich, und sei f_k eine Folge integrierbarer Funktionen, d.h., für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $f_k : E \to [-\infty, \infty]$ messbar. Sei $N \in \mathcal{S}$ eine Nullmenge, es gelte $f_k \to f$ punktweise auf $E \setminus N$. Weiterhin gelte*

(i) ('gleichgradige Integrierbarkeit') Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\mu(A) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_k \int_A |f_k|\, d\mu \leq \varepsilon \tag{3.193}$$

(ii) ('Straffheit') Es gibt eine aufsteigende Folge von Mengen $E_l \in \mathcal{S}$ mit $\mu(E_l) < \infty$, $\cup_l E_l = E$ und

$$\lim_{l\to\infty} \sup_k \int_{E\setminus E_l} |f_k|\, d\mu = 0\,. \tag{3.194}$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\, d\mu = 0\,. \tag{3.195}$$

Falls umgekehrt f_k und f integrierbar sind und (3.195) *gilt, so gelten (i) und (ii).*

Bemerkung. Die Bedingungen (i) und (ii) passen sehr gut zu den drei Gegenbeispielen vor Satz 3.18. Bedingung (i) schließt gerade Beispiel (b) aus (Konzentration auf eine Nullmenge). Bedingung (ii) schließt die Beispiele (a) und (c) aus (Entweichen von Masse nach ∞).
Man beachte, dass Bedingung (ii) im Fall $\mu(E) < \infty$ immer gilt (setze $E_l = E$).

Beweis. **Übungaufgabe.**

Teil 1: Beweis von (3.195) *für* $\mu(E) < \infty$
Tip: Benutzen Sie den Satz von Egorov.
Teil 2: Beweis von (3.195) *für* $\mu(E) = \infty$.
Tip: Zerlegen Sie $\int_E |f_k - f|\, d\mu$ ein Integral über E_l und ein Integral über $E \setminus E_l$. Schätzen $\int_{E \setminus E_l} |f|\, d\mu$ mit Hilfe des Satzes von Fatou ab.
Teil 3: Notwendigkeit von (i)
Tip: Benutzen Sie das es für jedes $\varepsilon > 0$ ein K gibt so, dass

$$\int_E |f - f_k|\, d\mu < \varepsilon.$$

Wenden Sie Satz 3.23 bzw. den Satz über monotone Konvergenz geeignet auf endlich viele der f_k an. □

Der Lebesguesche Satz über dominierte Konvergenz, Satz 3.35 folgt als Spezialfall aus Satz 3.36 Falls nämlich $|f_k| \leq g$ und g integriebar ist, so folgt (i) aus Satz 3.23 und (ii) folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz. Damit ergibt sich die Folgerung 'Egorov $\Longrightarrow$ Lebesgue', während unser ursprünglicher Beweis die Folgerung 'B. Levi $\Longrightarrow$ Fatou $\Longrightarrow$ Lebesgue' benutzte.

Beide Argumente lassen sich auf den Fall eine geeignet konvergenten Familie von Majoranten ausdehnen.

Satz 3.37 (Lebesuge III, konvergente Majorante)**.** *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$ *und sei* f_k *eine Folge messbarer Funktionen, d.h., für alle* $k \in \mathbb{N}$ *ist* $f_k : E \to [-\infty, \infty]$ *messbar. Sei* $N \in \mathcal{S}$ *eine Nullmenge, es gelte* $f_k \to f$ *punktweise auf* $E \setminus N$*. Weiterhin gebe es integrierbare Funktionen* $g_k : E \to [0, \infty]$ *und* $g : E \to [0, \infty]$ *mit*

$$|f_k| \leq g_k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \int_E |g_k - g|\, d\mu = 0 \tag{3.196}$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|\, d\mu = 0\,. \tag{3.197}$$

Beweis. Aus dem zweiten Teil von Satz 3.36 folgt, dass die Funktionen g_k Eigenschaft (i) und (ii) in Satz 3.36 haben. Daher haben auch die Funktionen f_k diese Eigenschaft und die Behauptung folgt aus Satz 3.36. $\square$

Wir wenden jetzt den Lebesgueschen Konvergenzsatz auf die Vertauschbarkeit von Integration und Differentation an.

Satz 3.38. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, sei $E \in \mathcal{S}$ σ-endlich, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \times E \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft*

$$y \mapsto f(x,y) \quad \text{ist messbar für alle } x \in U. \tag{3.198}$$

(i) Es gebe eine Nullmenge $N \in \mathcal{S}$ und eine integrierbare Funktion $g : E \to [0, \infty)$ so dass

$$x \mapsto f(x,y) \quad \text{ist stetig für alle } y \in E \setminus N \tag{3.199}$$

$$|f(x,y)| \le g(y) \quad \text{für alle } x \in U, y \in E \setminus N. \tag{3.200}$$

Dann ist $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar für alle $x \in U$ und die Funktion

$$h(x) := \int_E f(x,y)\, d\mu(y)\,. \tag{3.201}$$

ist stetig in U.

(ii) Es gelte zusätzlich

$$x \mapsto f(x,y) \quad \text{ist stetig differenzierbar für alle } y \in E \setminus N \tag{3.202}$$

$$|D_x f(x,y)| \le g(y) \quad \text{für alle } x \in U, y \in E \setminus N. \tag{3.203}$$

Dann ist h stetig differenzierbar in U und es gilt

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) := \int_E \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\, d\mu(y)\,. \tag{3.204}$$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Satz 3.39 (Fubini II). *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to [-\infty, \infty]$ integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f(x, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ integrierbar ist (bzgl. $\mathcal{L}^m$), die Funktion*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, \cdot) d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\mathcal{L}^m(y) \tag{3.205}$$

ist $\mathcal{L}^n$-integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\mathcal{L}^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus N} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\mathcal{L}^m(y) \right) d\mathcal{L}^n(x)\,. \tag{3.206}$$

Bemerkung. Falls f messbar ist und $\int_{\mathbb{R}^n\setminus N}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|d\mathcal{L}^m(y)\right)d\mathcal{L}^n(x)<\infty$, dann ist $|f|$ nach Satz 3.26 integrierbar. Damit ist auch f integrierbar und es gilt (3.206)

Beweis. Folgt aus Satz 3.26 für f_+ und f_-. □

Lemma 3.40. *Seien $f:\mathbb{R}^n\to[-\infty,\infty]$ und $g:\mathbb{R}^m\to[-\infty,\infty]$ integrierbar. Dann ist $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^{n+m}$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)d\mathcal{L}^{n+m}(x,y)=\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mathcal{L}^n(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x)d\mathcal{L}^m(x)\right). \tag{3.207}$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 3.27. Man betrachtet zunächst den Fall, dass f und g Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Details: Übungaufgabe.

□

Satz 3.30 kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 3.41 (Transformationssatz II)**.** *Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und $\varphi:U\to V$ ein C^1-Diffeomorphismus (d.h.: $\varphi\in C^1(U;V)$ ist bijektiv, und die Umkehrfunktion φ^{-1} erfüllt $\varphi^{-1}\in C^1(V;U)$). Eine Funktion $f:V\to[-\infty,\infty]$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-integrierbar, wenn $(f\circ\varphi)|\det(D\varphi)|:U\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{L}^n$-integrierbar ist. Es gilt dann*

$$\int_V f\,d\mathcal{L}^n=\int_U (f\circ\varphi)|\det(D\varphi)|d\mathcal{L}^n\,. \tag{3.208}$$

Beweis. Es reicht, Satz 3.30 auf f_+ und f_- anzuwenden. □

3.6 Vergleich zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral

Wir zeigen zunächst, dass das Lebesgue-Integral eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist.

Satz 3.42. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f $\mathcal{L}^1$-integrierbar und beide Integrale stimmen überein, d.h.,*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1\,. \tag{3.209}$$

Das Riemann-Integral wurde wie folgt definiert Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f heißt auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_{*a}^b f(x)dx=\int_a^{*b} f(x)dx\,. \tag{3.210}$$

In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx = \int_a^{*b} f(x)dx\,. \tag{3.211}$$

Oberintegral und Unterintegral wurden [Analysis 1, Def. 6.7] durch

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \in T[a,b]\,, \psi \geq f\right\} \tag{3.212}$$

und

$$\int_{*a}^b f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \in T[a,b]\,, \varphi \leq f\right\}. \tag{3.213}$$

definiert, wobei T die Menge der Treppenfunktionen war, d.h., die Menge der Funktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\varphi = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{I_j}\,, \tag{3.214}$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ und $I_j \subset [a,b]$ einem Intervall. Dann gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \mathrm{Vol}\,(I_j)\,. \tag{3.215}$$

Beweis. Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, $\varphi = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{I_j}$. Da Intervalle messbar sind, ist φ auch eine einfache integrierbare Funktion, und

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \mathrm{Vol}\,(I_j) = \sum_{j=1}^k c_j \mathcal{L}^1(I_j) = \int_{[a,b]} \varphi d\mathcal{L}^1\,. \tag{3.216}$$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, $M = \sup|f|([a,b])$. Seien φ_h, ψ_h : $[a,b] \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen, so dass $\varphi_h \leq f \leq \psi_h$,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_h d\mathcal{L}^1 = \lim_{h\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_h d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{3.217}$$

Wir können zusätzlich annehmen, dass $-M \leq \varphi_h, \psi_h \leq M$ (sonst betrachtet man $\max\{\varphi_h, -M\}$ und $\min\{\psi_h, M\}$).

Sei $\varphi = \limsup\limits_{h\to\infty} \varphi_h$ und $\psi = \liminf\limits_{h\to\infty} \psi_h$. Dann sind beide Funktionen messbar und es gilt $-M \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M$. Deshalb sind φ und ψ Lebesgue-integrierbar. Ferner gilt:

$$\int_{[a,b]} (M+\psi)\, d\mathcal{L}^1 \leq \liminf_{h\to\infty} \int_{[a,b]} (M+\psi_h) d\mathcal{L}^1 = M(b-a) + \int_a^b f(x)dx\,, \tag{3.218}$$

und deshalb

$$\int_{[a,b]} \psi \, d\mathcal{L}^1 \leq \int_a^b f(x) dx \,. \tag{3.219}$$

Analog (durch Betrachtung von $M - \varphi$) beweist man

$$\int_{[a,b]} \varphi d\mathcal{L}^1 \geq \int_a^b f(x) dx \,. \tag{3.220}$$

Es folgt, dass

$$\int_{[a,b]} \psi d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \varphi d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx \,. \tag{3.221}$$

Deshalb gilt $\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) d\mathcal{L}^1 = 0$, und $\psi = \varphi$ fast überall. Aus $\varphi \leq f \leq \psi$ folgt, dass $\psi = \varphi = f$ fast überall, und damit

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \psi d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx \,. \tag{3.222}$$

□

Satz 3.43. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge*

$$N = \{x \in [a,b] : f \textit{ ist nicht stetig in } x\} \tag{3.223}$$

eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist.

Beweis. Übungsaufgabe. Hinweise: Sei $I := [a,b]$. Betrachten sie die Funktion $g : I \to [0, \infty)$, die durch

$$g(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \sup f(I \cap B_\rho(x)) - \lim_{\rho \downarrow 0} \inf f(I \cap B_\rho(x)) \tag{3.224}$$

definiert ist (beide Grenzwerte existieren, weil sowohl $\rho \mapsto \sup f(B_\rho(x))$ als auch $\rho \mapsto \inf f(B_\rho(x))$ monoton und beschränkt sind). Die Funktion f ist in x genau dann stetig, wenn $g(x) = 0$.
(i) Zeigen Sie, dass die Mengen $\{x \in I : g(x) \geq a\}$ abgeschlossen sind. Folgern Sie, dass g messbar ist.
(ii) Seien φ, ψ Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Zeigen Sie $g \leq \psi - \varphi$ fast überall.
(iii) Folgern Sie den Satz (Tip: Fatou; Aussage (i), geeignete Überdeckung der Menge $\{g \neq 0\}$ durch kleine offene Intervalle). □

4 Die Räume L_1 und L^p

4.1 L_1-Konvergenz und Maßkonvergenz

Definition 4.1. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$, seien $f : E \to \mathbb{R}$, $f_k : E \to \mathbb{R}$ messbar.*

(i) Die Folge f_k heißt gegen f maßkonvergent, wenn für jedes $\eta > 0$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}\right) = 0\,. \tag{4.1}$$

(ii) Für E σ-endlich, und $f : E \to \mathbb{R}$ messbar, definiert man

$$\|f\|_{L_1(E)} = \int_E |f|\, d\mu\,. \tag{4.2}$$

Für $f_k \in L_1(E)$, $f \in L_1(E)$, sagt man, dass $f_k \to f$ in $L_1(E)$ falls

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_1(E)} = 0\,. \tag{4.3}$$

[15.12. 2016, Vorlesung 17]

[20.12. 2016, Vorlesung 18]

Bemerkung. (i) Wir hatten bereits bewiesen (Lemma 3.33(iv)) dass $f \mapsto \|f\|_{L_1(E)}$ eine Seminorm auf $L_1(E)$ ist.
(ii) Maßkonvergenz wird oft "Konverzenz in Wahrscheinlichkeit", "Konvergenz im Maß", oder "Konvergenz dem Maße nach" genannt.
(iii) Sei

$$d(f) := \inf\{r \in [0, \infty) : \mu(\{x \in E : |f(x)| > r\} \leq r\} \tag{4.4}$$

und $d(f, g) = d(f - g)$. Dann ist d eine Halbmetrik auf der Menge der messbaren Funktionen und es gilt $d(f_k, f) \to 0$ genau dann wenn f_k gegen f im Maß konvergiert. Ausserdem gilt $d(f, g) = 0$ genau dann, wenn f und g sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. (Beweis dieser Aussagen: Übungsaufgabe)

Beispiel. Sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Folge. Dann ist die Funktionenfolge $k \mapsto \chi_{[x_k, x_k+1/k]}$ gegen 0 maßkonvergent (im Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}^1)$). Diese Funktionenfolge konvergiert gegen 0 auch in L_1. Die Folge $k \mapsto k\chi_{[x_k, x_k+1/k]}$ ist aber gegen 0 maßkonvergent, nicht aber gegen 0 L_1-konvergent.

Lemma 4.2. *Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$, seien $f : E \to \mathbb{R}$, $f_k : E \to \mathbb{R}$ messbar.*

(i) Falls $f_k \to f$ gleichmäßig, dann ist f_k gegen f maßkonvergent.

(ii) Falls $f_k \to f$ punktweise in $E \setminus N$ und falls N eine Nullmenge ist und $\mu(E) < \infty$, dann ist f_k gegen f maßkonvergent.

(iii) Falls f_k gegen f in L_1 konvergiert, dann ist f_k gegen f maßkonvergent.

(iv) Falls f_k gegen f maßkonvergent ist, dann gibt es eine Nullmenge $N \subset E$ und eine **Teilfolge** *f_{k_j}, so dass*

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) \qquad \forall x \in E \setminus N\,. \tag{4.5}$$

(v) Falls f_k gegen f gleichmäßig konvergiert, und $\mu(E) < \infty$, dann gilt $f_k \to f$ in $L_1(E)$.

Bemerkung. Ohne die Annahme $\mu(E) < \infty$ ist (ii) falsch. Beispiel: betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_1, \mathcal{L}^1)$ und $f_k(x) = x/k$, $f = 0$, oder auch $\tilde{f}_k = \chi_{[k,k+1]}$.
Aussage (v) ist ohne die Annahme $\mu(E) < \infty$ ebenfalls falsch (man betrachte $g_k = 1/k$).
Die Konvergenz (iv) gilt i.a. nicht ohne die Einschränkung auf eine Teilfolge (s.u. Lemma 4.3).

Beweis. (i): Falls $f_k \to f$ gleichmäßig, dann gibt es für alle $\eta > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\} = \emptyset$ für alle $k \geq K$ gilt. Deshalb ist jede gleichmäßig konvergente Folge auch maßkonvergent.

(ii): Sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Gemäß dem Satz von Egorov gibt es $F \subset E$, so dass $\mu(E \setminus F) \leq \varepsilon$ und $f_k \to f$ gleichmäßig auf F. Dann gilt

$$\mu\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}\right) \leq \varepsilon + \mu\left(\{x \in F : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}\right) \tag{4.6}$$

und damit

$$\limsup_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}\right) \leq \varepsilon\,. \tag{4.7}$$

Da ε beliebig war, folgt die Aussage.

(iii): Sei $\eta > 0$. Mit der Chebychev-Markovschen Ungleichung (Lemma 3.17 (iv)) gilt

$$\mu(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta} \int_E |f_k - f| d\mu \tag{4.8}$$

Daraus folgt die Aussage.

(iv): Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq 2^{-j}\right\} = 0\,. \tag{4.9}$$

Daher gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein k_j, so so dass die Menge

$$E_j := \left\{x \in E : |f_{k_j}(x) - f(x)| \geq 2^{-j}\right\} \tag{4.10}$$

die Bedingung $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$ erfüllt. Wir können oBdA annehmen, dass $k_j > k_{j-1}$.

Sei $F_h = \bigcup_{j>h} E_j$. Dann gilt $\mu(F_h) \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-h}$, und

$$|f_{k_j}(x) - f(x)| < 2^{-j} \qquad \forall x \in E \setminus F_h\,, j > h\,. \tag{4.11}$$

Deshalb gilt

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) \qquad \forall x \in \bigcup_{h\in\mathbb{N}} E \setminus F_h = E \setminus \bigcap_{h\in\mathbb{N}} F_h\,. \tag{4.12}$$

Aber

$$\mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} F_h\right) \leq \mu(F_h) \leq 2^{-h} \qquad \forall h \in \mathbb{N}\,. \tag{4.13}$$

Damit ist die Aussage bewiesen (mit $N = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} F_h$).

(v): Es gilt

$$\|f_k - f\|_{L_1(E)} = \int_E |f_k - f| d\mu \leq \mu(E) \sup_E |f_k - f|\,. \tag{4.14}$$

Aus $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_E |f_k - f| = 0$ folgt dann $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_1(E)} = 0$. □

Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, seien $f : E \to \mathbb{R}$, $f_k : E \to \mathbb{R}$ messbar. Wir haben folgende Konvergenzkonzepte eingeführt:

G: $f_k \to f$ *gleichmäßig*, d.h.,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in E} |f_k(x) - f(x)| = 0\,. \tag{4.15}$$

P f.ü.: $f_k \to f$ *punktweise fast überall*, d.h., es gibt eine Nullmenge $N \subset E$ so dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0 \qquad \forall x \in E \setminus N\,. \tag{4.16}$$

Punktweise Konvergenz ist eine (etwas) stärkere Bedingung und entspricht der Wahl $N = 0$.

L_1: $f_k \to f$ *in* $L_1(E)$, d.h., $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| d\mu = 0$.

M: $f_k \to f$ *im Maß*, d.h., $\forall \eta > 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \eta\}\right) = 0\,. \tag{4.17}$$

Implikationen für $\mu(E) < \infty$

$$\begin{array}{lllllll} G & \Longrightarrow & L_1 & & \Longrightarrow & M & \Longrightarrow P \text{ f.ü } \textbf{für Teifolge} \\ G & & & \Longrightarrow \text{ P f.ü} & \Longrightarrow & M & \end{array} \tag{4.18}$$

Implikationen für $\mu(E) \leq \infty$

$$\begin{array}{lllllll} G & & & & \Longrightarrow & M & \Longrightarrow P \text{ f.ü } \textbf{für Teilfolge} \\ & & L_1 & & \Longrightarrow & M & \\ G & & & \Longrightarrow \text{ P f.ü} & & & \end{array} \tag{4.19}$$

Lemma 4.3. *Es gibt eine Folge integrierbarer Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, die in L_1 konvergiert, aber in allen Punkten divergiert. Das bedeutet, dass (i) $f_k \to f$ in L_1 und dass (ii) für alle $x \in \mathbb{R}$ die Folge $k \mapsto f_k(x)$ divergiert.*

Aus der L^1 Konvergenz folgt insbesondere Konvergenz im Maß (Lemma 4.2 (iii)). Daher gilt Lemma 4.2 (iv) nicht ohne Einschränkung auf eine Teilfolge.

Beweis. Sei $A = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} : 0 \leq j < k\}$. Dann ist A abzählbar. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to A$ bijektiv. Für $(j,k) \in A$ sei $I_{j,k} := [j/k, (j+1)/k]$. Weiterhin sei $f_l = \chi_{I_{\varphi(l)}}$ und $f = 0$.

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $l \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{L}^1(I_{\varphi(l)}) \geq \varepsilon$ (weil es nur endlich viele $(j,k) \in A$ mit $1/k \geq \varepsilon$ gibt). Deshalb ist $l \mapsto \|f_l\|_{L_1} = \mathcal{L}^1(I_{\varphi(l)})$ eine Nullfolge. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Paare $(j,k) \in A$, so dass $x \in I_{j,k}$, und unendlich viele Paare $(j,k) \in A$ mit $x \notin I_{j,k}$. Deshalb konvergiert die Folge $l \mapsto f_l(x)$ nicht. □

Aus diesem Beispiel folgt, dass 'Konvergenz punktweise fast überall' nicht metrisierbar ist. Die Details des Arguments (s. unten) wurden *nicht* in der Vorlesung besprochen.

Lemma. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $a : \mathbb{N} \to X$ eine Folge und sei $b \in X$. Dann gilt $\lim_{j\to\infty} a_j = b$ (in (X,d)) genau dann, wenn folgendes gilt: jede Teilfolge $k \mapsto a_{j_k}$ besitzt eine Teilfolge $m \mapsto a_{j_{k_m}}$ die gegen b konvergiert.*

Bemerkung. Es ist wichtig, dass b nicht von der Teilfolge abhängt! (Beispiel: eine beliebige nichtkonvergente Folge in einer kompakten Menge)

Beweis. Für die nichtriviale Richtung definiere $p := \limsup_{j\to\infty} d(a_j, b)$. Nach Definition des limes superior gibt es eine Teilfolge $k \mapsto a_{j_k}$, so dass $p = \lim_{k\to\infty} d(a_{j_k}, b)$. Die Teilfolge $k \mapsto a_{j_k}$ enthält nach Voraussetzung eine weitere Teilfolge, die gegen b konvergiert. Daher ist $p = 0$. Nach Definition von p konvergiert die gesamte Folge. □

Lemma. *Punktweise Konvergenz fast überall ist nicht metrisierbar, d.h., es gibt keine Metrik* $d : L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *so dass* $f_k \to f$ *punktweise fast überall genau dann, wenn* $d(f_k, f) \to 0$.

Beweis. Die Folge in Lemma 4.3 ist gegen 0 L_1-konvergent. Dasselbe gilt für jede Teilfolge und für Maßkonvergenz. Mit Lemma 4.2(iv) folgt, dass jede Teilfolge eine Teilfolge besitzt, die fast überall gegen 0 konvergiert. Wenn punktweise Konvergenz fast überall metrisierbar wäre, dann würde folgen dass die ganze Folge gegen 0 punktweise fast überall konvergiert. Das ist aber falsch. □

4.2 Die Räume L^p

Definition 4.4. *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$, $f, g : E \to [-\infty, \infty]$. *Man sagt, dass* $f = g$ *fast überall auf* E*, wenn eine Nullmenge* $N \in \mathcal{S}$ *existiert, so dass* $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset N$ *gilt.*

Bemerkung. Wenn f und g messbar sind, oder $(X, \mathcal{S}, \mu)$ vollständig ist, ist diese Definition zu

$$\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0 \tag{4.20}$$

äquivalent.

Lemma 4.5. *Sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{S}$.

(i) $f = g$ *fast überall definiert eine Äquivalenzrelation.*

(ii) Falls f *und* g *messbar sind , dann gilt* $\int_E |f - g| d\mu = 0$ *genau dann, wenn* $f = g$ *fast überall auf* E.

Erinnerung: $f \sim g$ ist eine Äquivalenzrelation wenn: (i) $f \sim f$ für alle f; (ii) aus $f \sim g$ folgt $g \sim f$; (iii) aus $f \sim g$ und $g \sim h$ folgt $f \sim h$.

Beweis. Hausaufgabe.

□

Generalvoraussetzung für den Rest dieses Unterkapitels: $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ist ein vollständiger Maßraum, und $E \in \mathcal{S}$ eine σ-endliche Menge.

Definition 4.6. *Sei* $p \in [1, \infty)$. *Für* $f : E \to [-\infty, \infty]$ *messbar definiert man*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \tag{4.21}$$

und

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \|f\|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R} : |f| \leq M \text{ fast überall }\} \tag{4.22}$$
$$= \inf\{M \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : |f|(x) > M\}) = 0\}\,. \tag{4.23}$$

Ferner, für $p \in [1, \infty]$,

$$L_p(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ ist messbar und } \|f\|_p < \infty\}\,. \tag{4.24}$$

Notation. Ausführlicher kann man den Raum $L_p(E)$ mit $L_p(E, (X, \mathcal{S}, \mu))$ bezeichnen. Wir wählen im folgenden die Notation $L_p(E)$ solange keine Verwechslung zu befüchten ist. Wenn nichts weiteres gesagt ist, betrachten wir für $X = \mathbb{R}^n$ das Lebesguemaß und die σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen.

Bemerkung. Für $f \in L_\infty(E)$ gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ fast überall, d.h. das Infimum in der Definition von $\|f\|_\infty$ ist ein Minimum. Beweis: Seien $L := \|f\|_\infty$, $E_k := \{x \in E : |f(x)| > L + 2^{-k}\}$, und sei $E_\infty = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Nach Definition von L gilt dann $\mu(E_k) = 0$ und somit $\mu(E_\infty) = 0$. Andererseits folgt aus der Definition von E_k, dass $|f| \leq L$ in $E \setminus E_\infty$.

Beispiel. Sei $E = \mathbb{R}$. Dann gilt $\|\chi_{[0,1]}\|_p = 1$ für alle p, und für $\ell > 0$ gilt

$$\|\chi_{[0,\ell]}\|_p = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = \infty \\ \ell^{1/p} & \text{falls } p \in [1, \infty)\,. \end{cases} \tag{4.25}$$

Sei $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \chi_{(0,1)}(x)$ definiert. Dann gilt

$$\|f_\alpha\|_p = \left(\int_0^1 x^{p\alpha} dx\right)^{1/p} = \begin{cases} \frac{1}{(p\alpha+1)^{1/p}} & \text{falls } p\alpha > -1 \\ \infty & \text{falls } p\alpha \leq -1 \end{cases} \tag{4.26}$$

Deshalb ist $f_\alpha \in L_p(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $\alpha > -1/p$. Sei $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_\alpha(x) = |x|^\alpha \chi_{(1,\infty)}(x)$ definiert. Dann gilt

$$\|g_\alpha\|_p = \left(\int_1^\infty x^{p\alpha} dx\right)^{1/p} = \begin{cases} \frac{1}{(p\alpha+1)^{1/p}} & \text{falls } p\alpha < -1 \\ \infty & \text{falls } p\alpha \geq -1 \end{cases} \tag{4.27}$$

Deshalb ist $g_\alpha \in L_p(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $\alpha < -1/p$.

