Manuskript zu Splinefunktionen

Karl Scherer
Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Abteilung für Funktionalanalysis und
Numerische Mathematik

Vorwort

Dieses Skript ist aus den Vorlesungen über Splinefunktionen entstanden, die ich im Wintersemester 1996/97 und Sommersemester 1997 an der Universität Bonn gehalten habe. Erst im Sommersemester 2002 konnte ich eine Darstellung ausarbeiten, die wenigstens die Grundlagen relativ komplett enthält. Damit ist die Theorie der (univariaten) B-Splines gemeint, die den Schlüssel zu den meisten grundlegenden Aussagen liefert. Dabei habe ich auch neuere Resultate und Zugänge berücksichtigen können ; einige Überlegungen und Beweise, speziell in Kapitel I.7 und I.8 sind ganz neu.

Eine andere besonders in der älteren Splineliteratur populäre Sichtweise ist, von Splines als Lösung spezieller Variationsprobleme auszugehen. In der neueren Literatur hat dieser Zugang durch die Entwicklung der Theorie der "Radial Basis Functions" wieder starken Aufschwung genommen. Eine gute Darstellung bietet das Buch-Skript " Reconstruction of multivariate Functions of Scattered Data (Radial Basis Functions) "(R.Schaback 1997). Diese Theorie ist ihrem Kern nach mit multivariater Natur und kann als eine Verallgemeinerung von Splines auf mehrere Variable angesehen werden. Eine andere Möglichkeit multivariate Splines einzuführen, besteht durch multivariate Verallgemeinerungen der B-Splines. Die entprechende Theorie untersucht Splines wie in einer Variablen als stückweise polynomiale Funktionen, ist aber relativ kompliziert, da sie von beliebigen Punktverteilungen als " Knoten " ausgeht. Ein weiterer Zugang geht deshalb wie in der Theorie der Finiten Elemente von Gittern (Triangulierungen) aus. Hier existiert meines Wissens noch keine geschlossene Darstellung.

Einfacher und schöner wird die (univariate) Theorie der Splines im Falle äquidistanter Knoten, d.h. wenn " Cardinal Splines " vorliegen. In Teil 2 des Skripts werden einige Ergebnisse daraus vorgestellt, insbesondere die elegante Theorie von Schoenberg zur "Cardinal Interpolation", wobei hier auch noch die Interpolationstellen beliebig äquidistant sein können. Entsprechend ist im Falle regelmäßiger Punktverteilungen die Theorie der multivariaten B-Splines in Form der sogenannten "Box-Splines"relativ gut ausgebaut. Dazu sei auf das Buch " Box - Splines" von C. de Boor - K. Höllig - S. Riemenschneider (1993) verwiesen.

Bonn, im Sommer 2002, Karl Scherer

I.1 Splines als stückweise polynomiale Funktionen

I.1.1 Abgebrochene Potenzen

Auf der Suche nach möglichst einfachen, durch elementare arithmetische Operationen berechenbaren Funktionen kommt man nach der Betrachtung von Polynomen zu den stückweise polynomialen Funktionen. Die einfachsten Funktionen dieser Art bilden die **Stufenfunktionen**: Gegeben seien Punkte in R

$$\vec{t} := \{t_1 < \ldots < t_n\} \quad , t_0 := -\infty, \quad t_{n+1} := \infty. \tag{I.1.1}$$

Dann sind die zugehörigen Stufenfunktionen mit $c_i \in$ R definiert durch

$$S_{1,\vec{t}} := \begin{cases} s(t) = c_i & : \quad t \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \ldots, n+1 \\ s(t_i) = s(t_i^+) & : \quad t = t_i, \quad i = 1, \ldots n \end{cases} \tag{I.1.2}$$

Das Typische hier ist also das Auftreten von sogenannten Knoten t_i. Die Nützlichkeit der Stufenfunktionen wird zum Beispiel beim Aufbau Aufbau der Lebesgueschen Integrationstheorie ersichtlich. Sie sind jedoch für höhere Ansprüche der Approximation aus verschiedenen Gründen ungeeignet:
Sie haben eine nur schwache Approximationsgüte (Übungsaufgabe 1) und sie sind unstetig, was für das Beschreiben "glatter Prozesse" nicht erwünscht ist.
Die nächst einfachere Idee ist die der Approximation durch **Polygonzüge**. Ein bekanntes Beispiel ist der Eulersche Polygonzug, der zur Aproximation der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen benützt wird. Er ist zwar stetig und die Approximationsgüte ist besser als bei Stufenfunktionen (Übungsaufgabe 2), jedoch ist dies für viele Zwecke noch nicht ausreichend. Diese Gründe führten Runge 1904 [Run], S. 192–193, zur Idee der sogenannten "