Beispiel. Sei $E = X = \mathbb{N}$, sei $\mathcal{S} = P(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ und sei μ das Zählmaß $\#$ (vgl. Beispiel (iii) nach der Definition des äusseren Maßes, Definition 2.4). Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \#)$ der Raum aller Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^p < \infty$. Dieser Raum wird auch mit l_p bezeichnet. Es gilt

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{4.28}$$

Analog ist $l_\infty := L^\infty(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \#)$ der Raum aller beschränkten Folgen mit $\|a\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.

Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $v \cdot w \leq |v|\,|w|$. Das lässt sich auf Funktionen in L_2 verallgemeinern und liefert eine der wichtigsten Ungleichungen der Analysis.

Lemma 4.7 (Cauchy-Schwarz). *Seien $f, g \in L_2(E)$. Dann ist $fg \in L_1(E)$,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 , \tag{4.29}$$

Beweis. Aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt, für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 . \tag{4.30}$$

Falls $\|f\|_2 = 0$ oder $\|g\|_2 = 0$ ist die Behauptung war, da dann $f = 0$ f.ü oder $g = 0$ f.ü. Ansonsten folgt mit $a = |f(x)|/\|f\|_2$, $b = |g(x)|/\|g\|_2$ folgt

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_2\|g\|_2} \leq \frac{|f|^2(x)}{2\|f\|_2^2} + \frac{|g|^2(x)}{2\|g\|_2^2} , \tag{4.31}$$

für alle $x \in E$. Nach Integration folgt

$$\frac{1}{\|f\|_2\|g\|_2} \int_E fg \, d\mu \leq \frac{1}{2\|f\|_2^2} \int_E |f|^2 d\mu + \frac{1}{2\|g\|_2^2} \int_E |g|^2 d\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 . \tag{4.32}$$

□

Um die Argumente auf andere Exponenten zu verallgemeinern, ersetzen wir die oben benutzte Ungleichung (4.30) durch (4.34) unten.

Lemma 4.8 (Youngsche Ungleichung). *Für $a, b \in [0, \infty)$, und $p, q \in (1, \infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 , \tag{4.33}$$

gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q . \tag{4.34}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$.

Beweis. Es reicht $a, b > 0$ zu betrachten. Die Aussage folgt aus der strikten Konkavität der Funktion $x \mapsto \ln x$. Diese liefert

$$\ln(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y \tag{4.35}$$

mit strikter Ungleichung für $x \neq y$. Die Behauptung folgt mit $x = a^p$, $y = b^q$ (vgl. Analysis II, (1.125)) □

Satz 4.9 (Hölder)**.** *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{4.36}$$

oder $\{p, q\} = \{1, \infty\}$. Seien $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$. Dann ist $fg \in L_1(E)$ und

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,. \tag{4.37}$$

Beweis. Falls $p, q \in (1, \infty)$: Aus Lemma 4.8 mit $a = |f|/\|f\|_p$, $b = |g|/\|g\|_q$, folgt

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\,. \tag{4.38}$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_E |fg|\, d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{4.39}$$

Falls $p = 1$, $q = \infty$: Sei $N = \{x : |g|(x) > \|g\|_\infty\}$. Aus der Definition von $\|g\|_\infty$ folgt $\mu(N) = 0$ (s. Bemerkung nach Definition 4.6). Deshalb gilt

$$\int_E |f||g|\, d\mu = \int_{E \setminus N} |f||g|\, d\mu \le \int_{E \setminus N} |f|\|g\|_\infty\, d\mu \tag{4.40}$$

$$= \|g\|_\infty \int_{E \setminus N} |f|\, d\mu = \|g\|_\infty \int_E |f|\, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1\,. \tag{4.41}$$

□

Bemerkung. (Nicht in der Vorlesung besprochen). Sei $p \in (1, \infty)$, $\rho \in L_1(E)$, $\rho \ge 0$, $h : E \to [-\infty, \infty]$ messbar und $\rho |h|^p$ integrierbar . Dann gilt

$$\left| \int_E h\rho\, d\mu \right| \le \left(\int_E |h|^p \rho\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \|\rho\|_1^{1-\frac{1}{p}} \tag{4.42}$$

Beweis: Wende die Höldersche Ungleichung mit $f = h\rho^{1/p}$ und $g = \rho^{1/q}$ an.

Satz 4.10 (Minkowski)**.** *Seien $f, g \in L_p(E)$. Dann ist $f + g \in L_p(E)$, und*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\,. \tag{4.43}$$

Insbesondere ist $L_p(E)$ ein Vektorraum.

Beweis. Messbarkeit von $f+g$ folgt aus Lemma 3.4(iii). Der Fall $p = 1$ wurde bereits in Lemma 3.33(iii) behandelt. Der Fall $p = \infty$ folgt unmittelbar aus der Definition.

Integrierbarkeit von $|f + g|^p$ für $p \in (1, \infty)$ folgt aus der Ungleichung

$$|f + g|^p \le (2 \max\{|f|, |g|\})^p \le 2^p (|f|^p + |g|^p)\,. \tag{4.44}$$

Es bleibt, die Dreiecksungleichung (4.43) für $p \in (1, \infty)$ zu beweisen. Dafür rechnet man

$$|f+g|^p \le |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1} . \tag{4.45}$$

Sei $q = p/(p-1)$, so dass $1/p + 1/q = 1$. Aus Satz 4.9 folgt

$$\int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \le \|f\|_p \, \| \, |f+g|^{p-1} \|_q \, , \tag{4.46}$$

und analog für $|g|\,|f+g|^{p-1}$. Deshalb gilt

$$\int_E |f+g|^p \, d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_E \left| |f+g|^{p-1} \right|^q \, d\mu \right)^{1/q} . \tag{4.47}$$

Mit $(p-1)q = p$ und $1 - 1/q = 1/p$ folgt die Aussage. □

[20.12. 2016, Vorlesung 18]

[22.12. 2016, Vorlesung 19]

Definition 4.11. *Für $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar,*

$$L^p(E) = L_p(E)/\sim \, , \tag{4.48}$$

wobei $f \sim g$ falls $f = g$ fast überall. Für $f \in L_p(E)$ bezeichnen wir mit $[f]$ die Äquivalenzklasse, die f enthält. Für $[f] \in L^p(E)$ schreibt man $\|f\|_p = \|[f]\|_p$.

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass aus $f \sim g$ folgt

$$\int_E \varphi(x, f(x))\, d\mu(x) = \int_E \varphi(x, g(x))\, d\mu(x) \tag{4.49}$$

für alle $\varphi : E \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ (und: $x \mapsto \varphi(x, f(x))$ ist genau dann integrierbar, wenn $x \mapsto \varphi(x, g(x))$ integrierbar ist). Man kann deshalb auch vom Integral der "Funktion" $\varphi(x, [f](x))$ sprechen. Insbesondere ist die Definition $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ wohlgestellt. Punktweise Werte existieren für die Äquivalenzklasse jedoch im allgemeinen nicht (es sein denn das Maß hat Atome, d.h. es gibt Punkte $a \in E$ mit $\mu(\{a\}) > 0$).

Lemma 4.12. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $p \in [1, \infty]$. Dann definiert*

$$[f] \mapsto \|[f]\|_{L^p(E)} := \|f\|_{L_p(E)} \tag{4.50}$$

eine Norm auf $L^p(E)$.

Beweis. Die Abbildung $[f] \mapsto \|[f]\|_{L^p(E)}$ ist wohldefiniert, weil für $g \in [f]$ folgt $f \sim g$ und damit (für $p < \infty$) $|f|^p \sim |g|^p$, und $\int_E |f|^p d\mathcal{L}^n = \int_E |g|^p d\mathcal{L}^n$. Das Argument für $p = \infty$ ist ähnlich (aus $f \leq M$ fast überall folgt, dass $g \leq M$ fast überall).

Falls $\|f\|_{L_p} = 0$ dann ist $f = 0$ fast überall, und damit $[f] = [0]$.

Es ist auch sofort klar dass für alle $\lambda \in [0, \infty)$ und $f \in L_p$ gilt:

$$\|\lambda f\|_p = \lambda \|f\|_p \,. \tag{4.51}$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus Satz 4.10. □

Satz 4.13 (Riesz-Fischer). *$L^p(E)$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum.*

Beweis. Beweisidee (für $p < \infty$): Cauchyfolge in $L^p \implies$ punktweise Konvergenz f.ü einer geeigneten Teilfolge (von Repräsentanten) $\implies$ punktweiser Limes ist eine L_p Funktion und Konvergenz ist in L_p.
Für die punktweise Konvergenz betrachtet man die Teleskopsumme $f_j(x) - f_0(x) = \sum_{h=1}^{j} (f_h(x) - f_{h-1}(x))$.

Wir beginnen jetzt mit dem eigentlichen Beweis.

Schritt 1: Vorbereitungen. Sei $j \mapsto [f_j]$ eine Cauchy-Folge in $L^p(E)$, mit $f_j \in L_p(E)$. Wir müssen zeigen, dass ein $f \in L_p(E)$ exisitiert, so dass $\|[f_j] - [f]\|_{L^p} \to 0$ für $j \to \infty$. Dies ist äquivalent zu $\|f_j - f\|_{L_p} \to 0$. Weiterhin reicht es Konvergenz eine Teilfolge zu zeigen (weil jede Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergent ist - Analysis 1)

Da es reicht, die Konvergenz einer Teilfolge zu zeigen, können wir oBdA annehmen, dass

$$\|f_h - f_{h+1}\|_p \leq 2^{-h} \qquad \forall h \in \mathbb{N} \tag{4.52}$$

(sonst betrachten wir eine Teilfolge f_{k_j}, mit k_j so definiert, dass $k_j > k_{j-1}$ und

$$\|f_h - f_l\|_p \leq 2^{-j} \qquad \forall h, l \geq k_j \,) \tag{4.53}$$

Schritt 2: $p < \infty$. Sei

$$g_j = \sum_{h=1}^{j} |f_h - f_{h-1}| \,. \tag{4.54}$$

Dann ist $g_j \in L_p(E)$ und

$$\|g_j\|_p \leq \sum_{h=1}^{j} \|f_h - f_{h-1}\|_p \leq 2 \tag{4.55}$$

für alle j. Sei $g_\infty = \lim_{j\to\infty} g_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j$. Aus Beppo Levi und der Monotonie der Folge g_j folgt dann

$$\int_E g_\infty^p \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E g_j^p \, d\mu \le 2^p \,. \tag{4.56}$$

Deshalb ist g_∞^p über E integrierbar. Mit Lemma 3.17(iv) gibt es eine Nullmenge $N \subset E$, so dass $g_\infty^p(x) < \infty$ für alle $x \in E \setminus N$.

Sei $x \in E \setminus N$. Dann gilt

$$g_\infty(x) = \sum_{h=1}^\infty |f_h - f_{h-1}|(x) < \infty \,. \tag{4.57}$$

Deshalb konvergiert die Reihe

$$\sum_{h=1}^\infty (f_h - f_{h-1})(x) \tag{4.58}$$

absolut (wg. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!). Sei

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) + \sum_{h=1}^\infty (f_h - f_{h-1})(x) & \text{falls } x \in E \setminus N \\ 0 & \text{falls } x \in N \,. \end{cases} \tag{4.59}$$

Daher gilt $f_h \to f$ punktweise fast überall und somit $|f_h - f|^p \to 0$ punktweise fast überall.

Es bleibt zu zeigen, dass $f_h \to f$ in L_p. Mit dem Satz von Lebesgue reicht es zu zeigen, dass es eine integrierbare Funktion F gibt, so dass $|f_h - f|^p \le F$ punktweise. Für alle $x \in E \setminus N$ gilt

$$|f_h - f|(x) = \left| \sum_{j=h}^\infty f_{j+1}(x) - f_j(x) \right| \le g_\infty(x) \tag{4.60}$$

Außerdem gilt $g_\infty = \infty$ auf N. Daher ist $F := g_\infty^p$ die gewünschte integrierbare Majorante.

Schritt 3: $p = \infty$. Aus (4.52) folgt, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_j \subset E$ existiert, so dass gilt:

$$|f_h(x) - f_{h+1}(x)| \le 2^{-h} \qquad \forall h \in \mathbb{N}, x \in E \setminus N_h \,. \tag{4.61}$$

Wir definieren $N = \bigcup_h N_h$. Für alle $x \in E \setminus N$ konvergiert die Reihe $\sum_h f_h(x) - f_{h+1}(x)$ absolut, deshalb können wir f wie oben definieren. Aus

$$|f(x) - f_h(x)| \le \sum_{j=h}^\infty |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \le 2^{-h+1} \,, \qquad \forall x \in E \setminus N \tag{4.62}$$

folgt, dass $\|f - f_h\|_\infty \le 2^{-h+1}$ und somit $f_h \to f$ in $L^\infty(E)$. □

Lemma 4.14. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, $1 \le p < q \le \infty$. Dann ist $L_q(E) \subset L_p(E)$.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Wir betrachten jetzt die Integration vektorwertiger Funktionen.

Eine (komponentenweise) messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}^m$ befindet sich in $L_p(E;\mathbb{R}^m)$ wenn $|f| \in L_p(E)$, die Norm wird durch $\|f\|_p = \||f|\|_p$ definiert, und $L^p(E;\mathbb{R}^m) = L_p(E;\mathbb{R}^m)/\sim$. Man kann leicht überprüfen, dass $f \in L_p(E;\mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn $f_1, \dots, f_m \in L_p(E)$.

Satz 4.15. *Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{4.63}$$

oder $\{p,q\} = \{1,\infty\}$.

(i) Für alle $f \in L_p(E;\mathbb{R}^m)$ und $g \in L_q(E;\mathbb{R}^m)$ ist $f \cdot g \in L_1(E)$ und

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,. \tag{4.64}$$

(ii) Für alle $f \in L_p(E)$ und $g \in L_q(E;\mathbb{R}^m)$ ist $fg \in L_1(E;\mathbb{R}^m)$ und

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,. \tag{4.65}$$

Beweis. Aus Satz 4.9, angewendet auf $|f|$ und $|g|$, folgt

$$\|\,|f|\,|g|\,\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,. \tag{4.66}$$

Mit

$$|f(x) \cdot g(x)| \le |f(x)||g(x)| \tag{4.67}$$

folgt (i); mit

$$|f(x)g(x)| \le |f(x)||g(x)| \tag{4.68}$$

folgt (ii). □

Satz 4.16. *Für alle messbaren $E \subset \mathbb{R}^n$ und $m \ge 1$ ist $L^p(E;\mathbb{R}^m)$ ein vollständiger normierter Vektorraum. Eine Folge $f : \mathbb{N} \to L^p(E;\mathbb{R}^m)$ konvergiert gegen $f^* \in L^p(E;\mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn jede Komponente $f_i : \mathbb{N} \to L^p(E)$ gegen $f_i^* \in L^p(E)$ konvergiert.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Definition 4.17. *Für $f \in L_1(E;\mathbb{R}^m)$ definiert man*

$$\int_E f d\mathcal{L}^1 = \sum_{i=1}^m e_i \int_E f_i d\mathcal{L}^1\,. \tag{4.69}$$

Bemerkung. Für $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ linear gilt

$$\int_E Tf d\mathcal{L}^1 = T \int_E f d\mathcal{L}^1 . \tag{4.70}$$

Lemma 4.18. *Sei $f \in L_1(E; \mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$\left| \int_E f d\mathcal{L}^1 \right| \leq \int_E |f| d\mathcal{L}^1 . \tag{4.71}$$

Beweis. Sei

$$v = \int_E f d\mathcal{L}^1 . \tag{4.72}$$

Wir rechnen

$$|v|^2 = v \cdot v = \int_E v \cdot f d\mathcal{L}^1 \tag{4.73}$$

$$\leq \int_E |v||f| d\mathcal{L}^1 = |v| \|f\|_1 . \tag{4.74}$$

□

4.3 Dichtheit von C_c^∞ in L_p für $1 \leq p < \infty$, Faltung

Kommentar zu Abschnitt 4.3 (12.1. 2017) :
Ich habe nach der Vorlesung den Text etwas umorganisiert. Die Fälle $p = 1$ und $p \neq 1$ werden jetzt weitgehend parallel behandelt und dadurch Wiederholungen vermieden.
Den Beweis von Lemma 4.28 habe ich etwas umgeordnet und beide Konvergenzaussagen in (i) zunächst für den Fall, dass φ kompakten Träger hat, bewiesen (dieser Fall ist in Anwendungen der wichtigste).

Definition 4.19. *Für eine Funktion $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir den Träger als die abgeschlossene Menge*

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann definieren wir die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in U durch

$$C_c(U) := \{f \in C(U) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt}, \operatorname{supp} f \subset U\}.$$

Außerdem definieren wir für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$C_c^k(E) := C_c(E) \cap C^k(E).$$

Analog definiert man $C_c^k(E; \mathbb{R}^m)$.

Satz 4.20. *Sei $p \in [1, \infty)$ und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C_c(U)$ in $L_1(U)$ dicht, d.h.: für alle $f \in L_1(U)$ gibt es eine Folge von Funktionen $f_k \in C_c(U)$, so dass gilt:*

$$\lim_{k \to \infty} \int_U |f - f_k|^p d\mathcal{L}^1 = 0 . \tag{4.75}$$

Bemerkung. $C_c^0(E)$ ist *nicht* dicht in L^∞ (Übungsblatt 11).

Bemerkung. Satz 4.20 gilt auch, wenn man das Lebesguemaß durch ein beliebiges Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ ersetzt.

Zum Beweis benutzen wir

Lemma 4.21. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es $\theta \in C_c(U)$ mit $0 \le \theta \le 1$ und $\theta_{|K} \equiv 1$.*

Beweis. Sei

$$R := \operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \setminus U, K) := \inf\{|x-y| : x \in \mathbb{R}^n \setminus U,\, y \in K\}.$$

Dann gilt $R > 0$. (Sonst gibt es $x_j \in \mathbb{R}^n \setminus U$ und $y_j \in K$ mit $|x_j - y_j| \to 0$. Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge y_{j_k}, die gegen $y \in K$ konvergiert. Daraus folgt $x_{j_k} \to y$. Da $y \in U$ und U offen ist, gilt $x_{j_k} \in U$ für $k \ge K$. Widerspruch.)

Sei

$$\tilde{K} := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le R/2\}.$$

Dann ist $\tilde{K}$ abgeschlossen und beschränkt also kompakt in $\mathbb{R}^n$. Außerdem folgt aus der Definition von R, dass $\tilde{K} \subset U$. Setze

$$\theta = \max\left(1 - \frac{2}{R}\operatorname{dist}(x, K), 0\right).$$

Dann ist θ stetig auf $\mathbb{R}^n$ (sogar lipschitzstetig) und $\theta_{|K} = 1$. Außerdem gilt $\operatorname{supp}\theta \subset \tilde{K} \subset U$ und somit $\theta \in C_c(U)$. □

Beweis. Teil 1: $f = \chi_F$, $F \subset E$ Lebesgue messbar, $\mathcal{L}^n(F) < \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt eine kompakte Menge K und eine offene Menge V, so dass $K \subset F \subset V \subset U$ mit $\mathcal{L}^n(V \setminus K) < \varepsilon^p$. Nach Lemma 4.21 gibt es eine Funktion $\theta \in C_c(V)$ mit Werten in $[0,1]$ und $\theta_{|K} = 1$. Daraus folgt $\theta = f = 1$ in K und $\theta = f = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus V$. Weiterhin gilt $|f - \theta| \le 1$ in $V \setminus K$ und somit

$$\int_E |f-\theta|^p \, d\mathcal{L}^n = \int_{V \setminus K} |f-\theta|^p \, d\mathcal{L}^n \le \mathcal{L}^n(V \setminus K) < \varepsilon^p \tag{4.76}$$

Also gilt $\|f - \theta\|_p < \varepsilon$. Daraus ergibt sich die Behauptung für $f = \chi_F$.

[22.12. 2016, Vorlesung 19]

[10.1. 2017, Vorlesung 20]

Teil 2: $f \in L^p(E)$, $f(E)$ endlich.
In diesem Fall läßt sich f schreiben als $f = \sum_{j=1}^M c_j \chi_{F_j}$ mit F_j Lebesgue messbar und disjunkt und $\mathcal{L}^n(F_j) < \infty$. Die Behauptung folgt somit aus Teil 1 (und der Dreiecksungleichung für die L^p Norm).

Teil 3: Aussage für $f \geq 0$, $f \in L_1(E)$ und $p = 1$.
Nach Voraussetzung ist $f : E \to [0, \infty]$ integrierbar. Es gibt eine Folge g_h einfacher integrierbarer Funktionen, die punktweise monoton gegen f konvergiert, mit $g_h(E)$ endlich (Lemma 3.19(i)). Aus Beppo Levi folgt

$$\lim_{h\to\infty} \int_E |f - g_h| d\mathcal{L}^n = \lim_{h\to\infty} \int_E (f - g_h) d\mathcal{L}^n = \int_E f d\mathcal{L}^n - \lim_{h\to\infty} \int_E g_h d\mathcal{L}^n = 0\,. \tag{4.77}$$

Aus Teil 2 folgt, dass für alle $h \in \mathbb{N}$ ein $f_h \in C_c^0(E)$ existiert, so dass gilt:

$$\int_E |g^h - f_h| d\mathcal{L}^n \leq \frac{1}{h}\,. \tag{4.78}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\int_E |f - f_h| d\mathcal{L}^n \leq \int_E |f - g_h| d\mathcal{L}^n + \int_E |g_h - f_h| d\mathcal{L}^n\,, \tag{4.79}$$

und mit (4.77) und (4.78) ist der Beweis beendet.

Teil 4: Aussage für $f \geq 0$, $f \in L_p(E)$ und $p \neq 1$.
Da f^p integrierbar ist, gibt es eine Folge einfacher integrierbarer Funktionen g_h die monoton gegen f konvergiert und für die $g_h(E)$ endlich ist. Wir können annehmen, dass $g_h \geq 0$ (sonst ersetze g_h durch $\max(g_h, 0)$). Dann konvergiert $G_h := g_h^{1/p}$ monoton gegen f und es gilt $|f - G_h|^p \leq f^p$ (da $0 \leq G_h \leq f$). Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$\lim_{h\to\infty} \int |f - G_h|^p \, d\mathcal{L}^n = 0\,. \tag{4.80}$$

Jetzt kann man mit Teil 2 G_h in der L^p Norm durch Funktionen $F_h \in C_c(E)$ approximieren und den Beweis wie in Teil 3 beenden.

Teil 5: $f \in L_p(E)$.
Es reicht f_+ und f_- getrennt zu behandeln. □

Satz 4.22 (Riemann-Lebesgue). *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x + y)| dx = 0 \tag{4.81}$$

und

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sin(\xi \cdot x) dx = \lim_{\xi\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos(\xi \cdot x) dx = 0\,. \tag{4.82}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ (Satz 4.20). Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\rho > 0$, so dass gilt:

$$|g(x) - g(x + y)|\mathcal{L}^n(\operatorname{supp} g) \leq \varepsilon \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| \leq \rho\,. \tag{4.83}$$

Dann ist, für alle $y \in B_\rho(0)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x+y)|dx \tag{4.84}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x+y) - f(x+y)|dx \le 3\varepsilon\,. \tag{4.85}$$

Das beweist (4.81).

Um (4.82) zu zeigen, definieren wir

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sin(\xi \cdot x)dx. \tag{4.86}$$

Aus dem Transformationssatz mit $x = z + \pi\xi/|\xi|^2$ und $\sin(\xi \cdot x) = -\sin(\xi \cdot x + \pi)$ folgt für $\xi \neq 0$:

$$g(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(z + \frac{\pi}{|\xi|^2}\xi)\sin(\xi \cdot z)dz\,. \tag{4.87}$$

Deshalb gilt:

$$2|g(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x) - f(x + \frac{\pi}{|\xi|^2}\xi)\right]\sin(\xi \cdot x)dx\right| \tag{4.88}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f(x + \frac{\pi}{|\xi|^2}\xi)\right| dx\,. \tag{4.89}$$

Mit $y = \pi\xi/|\xi|^2$ und (4.81) folgt, dass der erste Grenzwert in (4.82) verschwindet. Die Rechnung mit cos statt sin ist identisch. □

Definition 4.23. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Sei*

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : y \mapsto f(y)g(x-y) \textit{ ist nicht integrierbar }\}\,. \tag{4.90}$$

Dann wird die Faltung (auch Konvolution genannt) $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$(f*g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d\mathcal{L}^n(y) & \textit{falls } x \notin N \\ 0 & \textit{falls } x \in N \end{cases} \tag{4.91}$$

definiert.

Bemerkung. Die Menge N kann nichtleer sein. Beispiel: sei $n = 1$, $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ für $0 < |x| < 1$, $f(x) = 0$ sonst. Dann ist $y \mapsto f(y)f(0-y)$ nicht integrierbar, und damit folgt $0 \in N$.

Bemerkung. Es gilt $f*g = g*f$. Beweis: Fixiere x, setze $y = \varphi(y') = x - y'$ und wende die Transformationsformel an.

Bemerkung. Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation. Seien $f, g \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$. Seien X und Y Zufallsvariablen und seien $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f \, d\mathcal{L}^1$ und $G(y) := \int_{-\infty}^{y} g \, d\mathcal{L}^1$ die Wahrscheinlichkeiten, dass $X \leq x$ bzw. $Y \leq y$. Dann ist $H(z) := \int_{-\infty}^{z} (f * g) \, d\mathcal{L}^1$ die Wahrscheinlichkeit, dass $X + Y \leq z$.
Beweisidee: Betrachte zunächst $f, g \in C_c^0(\mathbb{R})$ und benutze, dass $H(z) \geq \sum_{a \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}} F(z-a)[G(a) - G(a - \frac{1}{k})]$ und $1 - H(z) \geq \sum_{a \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}} (1 - F(z-a))[G(a + \frac{1}{k}) - G(a)]$. Dann folgt die Aussage für $k \to \infty$ (mit Fubini). Der allgemeine Fall folgt aus Satz 4.24.

Satz 4.24. *Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist N in (4.90) eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, und*

$$\|f * g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{4.92}$$

Beweis. Teil 1: $f, g \geq 0$.

Aus Lemma 3.40 folgt, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(x)g(y)$ integrierbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y) d\mathcal{L}^{2n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mathcal{L}^n(x) = \|f\|_1 \, \|g\|_1 \,. \tag{4.93}$$

Sei $(x, y) = \varphi(x', y') = (x' - y', y')$. Dann gilt $D\varphi(x', y') = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\det D\varphi = 1$. Die Transformationsformel liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(y) d\mathcal{L}^{2n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x' - y')g(y') d\mathcal{L}^{2n}(x', y') \,. \tag{4.94}$$

Eine weitere Anwendung von Fubini ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d\mathcal{L}^{2n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^n(x) \tag{4.95}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f * g \; d\mathcal{L}^n \,. \tag{4.96}$$

Die Aussage folgt.

Teil 2: Es reicht, Teil 1 auf die vier Funktionen $f_+ * g_+$, $f_+ * g_-$, $f_- * g_+$ und $f_- * g_-$ anzuwenden, und

$$\|f * g\| \leq \|f_+ * g_+\| + \|f_- * g_-\| + \|f_- * g_+\| + \|f_+ * g_-\| \tag{4.97}$$

$$= (\|f_+\| + \|f_-\|)(\|g_+\| + \|g_-\|) = \|f\| \, \|g\| \tag{4.98}$$

zu rechnen.
Alternatives Argument für Teil 2 (nicht besprochen): Sei N die Nullmenge für die $y \mapsto |f|(y)|g|(x - y)$ nicht integrierbar ist. Für $x \notin N$ gilt $|f * g| \leq |f| * |g|$ (wegen (3.185)) und die Behauptung folgt aus Teil 1, angewandt auf $|f|$ und $|g|$.

$\square$

Bemerkung. Mit $L_{1,loc}(E)$ bezeichnen wir die Menge alle messbaren Funktionen $f : E \to [-\infty, \infty]$, die auf jeder kompakten Teilmenge von E integrierbar sind. Sei $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$. Dann ist $(\varphi * f)(x)$ wohldefiniert und für alle kompakten Mengen K gilt

$$\int_K |\varphi * f| \, d\mathcal{L}^n \leq \|\varphi\|_{L_1} \int_{K+\overline{B_r(0)}} |f| \, d\mathcal{L}^n \tag{4.99}$$

Insbesondere gilt $\varphi * f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Beweis: Übungsblatt 11.

Satz 4.25. *Sei $p \in [1, \infty]$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \,. \tag{4.100}$$

Beweis. Der Fall $p = 1$ wurde bereits in Satz 4.24 behandelt. Für $p = \infty$ gilt

$$|(f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|(y)|g|(x-y) \, d\mathcal{L}^n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|(y)\|g\|_\infty \, d\mathcal{L}^n(y) \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \,. \tag{4.101}$$

Sei nun $p \in (1, \infty)$. Da die zu beweisende Abschätzung homogen in f ist, reicht es, sie für den Fall

$$\|f\|_1 = 1 \tag{4.102}$$

zu beweisen (der Fall $\|f\|_1 = 0$ ist trivial).

Da $|g|^p \in L_1(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Satz 4.24 gibt es eine Nullmenge N, so dass $y \mapsto |f|(x-y)|g|^p(y)$ für alle $x \notin N$ integrierbar ist. Aus der Bemerkung nach Satz 4.9 mit $\rho(y) = |f|(x - y)$, und $h = g$ folgt, dass $y \mapsto f(x - y)g(y)$ integrierbar ist für $x \notin N$ und

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{R^n} |f|(x - y)|g|(y) \, d\mathcal{L}^n(y) \\ &\leq \left(\int_{R^n} |f|(x - y)|g|^p(y) \, d\mathcal{L}^n(y) \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq ((|f| * |g|^p)(x))^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.103}$$

Mit Satz 4.24 folgt

$$\|f * g\|_p^p \leq \||f| * |g|^p\|_1 \leq \|f\|_1 \||g|^p\|_1 = \|g\|_p^p \tag{4.104}$$

und damit die gewünschte Abschätzung. □

Lemma 4.26. *Seien $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) Die Faltung ist assoziativ, d.h.

$$(f * g) * h = f * (g * h) \tag{4.105}$$

(bis auf eine Nullmenge).

(ii) Falls zusätzlich h beschränkt ist und $(Sf)(x) := f(-x)$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(Sg * h) \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g(Sf * h) \, d\mathcal{L}^n. \tag{4.106}$$

(iii) Falls $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, so ist $N = \emptyset$, $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und für $k \geq 1$ gilt

$$\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g \tag{4.107}$$

für alle Multiindices α mit $|\alpha| \leq k$.

Beweis. Übungsblatt 11. □

Lemma 4.27. *Es gibt Funktionen mit folgenden Eigenschaften.*

(i) $\exists \varphi_1 \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq 1$ und $\int_{B_1(0)} \varphi > 0$.

(ii) $\exists \varphi_2 \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\varphi_2 \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2 \, dx = \int_{B_1(0)} \varphi_2 \, dx = 1$.

(iii) $\exists \eta : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq \frac{1}{4}$, $\eta(t) = 1$ für $t \geq \frac{3}{4}$.

(iv) $\exists \varphi_3 \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $0 \leq \varphi_3 \leq 1$ und $\varphi_3(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Beweis. (i): Aus Analysis I wissen wir das die Funktion $\psi(t) = e^{-1/t}$ für $t > 0$, $\psi(t) = 0$ für $t \leq 0$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist. Außerdem ist ψ monoton wachsend und hat Werte in $[0, 1)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ definere $\varphi_1(x) = \psi(1 - 2|x|^2)$. Nach der Kettenregel ist $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq 1/\sqrt{2}$. Dies beweist (i).
(ii): Sei $C := \int_{B_1(0)} \varphi_1 \, d\mathcal{L}^n$. Setze $\varphi_2 = \frac{1}{C}\varphi_1$.
(iii): Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_2 \, d\mathcal{L}^1$. Dann ist $\Phi(t) = 0$ für $t \leq -1$, $\Phi(t) = 1$ für $t \geq 1$ und $0 \leq \Phi \leq 1$. Setze $\eta(s) = \Phi(4s - 2)$.
(iv): Setze $\varphi_3(x) = \eta(A\varphi_1(x)) = \eta(A\psi(1 - 2|x|^2))$, mit $A\psi(1/2) = 1$. Dann ist $\varphi_3(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$. □

Lemma 4.28. *Sei $p \in [1, \infty)$.*

(i) Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mathcal{L}^n = 1$. Sei $\psi_k(x) = k^n \varphi(kx)$. Dann gilt

$$\psi_k * \theta \to \theta \quad \text{gleichmäßig} \quad \forall \theta \in C_c^0(\mathbb{R}^n)\,, \tag{4.108}$$

$$\psi_k * f \to f \quad \text{in} \quad L_p(\mathbb{R}^n) \quad \forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)\,. \tag{4.109}$$

Falls $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\psi_k * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C_c^\infty(E)$ dicht in $L_p(E)$, d.h. für alle $f \in L_p(E)$ gibt es eine Folge $g : \mathbb{N} \to C_c^\infty(E)$, die gegen f in $L_p(E)$ konvergiert.

Beweis. (i):
Wir betrachten zunächst den Fall, dass φ kompakten Träger hat (dies ist in dem meisten Anwendungen der Fall).

Teil 1: Beweis von (4.108) *falls $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ für ein $R > 0$.*
Definiere $\omega(\delta) = \sup\{|\theta(x-y) - \theta(x)| : |y| \leq \delta, x \in \mathbb{R}^n\}$. Die Funktion θ ist stetig und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge. Daher ist θ gleichmäßig stetig und es gilt $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

Aus der Transformationsformel folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k \, d\mathcal{L}^n = 1 \quad \text{und} \quad \|\psi_k\|_1 = \|\varphi\|_1 \,. \tag{4.110}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt daher

$$\begin{aligned}(\psi_k * \theta(x)) - \theta(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y)(\theta(x-y) - \theta(x)) \, d\mathcal{L}^n(y) \\ &= \int_{B_{\frac{R}{k}}(0)} \psi_k(y)(\theta(x-y) - \theta(x)) \, d\mathcal{L}^n(y) \end{aligned} \tag{4.111}$$

und somit $|(\psi_k * \theta(x)) - \theta(x)| \leq \omega(\frac{R}{k}) \|\psi_k\|_1 = \omega(\frac{R}{k}) \|\varphi\|_1$. Daher gilt (4.108).

Teil 2: Beweis von (4.109) *falls $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ für ein $R > 0$.*
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.20 gibt es $\theta \in C_c(\mathbb{R}^n)$ so dass $\|f - \theta\|_p \leq \varepsilon$. Nun gilt

$$\|\psi_k * f - f\|_p \leq \|\psi_k * (f - \theta)\|_p + \|\psi_k * \theta - \theta\|_p + \|\theta - f\|_p$$

Mit Satz 4.25 und $\|\psi_k\|_1 = \|\varphi\|_1$ folgt

$$\|\psi_k * f - f\|_p \leq \|\psi_k \theta - \theta\|_p + (\|\varphi\|_1 + 1)\varepsilon \,.$$

Aus Teil 1 und

$$\operatorname{supp}(\psi_k * \theta - \theta) \subset \operatorname{supp} \theta + B_{\frac{R}{k}}(0) \subset \operatorname{supp} \theta + B_R(0)$$

ergibt sich, dass $\lim_{k \to \infty} \|\psi_k \theta - \theta\|_p = 0$. Daher gilt $\limsup_{k \to \infty} \|\psi_k * f - f\|_1 \leq 2\varepsilon$ und daraus folgt die Behauptung, da ε beliebig war.

Teil 3: Beweis von (4.108) *für allgemeine φ.*
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.20 gibt es $\varphi^1, \varphi^2 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2$, $\|\varphi^2\|_1 \leq \varepsilon$ und $\varphi_1 = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ für $R > 0$. Sei $\psi_k^i(x) := k^n \varphi^i(kx)$, $c := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^1 \, d\mathcal{L}^n$. Es gilt

$$|c - 1| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^1 - \varphi) \, d\mathcal{L}^n \right| \leq \int |\varphi^2| \, d\mathcal{L}^n \leq \varepsilon. \tag{4.112}$$

Sei $\|g\|_{C^0} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)|$. Aus Teil 1 (angewandt auf $\frac{1}{c}\varphi^1$) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|\psi_k^1 * \theta - c\,\theta\|_{C^0} = 0\,. \tag{4.113}$$

Aus der Definition der Faltung folgt

$$\|(\psi_k^2 * \theta)\|_{C^0} \leq \|\psi_k^2\|_1\, \|\theta\|_{C^0} = \|\varphi^2\|_1\, \|\theta\|_{C^0} \leq \varepsilon \|\theta\|_{C^0} \tag{4.114}$$

Kombination von (4.113) und (4.114) liefert.

$$\limsup_{k\to\infty} \|\psi_k * \theta - c\theta\|_{C^0} \leq \varepsilon\|\theta\|_{C^0}.$$

Mit (4.112) ergibt sich

$$\limsup_{k\to\infty} \|\psi_k * \theta - \theta\|_{C^0} \leq \limsup_{k\to\infty} \|\psi_k * \theta - c\theta\|_{C^0} + |1-c|\, \|\theta\|_{C^0} \leq 2\varepsilon\|\theta\|_{C^0}\,. \tag{4.115}$$

Daraus folgt (4.108), da $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig war.

Teil 4: Beweis von (4.109) *für allgemeine* φ.
Sei $\varepsilon > 0$ und seien φ^1 und φ^2 wie in Teil 3. Aus Teil 2 (angewandt auf $\frac{1}{c}\varphi^1$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|\psi_k^1 * f - c\,f\|_p = 0.$$

Nach Satz 4.25 gilt

$$\|\psi_k^2 * f\|_p \leq \|\psi_k\|_1\, \|f\|_p = \|\varphi^2\|_1\, \|f\|_p \leq \varepsilon\|f\|_p.$$

In Verbindung mit (4.112) ergibt sich

$$\limsup_{k\to\infty} \|\psi_k * f - f\|_p \leq \limsup_{k\to\infty} \|\psi_k * f - cf\|_p + |1-c|\, \|f\|_p \leq 2\varepsilon\|f\|_p\,. \tag{4.116}$$

Daraus folgt die Behauptung, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(ii): Sei $\varepsilon > 0$ und sei $f \in L_p(E)$. Nach Satz 4.20 gibt es $\theta \in C_c(E)$ so dass $\|f - \theta\|_p \leq \varepsilon/2$. Sei nun $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\int \varphi = 1$. Aus (i) folgt, dass $\|\psi_k * \theta - \theta\|_p < \varepsilon/2$ für k gross genug. Ausserdem ist $\psi_k * \theta \in C^\infty$ und $\operatorname{supp}(\psi_k * \theta) \subset \operatorname{supp}\theta + \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$ ist eine kompakte Teilmenge von E für genügend große k. □

[12.1. 2017, Vorlesung 21]

[17.1. 2017, Vorlesung 22]

4.4 Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt betrachten wir komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Man sagt $f \in L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind, und $|f| \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Die Norm wird durch

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mathcal{L}^n \right)^{1/p} \tag{4.117}$$

definiert. Dabei ist $L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ natürlich mit $L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^2)$ isomorph. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir im Folgenden dx statt $d\mathcal{L}^n(x)$.

Falls $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und falls f Periode 2π hat, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so hatten wir in Analyis I gezeigt (Satz 6.43), dass f sich in eine Fourierreihe entwickeln lässt, d.h.

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_k}{2\pi} e^{ikx}, \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \tag{4.118}$$

wobei die Summe auf der rechten Seite gleichmäßig konvergiert, d.h. die Funktionen $f_N := \sum_{k=-N}^{N} \frac{a_k}{2\pi} e^{ikx}$ konvergieren gleichmäßig gegen f. Außerdem gilt (Analyis I, Satz 6.44, mit $c_k = \frac{a_k}{2\pi}$)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx\,. \tag{4.119}$$

Falls zusätzlich $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||a_k| < \infty$ so gilt

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{ika_k}{2\pi} e^{ikx}, \tag{4.120}$$

d.h. Differentiation von f bedeutet Multiplikation der Fourierkoeffizienten mit ik.

Wir wollen nun eine ähnliche Darstellung für nichtperiodische Funktionen finden. Zur Motivation betrachten wir zunächst C^1 Funktionen mit der Periode $2\pi m$. Durch Skalierung folgt, dass diese die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k\in\frac{1}{m}\mathbb{Z}} \frac{a_k}{2\pi m} e^{ikx}, \quad \text{mit} \quad a_k = \int_{-\pi m}^{\pi m} f(x) e^{-ikx}\, dx, \tag{4.121}$$

besitzen und

$$\sum_{k\in\frac{1}{m}\mathbb{Z}} \frac{1}{m} |a_k|^2 = 2\pi \int_{-\pi m}^{\pi m} |f|^2(x)\, dx\,. \tag{4.122}$$

Wenn man formal den Limes $m \to \infty$ bildet, so kann man erwarten, dass geeignete Funktionen f sich schreiben lassen als $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(k) e^{ikx}\, dk$, wobei $a(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx$. Wir werden jetzt die Fouriertransformation durch den zweiten Ausdruck definieren und zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen f durch den ersten Ausdruck gegeben ist (s. Satz 4.32 und Satz 4.35). Außerdem ist die Fouriertransformierte der Ableitung durch Multiplikation im ik gegeben (s. Lemma 4.30) und es gilt das kontinuierliche Analogon von (4.122), s. Satz 4.34.

4.4.1 Fourier-Transformation in L_1

Definition 4.29. *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Die Fourier-Transformierte von f ist die Funktion $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx\,. \tag{4.123}$$

Wir definieren auch $\tilde{\mathcal{F}}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$(\tilde{\mathcal{F}}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi\,. \tag{4.124}$$

Bemerkung. (i) Aus $f \sim g$ folgt $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$, deshalb kann man $\mathcal{F}$ auch für Äquivalenzklassen (d.h., für Elemente von L^1) definieren.
(ii) Wir werden später sehen, dass unter geeigneten Voraussetzungen $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{F}}f) = f$. Daher nennt man $\tilde{\mathcal{F}}$ auch die inverse Fourier-Transformierte.
(iii) Sei $Sf(x) := f(-x)$. Der Transformationssatz mit $\varphi(x) = -x$ und die Zerlegung des Integrals in Real- und Imaginär liefern

$$(\mathcal{F}Sf)(\xi) = (\mathcal{F}f)(-\xi), \quad \overline{(\mathcal{F}f)(\xi)} = (\mathcal{F}\overline{f})(-\xi)\,. \tag{4.125}$$

Außerdem gilt

$$(\tilde{\mathcal{F}}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{F}f)(-\xi)\,. \tag{4.126}$$

Lemma 4.30. *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, $\hat{f} = \mathcal{F}f$. Dann gilt:*

(i) $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$*;* $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$ *für alle* ξ*;*

(ii) $\lim_{\xi\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$*;*

(iii) Für $g \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ gilt $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)\,(\mathcal{F}g)$.

(iv) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ durch $g(x) = -ixf(x)$ definiert. Falls $g \in L_1$ (d.h., falls $|x||f|$ integrierbar ist), dann ist $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und $D(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}g$ (als vektorwertige Funktionen, d.h., $D_j(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(g_j)$ für $j = 1,\ldots,n$).

(v) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und $|Df|$ integrierbar. Dann ist $(\mathcal{F}(Df))(\xi) = i\xi(\mathcal{F}f)(\xi)$.

Bemerkung. Aus (i) folgt, dass $\mathcal{F} : L^1 \to C^0$ eine stetige und lineare Abbildung ist.

Bemerkung. Aus (4.126) folgt, dass (i) und (ii) auch für $\tilde{\mathcal{F}}$ gelten und die anderen Aussagen in folgender Form gelten

(iii') Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt $\tilde{\mathcal{F}}(f * g) = (2\pi)^n (\tilde{\mathcal{F}} f)\,(\tilde{\mathcal{F}} g)$.

(iv') Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ durch $g(\xi) = i\xi f(\xi)$ definiert. Falls $g \in L_1$, dann $\tilde{\mathcal{F}} f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ und $D(\tilde{\mathcal{F}} f) = \tilde{\mathcal{F}} g$.

(v') Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ und $|Df|$ integrierbar. Dann ist $(\tilde{\mathcal{F}}(Df))(x) = -ix(\tilde{\mathcal{F}} f)(x)$.

Beweis. (i): Die Stetigkeit folgt aus Satz 3.38(i) da $|f(x)e^{-i\xi\cdot x}| \le |f(x)|$, und $f \in L_1$. Die Abschätzung folgt aus

$$|\mathcal{F} f(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-ix\cdot\xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|(x) dx = \|f\|_1 \,. \tag{4.127}$$

(ii) ist das Lemma von Riemann-Lebesgue (Lemma 4.22).
(iii): Mit Fubini und dem Variabelwechsel $x = y + z$ (d.h. Anwendung der Transformationsformel mit $(x, y) = \varphi(y, z) = (y + z, y))$ erhält man

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right) dx \tag{4.128}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot(z+y)} f(z)g(y)dydz \tag{4.129}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot z} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y} g(y)dy \,. \tag{4.130}$$

Integrabilität von $(x, y) \mapsto e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)g(y)$ folgt aus der Transformationsformel und Lemma 3.40.
(iv): Es gilt $\frac{\partial}{\partial \xi_j}(f(x)e^{-ix\cdot\xi}) = -i\xi_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ und somit $|D_\xi(f(x)e^{-ix\cdot\xi})| = |x||f|$. Daher folgt die Behauptung aus Satz 3.38(ii).
(v): Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(x)e^{-ix\cdot\xi}) = (\partial_j f)(x)e^{-ix\cdot\xi} - i\xi_j f(x)e^{-ix\cdot\xi} \,. \tag{4.131}$$

Daher ist $x \mapsto |D_x(f(x)e^{-ix\cdot\xi})|$ integrierbar. Die Behauptung folgt aus Lemma 4.31.

□

Lemma 4.31 (partielle Integration I)**.** *Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und seien g und $|Dg|$ integrierbar. Dann gilt für $j = 1, \dots n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j g)(x)\, dx = 0 \,. \tag{4.132}$$

Beweis. *Teil 1:* $n = 1$.
Aus der Integrierbarkeit und der Stetigkeit von g' folgt, dass für alle Folgen mit $r_j \to -\infty$ und $R_j \to \infty$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g'(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{[r_j,R_j]} g'(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} g(R_j) - g(r_j)\,. \tag{4.133}$$

Da $g \in L_1$, kann man r_j und R_j so wählen dass $g(r_j) \to 0$ und $g(R_j) \to 0$ für $j \to \infty$. Dies beendet den Beweis für $n = 1$.

Teil 2: $n > 1$.
Dies folgt aus Teil 1 und Fubini. Details: nach Vertauschung der Koordinaten kann man annehmen, dass $j = n$. Setze $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Sei $h(x_n) := g(x', x_n)$. Dann gilt $h'(x_n) = (\partial_n g)(x', x_n)$, da $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Aus dem Satz von Fubini folgt, dass es eine $\mathcal{L}^{n-1}$ Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ gibt, so dass h und h' für $x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus N$ integrierbar sind. Aus Teil 1 folgt

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_n g)(x', x_n)\,dx_n = 0, \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus N. \tag{4.134}$$

Die Behauptung folgt durch Integration dieser Identität über $x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus N$ und erneute Anwendung des Satzes von Fubini. □

Satz 4.32 (Umkehrformel)**.** *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, so dass $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Dann ist $f = \tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}f$ fast überall.*

Um Satz 4.32 zu beweisen, wird zuerst folgendes bewiesen:

Lemma 4.33 (Gausskalkül)**.** *Sei $a > 0$, und seien die Funktionen $h_a, H_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$h_a(x) := (\frac{a}{2\pi})^{n/2} e^{-\frac{a}{2}|x|^2}, \quad H_a(\xi) := e^{-\frac{1}{2a}|\xi|^2}\,. \tag{4.135}$$

Dann gilt

$$\mathcal{F}h_a = H_a, \quad \tilde{\mathcal{F}}H_a = h_a\,. \tag{4.136}$$

Beweis. Wegen Fubini reicht es, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Mit den Transformationen $x = \frac{x'}{\sqrt{a}}$ und $\xi = \sqrt{a}\xi'$ sieht man, dass es reicht, den Fall $a = 1$ zu behandeln. Weiterhin reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}h_1 = H_1$. Da H_1 symmetrisch und reell ist, folgt dann nämlich (für $n = 1$) dass

$$\tilde{\mathcal{F}}H_1 = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}H_1 = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}h_1 = (2\pi)^{-1/2}H_1 = h_1\,. \tag{4.137}$$

Sei $n = 1$. Es bleibt zu zeigen dass $\mathcal{F}h_1 = H_1$.
Dies wurde in der Vorlesung vom 22.12. bewiesen. Details:
Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}h_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2 - ix\cdot\xi} dx = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx\,. \tag{4.138}$$

Wir zeigen jetzt, dass $T(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$ konstant ist. Dazu wenden wir Satz 3.38(ii) über die Vertauschung von Ableitung und Integral an. Es gilt

$$\partial_\xi e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} = -(x+i\xi) i e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}$$

und damit

$$|\partial_\xi e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}| \le (|x|+|\xi|) e^{-\frac{1}{2}|x|^2+\frac{1}{2}|\xi|^2} \le (|x|+M)\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2+\frac{1}{2}M} \quad \text{für } |\xi| < M$$

und die rechte Seite ist eine bezüglich x integrierbare Funktion. Daher gilt

$$T'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -(x+i\xi) i e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\, dx.$$

Andererseits ist $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}$ eine C^1 Funktion und

$$\partial_x e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} = -(x-i\xi) e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}.$$

Die rechte Seite ist integrierbar (bezüglich x) und aus Lemma 4.31 folgt

$$\int_{\mathbb{R}} -(x+i\xi) e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\, dx = 0.$$

Daher gilt $T'(\xi) = 0$ und somit ist T konstant.

Das Argument beruht auf der Tatsache, dass sich die ξ Ableitung und die x Ableitung von $(x,\xi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}$ nur um einen Faktor i unterscheiden. Dies ist kein Zufall, sondern eine Folge der Tatsache dass die auf $\mathbb{C}$ definierte Funktion $z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z^2}$ holomorph, also komplex differenzierbar ist (also Verkettung der komplex differenzierbaren Funktionen $z \mapsto e^z$ und $z \mapsto z^2$). Der übliche Beweis benutzt, dass für auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen das Integral über einen geschlossene Kurve γ verschwindet. Man wählt dann γ als orientieren Rand des Rechtecks $(-k,k) \times (\xi, 0)$ für $\xi > 0$ und betrachtet den Limes $k \to \infty$.

Mit Fubini und Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned} T^2(0) &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}\, dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2}\, 2\pi r\, dr = 2\pi, \end{aligned} \tag{4.139}$$

da $\frac{d}{dr} e^{-\frac{1}{2}r^2} = re^{-\frac{1}{2}r^2}$. Daraus folgt $T(0) = \sqrt{2\pi}$ und somit $\mathcal{F}h_1(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_1(\xi)$. □

Beweis von Satz 4.32. Sei $k \in \mathbb{N}^*$ und sei $h_k(x) = \frac{k^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{k}{2}|x|^2}$ der Gausskern aus Lemma 4.33. Wir zeigen zunächst, dass

$$\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}(h_k * f) = h_k * f\,. \tag{4.140}$$

Aus Lemma 4.30 (iii) und Lemma 4.33 folgt $\mathcal{F}(h_k * f) = H_k\mathcal{F}f$. Weiterhin ist die Abbildung $(\xi, y) \mapsto H_k(\xi)f(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}$ in $L_1(\mathbb{R}^{2n})$ und mit der Definition von $\tilde{\mathcal{F}}$, dem Satz von Fubini und Lemma 4.33 folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}(h_k * f)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(h_k * f)(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)(\mathcal{F}f)(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\,dy\,e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}f(y)\,d\xi\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x-y)f(y)\,dy = (h_k * f)(x)\,.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Wir betrachten nun den Limes $k \to \infty$. Aus der Beziehung $\mathcal{F}(h_k * f) = H_k\mathcal{F}f$ folgt, dass $\mathcal{F}(h_k * f) \to \mathcal{F}f$ punktweise und dass $|\mathcal{F}(h_k * f)| \leq |\mathcal{F}f|$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue, dass $\mathcal{F}(h_k * f) \to \mathcal{F}f$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$. Nach der Definition von $\tilde{\mathcal{F}}$ folgt, dass $\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}(h_k * f) \to \tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ gleichmäßig. In Verbindung mit (4.140) ergibt sich, dass $h_k * f \to \tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ gleichmäßig.

Da $\int_{\mathbb{R}^n} h_1 = 1$ folgt andererseits aus Lemma 4.28, dass $h_k * f \to f$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$, insbesondere konvergiert eine Teilfolge fast überall. Damit folgt die Behauptung $\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ fast überall.

Die Aussage $\mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}f = f$ fast überall folgt aus (4.126). Es gilt $\tilde{\mathcal{F}}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{F}f)(-\xi)$ und $(\mathcal{F}g)(x) = (2\pi)^n(\tilde{\mathcal{F}}g)(-x)$ für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit erhält man $\mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}(h_k * f) = h_k * f$ und man kann wie oben zum Limes $k \to \infty$ übergehen. □

[17.1. 2017, Vorlesung 22]

[19.1. 2017, Vorlesung 23]

4.4.2 Fourier-Transformation in L^2

Satz 4.34 (Plancherel)**.** *(i) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Dann ist $\mathcal{F}f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, und*

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2\,. \tag{4.142}$$

Analog ist $\tilde{\mathcal{F}}f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und

$$\|\tilde{\mathcal{F}}f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2\,. \tag{4.143}$$

(ii) Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi)\overline{(\mathcal{F}g)}(\xi)d\xi = (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx\,. \tag{4.144}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst dass $(i) \Longrightarrow (ii)$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2 \tag{4.145}$$

punktweise gilt. Die Aussage folgt nach Integration über $\mathbb{R}^n$.

Deshalb reicht es, (i) zu beweisen. Dabei reicht es, die Aussage für $\mathcal{F}$ zu zeigen. Die Aussage für $\tilde{\mathcal{F}}$ folgt dann aus (4.126).

Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und sei $H_k(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2k}}$. Dann ist die Abbildung $(x,y,\xi) \mapsto H_k(\xi)f(x)\overline{f(y)}e^{i(y-x)\cdot\xi}$ in $L_1(\mathbb{R}^{3n};\mathbb{C})$. Daher folgt aus dem Satz von Fubini und Lemma 4.33

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}f(\xi)}\,d\xi \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right)\left(\overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy\cdot\xi}\,dy}\right) \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H_k(\xi)e^{i(y-x)\cdot\xi}\,d\xi\right) f(x)\overline{f(y)}\,dy\,dx \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^n h_k(y-x)f(x)\overline{f(y)}\,dx\,dy \\
= \quad & (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (f * h_k)(y)\overline{f(y)}\,dy
\end{aligned} \tag{4.146}$$

Aus Lemma 4.28 folgt, dass $f * h_k = h_k * f \to f$ in $L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und mit der Hölderschen Ungleichung, Satz 4.15, folgt, dass die rechte Seite von (4.146) gegen $(2\pi)^n\|f\|_{L_2}^2$ konvergiert. Nach dem Satz von B. Levi konvergiert die linke Seite gegen $\|\mathcal{F}f\|_{L_2}^2$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.35. *Es gibt zwei stetige lineare Abbildungen $\mathcal{F}_2, \tilde{\mathcal{F}}_2 : L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, so dass:*

(i) Für $f \in L_1 \cap L_2$ gilt $\mathcal{F}_2[f] = [\mathcal{F}f]$, $\tilde{\mathcal{F}}_2[f] = [\tilde{\mathcal{F}}f]$;

(ii) $\|\mathcal{F}_2[f]\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2$, und $\|\tilde{\mathcal{F}}_2[f]\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2$, für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$;

(iii) $\tilde{\mathcal{F}}_2\mathcal{F}_2[f] = \mathcal{F}_2\tilde{\mathcal{F}}_2[f] = [f]$, für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Die zwei Abbildungen sind eindeutig durch Stetigkeit und die Eigenschaft (i) bestimmt.

Bemerkung. Man benutzt oft das Symbol $\mathcal{F}$ auch für $\mathcal{F}_2$. Dabei werden auch Funktionen und Äquivalenzklassen identifiziert.

Beweis. Existenz, Stetigkeit, (i), (ii): Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Für $k \in \mathbb{N}$ liegt die Funktion $f_k = f\chi_{B_k}$ in $L_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, und

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_2 = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_k} |f|^2 d\mathcal{L}^n = 0\,. \tag{4.147}$$

Insbesondere ist $[f_k]$ eine Cauchy-Folge in L^2. Sei $g_k = \mathcal{F} f_k$. Aus Plancherel (Satz 4.34) folgt, dass

$$\|g_k - g_h\|_2 = \|f_k - f_h\|_2 \,, \tag{4.148}$$

und deshalb ist $[g_k]$ eine Cauchy-Folge in L^2. Aus der Vollständigkeit von L^2 (Satz 4.13) folgt, dass ein $g \in L_2$ existiert, so dass $[g_k] \to [g]$ in L^2. Insbesondere gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_2 = 0 \,, \qquad \|g\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_2 = \|f\|_2 \,. \tag{4.149}$$

Wir definieren $\mathcal{F}_2[f] = [g]$. Das ist wohldefiniert, weil aus $f = \tilde{f}$ fast überall folgt, dass $f_k = \tilde{f}_k$ fast überall, und damit $g_k = \tilde{g}_k$. Linearität wird durch

$$\mathcal{F}_2[\alpha f + \beta \tilde{f}] = \lim_{k\to\infty} [\mathcal{F}(\alpha f_k + \beta \tilde{f}_k) = \lim_{k\to\infty} [\alpha \mathcal{F} f_k + \beta \mathcal{F} \tilde{f}_k] \tag{4.150}$$

$$= \alpha \lim_{k\to\infty} [\mathcal{F} f_k] + \beta \lim_{k\to\infty} [\mathcal{F} \tilde{f}_k] = \alpha \mathcal{F}_2[f] + \beta \mathcal{F}_2[\tilde{f}] \,, \tag{4.151}$$

und Stetigkeit durch

$$\|\mathcal{F}_2[f] - \mathcal{F}_2[\tilde{f}]\|_2 = \|\mathcal{F}_2[f - \tilde{f}]\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f - \tilde{f}\|_2 \tag{4.152}$$

nachgeprüft. Die Behandlung von $\mathcal{F}_2^*$ ist analog.

(iii): Die Symmetrien (4.125) und (4.126) übertragen sich von $\mathcal{F}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ auf $\mathcal{F}_2$ und $\tilde{\mathcal{F}}_2$. Daher reicht es $\tilde{\mathcal{F}}_2 \mathcal{F}_2[f] = [f]$ zu zeigen.
Sei zunächst $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Dann ist insbesondere $f \in L_1$ und $\partial^\alpha f \in L^1$ für alle Multiindices α. Mit Lemma 4.30 folgt, dass $\mathcal{F} f \in L^\infty$ und $\xi^\alpha \mathcal{F} f \in L^\infty$. Insbesondere gilt $\mathcal{F} f(\xi) \le C(1 + |\xi|^{n+1})^{-1}$. Daher ist $\mathcal{F} f \in L_1 \cap L_2$ und aus Satz 4.32 folgt $\tilde{\mathcal{F}} \mathcal{F} f = f$ fast überall. Aus (i) folgt somit

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 \mathcal{F}_2[f] = [f] \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \,. \tag{4.153}$$

Nach Lemma 4.28 ist C_c^∞ dicht in L_2. Aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}_2$ und $\tilde{\mathcal{F}}_2$ folgt die Behauptung. $\square$

5 Flächenintegrale und Integralsätze

5.1 Integration auf Mengen, die durch eine Karte beschrieben werden können

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Maß und ein Integral auf Untermannigfaltigkeiten einzuführen. Seien $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k < n$. Wir betrachten zunächst Mengen, die Bild einer Abbildung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sind. Wir beginnen mit linearen Abbildungen.

$T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ eine $n \times k$ Matrix mit $\operatorname{Rang} T = k$. Dann definiert T mit eine linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $L = T\mathbb{R}^k$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen. Dann ist $TV \subset \mathbb{R}^n$ relativ offen in L.

Lemma 5.1 (Polarzerlegung). *Sei*

$$O(k,n) := \{Q \in \mathbb{R}^{n\times k} : Q^T Q = \mathrm{Id}_{k\times k}\}$$

die Menge der isometrischen $n \times k$ *Matrizen. Sei* $T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *mit* $\mathrm{Rang}\, T = k$ *Dann gibt es* $Q \in O(k,n)$ *und eine positiv definite symmetrische Matrix* $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *so dass*

$$T = QU. \tag{5.1}$$

Weiterhin gilt

$$U^2 = T^T T, \quad \det U = (\det T^T T)^{1/2} \tag{5.2}$$

Beweis. Die $k \times k$ Matrix $T^T T$ ist symmetrisch und positiv semidefinit. Da T Rang k hat ist $T^T T$ sogar positiv definit. Diese Matrix läßt sich schreiben als

$$T^T T = R^T \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_n) R \quad \text{mit} \quad R \in SO(k).$$

Da $T^T T$ positiv definit ist, gilt $d_i > 0$. Wir definieren

$$U := R^T \mathrm{diag}\,(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}) R.$$

Dann ist U symmetrisch und positiv definit. Außerdem gilt

$$U^2 = T^T T.$$

Schließlich setzen wir $Q = TU^{-1}$. Dann gilt $T = QU$ und

$$Q^T Q = U^{-1} T^T T U^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = \mathrm{Id}\,.$$

Die Behauptung über die Determinante folgt, da $\det U^2 = (\det U)^2$ und $\det U > 0$. □

Da $Q \in O(k,n)$ eine Isometrie ist, ist es natürlich, den k-dimensionalen Flächeninhalt S^k von TA als

$$S^k(TA) = S^k(QUA) = S^k(UA) = \mathcal{L}^k(UA) = |\det U| \mathcal{L}^k(A) \tag{5.3}$$

zu definieren (dabei wird Rotationsinvarianz von S^k gefordert). Nach (5.2) gilt $|\det U| = (\det U^T U)^{1/2} = (\det T^T T)^{1/2}$.

Sei jetzt $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in C^1(V; \mathbb{R}^n)$ eine Immersion, die ein Homöomorphismus von V auf $\varphi(V)$ ist. Erinnerung: $\varphi \in C^1(V; \mathbb{R}^n)$ heißt Immersion, falls für jedes $x \in V$ die Ableitung $D\varphi(x)$ eine injektive Abbildung ist.

Definition 5.2. *Wir definieren*

$$\mathcal{S}_k := \{E \subset \varphi(V) : \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}_k\}, \tag{5.4}$$

$$S^k(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2} \, d\mathcal{L}^k \tag{5.5}$$

Lemma 5.3. *(i) Die Familie $\mathcal{S}_k$ ist eine σ-Algebra.*

(ii) Die Abbildung $S^k : \mathcal{S}_k \to [0,\infty]$ ist ein Maß.

(iii) $\mathcal{S}_k$ und S^k hängen nur von der Menge $\varphi(V)$ ab, d.h. falls $V' \subset \mathbb{R}^k$ offen ist und $\varphi' \in C^1(V;\mathbb{R}^n)$ eine Immersion ist so dass $\varphi' : V' \to \varphi'(V')$ ein Homöomorphismus ist und $\varphi'(V') = \varphi(V)$, so gilt

$$E \in \mathcal{S}_k \Longleftrightarrow \varphi'^{-1}(E) \in \mathcal{M}_k, \tag{5.6}$$

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k = \int_{\varphi'^{-1}(E)} (\det D\varphi'^T D\varphi')^{1/2}\, d\mathcal{L}^k\,. \tag{5.7}$$

Beweis. (i) und (ii) folgen aus der Bijektivität von φ und der Linearität des Integrals.

(iii): Sei $\psi = \varphi^{-1} \circ \varphi'$. Dann ist $\psi : V' \to V$ ein Homöomorphismus. In Analysis II haben wir gesehen, dass ψ sogar ein C^1 Diffeomorphismus ist[13]. Die Aussagen folgen dann aus dem Transformationssatz und der Identität $\varphi' = \varphi \circ \psi$ und der Rechnung

$$D\varphi' = D(\varphi \circ \psi) = (D\varphi) \circ \psi\, D\psi\,, \tag{5.8}$$

$$D\varphi'^T D\varphi' = (D\psi)^T (D\varphi^T D\varphi) \circ \psi\, D\psi\,, \tag{5.9}$$

$$(\det D\varphi'^T D\varphi')^{1/2} = (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2} \circ \psi\, |\det D\psi|\,, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\int_{\varphi'^{-1}(E)} (\det D\varphi'^T D\varphi')^{1/2}\, d\mathcal{L}^k &= \int_{\psi\circ\varphi'^{-1}(E)} (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k \\ = \int_{\varphi^{-1}(E)} (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

□

[13]Man kann zeigen, dass für jedes $x_0 \in V$ eine Kugel $B_r(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ und ein Diffemorphismus $\Phi : B_r(x_0) \to \Phi(B_r(x_0)) \subset \mathbb{R}^n$ existiert so dass $\Phi(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0) = \varphi(x_1,\dots,x_k)$. Sei nun $z_0 \in V'$ und sei $x_0 = \psi(z_0)$. Um zu zeigen, dass ψ in einer Umgebung von z_0 eine C^1 Abbildung ist benutzen wir, dass $\varphi^{-1} \circ \varphi' = \Phi^{-1} \circ \varphi'$ in einer Umgebung von z_0. Dann folgt die Behauptung aus der Kettenregel. Um zu sehen, dass ψ^{-1} eine C^1 Abbildung ist, reicht es die Rollen von φ und φ' zu vertauschen.
Konstruktion des Diffeomorphismus Φ: sei L sei k-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der von den Vektoren $\partial_1\varphi(x_0),\dots,\partial_k\varphi(x_0)$ aufgespannt wird. Sei $L^\perp$ das orthogonal Komplement. Dann ist $L^\perp$ ein $n-k$-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und es gibt eine bijektive lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^{n-k} \to L^\perp$. Setze

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(x_1,\dots,x_k) + B(x_{k+1},\dots,x_n).$$

Dann spannen die partielllen Ableitung $\partial_1\Phi,\dots\partial_n\Phi$ den Raum $\mathbb{R}^n$ auf. Also ist die totale Ableitung $D\Phi(x_0)$ eine invertierbare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Nach dem Umkehrsatz ist Φ in einer kleinen Umgebung von x_0 ein Diffeomorphismus.

Damit ist $(\varphi(V), \mathcal{S}_k, S^k)$ ein Maßraum und wir können mithilfe der allgemeinen Theorie, die wir in Kapitel 3 entwickelt haben, ein Integral auf $\varphi(V)$ einführen. Insbesondere ist $f : \varphi(V) \to [-\infty, \infty]$ genau dann $\mathcal{S}_k$ messbar, wenn $f \circ \varphi$ Lebesgue messbar ist. Ein messbare Funktion ist integrierbar genau dann wenn $(|f| \circ \varphi)\,(\det(D\varphi)^T\varphi)^{1/2}$ auf V bezüglich $\mathcal{L}^k$ integrierbar ist und für integrierbare Funktionen gilt

$$\int_{\varphi(V)} f\, dS^k = \int_V (f \circ \varphi)\,(\det(D\varphi)^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k. \tag{5.12}$$

Bemerkung. Die Einträge der Matrix $(D\varphi)^T D\varphi$ lassen sich schreiben als

$$\big((D\varphi)^T D\varphi\big)_{ij} = (\partial_i\varphi, \partial_j\varphi). \tag{5.13}$$

Dabei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
Beweis: es gilt $(D\varphi)_{lm} = \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_m} = \partial_m\varphi_l$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\big((D\varphi)^T D\varphi\big)_{ij} &= \sum_{p=1}^n \big((D\varphi)^T\big)_{ip}(D\varphi)_{pj} = \sum_{p=1}^n (D\varphi)_{pi}(D\varphi)_{pj} \\ = & \sum_{p=1}^n \partial_i\varphi_p, \partial_j\varphi_p = (\partial_i\varphi, \partial_j\varphi).\end{aligned}$$

Beispiel. Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, und $\psi \in C^1(V)$. Dann ist $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ eine Immersion und ein Homöomorphismus. Ferner gilt:

$$\partial_i\varphi = e_i + e_n\,\partial_i\psi \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

wobei $e_1, e_2, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Mit (5.13) folgt

$$(D\varphi)^T D\varphi = \mathrm{Id}_{\,n-1} + \nabla\psi \otimes \nabla\psi, \tag{5.14}$$

wobei $\mathrm{Id}_{\,n-1}$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ bezeichnet und $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$. Da $\det(\mathrm{Id} + a \otimes a) = 1 + |a|^2$ gilt[14], folgt

$$\int_{\mathrm{graph}\psi} f\, dS^{n-1} = \int_{\varphi(V)} f\, dS^{n-1} = \int_V f(x, \psi(x))\sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}(x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x)\,. \tag{5.15}$$

[14]Beweis: Sei $A = \mathrm{Id}_{\,k} + a \otimes a$. Die Determinante $\det A$ ist das Produkt der Eigenwerte. Nun gilt $Ax = x + a(a, x)$. Daher ist x ein Eigenvektor falls x parallel zu a ist oder x senkrecht auf a steht (diese Vektoren bilden einen $k-1$ dimensionalen Unterraum). Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1 + |a|^2$ und $\lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 1$. Daraus folgt $\det A = 1 + |a|^2$

Mit der Wahl $f = 1$ folgt

$$S^{n-1}(\mathrm{graph}\psi) = \int_V \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}(x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x)\,. \tag{5.16}$$

Dies verallgemeinert die bekannte Formel für die Länge von Kurven im $\mathbb{R}^2$, die als Graph beschrieben sind ($n = 2$). Mit der Wahl $V = B_1(0)$ und $\psi(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$ erhält man für das $(n-1)$ dimensionale Maß der oberen Halbsphäre $\mathbb{S}^{n-1}_+$

$$S^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}_+) = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}\, \mathcal{L}^{n-1}(dx). \tag{5.17}$$

Dabei haben wir die Beziehungen $\nabla\psi = x/\sqrt{1 - |x|^2}$ und $|\nabla\psi|^2 + 1 = 1/(1 - |x|^2)$ benutzt. Ein Vergleich mit der Formel zur Integration radialsymmetrischer Funktionen zeigt, dass für die die dort eingeführte Konstante gilt $c_n = 2S^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}_+)$, d.h. c_n ist gerade das $n-1$ dimensionale Maß der $n-1$ dimensionalen Sphäre.

5.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wir konstruieren nun das Volumenmaß für k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Die Menge M ist mit der euklidischen Abstandfunktion von $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum. Daher sind offene und kompakte Teilmengen von M und stetige Abbildungen auf (Teilmengen von) M definiert. Insbesondere ist eine Teilmenge $W \subset M$ offen in M, falls es für jeden Punkt $a \in W$ einen Radius $r > 0$ gibt,so dass $M \cap B_r(a) \subset W$. Man sieht leicht, dass $W \subset M$ genau dann offen in M ist, wenn es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $W = M \cap \Omega$.

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Ein Paar (φ, U) heißt Karte für M, falls $U \subset \mathbb{R}^k$ offen ist, falls $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ eine Immersion ist, $\varphi(U) \subset M$ und $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Homöomorphismus ist. Die Menge M heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es für jeden Punkt $p \in M$ *ein* $r > 0$ *und eine Karte* (φ, U) *gibt mit* $B_r(p) \in \varphi(U)$. [**Korrektur** 24.1. 2017]

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine Menge von Karten $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt Atlas für M falls $\cup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$. Ein Atlas heißt endlich (bzw. abzählbar), falls die Indexmenge A endlich (bzw. abzählbar) ist. Falls M kompakt ist (als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$), folgt aus der Definition der Untermannigfaltigkeit, dass M einen endlichen Atlas besitzt. Man kann zeigen, dass jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ einen abzählbaren Atlas mit der zusätzlichen Eigenschaft:

$$\text{jeder Punkt } p \in M \text{ liegt nur in endlich vielen Mengen } \varphi_\alpha(U_\alpha) \tag{5.18}$$

besitzt[15]. Für alle Beispiele, die wir betrachten wird, diese Eigenschaft klar sein.

Sei $f : M \to [-\infty, \infty]$ und sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ eine Karte. Falls $f = 0$ auf $M \setminus \varphi_\alpha(U_\alpha)$ dann kann $\int_M f\, dS^k = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} f\, dS^k$ wie in (5.12) definiert werden. Um das Integral für allgemeine f zu definieren, betrachten wir die folgende Funktionen $h_\alpha : M \to \mathbb{R}$

$$h_\alpha(x) := \frac{\chi_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(x)}{\sum_{\beta \in A} \chi_{\varphi_\beta(U_\beta)}(x)} \tag{5.19}$$

Wegen (5.18) sind für jedes $x \in M$ höchstens endliche viele Terme in der Summe $\sum_{\beta\in A} \chi_{\varphi_\beta(U_\beta)}(x)$ von Null verschieden. Da $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Atlas ist, ist mindestens ein Term gleich 1. Daher ist $h_\alpha(x)$ wohldefiniert und es gilt

$$\sum_{\alpha\in A} h_\alpha(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Außerdem gilt

$$h_\alpha = 0 \quad \text{auf } M \setminus \varphi_\alpha(U_\alpha).$$

Man nennt die Funktionen h_α eine Zerlegung der 1. Die Wahl $f = \chi_E$ in Verbindung mit (5.12) motiviert die folgende Definition.

---

[15] Beweisidee: Sei zunächst M beschränkt. Falls M abgeschlossen ist, so ist M kompakt und besitzt daher einen endlichen Atlas. Sei M nicht abgeschlossen. Wir zeigen, dass die Menge $\bar{M} \setminus M$ abgeschlossen ist. Falls $\bar{M} \setminus M$ nicht abgeschlossen ist, so gibt es $p_j \in \bar{M} \setminus M$ mit $p_j \to p$ und $p \notin \bar{M} \setminus M$. Da $p \in \bar{M}$, muss gelten $p \in M$. Dann gibt es $r > 0$ und eine Karte $(\varphi, U))$ so dass $M \cap B_r(p) \subset \varphi(U)$. Daraus folgt $\bar{M} \cap \bar{B}_{r/2}(p) \subset \varphi(U) \subset M$, da $\varphi^{-1}(M \cap \bar{B}_{r/2})$ abgeschlossen und daher kompakt in U ist (wir können voraussetzen, dass alle U beschränkt sind). Nun gilt $p_j \in \bar{B}_{r/2}(p)$ für alle $j \geq j_0$. Daraus folgt $p_j \in M$ für alle $j \geq j_0$. Widerspruch.
Jetzt betrachten wir die Mengen

$$W_k = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, \bar{M} \setminus M) > 2^{-k-1}\} \subset M,$$
$$A_k = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, \bar{M} \setminus M) \geq 2^{-k}\} \subset U_k \subset M.$$

Da $\bar{M} \setminus M$ abgeschlossen ist, gilt $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = M$. Die Menge W_k ist relativ offen in M. Weiterhin sieht man leicht, dass A_k in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und damit kompakt ist. Die relativ offenen Mengen $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ überdecken die kompakte Menge A_k. Daraus folgt, dass es endlich viele Karten $(\varphi_{k,j}, U_{k,j})$, $j = 1, \ldots, J_k$ aus dem Atlas gibt, so dass $\cup_{j=1}^{J_k} \varphi_{k,j}(U_{k,j}) \supset A_k$. Durch Verkleinerung der Mengen $U_{k,j}$ können wir erreichen, dass die Bilder von $\varphi_{k,j}$ in W_k liegen. Genauer setzt man $U'_{k,j} = \varphi_{k,j}^{-1}(W_k) \cap U_{k,j}$. Dann ist $U'_{k,j}$ offen in $\mathbb{R}^k$. Die Karten $(\varphi_{k,j}, U'_{k,j})$ mit $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, J_k\}$ bilden einen abzählbaren Atlas von M.
Wir zeigen schließlich, dass jeder Punkt $p \in M$ nur im Bild von endlich vielen dieser Karten liegt. Da $\bar{M} \setminus M$ abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{dist}(p, \bar{M} \setminus M) > 0$. Also gibt es ein k_0, so dass $p \notin U_{k_0}$. Daraus folgt $p \notin \varphi_{k,j}(U'_{k,j})$ für $k \geq k_0$. Da es nur endlich viele Karten $(\varphi_{k,j}, U'_{k,j})$ mit $k < k_0$ gibt, folgt die Behauptung.
Falls schließlich M unbeschränkt ist, kann man zunächst die Mengen $M_0 = M \cap B_1(0)$ und $M_k = M \cap (B_{k+1}(0) \setminus \bar{B}_k(0))$ für $k \in \mathbb{N} \setminus 0$ betrachten. Die Mengen M_k sind Untermannigfaltigkeiten (oder die leere Menge) und besitzen Atlanten mit den gewünschten Eigenschaften. Man kann die Atlanten so wählen, dass das Bild jeder Karte eine beschränkte Menge ist. Damit folgt leicht die Behauptung für $M = \cup_{k\in\mathbb{N}} M_k$.

Definition 5.4. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein abzählbarer Atlas mit der Eigenschaft* (5.18). *Dann definieren wir*

$$\mathcal{S}^k := \{E \subset M : \varphi_\alpha^{-1}(E \cap \varphi_\alpha(U_\alpha)) \in \mathcal{M}_k\}\,, \tag{5.20}$$

$$S^K(E) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \chi_E) \circ \varphi_\alpha \, (\det(D\varphi_\alpha)^T (D\varphi_\alpha))^{1/2} \, d\mathcal{L}^k \tag{5.21}$$

Lemma 5.5. *(i) Die Menge $\mathcal{S}_k$ ist eine σ-Algebra.*

(ii) Die Abbildung $S^k : \mathcal{S}_k \to [0, \infty]$ ist ein Maß.

(iii) Die Definition von $\mathcal{S}_k$ und S^k ist unabhängig von der Wahl des Atlas.

Beweis. Eigenschaft (i) folgt direkt aus der Definition.

(ii): Endliche Additivität folgt aus der Definition, und mit B. Levi folgt auch die σ-Additivität.

(iii): Sei $(\varphi'_\beta, U'_\beta)_{\beta\in B}$ eine weiterer Atlas mit Eigenschaft (5.18) und sei h'_β die zugehörige Zerlegung der 1. Aus der Transformationsformel folgt analog zum Beweis von (5.7)

$$\begin{aligned}\int_{U_\alpha} (h_\alpha h'_\beta \chi_E) \circ \varphi_\alpha \, (\det(D\varphi_\alpha)^T (D\varphi_\alpha))^{1/2} \, d\mathcal{L}^k \\ = \int_{U'_\beta} (h_\alpha h'_\beta \chi_E) \circ \varphi'_\beta \, (\det(D\varphi'_\beta)^T (D\varphi'_\beta))^{1/2} \, d\mathcal{L}^k\end{aligned} \tag{5.22}$$

Durch Summation über α und β und Anwendung von B. Levi folgt die Behauptung (man beachte, dass $\sum_\beta h_\beta = 1$ und $\sum_\alpha h_\alpha = 1$; da alle Terme nichtnegativ sind, kann man die Summation vertauschen: die Doppelsumme konvergiert entweder absolut gegen einen endlichen Wert oder divergiert gegen ∞). $\square$

Nachdem wir eine σ-Algebra $\mathcal{S}_k$ und ein Maß S^k auf M definiert haben, sind messbare Funktionen $f : M \to [-\infty, \infty]$ und das Integral $\int_M f \, dS^k$ gemäß der allgemeinen Prozedur in Kapitel 3 definiert. Man sieht leicht, dass f genau dann messbar ist, wenn für jede Karte die Abbildung $f_{|\varphi(U_\alpha)} \circ \varphi_\alpha$ messbar ist. Außerdem gilt

$$\int_M f \, dS^k = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha f) \circ \varphi_\alpha \, (\det(D\varphi_\alpha)^T (D\varphi_\alpha))^{1/2} \, d\mathcal{L}^k. \tag{5.23}$$

Falls f eine charakteristische Funktion ist, folgt dies aus der Definition des Maßes S^k. Nach Definition des Integrals gilt die Gleichheit dann auch zunächst für einfache nichtnegative Funktionen und dann mit B. Levi für beliebige nichtnegative Funktionen. Für allgemeine Funktionen schreibt man schließlich $f = f_+ - f_-$. Falls $f = 0$ außerhalb des Bildes $\varphi(U)$ einer Karte so folgt analog zum Beweis von Lemma 5.5 (iii) dass

$$\int_M f\,dS^k = \int_U f \circ \varphi\,(\det(D\varphi)^T(D\varphi))^{1/2}\,d\mathcal{L}^k \tag{5.24}$$

Beispiel. (i) (Polarkoordinaten). Sei $M = \partial B_r^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$, $k = 1$. Man sieht leicht, dass ein Punkt in M eine S^1 Nullmenge ist. Mit Benutzung der Karte $\varphi : (-\pi, \pi) \to M \backslash \{(-1, 0)\}$ mit $\varphi(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ folgt

$$\int_{B_r^{(2)}} f dS^1 = \int_{B_r^{(2)} \backslash \{(1,0)\}} f dS^1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta\,. \tag{5.25}$$

Mit Polarkoordinaten gilt daher für $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mathcal{L}^2(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r^{(2)}} f dS^1\,d\mathcal{L}^1(r)\,. \tag{5.26}$$

Analog kann man durch Einführung geeigneter Polarkoordinaten zeigen, dass für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L}^n = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f dS^{n-1}\,d\mathcal{L}^1(r)\,. \tag{5.27}$$

(ii) (Haarmaß auf der Liegruppe $SO(3)$). Die Gruppe $SO(3) := \{F \in \mathbb{R}^{3\times 3} : F^T F = \mathrm{Id}\,, \det F = 1\}$ ist eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des neundimensionalen Raums der 3×3 Matrizen, versehen mit der euklidischen Norm $|A| := \left(\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2\right)^{1/2}$ und dem Skalarprodukt $(A, B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$. Das in Definition 5.4 definierte Maß S^3 ist invariant unter Links- und Rechtsmultiplikation auf $SO(3)$. Genauer sei $g \in SO(3)$ und seien $L_g : SO(3) \to SO(3)$ und $R_g : SO(3) \to SO(3)$ durch $L_g(h) = gh$ und $R_g(h) = hg$ gegeben. Dann gilt

$$S^3(L_g(E)) = S^3(E) = S^3(R_g(E)) \tag{5.28}$$

für alle messbaren Mengen $E \subset SO(3)$.
Beweis: mithilfe einer Zerlegung der 1 kann man sich auf den Fall beschränken, dass E im Bild einer Karte (φ, U) liegt, $E \subset \varphi(U)$. Dann ist $(L_g \circ \varphi, V)$ ebenfalls eine Karte (hierzu setzen wir $L_g(F) = gF$ für alle $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$) und die erste Identität in (5.28) folgt, da $g^T g = \mathrm{Id}$ und somit $(D(L_g \circ \varphi))^T D(L_g \circ \varphi) = (D\varphi)^T D\varphi$. Zum Beweis der zweiten Identität in (5.28) kann man die Beziehungen

$$((D\varphi)^T D\varphi)_{ij} = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}), \quad \text{und} \quad (Fg, Gg) = (F, G) \tag{5.29}$$

für alle $g \in SO(3)$ und $F, G \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ benutzen.

Ein Maß μ auf einer Gruppe G, das invariant unter Rechts- und Linksmultiplikation ist, heißt Haarmaß. Wenn ein solches Maß gegeben ist kann wieder eine Faltung definieren durch $(f * g)(x) = \int_G f(y)g(xy^{-1})\, d\mu$. Bei der üblichen Faltung ist $G = \mathbb{R}^n$, aufgefasst als additive Gruppe, und μ das Lebesguemaß. In diesem Fall schreibt man üblicherweise $-y$ für das Inverse Element von y und $x - y = x + (-y)$ für den Ausdruck xy^{-1}.

[24.1. 2017, Vorlesung 24]

[26.1. 2017, Vorlesung 25]

Definition 5.6. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der reguläre Rand von A ist die Menge $\partial_r A$ derjenigen Punkte $x \in \partial A$, für die ein $\rho > 0$ und ein $G \in C^1(B_\rho(x))$ existieren, so dass $DG \neq 0$ überall und*

$$A \cap B_\rho(x) = G^{-1}((-\infty, 0)) . \tag{5.30}$$

Die Menge A heißt C^1-berandet, falls $\partial_r A = \partial A$.

Aus der Definition folgt, dass für alle $x \in \partial_r A$ gilt:

$$(\partial A) \cap B_\rho(x) = G^{-1}(0) , \tag{5.31}$$

Die Inklusion $(\partial A) \cap B_\rho(x) \subset G^{-1}(0)$ ist klar, denn falls $G(x) < 0$, so gibt es ein Umgebung U von x, so dass $G < 0$ in U, und falls $G(x) > 0$, so gibt eine Umgebung mit $G > 0$ in U. Im ersten Fall ist $U \subset A$, im zweiten Fall ist $U \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Daher kann x kein Randpunkt von A sein.
Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $G(x) = 0$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ gilt (nach Definition des Gradienten $\nabla G(x)$)

$$\frac{d}{dt} G(x + ta) = DG(x)a = \nabla G(x) \cdot a . \tag{5.32}$$

Da $DG(x) \neq 0$ folgt mit der Wahl $a = \nabla G(x)$, dass jede Umgebung von x sowohl Punkte mit $G(y) > 0$ als auch Punkte mit $G(y) < 0$ enthält. Daraus folgt, dass $x \in \partial A$.

Aus (5.31) und Analysis II folgt, dass $(\partial A) \cap B_\rho(x) \subset \partial_r A$ eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist und der Tangentialraum[16] ein $n-1$-dimensionaler Vektorraum ist mit

$$T_x \partial_r A = \{a \in \mathbb{R}^n : Dg(x)a = 0\} . \tag{5.33}$$

[16]Für eine k dimensionale Untermannigfaltigkeit M ist der Tangentialraum im Punkt p definiert als $T_p M = \operatorname{span}(\partial_1 \varphi(x), \dots, \partial_k \varphi(x))$ wobei (φ, U) eine Karte ist und $\varphi(x) = p$. Dieser Raum ist k-dimensional, da $D\varphi$ injektiv ist. Aus der Kettenregel folgt leicht, dass der Tangentialraum nicht von der Karte abhängt.

Lemma 5.7. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es für jedes $x \in \partial_r A$ genau einen Vektor $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ (den man äußere Einheitsnormale nennt) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $|\nu(x)| = 1$

(ii) $\nu(x) \in T_x(\partial_r A)^\perp$*;*

(iii) für alle $x \in \partial_r A$ gibt es $\rho > 0$, so dass $x + t\nu \in A$ für alle $t \in (-\rho, 0)$, und $x + t\nu \notin A$ für alle $t \in (0, \rho)$.

Außerdem gilt $\nu \in C^0(\partial_r A, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus (i)–(iii) und (5.33). Für $x \in \partial_r A$ seien $\rho > 0$ und G wie in Definition 5.6. Dann hat

$$\nu(x) = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}(x) \tag{5.34}$$

die Eigenschaften (i) bis (iii). Aus $G \in C^1$ folgt $\nu \in C^0$. □

5.3 Satz von Gauß

Satz 5.8 (Satz von Gauß für C^1-Gebiete)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $\partial A = \partial_r A$. Sei $F \in C^0(\overline{A}; \mathbb{R}^n) \cap C^1(A; \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L_1(A)$. Dann gilt:*

$$\int_A \operatorname{div} F d\mathcal{L}^n = \int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^{n-1} \,, \tag{5.35}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale ist (vgl. Lemma 5.7).

Notation: $\operatorname{div} F = \operatorname{Tr} DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

Bemerkung. Die Aussage des Satzes ist invariant unter der Permutation der Koordinaten sowie unter der Abbildung $x \mapsto -x$ (in diesem Fall sich das Vorzeichen von $\operatorname{div} F$ und von ν).

Lemma 5.9. *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f \in C_c^1(W)$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$*

$$\int_W \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n(x) = 0 \,. \tag{5.36}$$

Beweis. Aus Symmetriegründen reicht es, $i = n$ zu betrachten. Sei $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.37}$$

definiert. Man überprüft leicht, dass $\tilde{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Wir rechnen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(x', x_n) d\mathcal{L}^1(x_n) d\mathcal{L}^{n-1}(x') \tag{5.38}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 \, d\mathcal{L}^{n-1}(x') = 0 \,. \tag{5.39}$$

□

Lemma 5.10. *Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und beschränkt, $\psi \in C^1(V)$, und*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in V, x_n < \psi(x')\} \subset \mathbb{R}^n \,. \tag{5.40}$$

Ferner, sei $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{A}; \mathbb{R}^n)$, so dass $\operatorname{div} F \in L_1(A)$, und es gebe $K \subset V \times \mathbb{R}$ kompakt, mit $F = 0$ auf $A \setminus K$. Dann gilt:

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n = \int_M F \cdot \nu \, dS^{n-1} \,, \tag{5.41}$$

wobei $M = \operatorname{graph}\psi = \{(x', \psi(x')) : x' \in V\}$.

Notation: Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird hier in $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{R}$ zerlegt, $x = (x', x_n)$.

Bemerkung. Aus $F \in C_c^1(V \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ folgt $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{A}; \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} F \in L_1(A)$, und $F = 0$ auf $A \setminus K$, mit $K = \operatorname{supp} F$ kompakt, $K \subset V \times \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ so dass $\eta(z) = 1$ für $z \geq 1$, und $\eta(z) = 0$ für $z \leq 1/2$. Sei

$$\varphi_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{\psi(x') - x_n}{\varepsilon}\right) . \tag{5.42}$$

Dann gilt $F\varphi_\varepsilon = 0$ außerhalb der kompakten Menge $\{x \in K : x_n \leq \psi(x') - \varepsilon/2\} \subset A$. Deshalb ist $F\varphi_\varepsilon \in C_c^1(A)$, und mit Lemma 5.9 folgt, dass

$$0 = \int_A \operatorname{div} (F\varphi_\varepsilon) d\mathcal{L}^n \tag{5.43}$$

$$= \int_A (\operatorname{div} F)\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n + \int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n \,. \tag{5.44}$$

Da $\varphi_\varepsilon \to 1$ punktweise auf A, und $|\varphi_\varepsilon| \leq 1$, folgt aus der Integrierbarkeit von $\operatorname{div} F$ mit dominierter Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_A (\operatorname{div} F)\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = \int_A \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n \,. \tag{5.45}$$

Im zweiten Integral benutzen wir Fubini:

$$\int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = \int_V \int_{-\infty}^{\psi(x')} F(x) \cdot \nabla\varphi_\varepsilon dx_n dx' \tag{5.46}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_V \int_{\psi(x')-\varepsilon}^{\psi(x')} F(x) \cdot \begin{pmatrix} \nabla\psi(x') \\ -1 \end{pmatrix} \eta' \left(\frac{\psi(x') - x_n}{\varepsilon} \right) dx_n dx' \,. \tag{5.47}$$

Für $z \in V \times [0,\infty)$ definieren wir $g(z) = (z', \psi(z') - \varepsilon z_n)$. Es gilt $|\det Dg| = \varepsilon$. Daher erhält man mit der Substitution $x = g(z)$

$$\int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = \int_V \int_0^1 F(z', \psi(z') - \varepsilon z_n) \cdot \begin{pmatrix} \nabla\psi(z') \\ -1 \end{pmatrix} \eta'(z_n)\, dz_n\, dz' \,. \tag{5.48}$$

Da F stetig ist, gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} F(z', \psi(z') - \varepsilon z_n) = F(z', \psi(z'))$ punktweise. Aus der Stetigkeit von F und $\nabla\psi$ auf der kompakten Menge $K \cap \overline{A}$ folgt, dass beide Funktionen beschränkt sind, und dass $|F|(|\nabla\psi| + 1) \in L_1(A)$. Da $\int_0^1 \eta'(z_n)\, dz_n = 1$ folgt mit dominierter Konvergenz und Fubini, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = \int_V \int_0^1 F(z', \psi(z')) \cdot \begin{pmatrix} \nabla\psi(z') \\ -1 \end{pmatrix} \eta'(z_n)\, dz_n\, dz' \tag{5.49}$$

$$= \int_V F(z', \psi(z')) \cdot \begin{pmatrix} \nabla\psi(z') \\ -1 \end{pmatrix} dz' \,. \tag{5.50}$$

Die äußere Normale zur Menge $A = \{(x', x_n) \in V \times \mathbb{R} : x_n - \psi(x') < 0\}$ ist

$$\nu(x', \psi(x')) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\psi(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\psi(x') \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{5.51}$$

und deshalb gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = -\int_V F(x', \psi(x')) \cdot \nu(x', \psi(x')) \sqrt{1 + |D\psi(x')|^2} dx' \tag{5.52}$$

$$= -\int_M F \cdot \nu\, dS^{n-1} \,. \tag{5.53}$$

Mit (5.44) und (5.45) ist der Beweis beendet. □

[26.1. 2017, Vorlesung 25]

[31.1. 2017, Vorlesung 26]

Lemma 5.11 (Glatte Zerlegung der Eins)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und seien $U_0, \ldots, U_J$ endlich viele offene Mengen, so dass $A \subset \bigcup_{j=0}^J U_j$. Dann gibt es Funktionen $\theta_j \subset C_c^\infty(U_j; [0,1])$, so dass gilt:*

$$\sum_{j=0}^{J} \theta_j(x) = 1 \qquad \forall x \in A\,. \tag{5.54}$$

Beweis. **1. Schritt.** Es gibt Kugeln $B_i = B(x_i, r_i)$ und $B_i' = B(x_i, r_i/2)$, so dass

$A \subset \bigcup_{i=1}^M B_i'$;

jede Kugel B_i liegt in (mindestens) einer der Mengen $U_0, \ldots, U_J$.

Beweis: sei $x \in A$. Dann gilt $x \in U_j$ für ein $j \in \{0, \ldots, J\}$. Da U_j offen ist, gibt es ein $r_x > 0$, so dass die Kugel $B_x := B(x, r_x)$ in U_j liegt. Sei $B_x' := B'(x, r_x/2)$ die konzentrische Kugel mit halbem Radius. Es gilt

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_x',$$

d.h. die Kugeln B_x' bilden eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, gibt es endliche viele Kugeln $B_i' = B(x_i, r_i/2)$, $i = 1, \ldots, M$ mit $A \subset \bigcup_{i_1}^M B_i'$. Seien $B_i = B_(x_i, r_i)$ die konzentrischen Kugeln mit doppeltem Radius. Nach Konstruktion liegt jede Kugel B_i in (mindestens) einer der Mengen U_j.

2. Schritt. Zerlegung der 1 mit Funktionen $\eta_i \in C_c^\infty(B_i)$.
Aus Lemma 4.27(iv) und der Skalierung $x \mapsto (x - x_i)/r_i$ folgt dass es Funktionen

$$\psi_i \in C_c^\infty(B_i) \quad \text{mit } \psi_i = 1 \text{ auf } B_i' \quad \text{ und } 0 \le \psi_i \le 1$$

gibt. Wir setzen ψ durch Null auf $\mathbb{R}^n \backslash B_i$ fort. Da $A \subset \cup_{i=1}^M B_i'$, gilt $\sum_i \psi_i \ge 1$ auf A. Dies legt nahe, eine Zerlegung der 1 durch

$$\tilde{\eta}_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sum_j \psi_j(x)}$$

zu definieren. Es gilt $\sum \tilde{\eta}_i = 1$ auf A. Allerdings ist $\tilde{\eta}_i(x)$ nicht für alle x definiert, da es Punkte $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ gibt mit $\sum_j \psi_j(x) = 0$. Daher modifizieren wir die Definition leicht wie folgt. Sei

$$h \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad h \ge \frac{1}{4}, \quad h(x) = x \quad \text{für } x \ge 1.$$

Wir können h z.B. als Stammfunktion der Funktion η in Lemma 4.27(iii) wählen mit $h(1) = 1$. Damit definieren wir

$$\eta_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{h\big(\sum_j \psi_j(x)\big)}.$$

Jetzt ist $\eta_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und es gilt $\eta_i \in C_c^\infty(B_i)$. Für $x \in A$ gilt $\sum_j \psi_j(x) \geq 1$ und somit $h\big(\sum_j \psi_j(x)\big) = \sum_j \psi_j(x)$. Daraus folgt

$$\sum_i \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in A.$$

3. Schritt. Definition der Funktionen θ_j.
Dazu teilen wir die Indexmenge $I = \{1, \dots, M\}$ wie folgt auf

$$I_0 = \{i \in I : B_i \in U_0\}, \quad I_j = \{i \in I \setminus \bigcup_{k=0}^{j-1} I_k : B_i \in I_j\} \quad \text{for } j = 1, \dots, J.$$

Nach Definition sind die Mengen I_j disjunkt. Da jede Kugel B_i in (mindestens) einer Menge U_j liegt gilt $I = \cup_{j=0}^J I_j$. Wir definieren

$$\theta_J = \sum_{i \in I_j} \eta_i.$$

Dann gilt $\theta_J \in C_c^\infty(U_J)$ und $\sum_{j=0}^J \theta_j = \sum_{i \in I} \eta_i = 1$. □

Beweis von Satz 5.8. Sei $x \in \partial A$, ρ_x und G wie in Def. 5.6. Da $DG(x) \neq 0$ gibt es ein $\sigma_x > 0$, so dass ∂A in einer Umgebung von x ein Graph ist.

Genauer gesagt, gibt es für alle $x \in \partial A$ (nach geeigneter Permutation der Koordinaten und ggf. Inversion $x \mapsto -x$) eine offene Menge U_x der Form $U_x = B'_{\rho_x}(y') \times I_x$ mit $B'_{\rho_x}(x') \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $I_x = (x_n - l_x, x_n + l_x)$, $\rho_x > 0$, $l_x > 0$ und eine C^1 Funktion $\psi : B_{\rho_x}(x') \to I_x$ so dass

$$A \cap U_x = \{y \in U_x : y_n < \psi(y')\}. \tag{5.55}$$

Beweis: Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen (Analysis II, Satz 1.70). Nach geeigneter Permutation der Koordinaten und ggf. Inversion können wir annehmen, dass $\partial_n G(x) > 0$. Nach Verkleinerung von ρ_x können wir zusätzlich annehmen, dass $\partial_n G > 0$ in $B_{\rho_x}(x)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher $B'_{\sigma_x}(x')$ und I_x und ψ wie oben, so dass $U_x \subset B_{\rho_x}(x)$ und

$$G^{-1}(0) \cap U_x = \{(y', y_n) : y' \in B'_\sigma(x'), y_n = \psi(y')\}. \tag{5.56}$$

Da $\partial_n G > 0$ in U_x, folgt dass

$$G^{-1}(-\infty, 0) \cap U_x = \{(y', y_n) : x' \in B'_\sigma(x'), y_n < \psi(y')\} \tag{5.57}$$

und damit (5.55)

Da ∂A kompakt ist, gibt es endlich viele solcher Umgebungen $U_1, \dots, U_J$, so dass $\partial A \subset \bigcup_{j=1}^J U_j$. Sei $U_0 = A$. Dann überdecken die endlich vielen offenen Mengen $U_0, \dots, U_J$ die kompakte Menge $\overline{A}$. Seien $\theta_0, \dots, \theta_J$ wie in Lemma 5.11. Wegen Linearität reicht es zu zeigen, dass die Funktion $F_j = F\theta_j$ die Aussage vom Satz 5.8 erfüllt. Für $j = 0$ folgt das Ergebnis aus Lemma 5.9, für $j \geq 1$ aus Lemma 5.10. □

Bemerkung. Die Divergenz eines Vektorfelds $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ wird auch „Quellstärke" genannt. Dies kann man sich wie folgt veranschaulichen. Stellt man sich F als das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit vor, dann beschreibt $\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^2$ gerade die Menge an Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit aus dem Gebiet A ausströmt. Nach dem Satz von Gauss ist diese Größe gerade gleich $\int_A \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^3$. Wählt man A als Kugel $B_r(x)$, dann gilt

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^3(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^k = \lim_{r \to 0} \underbrace{\frac{1}{\mathcal{L}^3(B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} F \cdot \nu \, dS^2}_{\text{ausströmende Masse/ Volumen}}$$

Beispiel: $F(x) = x$, $\operatorname{div} F = 3$.
Beispiel für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 :\quad F(x) = x^\perp = (-x_2, x_1), \quad \operatorname{div} F = 0$.
Man man nennt die Größe $\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^2$ auch den Fluß von F durch ∂A.

Beispiel. Sei $A = B_r^{(n)}$ die n-dimensionale Kugel mit Radius r, und $F(x) = x$. Dann ist $\operatorname{div} F = n$, und $\nu(x) = x/|x|$. Deshalb gilt

$$\int_{B_r} \operatorname{div} F d\mathcal{L}^n = n\mathcal{L}^n(B_r) \,, \tag{5.58}$$

und

$$\int_{\partial B_r} F \cdot \nu dS^{n-1} = \int_{\partial B_r} \frac{x^2}{|x|} dS^{n-1} = \int_{\partial B_r} r dS^{n-1} = rS^{n-1}(\partial B_r) \,. \tag{5.59}$$

Aus dem Satz von Gauß folgt, dass

$$rS^{n-1}(\partial B_r) = n\mathcal{L}^n(B_r) \,. \tag{5.60}$$

Insbesondere gilt $S^1(\partial B_r^{(2)}) = 2\pi r$, und $S^2(\partial B_r^{(3)}) = 4\pi r^2$.

Beispiel. Auftrieb eines Körpers. Auf die Oberfläche eines Körpers A in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte ρ wirkt in jedem Punkt von ∂A die Kraftdichte (Kraft pro Oberflächeneinheit) $f(x) = -p(x)\nu$ mit $p(x) = -x_3\rho$. Anwendung des Satzes von Gauss mit $F(x) = x_3 e_k$ liefert für die k-te Komponente der Gesamtkraft ist

$$\begin{aligned} K_k &= \int_{\partial A} f_k(x) \, dS^{n-1} = \rho \int_{\partial A} x_3 e_k \cdot \nu \; dS^{n-1} \\ &\underset{\text{Gauss}}{=} \rho \int_A \delta_{k3} \, d\mathcal{L}^n = \rho \mathcal{L}^n(A) \delta_{k3} \end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtkraft $K = \rho\mathcal{L}^k(A)e_3$, d.h. die Gesamtkraft ist nach oben gerichtet (parallel zu e_3) und die Größe ist Dichte x Volumen des Körpers, als gerade die Masse der verdrängten Flüssigkeit.

Korollar 5.12 (Partielle Integration)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^1 berandet. Seien $f, g \in C^1(A) \cap C^0(\overline{A})$ und es gelte $\nabla f \in L^1(A;\mathbb{R}^n)$ und $\nabla g \in L^1(A, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int_A \partial_i f\, g\, d\mathcal{L}^n = -\int_A f\, \partial_i g\, d\mathcal{L}^n + \int_{\partial A} f g\, \nu_i\, dS^{n-1} \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \quad (5.61)$$

Beweis. Dies folgt aus dem Satz von Gauss angewandt auf $F = fge_i$. Es gilt nämlich nach der Produktregel

$$\operatorname{div} F = \partial_i(fg) = \partial_i f\, g + f\, \partial_i g.$$

Die Funktionen f und g sind beschränkt, da sie auf der kompakten Menge A stetig sind. Daher gilt $\operatorname{div} F \in L^1(A)$ und die Behauptung folgt aus dem Satz von Gauss. □

Bemerkung. Der Satz von Gauss gilt auch für Mengen A, die 'stückweise C^1' sind, z.B. für Würfel, die Halbkugel, Polyeder, oder Polyeder, deren Flächenstücke durch eine C^1 Abbildung deformiert sind.
Das Bestreben den Satz von Gauss, Korollar 5.12 zur partiellen Integration und den Satz von Stokes (s. unten) auf möglichst allgemeine Gebiete und Funktionen auszudehnen, war ein wichtiger Impuls für die Mathematik des 20. Jahrhunderts und hat zur Entwicklung eines neuen mathematischen Gebiets geführt, der geometrischen Maßtheorie ('geometric measure theory'). Einige zentrale Begriffe und Resultate sind:

- Funktionen beschränter Variations ('bounded variation')
- Mengen von endlichem Perimeter ('finite perimeter')
- Rektifitizierbarkeitssatz von De Giorgi
- Ströme ('currents')
- Satz von Federer und Fleming zur Abgeschlossenheit rektifizierbarer Ströme ('Federer-Fleming closure theorem')

Vgl. dazu z.B. L.C. Evans, R. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions (CRC Publ., rev. edition 2015), E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variations (Birkhäuser, 1984), H. Federer, Geometric measure theory (Springer 1969) und L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Functions of bounded variation and free discontinuity problems (Oxford Univ. Press, 2000).

5.4 Satz von Stokes

Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ offen, $F \in C^1(W;\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\operatorname{rot} F \in C^0(W;\mathbb{R})$ durch

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \tag{5.62}$$

definiert. Gegeben sei ein $A \subset \mathbb{R}^2$ offen beschränkt und C^1 berandet. Der Tangentialvektorfeld $\tau \in C^0(\partial_r A;\mathbb{R}^2)$ wird dann durch $\tau = \nu^\perp = (-\nu_2, \nu_1)$ definiert, wobei ν die äußere Normale ist. Falls $\varphi \in C^1(I;\mathbb{R}^2)$ eine Parametrisierung eines Teiles von $\partial_r A$ ist (d.h.: $I \subset \mathbb{R}$ offen, $\varphi' \neq 0$, $\varphi(I) \subset \partial_r A$), dann ist der Tangentialraum durch

$$T_{\varphi(x)}\partial_r A = \varphi'(x)\mathbb{R}\,, \tag{5.63}$$

gegeben und für das Tangentialvektorfeld gilt

$$\tau(\varphi(x)) \in \left\{ \frac{\varphi'(x)}{|\varphi'|(x)}, -\frac{\varphi'(x)}{|\varphi'|(x)} \right\}\,. \tag{5.64}$$

Satz 5.13 (Stokes, 2D)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine offene beschränkte Menge, die C^1 berandet ist und sei $F \in C^1(A;\mathbb{R}^2) \cap C^0(\overline{A};\mathbb{R}^2)$. Falls $\operatorname{rot} F \in L_1(A)$, dann gilt*

$$\int_A \operatorname{rot} F \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial A} F \cdot \tau \, dS^1\,. \tag{5.65}$$

Beweis. Sei $G = -F^\perp = (F_2, -F_1)$. Da $F \cdot \tau = G \cdot \nu$ und $\operatorname{rot} F = \operatorname{div} G$, folgt die Aussage unmittelbar aus dem Satz von Gauß. □

Bemerkung. Interpretation von $\operatorname{rot} G$ als Wirbelstärke. Beziehungen zu den Maxwellgleichungen $\operatorname{rot} E = -\dot{B}$ und $\operatorname{rot} H = \dot{D} + j$.

[31.1. 2017, Vorlesung 26]

[2.2. 2017, Vorlesung 27]

Wir wollen jetzt eine analoge Formel für zweidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$ finden, die das Randintegral von $F \cdot \tau$ mit einem Oberflächenintegral verbindet. Indem man zunächst Flächen in der x_2, x_3 Ebene und der x_3, x_1 Ebene betrachtet, sieht man, dass folgende Größe eine wichtige Rolle spielt.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$. Dann ist $\operatorname{rot} F \in C^0(U;\mathbb{R}^3)$ durch

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} e_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \tag{5.66}$$

definiert. Hier wird $\epsilon : \{1,2,3\}^3 \to \{-1,0,1\}$ durch

$$\varepsilon_{ijk} = \det(e_i, e_j, e_k) \tag{5.67}$$

definiert. Alternativ ist ε_{ijk} eindeutig durch die Eigenschaften

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}\,, \quad \epsilon_{123} = 1 \tag{5.68}$$

definiert. In der physikalischen Literatur wird ϵ manchmal der total antisymmetrischer Tensor genannt.

Analog wird für $v, w \in \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt (auch: Vektorprodukt) durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \tag{5.69}$$

definiert, mit Komponenten

$$(v \times w)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} v_j w_k\,. \tag{5.70}$$

Aufgrund der formalen Analogie der Definition von $\operatorname{rot} F$ und des Kreuzprodukts schreibt man auch häufig $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$. Vor allem in der englischsprachigen Literatur wird häufig $\operatorname{curl} F$ statt $\operatorname{rot} F$ geschrieben. Es gilt

$$(a \times b) \cdot c = \sum \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k = \det(c, a, b) = \det(a, b, c) = \det(b, c, a)\,. \tag{5.71}$$

Insbesondere steht der Vektor $a \times b$ senkrecht auf a und auf b. Weiterhin gilt für $Q \in SO(3)$

$$(Qa \times Qb) \cdot Qc = \det(Qa, Qb, Qc) = \det Q \det(a, b, c) = (a \times b) \cdot c = Q(a \times b) \cdot Qc$$

und somit

$$Qa \times Qb = Q(a \times b) \quad \forall Q \in SO(3). \tag{5.72}$$

Lemma 5.14. *Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$|v \times w|^2 + |v \cdot w|^2 = |v|^2 |w|^2 \tag{5.73}$$

Beweis. (Nicht in der Vorlesung besprochen)
Die Aussage (5.73) kann leicht durch direkte Auflistung aller Komponenten bewiesen werden. Eine kompaktere Rechnung ist die folgende:

$$|v \times w|^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} v_j w_k \right)^2 \tag{5.74}$$

$$= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} v_j w_k v_l w_m \tag{5.75}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} v_j w_k v_j w_k - v_j w_k v_k w_j = |v|^2 |w|^2 - (v \cdot w)^2\,. \tag{5.76}$$

Dabei wurde die Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{5.77}$$

benutzt, wobei $\delta : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ durch $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und 0 sonst definiert wird. $\square$

Alternativer Beweis. (Nicht in der Vorlesung besprochen)
Sei oBdA $|v| = 1$. Wegen (5.72) ist die Behauptung invariant unter dem Übergang $a \mapsto Qa$, $b \mapsto Qb$ für $Q \in SO(3)$. Durch Anwendung einer Rotation können wir oBdA annehmen, dass $a = e_1$. Durch Anwendungen einer weiteren Rotation, welche die x_1 Achse festhält, können wir erreichen, dass $b_3 = 0$, also $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$. Dann gilt $a \cdot b = b_1$ und $a \times b = b_1 e_3$ und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Bei der Definition des Vektors $\operatorname{rot} F$ benutzt man eine besondere Eigenschaft des dreidimensionalen Raumes, nämlich dass es eine bijektive lineare Abbildung Φ von $\mathbb{R}^3$ in die Menge der schiefsymmetrischen 3×3 Matrizen gibt.
In jeder Dimension lassen sich schiefsymmetrische Matrizen, als 'infinitesimalen Rotationen' interpretieren. Sei $\gamma : (-1,1) \to SO(n)$ eine C^1 Kurve mit $\gamma(0) = \mathrm{Id}$. Aus $\gamma(t)^T\gamma(t) = \mathrm{Id}$ folgt durch Ableiten $\gamma'(0)^T + \gamma'(0)$. Also ist $\gamma'(0)$ schiefsymmetrisch. Umgekehrt kann man jeder schiefsymmetrischen Matrix W eine solche Kurve $\gamma : (-1,1) \to SO(n)$ mit $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ und $\gamma'(0) = W$ zuordnen, indem man $\gamma(t) = \exp(tW) = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty}(tW)^k/k!$ setzt. Daraus folgt, dass der Raum $\operatorname{skw}(n)$ der schiefsymmetrischen Matrizen gerade der Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit $SO(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ an der Identität ist[17].
Für $n = 3$ gilt für jede schiefsymmetrische Matrix W die Beziehung $\det W = 0$ (da $\det W = \det W^T = \det(-W) = -\det W$). Daher gibt es einen Vektor $a \neq 0$ mit $Wa = 0$. Diese Vektor läßt sich als Achse der infinitesimalen Rotation interpretieren.
Man definiert die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \operatorname{skw}(3)$ so, dass $\Phi(v)$ gerade die (infinitesimale) Rotation um die Achse $v/|v|$ mit Winkel $|v|$ ist. Dies führt auf

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.78}$$

[17] Alternativer Beweis ohne Kurven: $SO(n)$ ist einer Umgebung von Id die Nullstellenmenge der Abbildung $G : \mathbb{R}^{n\times n} \to \operatorname{sym}(n)$ mit $G(A) = A^TA - \mathrm{Id}$. Es gilt $DG(\mathrm{Id})(A) = A^T + A$. Daher ist DG surjektiv, $SO(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $T_{\mathrm{Id}}\, SO(n) = \{A : DG(\mathrm{Id})A = 0\} = \operatorname{skw}(n)$.

Erinnerung: für Matrizen ist das Skalarprodukt wie folgt definiert

$$F \cdot G = \sum_{i,j} F_{ij} G_{ij} = \operatorname{Tr} F^T G.$$

Lemma 5.15. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\Phi(a)b &= a \times b && (5.79)\\
\Phi(\operatorname{rot} F) &= DF - (DF)^T, && (5.80)\\
\Phi(a \times b) &= -(a \otimes b - b \otimes a), && (5.81)\\
\Phi(a) \cdot \Phi(b) &= 2a \cdot b, && (5.82)\\
\operatorname{rot} F \cdot (a \times b) &= -DF \cdot (a \otimes b - b \otimes a) && (5.83)
\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten vier Identitäten folgen direkt aus der Definition von Φ. Die Identiät (5.79) drückt wiederum die Tatsache aus, dass $\Phi(a)$ die (infinitesimale) Drehung um die Achse a ist. Zum Beweis der vierten Identität rechnen wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} F \cdot (a \times b) = \frac{1}{2} \Phi(\operatorname{rot} F) \cdot \Phi(a \times b)\\
= \quad & -\frac{1}{2}(DF - DF^T) \cdot (a \otimes b - b \otimes a) = -DF \cdot (a \otimes b - b \otimes a).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die r letzte Idendität benutzt, dass $DF^T \cdot (a \otimes b - b \otimes a) = DF \cdot (a \otimes b - b \otimes a)^T = -DF \cdot (a \otimes b - b \otimes a)$. □

Satz 5.16 (Stokes, 3D, für Karten)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Menge, die C^1 berandet ist. Seien $W \subset \mathbb{R}^2$ und $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, mit $\overline{A} \subset W$, und sei $\varphi \in C^1(W; U)$ eine injektive Immersion. Dann gilt für alle $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$:*

$$\int_{\varphi(A)} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS^2 = \int_{\varphi(\partial A)} F \cdot \tau \, dS^1 \,, \tag{5.84}$$

wobei $\tau : \varphi(\partial A) \to \mathbb{R}^3$ und $\nu : \varphi(A) \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\tau = \frac{D\varphi \, \tilde{\tau}}{|D\varphi \, \tilde{\tau}|} \circ \varphi^{-1} \,, \qquad \nu = \frac{\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi}{|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi|} \circ \varphi^{-1} \,, \tag{5.85}$$

definiert sind und $\tilde{\tau}$ der übliche Einheitstangentialvektor von ∂A ist, der durch 90 *Grad Drehung der äußeren Normale von A entsteht.*

Bemerkung. Aus den Eigenschaften, des Kreuzprodukts folgt, dass $\nu(y)$ senkrecht zu dem Tangentialraum an $T_y \varphi(A)$ ist. Außerdem sieht man leicht, dass $\tau(y)$ in dem Tangentialraum $T_y \varphi(\partial A)$ liegt.

Beweis. Wir nehmen zunächst zusätzlich an, dass

$$\varphi \in C^2(W;U) \tag{5.86}$$

Beweisidee: Wir zeigen zunächst, dass

$$\int_{\varphi(\partial A)} F \cdot \tau \, dS^1 = \int_{\partial A} (F \circ \varphi) \cdot (D\varphi \, \tilde{\tau}) \, d\mathcal{L}^1 \,, \tag{5.87}$$

wenden den zweidimensionalen Satz von Stokes auf die rechte Seite an und erhalten in Integral über A. Die entscheidende Beziehung ist dann (5.91). Mit (5.73) können wir dann das Integral über A in ein Integral über $\varphi(A)$ umschreiben. Dabei kommt in natürlicher Weise die Normale ν ins Spiel.

Schritt 1. Umwandlung des Randintegrals in ein Integral über ∂A und Anwendung des zweidimensionalen Satzes von Stokes.
Zum Beweis (5.87) betrachten wir ein offenes Interval I und eine Parametrisierung $\psi : I \to \partial A$. Dann ist $\tilde{\tau} \circ \psi = \pm \psi'/|\psi'|$ und wir können annehmen, dass $\tilde{\tau} \circ \psi = \psi'/|\psi'|$. Dann ist $\varphi \circ \psi$ eine C^1 Immersion mit $(\varphi \circ \psi)(I) \subset \varphi(\partial A)$ und

$$\begin{aligned}
\int_{(\varphi\circ\psi)(I)} F \cdot \tau \, dS^1 \quad &\underset{\text{Def. von } S^1}{=} \quad \int_I (F \circ \varphi \circ \psi) \cdot (\tau \circ \varphi \circ \psi) \, |(\varphi \circ \psi)'| \, d\mathcal{L}^1 \\
&\underset{\text{Def. von } \tau}{=} \quad \int_I (F \circ \varphi) \circ \psi \cdot \frac{D\varphi \, \tilde{\tau}}{|D\varphi \, \tilde{\tau}|} \circ \psi \; | \, (D\varphi \circ \psi) \underbrace{\frac{\psi'}{|\psi'|}}_{\tilde{\tau} \circ \psi} |\psi'| \, | \, d\mathcal{L}^1 \\
&= \quad \int_{\psi(I)} (F \circ \varphi) \cdot D\varphi \, \tilde{\tau} \; dS^1 \,.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Dies zeigt (5.87), falls F außerhalb der Menge $(\varphi \circ \psi)(I)$ verschwindet. Der allgemeine Fall folgt dann mit einer glatten Zerlegung der 1.

Wir definieren für $i = 1, 2$

$$G_i := (F \circ \varphi) \cdot \partial_i \varphi = \sum_{j=1}^{3} (F_j \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \,. \tag{5.89}$$

Dann folgt aus (5.87) und der zweidimensionalen Version des Satzes von Stokes

$$\int_{\varphi(\partial A)} F \cdot t \, dS^1 = \int_{\partial A} \sum_{i=1}^{2} G_i \tau_i \, dS^1 = \int_A \operatorname{rot} G \, d\mathcal{L}^2 \,. \tag{5.90}$$

Schritt 2. Wir drücken $\operatorname{rot} G$ durch Ableitungen von F und φ aus. Mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} G_i(x) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[F_j(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \right] \\ &= \sum_{j,h=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial y_h}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{3} F_j(\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}(x)\end{aligned}$$

folgt (unter Benutzung der Symmetrie der zweiten Ableitungen)

$$\operatorname{rot} G = \frac{\partial}{\partial x_1} G_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} G_1 = \sum_{j,h=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial y_h} \circ \varphi \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right].$$

Mit den Abkürzungen $a = \partial_1 \varphi$, $b = \partial_2 \varphi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} G &= \sum_{j,h=1}^{3} (DF)_{jh} \circ \varphi \;\; (a_h b_j - a_j b_h) \\ &= -(DF \circ \varphi) \cdot (a \otimes b - b \otimes a) \\ &\underset{(5.83)}{=} (\operatorname{rot} F \circ \varphi) \cdot (a \times b)\end{aligned}$$

und somit die entscheidende Identität

$$\boxed{\operatorname{rot} G = (\operatorname{rot} F \circ \varphi) \cdot (\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi)} \tag{5.91}$$

Schritt 3. Umwandlung des Integrals über A in ein Integral über $\varphi(A)$. Nach Definition der Normale gilt

$$\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi = \nu \circ \varphi \; |\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi| \tag{5.92}$$

und aus (5.73) folgt, dass

$$|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi_2|^2 = |\partial_1 \varphi|^2 \, |\partial_2 \varphi|^2 - (\partial_1 \varphi \cdot \partial_2 \varphi)^2 = \det (D\varphi)^T D\varphi, \tag{5.93}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit benutzt haben, dass $(D\varphi^T D\varphi)_{ij} = \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi$, also

$$D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} |\partial_1 \varphi|^2 & \partial_1 \varphi \cdot \partial_2 \varphi \\ \partial_1 \varphi \cdot \partial_2 \varphi & |\partial_2 \varphi|^2 \end{pmatrix}.$$

Aus (5.92) und (5.93) folgt mit der Definition des Maßes S^2

$$\int_A (\operatorname{rot} F \circ \varphi) \cdot (\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi) \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\varphi(A)} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\mathcal{S}^2. \tag{5.94}$$

Man beachte, dass wir für (5.92) und (5.93) und damit für (5.94) nur die Voraussetzung $\varphi \in C^1(W; U)$ (und φ Immersion) benutzt habe. Die Bedingung $\varphi \in C^2(W; U)$ wurde nur bei der Herleitung von (5.91) benutzt.

Durch Kombination von (5.90), (5.91) und (5.94) erhalten wir schließlich

$$\int_{\varphi(\partial A)} F \cdot t \, dS^1 = \int_A (\operatorname{rot} F \circ \varphi) \cdot (\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi) \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\varphi(A)} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS^2$$

und somit die Behauptung (unter der Zusatzannahme $\varphi \in C^2(W; U)$).

Schritt 4. Beweis für $\varphi \in C^1(W; U)$ durch Approximation mit C^2 Abbildungen (nicht in der Vorlesung besprochen).
Es gibt eine offene Menge $W_1 \subset W$, so dass $\overline{W_1}$ kompakt und in W enthalten ist und $\overline{A} \subset W_1$. Sei $\rho \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit $\int \rho \, d\mathcal{L}^2 = 1$ und sei $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$. Für $k \geq k_0$ ist $\varphi_k := \rho_k * \varphi \in C_c^\infty(W_1)$ und es gilt $\varphi_k \to \varphi$ und $D\varphi_k \to D\varphi$ gleichmäßig in $\overline{W}_1$.

Wir zeigen jetzt, dass $\varphi_k(\overline{W}_1) \subset U$ für $k \geq k_0$. Da $\overline{W}_1$ kompakt ist, ist auch $\varphi(\overline{W}_1)$ kompakt. Da $\varphi(\overline{W}_1) \subset U$ folgt, dass $\min_{y \in \varphi(\overline{W}_1)} \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^3 \setminus U) > 0$. Damit folgt die Behauptung aus der gleichmäßigen Konvergenz von φ_k auf $\overline{W_1}$.

Sei von nun an $k \geq k_0$. Da $\varphi_k \in C^2(W_1, U)$ und $\bar{A} \subset W_1$ folgt aus dem, was wir schon bewiesen haben, dass

$$\int_{\varphi_k(A)} \operatorname{rot} F \cdot \nu_k \, dS^2 = \int_{\varphi_k(\partial A)} F \cdot t_k \, dS^1 \,. \tag{5.95}$$

Aus (5.94) und (5.87), angewandt auf φ_k, folgt

$$\int_{\varphi_k(A)} \operatorname{rot} F \cdot \nu_k \, dS^2 = \int_A (\operatorname{rot} F \circ \varphi_k) \cdot (\partial_1 \varphi_k \times \partial_2 \varphi_k) \, d\mathcal{L}^2, \tag{5.96}$$

$$\int_{\varphi_k(\partial A)} F \cdot t_k \, dS^1 = \int_{\partial A} (F \circ \varphi_k) \cdot (D\varphi_k \, \tau) \, d\mathcal{L}^1 \,. \tag{5.97}$$

Jetzt kann man auf den rechten Seiten den Limes $k \to \infty$ betrachten und noch einmal (5.94) und (5.87) anwenden. Damit folgt die Behauptung unter der ursprünglichen Voraussetzung $\varphi \in C^1(W; U)$. □

[2.2. 2017, Vorlesung 27]

[7.2. 2017, Vorlesung 28]

Man kann den Satz von Stokes auf zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern. Dazu muss eine Einheitsnormale definieren können. Die ist möglich wenn M eine *orientierbare* Untermannigfaltigkeit ist. Wir diskutieren betrachten zunächst eine Orientierung in Vektorräumen.

Kommentar:
Rechte-Hand-Regel im $\mathbb{R}^3$
Wie kann man einer Basis im $\mathbb{R}^3$ ansehen, ob sie positiv orientiert ist?
Abstrakte Definition für k-dim. Vektorraum.
Normale für $n-1$ dim. Unterräume von $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. (Orientierung von Vektorräumen). Auf einem k-dimensionalem Vektoraum V kann man eine Orientierung wie folgt definieren. Seien $(a_1, \ldots, a_k)$ und $(b_1, \ldots, b_k)$ Basen von V. Dann gibt es genau eine invertierbare lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ so dass $b_i = \sum_j F_{ij} a_j$. Die Basen heißen äquivalent, falls $\det F > 0$. Eine Orientierung ist eine Äquivalenzklasse von Basen. Es gibt auf V genau zwei Orientierungen.
Falls V ein $n-1$ dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, so ist die Wahl einer Orientierung äquivalent zur Wahl einer Normale. Für jede Basis $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ von V gibt es genau einen Einheitsvektor ν, der senkrecht auf V steht und die Bedingung $\det(a_1, \ldots, a_{n-1}, v) > 0$ erfüllt. Außerdem hängt ν nur von der Orientierung ab.

Definition 5.17. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt M orientierbar, falls es einen Atlas $\mathcal{A}$ gibt, so dass für alle Kartenwechsel $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$ gilt $\det D[(\varphi_\beta)^{-1} \circ \varphi_\alpha] > 0$.*

Interpretation: Falls (φ, U) eine Karte der Untermannigfaltigkeit M ist, so definiert (die Äquivalenzklasse von) $(\partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_k\varphi(x))$ eine Orientierung auf dem Tangentialraum T_pM mit $p = \varphi(x)$. Die Untermannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn die Orientierung auf T_pM nicht von der Karte abhängt.

Für Untermannigfaltigkeiten der Dimension 1 oder Kodimension 1 läßt sich Orientierbarkeit leicht charakterisieren[18]

[18]Beweis: Im Bild einer Karte (φ, U) lässt sich ein stetiges Einheitsnormalfeld $\nu_{\varphi,U}$ eindeutig durch die Bedingungen

$$\nu_{\varphi,U}(\varphi(x)) \cdot \partial_i\varphi(x) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n-1, \qquad |\nu| = 1$$

und

$$\det(\partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(x), \nu_{\varphi,U}(\varphi(x))$$

eindeutig definieren und man sieht leicht, dass $\nu_{\varphi,U}$ auf $\varphi(U)$ stetig ist. Aus der Orientierbarkeit folgt, dass ν unabhängig von der Karte ist, d.h. falls (φ', U') eine weitere Karte ist und $p = \varphi(x) = \varphi'(x')$ dann gilt $\nu_{\varphi,U}(p) = \nu_{\varphi',U'}(p)$. Daraus folgt, dass ν auf ganz M eindeutig definiert und stetig ist.

Sei nun M eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, auf der ein stetiges Einheitsnormalenfeld ν existiert. Dann kann man mit Hilfe des ursprünglichen Atlas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha\in A}$ einen neuen Atlas definieren, so dass M orientierbar wird. Wir können annehmen, dass alle offenen Mengen U_α zusammenhängend sind (sonst definieren wir einen neuen Atlas, indem wir φ_α auf jede der höchstens abzählbar vielen Komponenten von U_α einschränken). Für jede Karte gilt

$$s_\alpha(x) := \det(\partial_1\varphi_\alpha(x), \ldots, \partial_{n-1}\varphi_\alpha(x), \nu(\varphi_\alpha(x)) \neq 0 \quad \text{in } U_\alpha.$$

Da U_α zusammenhängend ist folgt $s_\alpha > 0$ in U_α oder $s_\alpha < 0$ in U_α.

Wir definieren nun einen neuen Atlas $(\varphi'_\alpha, U'_\alpha)_{\alpha\in A}$ wie folgt. Falls $s_\alpha > 0$, so setzen wir $(varphi'_\alpha, U'_\alpha) = (\varphi_\alpha, U_\alpha)$. Falls $s_\alpha < 0$ definieren wir S als die Spiegelung an der Ebene $x_{n-1} = 0$ und setzten $U'_\alpha = SU_\alpha$ und $\varphi'_\alpha = \varphi \circ S$. Dann gilt $\partial_{n-1}\varphi' = -(\partial_{n-1}\varphi) \circ S$ und,

Lemma 5.18. *Eine $(n-1)$ dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenfeld gibt., d.h. ein $\nu \in C^0(M;\mathbb{R}^n)$ mit $\nu(p) \perp T_pM$ für alle $p \in M$ und $|\nu| = 1$. Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitstangentialfeld τ gibt, d.h. ein $\tau \in C^0(M;\mathbb{R}^n)$ mit $\tau(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$ und $|\tau| = 1$.*

Beispiele. (i) Der Rand einer offenen, beschränkten, C^1 berandeten Menge ist orientierbar.
(ii) Das Möbiusband ist nicht orientierbar.
(iii) Für eine orientierbare zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ kann das Einheitsnormalenfeld durch

$$(\nu \circ \varphi)(x) = \frac{\partial_1\varphi(x) \wedge \partial_2\varphi(x)}{|\partial_1\varphi(x) \wedge \partial_2\varphi(x)|} \tag{5.98}$$

definiert werden.
(iv) Für eine orientierbare eindimensionale Untermannigfaltigkeit kann das Einheitstangentialfeld durch

$$(\tau \circ \varphi)(x) = \frac{\varphi'(x)}{|\varphi'(x)|} \tag{5.99}$$

definiert werden.

Definition 5.19. *Wir sagen, dass M eine orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, falls folgendes gilt:*

(i) M ist eine orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit;

(ii) $N := \overline{M} \setminus M$ ist eine orientierbare $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit;

(iii) für alle $x \in N$ gibt es eine offene Umgebung U in $\mathbb{R}^n$ und eine Karte $\varphi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^k \to \varphi(B_1(0)) \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi(B_1(0) \cap \{x : x_k > 0\}) = M \cap U, \quad \varphi(B_1(0) \cap \{x : x_k = 0\}) = N \cap U \tag{5.100}$$

und φ induziert die gleiche Orientierung wie die Atlanten auf M und N.

Falls M eine orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ist so schreibt man $\partial M = N = \overline{M} \setminus N$. Falls M kompakt und orientierbar ist, kann man M als orientierbare Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial M = \emptyset$ betrachten.

---

für $i < n-1$, $\partial_i\varphi' = (\partial_i\varphi) \circ S$. Daraus folgt, dass $\omega(\varphi'_\alpha(x'), \partial_1\varphi'_\alpha(x'), \ldots, \partial'_k\varphi'_\alpha(x')) = -s_\alpha(Sx') > 0$. Dann gilt für alle Karten des neuen Atlas, dass $s'_\alpha > 0$. Daraus folgt, dass $\det D({\varphi'_\beta}^{-1} \circ \varphi'_\alpha) = 0$.

Das Argument für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten ist analog, aber einfacher.

Satz 5.20 (Stokes, 3D)**.** *Sei M eine beschränkte zweidimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^3$ und sei $N = \partial M$. Seien ν und τ wie in* (5.98) *und* (5.98) *definiert. Dann gilt für alle $F \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$:*

$$\int_M \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS^2 = \int_N F \cdot \tau \, dS^1 \,, \tag{5.101}$$

Beweisidee. Dies folgt aus Satz 5.16 mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der 1. □

5.5 Crashkurs: Differentialformen und der allgemeine Satz von Stokes[19]

Bisher haben wir auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit ein Maß S^k definiert und dann das Integral einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$\int_M f \, dS^k$$

definiert. Alternative kann man eine sogenannte k-Form ω (s. unten) auf M betrachten und ein Integral durch

$$\int_M \omega$$

definieren. Diese beiden Zugänge haben vieles gemeinsam. Zwei wesentlichen Unterschiede sind:

- Das Integral über Formen läßt sich nur für orientierbare Untermannigfaltigkeiten definieren und das Integral ändert das Vorzeichen, wenn man die Orientierung der Untermannigfaltigkeit durch die umgekehrte Orientierung ersetzt;
- bei der Definition des Integrals über Form wird die euklidische Struktur des $\mathbb{R}^n$ (d.h. das Skalarprodukt) nicht benutzt.

Wenn M ein k-dimensionaler Unterraum (mit fester Orientierung) ist, sind beide Zugänge äquivalent, da jede k-Form in einem k-dimensionalen Vektorraum eindeutig durch eine Funktion gegeben ist (vgl. dazu weiter unten n-Formen im $\mathbb{R}^n$).

Definition 5.21. *Sei V ein endliche dimensionaler Vektorraum, $\Omega \subset V$ offen, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Eine Differentialform ω der Ordnung k in Ω (kurz: k-Form) ist eine Abbildung*

$$\omega : \Omega \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R} \tag{5.102}$$

[19] Für eine ausführlichere Darstellung vgl. z.B. M. Barner, F. Flohr, Analysis II, Walter de Gruyter & Co., Kapitel 17

mit den Eigenschaften

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(x, v_1, \dots, v_k) \quad \textit{ist multilinear und alternierend,} \tag{5.103}$$

$$x \mapsto \omega(x, v_1, \dots v_k) \quad \textit{ist stetig}. \tag{5.104}$$

Wir sagen, dass ω von der Klasse C^k ist, falls $x \mapsto \omega(x, v_1, \dots v_n)$ in $C^k(\Omega)$ ist. Eine 0-Form ist eine Funktion in $C(\Omega)$.

Wir werden im folgenden nur den Fall

$$V = \mathbb{R}^n$$

betrachten.

Beispiele. Sei $e^1, \dots, e^n$ die duale Basis von $\mathbb{R}^n$, d.h. e^j ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ und

$$e^j(e_k) = \delta_{jk}.$$

(i) (1-Formen). Seien $a_1, \dots a_n \in C^0(\Omega)$. Dann ist

$$\tilde{\omega}(x, v) := \sum_{i=1}^{n} a_i(x) e^i(v)$$

eine 1-Form. Umgekehrt läßt sich jede 1-Form ω so schreiben mit $a_i(x) = \omega(x, e_i)$. Beweis: es gilt $\omega(x, e_k) = \tilde{\omega}(x, e_k)$ für alle k und alle x. Aus der Linearität im zweiten Argument folgt $\omega = \tilde{\omega}$.

(ii) (2-Formen) Definiere eine Abbildung $e^j \wedge e^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$e^j \wedge e_k(v, w) = e^j(v) e^k(w) - e^j(w) e^k(v).$$

Dann ist $e^j \wedge e^k$ eine 2-Form und $e^k \wedge e^j = -e^j \wedge e^k$. Jede 2-Form läßt sich schreiben als

$$\omega(x, v, w) = \sum_{j<k} a_{jk}(x) e^j \wedge e^k(v, w)$$

mit stetigen Funktionen a_{jk}.

(iii) (n-Formen) Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Determinanten ist eine n-Form immer von der Form

$$\omega(x, v_1, \dots v_n) = f(x) \det(v_1, \dots v_n) \tag{5.105}$$

Daraus ergibt sich folgende interessante Folgerung. Sei ω eine n-Form, $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und

$$\tilde{\omega}(x, v_1, \dots, v_n) := \omega(x, A(x) v_1, \dots A(x) v_n).$$

Dann gilt

$$\tilde{\omega} = \det A(x)\omega. \tag{5.106}$$

Beweis: es gilt $\tilde{\omega}(x)(v_1, \ldots, v_n) = \tilde{f}(x) \det(v_1, \ldots, v_n)$ und $\omega(x, v_1, \ldots v_n) = f(x) \det(v_1, \ldots, v_n)$. Außerdem gilt

$$\tilde{\omega}(x, e_1, \ldots, e_n) = \omega(x, A(x)e_1, \ldots, A(x)e_n) = f(x) \det A(x)$$

Die Wahl $v_i = e_i$ liefert $\tilde{f}(x) = \det A(x)f(x)$ und damit die Behauptung.

(iv) Man sieht leicht, dass es keine nichttrivialen k-Formen mit $k > n$ gibt

Definition 5.22. *Sei $V \subset \mathbb{R}^k$, sei $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte und sei ω eine k-Form, die in einer offenen Umgebung von $\varphi(V)$ definiert ist. Dann definiert man*

$$\int_{\varphi(V)} \omega := \int_V \omega(\varphi(x), \partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_k\varphi(x))\, d\mathcal{L}^k(x)\,. \tag{5.107}$$

Lemma 5.23. *Falls $\varphi' : V' \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^k$ eine weitere Karte ist und $\det D[(\varphi')^{-1} \circ \varphi] > 0$ so gilt*

$$\int_V \omega(\varphi(x), \partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_k\varphi(x))\, d\mathcal{L}^k(x) = \int_{V'} \omega(\varphi'(x), \partial_1\varphi'(x), \ldots, \partial_k\varphi'(x))\, d\mathcal{L}^k(x), \tag{5.108}$$

Beweis. Sei ω eine k-Form in Ω, sei $\varphi : V \to \Omega$ eine C^1 Abbildung. Wir definieren eine k-Form $\varphi^*\omega$ in V durch

$$(\varphi^*\omega)(x, v_1, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(x), D\varphi(x)v_1, \ldots, D\varphi(x)v_k). \tag{5.109}$$

Man nennt $\varphi^*\omega$ den 'pull-back' (oder die zurückgezogene Form) von ω unter φ. Falls $\psi : V' \to V$ eine weitere C^1 Abbildung ist, so folgt aus der Kettenregel, dass

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega). \tag{5.110}$$

Sei $\psi = \varphi^{-1} \circ \varphi'$. Wir hatten im Beweis von Lemma 5.3(iii) gesehen, dass ψ ein C^1 Diffeomorphismus von V' nach V ist. Es gilt $\varphi' = \varphi \circ \psi$. Damit ist die Behauptung (5.108) äquivalent zu

$$\int_V (\varphi^*\omega)(x, e_1, \ldots, e_k)\, d\mathcal{L}^k(x) = \int_{V'} \underbrace{((\varphi \circ \psi)^*\omega)}_{=\psi^*(\varphi^*\omega)}(x', e_1, \ldots, e_k)\, d\mathcal{L}^k(x') \tag{5.111}$$

Nun ist ψ eine C^1 Abbildung zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^k$, $D\psi(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $\varphi^*\omega$ ist eine k-Form. Damit folgt aus (5.106) mit der Abkürzung

$$\eta := \varphi^*\omega$$

$$(\psi^*\eta)(x', e_1, \dots, e_n) = \eta(\psi(x'), e_1, \dots e_n) \det D\psi(x').$$

Nach Voraussetzung ist $\det D\psi > 0$. Damit folgt aus der Transformationsformel

$$\int_{V'} (\psi^*\eta)(x', e_1, \dots, e_n) \, d\mathcal{L}^k(x') = \int_V \eta(x, e_1, \dots, e_n) \, d\mathcal{L}^k(x).$$

Dies ist gerade die Behauptung (5.111). □

Aus (5.108) folgt mithilfe einer C^1 Zerlegung der 1, dass für eine orientientierte Untermannigfaltigkeit das Integral

$$\int_M \omega \tag{5.112}$$

wohldefiniert ist (eigentlich sollte man $\int_{M,\mathcal{A}} \omega$ schreiben, da das Vorzeichen des Integrals sich ändert, wenn man einen Atlas mit einer anderen Orientierung wählt).

Die folgende Verallgemeinerung von Lemma 5.18 wurde nicht in der Vorlesung besprochen[20].

[20]Beweisidee: Dies ist weitgehend analog zum Beweis von Lemma 5.18. Sei M orientierbar und sei (φ, U) eine Karte. Wir definieren $\omega_{\varphi,U}(\varphi(x), \partial_1\varphi(x), \dots, \partial_k\varphi(x)) := (\det D\varphi^T D\varphi)^{1/2}$. Damit ist $\omega_{\varphi,U}(x, a_1, \dots a_k)$ für alle $a_1, \dots a_k \in T_xM$ durch Multilinearität und Antisymmetrie eindeutig bestimmt. Der entscheidende Punkt ist, dass ω nicht von der Karte abhängt. Falls nämlich $\varphi' = \varphi \circ \psi$ so folgt wie im Beweis von Lemma 5.23, dass $\omega(\varphi'(x'), \partial_1\varphi'(x'), \dots, \partial_k\varphi'(x')) = \omega(\varphi(x), \partial_1\varphi(x), \dots, \varphi_k(x)) \det D\psi(x)$ mit $x = \psi(x')$. Andererseits gilt $D\varphi'(x') = D\varphi(x)D\psi(x')$ und somit $\det(D\varphi'(x'))^T D\varphi'(x') = \det(D\varphi(x))^T D\varphi(x) \, (\det D\psi(x'))^2$. Damit folgt auch (5.113).
Es bleibt nur noch, ω auf alle Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und alle Punkte x in einer Umgebung V von M fortzusetzen. Falls M eine C^2 Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine Abbildung π von einer Umgebung V von M auf M, so dass $\pi(x)$ derjenige Punkt auf M ist, der den geringsten Abstand von x hat. Dann kann man die Orthogonalprojektion $P_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ und eine Projektion $\pi : U \to M$ betrachten und $\omega(x)(v_1, \dots v_k) = \omega(\pi(x))(P_xv_1, \dots, P_xv_k)$ setzen.
Für allgemeine C^1 Untermannigfaltigkeiten kann man die Fortsetzung wie folgt konstuieren. Sei $\bar{p} \in M$. Es reicht zu zeigen, dass es eine Umgebung V von $\bar{p}$ gibt und eine k-Form $\tilde{\omega}$ auf V, so dass $\tilde{\omega}(q, v_1, \dots, v_k) = \omega(q, v_1, \dots, v_k)$ für alle $q \in V \circ M$ und $v_i \in T_qM$. Mithilfe einer Zerlegung der 1 folgt, dann dass eine k-Form in einer Umgebung von M gibt, die für alle $q \in M$ und alle $v_1, \dots, v_k \in T_qM$ mit ω übereinstimmt. Da ω und $\tilde{\omega}$ linear und alternierend sind und T_qM k-dimensional ist reicht es zu zeigen, dass $\tilde{\omega}(q, \partial_1\varphi(x) \dots, \partial_k\varphi(x)) = \omega(q, \partial_1\varphi(x), \dots, \partial_k\varphi(x))$ für irgendeine Karte mit $\varphi(x) = q$.
Sei (φ, U) eine Karte mit $\bar{p} = \varphi(\bar{x})$. Wir hatten im Beweis von Lemma 5.3 gesehen , dass es einen Umgebung V von $\bar{p}$ in $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : B_\rho(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n \to V$ gibt, so dass $\Phi_{|B_\rho(\bar{x})\cap\mathbb{R}^k\times\{0\}} = \varphi_{|B_\rho(\bar{x})\cap\mathbb{R}^k\times\{0\}}$. Nach von ω Definition ist die Form k-Form $\eta := \varphi^*\omega$ auf $B_\rho(\bar{x}) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset U$ durch $\eta(x, e_1, \dots, e_k) = \det(D\varphi^T(x)D\varphi)(x)$ gegeben. Wir setzen η zu einer k-Form $\tilde{\eta}$ auf $B_\rho(\bar{x})$ fort, indem wir $\tilde{\eta}(y, w_1, \dots, w_k) = \eta(Px, Pw_1, \dots, Pw_k)$ setzen mit $P(w_1, \dots, w_n) = (w_1, \dots, w_k)$. Schliesslich definieren wir $\tilde{\omega} = (\Phi^{-1})^*\tilde{\eta}$. Nach der Kettenregel gilt $D\Phi^{-1}(\Phi(x))D\Phi(x)e_i = e_i$. Mit $q \in M \cap V$ und $x = \varphi^{-1}(p) \in B_\rho(\bar{x}) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ folgt $D\Phi^{-1}(q)\partial_i\varphi(x) = D\Phi^{-1}(q)\partial_i D\Phi(x) =$

Lemma 5.24. *Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn es eine k-Form ω gibt, die nirgendwo auf M verschwindet, d.h. für jede Karte (φ, U) und alle $x \in U$ ist $\varphi^*\omega(x, e_1, \ldots, e_k) \neq 0$. Falls M orientierbar ist, kann man ω so wählen, dass*

$$\int_M f\omega = \int_M f\, dS^k \tag{5.113}$$

Satz 5.25 (Stokes)**.** *Sei M eine beschränkte, orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und sei ω eine $(k-1)$-Form von der Klasse C^1, die in einer Umgebung von $\overline{M}$ definiert ist. Dann gilt*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega, \tag{5.114}$$

wobei $d\omega$ die äußere Ableitung von ω bezeichnet.

[7.2. 2017, Vorlesung 28]

[9.2. 2017, Vorlesung 29]

Die äußere Ableitung einer k-Form ist wie folgt definiert. Man betrachtet zunächst die Richtungsableitung

$$(D\omega)(x, w, v_1, \ldots, v_k) := \frac{d}{dt}_{|t=0} \omega(x + tw, v_1, \ldots, v_k) \tag{5.115}$$

Die äußere Ableitung ist dann durch die Antisymmetrisierung der Multilinearform $(w, v_1, \ldots, v_k) \mapsto (D\omega)(x, w, v_1, \ldots, v_k)$ gegeben d.h.

$$\begin{aligned} & d\omega(w, v_1, \ldots, v_k) \\ = \;& D\omega(w, v_1, \ldots, v_k) - D\omega(v_1, w, v_2, \ldots, v_k) \\ - \;& D\omega(v_2, v_1, w, v_3, \ldots, v_k) - \ldots - D\omega(v_k, v_1, \ldots, v_{k-1}, w). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Abhängigkeit von x der Übersicht halber weggelassen.

Beispiel. (Stokes, 3D) Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und sei ω die 1-Form

$$\omega(x, v) = F(x) \cdot v = \sum_{j=1}^{3} F_j(x) v_j\,. \tag{5.116}$$

Sei ein $I \subset \mathbb{R}$ und eine Karte (ψ, I) eine Karte von ∂M. Dann definieren wir den Tangentialeinheitsvektor $\tau : \partial M \to \mathbb{R}^n$ durch $\tau \circ \psi = \psi'/|\psi'|$ (der so

---

e_i. Daraus folgt $\tilde{\omega}(q, \partial_1\varphi(x), \partial_k\varphi(x)) = \eta(x, e_1, \ldots, e_k) = \omega(q, \partial_1\varphi(x), \partial_k\varphi(x))$ und damit die Behauptung.
Für die Umkehrung sei $s(x) := \varphi_\alpha^*\omega(x, e_1, \ldots, e_k)$. Nach Voraussetzung ist $s \neq 0$ in U_α und daher $s > 0$ in U_α oder $s < 0$ (falls U_α zusammenhängend ist). Jetzt kann man eine orientierbaren Atlas wie im Beweis von Lemma 5.18 konstruieren.

definierte Einheitsvektor τ hängt wegen der Orientierbarkeit nicht von der Karte ab). Dann gilt

$$\int_{\psi(I)} \omega = \int_I \omega(\psi(x), \psi'(x)) d\mathcal{L}^1 = \int_I \omega(\psi(x), \tau\circ\psi(x))\, |\psi'|\, d\mathcal{L}^1 = \int_{\psi(I)} F\cdot\tau\, dS^1$$

Außerdem gilt

$$(D\omega)(x, w, v) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) w_i v_j \tag{5.117}$$

und damit

$$(d\omega)(x, w, v) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)(w_i v_j - v_i w_j) \underset{(5.83)}{=} \operatorname{rot} F \cdot (w \times v)\,. \tag{5.118}$$

Für $V \subset \mathbb{R}^2$ liefert die Definition (5.107) (mit $d\omega$ anstelle von ω)

$$\int_{\varphi(V)} d\omega = \int_V (\operatorname{rot} F \circ \varphi)(x) \cdot (\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x))\, d\mathcal{L}^2(x) = \int_{\varphi(V)} \operatorname{rot} F \cdot n\, dS^2, \tag{5.119}$$

wobei wir für die zweite Identität die Definition $n\circ\varphi = \partial_1\varphi\times\partial_2\varphi/|\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi|$ und (5.93) benutzt haben. Dann sieht man leicht, dass der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ ein Spezialfall von Satz 5.25 ist.

Beispiel. (Gauss) Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und ω die $(n-1)$-Form

$$\omega(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, F(x))\,. \tag{5.120}$$

Dann ist

$$D\omega(w, v_1, \ldots v_{n-1}) = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, DF(x)w). \tag{5.121}$$

Mit der Definition von $d\omega$ und der Antisymmetrie der Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned}
& d\omega(x)(w, v_1, \ldots v_{n-1}) \\
= \;& \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, DF(x)w) - \det(w, v_2, \ldots, v_{n-1}, DF(x)v_1) - \ldots \\
& - \det(v_1, \ldots, w, DF(x)v_{n-1}) \\
= \;& \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, DF(x)w) + \det(DF(x)v_1, \ldots, v_{n-1}, w) + \ldots \\
& + \det(v_1, \ldots, DF(x)v_{n-1}, w).
\end{aligned}$$

Da $d\omega$ eine n-Form ist, folgt aus (5.105)

$$d\omega(x)(w, v_1, \ldots, v_{n-1}) = f(x) \det(w, v_1, \ldots, v_{n-1}) \tag{5.122}$$

und die Wahl $v_i = e_i$, $w = e_n$ liefert

$$f(x) = \frac{\partial F_n}{\partial x_n} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = (\operatorname{div} F)(x) \tag{5.123}$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und sei $A = \{(x', x_n) : x' \in V, x_n < \psi(x')\}$, und es gebe eine kompakte Menge $K \subset V \times \mathbb{R}$ mit $F = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus K$. Eine kurze Rechnung zeigt , dass mit $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ gilt

$$\begin{aligned}
& \omega((F(\varphi)(x)), \partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(x)) \\
= \;& \det(e_1 + e_n\partial_1\psi, \ldots, e_{n-1} + e_n\partial_{n-1}\psi, (F \circ \varphi)(x)) \\
= \;& (F \circ \varphi)(x) \cdot \begin{pmatrix} -\nabla\psi(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \;& (F \circ \varphi)(x) \cdot (\nu \circ \varphi)(x)\sqrt{1 + |\nabla\psi(x)|^2}\,.
\end{aligned} \tag{5.124}$$

Eine Möglichkeit dies zu sehen ist, die Determinante nach der letzten Zeile zu entwickeln. Dies liefert

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & F_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i F_i$$

Da $\det((D\varphi)^T D\varphi) = 1 + |\nabla\psi|^2$ folgt aus Satz 5.25

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^{n-1} = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n\,. \tag{5.125}$$

Damit ergibt sich Lemma 5.10, d.h. die Version des Satzes von Gauss für Mengen deren Rand der Graph einer C^1 Funktion ist. Analog zeigt man, dass Satz 5.25 den Satz von Gauss impliziert.

Ausblick Die äußere Ableitung hat zwei fundamentale Eigenschaften.

Satz 5.26. *(i) Für alle C^2 Formen α gilt $d(d\alpha) = 0$.*
(ii) Sei ω eine k-Form in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sei $U \subset \mathbb{R}^l$ offen und $\varphi \in C^2(U; \Omega)$. Dann gilt

$$\boxed{d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\omega).} \tag{5.126}$$

Eigenschaft (i) ist die Verallgemeinerung der Rechnung $\operatorname{rot} G = (\operatorname{rot} F \circ \varphi) \cdot (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi)$ im Beweis des klassischen Satzes von Stokes in drei Dimensionen, vgl. (5.91). Eigenschaft (i) wird oft kompakt in der Form

$$\boxed{d \circ d = 0} \tag{5.127}$$

gesschrieben. Sie ist fundamental für Anwendungen von Differentialformen in Topologie (de Rham Kohomologie).

Satz von Stokes, Beweisidee. Durch eine Zerlegung der 1 kann man sich auf die folgenden beiden Fälle beschränken:

(i) $\operatorname{supp}\omega \cap \partial M = \emptyset$ und $\operatorname{supp}\omega$ liegt im Bild einer Karte (φ, U)

(ii) $\operatorname{supp}\omega$ liegt im Bild einer Karte wie in Definition 5.19(iii)

Dann benutzt man (5.126). Damit reduziert sich der Beweis (für orientierbare C^2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand) auf den Beweis der entsprechende Aussage für $k-1$-Formen in offenen Menge des $\mathbb{R}^k$ und somit auf den Satz von Gauss. Die Aussage für C^1 Untermannigfaltigkeiten erhält man dann durch Approximation, ähnlich wie beim Beweis des klassischen Satzes von Stokes im $\mathbb{R}^3$.
Dieses Vorgehen ist völlig analog zu dem Beweis des Satzes 5.16 (Stokes in 3D für ein Flächenstück).

- Schritt 1 entspricht $\int_{\varphi(\partial A)} \omega = \int_{\partial A} \varphi^* \omega$ und der Anwendung von Stokes/Gauss für $k-1$ Formen im $\mathbb{R}^k$ auf die rechte Seite.
- Die Schlüsselidentiät in Schritt 2 entspricht $d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\omega)$
- Schritt 3 entspricht $\int_A \varphi^*(d\omega) = \int_{\varphi(A)} d\omega$.

□

Ausblick 2 Damit sind die grundlegenden Konzepte und Idee eingeführt. Es fehlt noch ein Kakül mit dem man konkret mit Differentialformen rechnen kann und die skizzierten Aussagen effizient beweisen kann. Die wesentlichen Elementen des Kalküls sind die folgenden

- In Verallgemeinerung des Ausdrucks $e^k \wedge e^l$ den wir den Beispielen für 2-Formen betrachten haben kann man ein Produkt einführen, dass einer k-Form α und einer l-Form β eine $k+l$ Form $\alpha \wedge \beta$ zuordnet. Diese Produkt ist assoziativ und hat die Eigenschaft $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta$
- Damit läßt sich jede k-Form schreiben als
$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k}(x) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$$
- Für 0-Formen gilt $df = \sum_{i_1}^n \partial_i f \; e^i$
- Produktregel für die äußere Ableitung: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ für k-Form α.
- Beweis von $d \circ d = 0$, durch Reduktion auf 0-Formen mit Produktregel
- Beweis von $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$ und $d\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$ für k Formen durch Induktion über k

5.6 Das Hausdorffsche Maß $\mathcal{H}^s$

Für eine nichtleere Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist der Durchmesser diam$E$ durch

$$\mathrm{diam}E := \sup\{|x-y| : (x,y) \in E \times E\} \tag{5.128}$$

definiert und wir setzen diam$\emptyset := 0$.

Definition 5.27. *Sei $\delta > 0$, $s \in [0,\infty)$. Für $E \subset \mathbb{R}^n$ definiert man*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \frac{\omega_s}{2^s} \inf \left\{ \sum_{h\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, F_h)^s : E \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} F_h,\, \mathrm{diam}F_h \le \delta \right\}. \tag{5.129}$$

Das s-dimensionale Hausdorff-Maß im $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist durch

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E). \tag{5.130}$$

definiert. Dabei ist

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+\frac{s}{2})}, \qquad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \tag{5.131}$$

Für $s = 0$ setzen wir

$$(\mathrm{diam}E)^0 = 1 \quad \textit{falls } E \neq \emptyset, \qquad (\mathrm{diam}\emptyset)^0 = 0. \tag{5.132}$$

Bemerkung. Das Hausdorffmaß läßt sich für Teilmengen eines beliebigen metrischen Raums definieren, indem man $|x-y|$ durch $d(x,y)$ ersetzt.
Die Normierung ist gerade so gewählt, dass für $s \in \mathbb{N}$, $s \ge 1$ gilt $\omega(s) = \mathcal{L}^s(B_1^{(s)})$. Außerdem gilt $\Gamma(s) = (s-1)!$
Beweis (wurde in der Vorlesung nur skizziert): Durch partielle Integration sieht man leicht, dass

$$\Gamma(1+\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}\Gamma(1+\frac{n-2}{2}) \tag{5.133}$$

und somit

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}. \tag{5.134}$$

Außerdem gilt $\Gamma(1) = \Gamma(0) = 1$ und somit $\omega_2 = \pi$. Mit der Substitution $t = z^2$ und Lemma **??** erhält man

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-z^2} 2z\, dz = \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi} \tag{5.135}$$

und somit $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und $\omega_1 = 2$.

In einer Übungsaufgabe hatten Sie durch Anwendung von Fubini auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ und Polarkoordinaten gezeigt, dass für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$

$$\mathcal{L}^n(B_1^{(n)}) = \frac{2\pi}{n}\mathcal{L}^{n-2}(B_1^{(n-2)}). \tag{5.136}$$

Mit $\mathcal{L}^1(B_1^{(1)}(0)) = 2 = \omega_1$ und $\mathcal{L}^2(B_1^{(2)}(0)) = \pi = \omega_2$ folgt die Behauptung.

Bemerkung. Aus der Definition ist klar, dass $\mathcal{H}^s_\delta \geq \mathcal{H}^s_{\delta'}$ für $\delta \leq \delta'$. Deshalb existiert $\lim\limits_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup\limits_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E)$ (in $[0,\infty]$) für alle E und alle s.

Lemma 5.28. *Für alle δ und s sind $\mathcal{H}^s_\delta$ und $\mathcal{H}^s$ äußere Maße.*

Beweis. Dies folgt für $\mathcal{H}^s_\delta$ unmittelbar aus Satz 2.5 (mit $v(F) = 2^{-s}\omega_s(\mathrm{diam}F)^s$).

Wir betrachten jetzt $\mathcal{H}^s$. Aus $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ für alle δ folgt $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Aus $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ für alle δ folgt $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$.

Sei $A : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Für alle $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_j)\,. \tag{5.137}$$

Deshalb gilt $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_j)$. □

Lemma 5.29. *Für alle s sind alle Borelmengen $\mathcal{H}^s$ messbar.*

Beweis. Dies folgt aus dem Carathéodory Kriterium (Satz 2.31). □

Lemma 5.30. *Das null-dimensionale Hausdorff Mass $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß. Für $s > n$ gilt $\mathcal{H}^s = 0$.*

Beweis. Die Abschätzung $\mathcal{H}^0(E) \leq \#(E)$ ist klar, da $E = \cup_{x\in E}\{x\}$. Für $\#E = 0$ oder $\#E = 1$ ist die Aussage ebenfalls klar. Sei E endlich und $\#E \geq 2$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $|x-y| \geq \varepsilon$, falls $x, y \in E$, $x \neq y$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$. Dann gilt $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}^0_\delta(E) \geq \#E$, da jede Menge F_h mit $\mathrm{diam}F_h \leq \delta$ höchstens einen Punkt von E enthalten kann. Falls E nicht endlich ist, so gibt es für jedes $k \in N$ eine Teilmenge $E_k \subset E$ mit $\#E_k = k$. Aus der Monotonie von $\mathcal{H}^0$ folgt $\mathcal{H}^0(E) \geq k$ und somit $\mathcal{H}^0(E) = \infty$.

Sei nun $s > n$ und sei $\overline{Q}$ ein abgeschlossener Würfel der Kantenlänge 1. Dann ist $\bar{Q}$ die Vereinigung von k^n Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{k}$. Daher gilt für $k \geq \frac{1}{\delta}$ die Abschätzung $\mathcal{H}^s_\delta(\overline{Q}) \leq c_{s,n}k^n(\frac{1}{k})^s$. Im Limes $k \to \infty$ folgt $\mathcal{H}^s_\delta(\overline{Q}) = 0$ für alle $\delta > 0$ und daher $\mathcal{H}^s(\overline{Q}) = 0$. Da $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Würfeln der Kantenlänge 1 ist, folgt die Behauptung $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$. □

Lemma 5.31. *Jede Lebesgue messbare Menge E ist $\mathcal{H}^n$ messbar und es gibt eine Konstante c_n, so dass*

$$\mathcal{H}^n(E) = c_n\mathcal{L}^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}_n \tag{5.138}$$

und $0 < c_n \leq 1$

Beweis. **Schritt 1.** Für jeden abgeschlossenen Würfel gilt $\mathcal{H}^n(Q) \leq C_n\mathcal{L}^n(Q)$. Insbesondere ist jede $\mathcal{L}^n$ Nullmenge eine $\mathcal{H}^n$ Nullmenge.
Beweisidee: Um $\mathcal{H}^n_\delta(Q)$ abzuschätzen, zerlege Q in k^n kongruente Teilwürfel mit Kantenlänge kleiner als δ.

Schritt 2. Jede Lebesgue messbare Menge E ist $\mathcal{H}^n$ messbar.
Sei $\mathcal{S}$ die σ-Algebra der $\mathcal{H}^n$ messbaren Mengen (vgl. Satz 2.9). Aus Teil 1 folgt, dass $\mathcal{S}$ alle Lebesgue Nullmengen enthält. Ausserdem haben wir schon gezeigt, dass jede Borelmenge $\mathcal{H}^n$ messbar ist. Daraus folgt, dass $\mathcal{S}$ alle Lebesgue messbaren Mengen enthält, da sich jede Lebesgue messbar Menge E schreiben läßt als $E = B \setminus N$, mit B Borelmenge und N Nullmenge.

Schritt 3. $\mathcal{H}^n(E) = c_n \mathcal{L}^n(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}_n$.
Das äußere Maß $\mathcal{H}^n$ und die σ-Algebra der messbaren Mengen sind translationsinvariant. Daher folgt die Aussage aus Lemma 2.24.

Schritt 4. $c_n \leq 1$.
Sei U offen und beschränkt, $\delta > 0$. Nach Lemma 5.32 gibt es abzählbar viele abgeschlossene disjunkte Kugeln $\overline{B}_i = \overline{B}_{r_i}(x_i) \subset U$ und eine Nullmenge N so dass $U = N \cup (\cup_i \overline{B}_i)$ und $r_i \leq \delta/2$. Es gilt $\operatorname{diam}\overline{B}_i = 2r_i$ und daher

$$\mathcal{H}^n_\delta(U \setminus N) \leq \omega_n \sum_i r_i^n = \sum_i \mathcal{L}^n(\overline{B}_i) \leq \mathcal{L}^n(U). \tag{5.139}$$

Mit Schritt 1 folgt $\mathcal{H}^n_\delta(N) \leq \mathcal{H}^n(N) = 0$ und somit $\mathcal{H}^n_\delta(U) \leq \mathcal{L}^n(U)$ und damit die Behauptung. □

Lemma 5.32. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $\delta > 0$. Dann gibt es abzählbar viele abgeschlossene disjunkte Kugeln $\overline{B}_i = \overline{B}_{r_i}(x_i) \subset U$ und eine Lebesgue Nullmenge N so dass $U = N \cup (\cup_i \overline{B}_i)$ und $r_i \leq \delta/2$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst folgende schwächere Aussage. Es gibt eine positive Konstante θ_n mit folgender Eigenschaft. Es gibt endlich viele abgeschlossene disjunkte Kugeln $\overline{B}_1, \dots \overline{B}_k$, $\overline{B}_i \subset U$ mit $r_i \leq \delta/2$ und

$$\mathcal{L}^n(\cup_{i=1}^k \overline{B}_i) \geq \theta_n \mathcal{L}^n(U)\,. \tag{5.140}$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.15 kann man zeigen, dass es abzählbar viele disjunkte offene Würfel $y_i + (0, \rho_i)^n$ mit $\sum_j \rho_j^n = \mathcal{L}^n(U)$ (man kann z.B. dyadische Würfel der Form $2^{-k}(a + (0,1)^n$ betrachten mit $a \in \mathbb{Z}^n$). Wir können annehmen, dass $\rho_i < \delta/2$ (sonst kann man jeden Würfel solange in Würfel der halben Kantenlänge zerlegen, bis diese Bedingung erfüllt ist). Wegen der Konvergenz der Summe gibt es ein k, so das $\sum_{j=1}^k \rho_j^n \geq \mathcal{L}^n(U)/2$. Jeder offene Würfel enthält eine abgeschlossene Kugel $\overline{B}_j$ mit Radius $\rho_j/(2\sqrt{n})$. Die Kugeln $\overline{B}_1, \dots \overline{B}_k$ sind disjunkt und es gilt

$$\mathcal{L}^n(\overline{B}_j) = \omega_n \frac{\rho_j^n}{(2\sqrt{n})^n}\,. \tag{5.141}$$

Daher gilt (5.140) mit $\theta_n = \frac{1}{2}\omega_n \frac{1}{(2\sqrt{n})^n}$.

Die Behauptung folgt jetzt leicht, indem man induktiv offenen Menge U_l definiert mit $U_0 = U$ und $U_{l+1} = U_l \setminus (\cup_{j=1}^{k_l} \overline{B}_j)$, wobei Kugeln $\overline{B}_j$ abgeschlossen, disjunkt und in U_l enthalten sind und $\mathcal{L}^n(U_{l+1}) \leq (1-\theta_n)\mathcal{L}^n(U_l)$. Auf diese Weise erhält man eine abzählbare Familie disjunkter Kugeln, welche $U \setminus N$ überdecken, wobei $N := \cap_{l=0}^\infty U_l$ eine Nullmenge ist. □

Satz 5.33. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^{n*}$.*

Beweis. Der wesentliche Punkt ist, die untere Abschätzung in Lemma 5.31 zu der Abschätzung $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{H}^n(E)$ zu verbessern. Dazu benützt man die isodiametrische Ungleichung

$$\mathcal{L}^{n*}(F) \leq \omega_n 2^{-n} (\mathrm{diam} F)^n. \tag{5.142}$$

Diese Ungleichung besagt, dass unter allen Mengen von gegebenem Durchmesser die Kugel das größte Volumen hat. Die Ungleichung ist nichttrivial, da nicht jede Menge vom Durchmesser D in einer Kugel vom Radius $D/2$ enthalten ist (ein Beispiel ist das gleichseitige Dreieck). Zum Beweis von (5.142) benutzt man die Steiner Symmetrisierung. □

Lemma 5.34. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{Lip}\,(E; \mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (\mathrm{Lip}\,(f))^s \mathcal{H}^s(E)\,. \tag{5.143}$$

Beweis. In der Definition von $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ kann man annehmen, dass $F_h \subset E$ (da $\mathrm{diam}(F_h \cap E) \leq \mathrm{diam} F_h$). Aus der Eigenschaft $\mathrm{diam} f(F) \leq \mathrm{Lip}\,(f) \mathrm{diam} F$ folgt, dass $\mathcal{H}^s_{\mathrm{Lip}\,(f)\delta}(f(E)) \leq \mathrm{Lip}\,(f)^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$, und die Behauptung folgt im Limes $\delta \to 0$. □

Bemerkung. Für hölderstetige Funktionen $f \in C^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt analog

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq C_{\alpha,s}\, [f]^s_\alpha\, \mathcal{H}^{\alpha s}(E) \tag{5.144}$$

mit

$$[f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad C_{\alpha,s} = \frac{\omega(s) 2^{s\alpha}}{\omega(\alpha s) 2^s}.$$

Satz 5.35. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ eine Immersion und ein Homöomorphismus von U nach $\varphi(U)$. Sei $E \subset U$ messbar. Dann ist die Menge $\varphi(E)$ $\mathcal{H}^k$-messbar, und es gilt*

$$\mathcal{H}^k(\varphi(E)) = \int_E (\det((D\varphi)^T D\varphi))^{1/2}\, d\mathcal{L}^k\,. \tag{5.145}$$

Bemerkung. Daraus folgt, dass das Oberflächenmaß auf k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten, das wir mit Hilfe von Karten konstruiert haben, gerade mit dem Hausdorffmaß übereinstimmt.

Beweis. **Schritt 0:** Reduktion auf Teilmengen von kompakten Mengen. Es reicht, die Behauptung für messbare Menge E zu beweisen, die in einer kompakten Menge K enthalten sind. Es gibt nämlich eine aufsteigender Folge kompakter Menge K_l, so dass $U = \cup_{l \in \mathbb{N}} K_l$. Eine beliebige messbar Menge lässt sich schreiben als $E = \cup_{l \in \mathbb{N}} E_l$ mit $E_l = E \cap K_l$. Falls die

Aussage für alle E_l gilt folgt sie für E (mit Satz 2.10 für $\mu = \mathcal{H}^k$ und monotoner Konvergenz für $\int_U \chi_{E_l}(\det((D\varphi)^T D\varphi))^{1/2}\, d\mathcal{L}^k$).

Schritt 1: Reduktion auf den Beweis einer lokalen Version von (5.145). Sei K kompakt. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in K$ eine offene Kugel $B(x, \delta)$ so dass für alle messbaren Mengen $F \subset U$ gilt:

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^k(\varphi(F \cap B)) \leq \int_{F\cap B} (\det((D\varphi)^T D\varphi))^{1/2}\, d\mathcal{L}^k \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^k(\varphi(F \cap B)) \tag{5.146}$$

Wir zeigen, wie aus dieser Eigenschaft die Behauptung folgt. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $E \subset K$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Kugeln B_i so dass (5.146) gilt (mit B_i statt B) und $\cup_{i=1}^M B_i \supset K \subset E$. Wir definieren nun induktiv für $i = 1, \dots, M$ disjunkte messbare Mengen

$$F_1 = E \cap B_1, \quad F_i = (E \cap B_i) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} F_k \right)$$

Dann gilt $\cup_{i=1}^M F_i = E \cap (\cup_{i=1}^M B_i) = E$. Anwendung von (5.146) mit F_i und B_i und Summation über i liefert

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \int_E (\det((D\varphi)^T D\varphi))^{1/2}\, d\mathcal{L}^k \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^k(\varphi(E))$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung (5.145).

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\varphi(E)$ $\mathcal{H}^k$ messbar ist. Da E messbar ist gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Menge K'_m und eine Lebesgue Nullmenge N so dass $E = N \cup \cup_{m\in\mathbb{N}} K'_m$. Da φ stetig ist, sind die Mengen $\varphi(K_k)$ kompakt, also $\mathcal{H}^k$ messbar, da alle Borelmengen $\mathcal{H}^k$ messbar sind. Aus (5.147) folgt, dass $\mathcal{H}^k(\varphi(N)) = 0$, also ist $\varphi(N)$ ebenfalls $\mathcal{H}^k$ messbar. Daher ist $\varphi(E)$ messbar.

Schritt 2: Beweis der lokalen Abschätzung (5.146) in einem Spezialfall. Wir nehmen oBdA an, dass $x = 0$ und $\varphi(x) = 0$. Sei $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ (δ wird am Ende in Abhängigkeit von ε klein gewählt). Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$\partial_i \varphi(0) = e_i \quad \forall i = \{1, \dots, k\}. \tag{5.147}$$

Wir werden später sehen, dass der allgemeine Fall durch einen linearen Koordinatenwechsel auf den Spezialfall zurückgeführt werden kann. Aus der Stetigkeit von $D\varphi$ folgt, dass es ein $\rho > 0$ gibt so dass

$$\|D\varphi - D\varphi(0)\| \leq \delta \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\delta} \leq (\det(D\varphi)^T D\varphi)^{1/2} \leq 1+\delta \quad \text{in } B := B_\rho(0). \tag{5.148}$$

Aus der ersten Abschätzung folgt $\|D\varphi\| \leq 1 + \delta$ und somit$\operatorname{Lip} \varphi \leq 1 + \delta$ in B. Mit Lemma 5.34 sowie der Identität $\mathcal{H}^k(F) = \mathcal{L}^k(F)$ erhalten wir

$$\mathcal{H}^k(\varphi(F \cap B)) \leq (1+\delta)^k \mathcal{L}^k(F \cap B) \leq (1+\delta)^{k+1} \int_{F\cap B} (\det(D\varphi)^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k.$$

Für die umgekehrte Abschätzung benutzen wir, dass

$$\operatorname{Lip}\varphi^{-1} \le \frac{1}{1-\delta} \quad \text{auf } B\ . \tag{5.149}$$

Dies Abschätzung folgt aus folgender Beobachtung. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \times \{0\}$ die Orthogonalprojektion und

$$\psi(x) = \pi \circ \varphi(x) - x.$$

Dann gilt $D\psi(0) = 0$ und aus (5.148) folgt $\|D\psi\| = \|\pi \circ (D\varphi - \mathrm{Id}\,)\| \le \delta$ in B (da $|\pi(y)| \le |y|$). Damit gilt für $x, y \in B$ die Abschätzung $|\psi(x) - \psi(y)| \le \delta|x - y|$ und somit

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \ge |\pi\circ\varphi(x)-\pi\circ\varphi(y)| = |x-y+(\psi(x)-\psi(y))| \ge (1-\delta)|x-y|.$$

Daraus folgt (5.149). Aus (5.149), der Identität $F \cap B = \varphi^{-1}(\varphi(F \cap B))$und der Abschätzung für $\det(D\varphi)^T D\varphi$ ergibt sich schließlich

$$\int_{F\cap B} (\det(D\varphi)^T D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k \le (1+\delta)\mathcal{L}^k(F\cap B) \le (1+\delta)\frac{1}{(1-\delta)^k}\mathcal{H}^k(\varphi(F\cap B)).$$

Daraus folgt die gewünschte Abschätzung wenn man $\delta > 0$ so klein wählt, dass

$$(1+\delta)\frac{1}{(1-\delta)^k} \le 1+\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{(1+\delta)^{k+1}} > 1-\varepsilon.$$

Schritt 3: Redukution des allgemeinen Falls auf den Spezialfall durch linearen Variablenwechsel
Sei wie zuvor oBdA $x = 0$ und $\varphi(x) = 0$. Sei nun $T := D\varphi(0)$. Dann hat T eine Polarzerlegung $T = QU$ mit $Q \in O(k, n)$ und $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $U^T = U$ und $\det U > 0$. Die lineare Isometrie $Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ läßt sich zu einer Isometrie $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen (ergänze die orthonormalen Spalenvektoren $Qe_1, \dots, Qe_k$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$). Dann gilt $R^{-1}Qe_i = e_i$ für alle $i = 1, \dots, k$. Wir definieren eine neue Abbildung

$$\tilde\varphi = R^{-1} \circ \varphi \circ U^{-1}.$$

Dann gilt $D\tilde\varphi = R^{-1}D\varphi U^{-1}$ und damit

$$D\tilde\varphi(0)e_i = R^{-1}QUU^{-1}e_i = e_i,$$

d.h. $\tilde\varphi$ erfüllt die Voraussetzung (5.147). Außerdem gilt $(R^{-1})^T R^{-1} = RR^{-1} = \mathrm{Id}$, da $R \in O(n)$. Daraus folgt

$$\det(D\tilde\varphi)^T D\tilde\varphi = \det U^{-1}(D\varphi)^T D\varphi U^{-1} = (\det U)^{-2}\det(D\varphi)^T D\varphi.$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich

$$\int_{F\cap B} (\det(D\varphi)^T \det D\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k = \int_{U(F\cap B)} (\det(D\tilde\varphi)^T \det D\tilde\varphi)^{1/2}\, d\mathcal{L}^k$$

Da das Hausdorffmaß invariant ist unter Isometrien, gilt auch

$$\mathcal{H}^k(\varphi(F \cap B)) = \mathcal{H}^k(R^{-1}\varphi(F \cap B)) = \mathcal{H}^k(\tilde{\varphi}(U(F \cap B))).$$

Damit folgt die Behauptung für φ aus der schon bewiesen Aussage für $\tilde{\varphi}$ (genauer: falls die Aussage für $\tilde{\varphi}$ mit einer offene Kugel $B_{\tilde{\rho}}(0)$ gilt so gilt sie für φ für jede offene Kugel mit $B_\rho(0) \subset U^{-1}B_{\tilde{\rho}}(0)$). □

Definition 5.36. *Die Hausdorff-Dimension einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist durch*

$$\dim_H(E) := \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} \tag{5.150}$$

definiert.

Beispiel. $\dim_H(\emptyset) = 0$, $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim_H(\partial B_1) = n - 1$.

Bemerkung. Für jedes $s \in (0, n]$ und jedes $a \in [0, \infty]$ gibt es eine Menge E mit $\dim_H(E) = s$ und $H^s(E) = a$ (insbesondere sind die Fälle $a = 0$ und $a = \infty$ möglich).

Satz 5.37. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

(i) $\dim_H(E) \leq n$,

(ii) $\mathcal{H}^s(E) = 0$ *für alle* $s \in (\dim_H(E), n]$,

(iii) $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ *für alle* $s \in [0, \dim_H(E))$.

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht besprochen.
Aussage (i) folgt aus Lemma 5.30 und Aussage (ii) folgt aus der Definition von $\dim_H(E)$. Falls $\dim_H(E) = 0$ ist die Aussage (iii) des Satzes leer. Sei also $\dim_H(E) > 0$ und $0 \leq s < \dim_H(E)$. Dann gibt es ein $t \in (s, \dim_H(E))$ und nach Definition von $\dim_H(E)$ gilt $\mathcal{H}^t(E) > 0$.

Sei $\delta > 0$, $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(R^n)$, so dass $E \subset \bigcup_j F_j$. Dann gilt:

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \sum_j \omega_t 2^{-t}(\mathrm{diam} F_j)^t \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t}\delta^{t-s} \sum_j \omega_s 2^{-s}(\mathrm{diam} F_j)^s \tag{5.151}$$

Da die Abschätzung für alle Folgen F gilt, folgt

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t}\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(E)\,. \tag{5.152}$$

Im Limes $\delta \to 0$ folgt $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. □

Beispiel. (i) Sei T die Abbildung auf abgeschlossenen Intervallen, die aus jedem Interval, dass mittlere Drittel entfernt, d.h.

$$T([a,b]) := [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [b - \frac{b-a}{3}, b] \,, \tag{5.153}$$

und sei T in offensichtlicher Weise auf disjunkte Vereinigungen abgeschlossener Intervalle fortgesetzt, d.h. $T(\cup_i I_i) = \cup_i T(I_i)$. Dann ist $\cap_{j=1}^{\infty} T^j([0,1])$ die Cantormenge C. Es gilt

$$\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \,. \tag{5.154}$$

Die Abschätzung $\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C) < \infty$ ergibt durch die offensichtliche Überdeckung von $T^j([0,1]) \supset C$ mit 2^j Intervallen der Länge 3^{-j}. Für die Abschätzung $\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C) > 0$ benützt man, dass die Cantorfunktion hölderstetig mit Exponent $\alpha = \ln 2/\ln 3$ ist und $[0,1] \setminus f(C)$ abzählbar ist. Anwendung von (5.144) mit $s = 1$ und $\alpha = \ln 2/\ln 3$ liefert $1 = f(C) \leq C\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C)$ und somit $\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C) > 0$. Man kann alternativ auch direkt mit einer Überdeckung von C durch Intervalle argumentieren und diese Überdeckung systematisch vereinfachen (s. Falconer[21]; dort finden sich auch zahlreiche weitere Beispiele)
(ii) Die Hausdorff-Dimension der Schneeflockenkurve[22] S ist $\ln 4/\ln 3$ (dieses

[21] K.J. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, 1985

[22] Wir gehen von der Strecke zwischen 0 und 1 in der komplexen Ebene aus. Im ersten Schritt ersetzen das mittlere Drittel dieser Strecke durch die zwei anderen Seiten des gleichseitigen Dreickecks, das dieses mittlere Drittel enthält und oberhalb der Strecke liegt. Auf diese Weise entsteht ein Streckenzug aus vier Segmenten, welcher die Punkte $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{2}{3}$ und 1 verbindet (s. http://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve für schöne Bilder). Jedes der vier Segmente des Streckenzugs hat die Länge $\frac{1}{3}$, die Gesamtlänge des Streckenzugs ist $\frac{4}{3}$.

Im zweiten Schritt wird analog jedes der vier Segmente durch einen Streckzug aus vier Teilen ersetzt, indem das mittlere Drittel durch die anderen beiden Seiten des gleichseitigen Dreicks über dem mittleren Drittel ersetzt wird. So entstehen 16 Segmente der Länge $\frac{1}{9}$. Die Gesamtlänge beträgt $\frac{16}{9} = (\frac{4}{3})^2$. Auf diese Weise definiert man iterativ eine Folge von Streckenzügen. Das n-te Element besteht aus 4^n Geradenstücken der Länge 3^{-n}. Eine Parametrisierung des Streckenzugs, der im ersten Schritt entsteht, ist gegeben durch

$$f_1(t) = H(t) := \begin{cases} \frac{4}{3}t & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{i\theta}(t - \frac{1}{4}) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{4}{3}e^{-i\theta}(t - \frac{1}{2}] & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(t - \frac{3}{4}) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{5.155}$$

Dabei ist $\theta = \frac{\pi}{3}$ im Bogenmass oder 60 Grad. Man sieht leicht dass $|H(t) - H(s)| \leq \frac{4}{3}$.

Die weiteren Iterationen sind dann induktiv definiert durch

$$f_{n+1}(t) = f(q4^{-n}) + H(4^n(t - q4^{-n}))\,[f_n((q+1)4^{-n}) - f(q4^{-n})] \tag{5.156}$$

für $t \in [q4^{-n}, (q+1)4^{-n}]$, mit $q \in \{0, 1, \ldots, 4^n - 1\}$. Man zeigt leicht durch Induktion, dass f_n auf jedem Interval $[q4^{-n}, (q+1)4^{-n}]$ affin ist und f_n dieses Interval auf eine Strecke

Beispiel wurde in der Vorlesung nicht besprochen). Für den Beweis kann benutzen, dass S selbstähnlich ist. Genauer gibt es Isometrien Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 mit $S = \frac{1}{3}(\cup_{i=1}^4 Q_i(S))$. Aus (5.143) folgt, dass für $s = \ln 4/\ln 3$ gilt

$$\mathcal{H}^a_{\delta/3}(S) \le 4(\frac{1}{3})^s \mathcal{H}^s_\delta(S) = \mathcal{H}^s_\delta(S). \tag{5.159}$$

Daraus folgt $\mathcal{H}^{\ln 4/\ln 3}(S) < \infty$.

Die Geometrie selbstähnlicher Mengen mit nichtganzzahliger Hausdorff-Dimension, die ihrem Ursprung in der Arbeit von Felix Hausdorff und anderen Mathematikern zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat, wurde seit den 1980er Jahren durch die Arbeiten von Benoit Mandelbrot[23] und durch Computersimulationen fraktaler Mengen ('Apfelmännchen') einer großen Öffentlichkeit bekannt. Mandelbrot, und viele nach ihm, argumentiert, dass Selbstähnlichkeit und fraktale Mengen grundlegende Strukturen in den Natur- und Sozialwissenschaften sind.

---

der Länge 3^{-n} abbildet, d.h.

$$|f_n((q+1)4^{-n}) - f(q4^{-n})| = 3^{-n}. \tag{5.157}$$

$$f_m(q4^{-n}) = f_n(q4^{-n}) \quad \text{für } m \ge n. \tag{5.158}$$

Man kann zeigen, dass die stetigen Funktionen f_n gleichmässig gegen eine stetige Funktion $f_* : [0,1] \to \mathbb{C}$ konvergieren. Die Kurve f_* heisst Schneeflockenkurve oder Kochsche Kurve.

[23] *The fractal geometry of nature, W.H. Freeman and Co., 1983, dt.: Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser, 1987*

6 Rückblick

Ich habe in der Vorlesung bewußt die allgemeine Maßtheorie und das konkrete Beispiel des Lebesguemaßes parallel besprochen, damit frühzeitig interessante Beispiele zur Verfügung stehen.

Nach einem Durchgang durch den gesamten Stoff ist es vielleicht hilfreich, die wichtigsten allgemeinen Begriffe und Aussagen und die zusätzlichen Eigenschaften spezieller Maße separat aufzulisten.

6.1 Allgemeine Maßtheorie

(i) Äußeres Maß, Messbarkeit, σ-Algebra, Maß

(ii) Messbare Funktionen: Definition, Stabilität unter arithmetischen Operationen und Grenzwertbildung, Egorov

(iii) Integral: Definition des Integrals durch Betrachtung der Urbilder. Integral zunächst für einfache Funktionen, dann für nichtnegative Funktionen, dann für integrierbare Funktionen

(iv) Konvergenzsätze (B.Levi/monotone Konvergenz, Fatou, Lebesgue/dominierte Konvergenz)

(v) Konvergenzbegriffe (fast überall, im Maß, in L_1)

(vi) L_p und L^p Räume (Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Vollständigkeit von L^p)

Ein Aspekt, den man in diesem allgemeinen Kontext hätte diskutieren können, den ich der Einfachheit halber aber nur für das Lebesguemaß behandelt habe, ist:

(vii) Produktmaße und der allgemeine Satz von Fubini

6.2 Zusätzliche Eigenschaften des Lebesguemaßes

(i) Approximation messbarer Mengen durch offene und kompakte Mengen

(ii) Transformation des Maßes unter linearen Abbildungen und unter Diffeomorphismen (Transformationsformel), interessante Koordinatenwechsel, z.B. Polarkoordinaten

(iii) Lusin, Beziehung zwischen messbaren Funktionen und stetigen Funktionen

(iv) Fubini

(v) Integration stetiger Funktionen, Lebesgue Integral vs. Riemann Integral

(vi) Faltung (benutzt die Struktur von $\mathbb{R}^n$ als additive Gruppe und Fubini)

(vii) Dichtheit von C_c^∞ in L^p ($p < \infty$), Riemann-Lebesgue Lemma (Satz 4.22)

(viii) Fouriertransformation (benutzt Struktur von $\mathbb{R}^n$ als additive Gruppe); Gausskalkül

6.3 Radonmaße

Radonmaße besitzen noch viele Eigenschaften des Lebesguemaßes, aber man hat nicht mehr die differenzierbare Struktur des $\mathbb{R}^n$ und die Struktur als additive Gruppe zur Verfügung. Man kann Radonmaße auf lokalkompakten metrischen (oder sogar topologischen) Räumen betrachten. Wir haben uns aber auf Maße auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt.

(i) Messbarkeit offener und kompakter Mengen, Carathéodory Kriterium

(ii) Approximation durch offene und kompakte Mengen

(iii) Lusin

(iv) Dichtheit von C_c in L^p ($p < \infty$) (nicht explizit bewiesen, aber analog zum Beweis von Satz 4.20)

6.4 Maße auf niederdimensionalen Mengen

(i) Für Untermannigfaltigkeiten mit Hilfe von Karten; Transformationsformel gibt Unabhängigkeit von der Parametrisierung

(ii) Hausdorffmaß $\mathcal{H}^s$ für beliebige Mengen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

6.5 Integralsätze

(i) Gauss; Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf höhere Dimensionen, partielle Integration

(ii) Stokes für orientierte zweidimensionale Untermannigfaltikeiten im $\mathbb{R}^3$

Es gibt eine allgemeine Version von Stokes für k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, die man am elegantesten mit Differentialformen formulieren und beweisen kann.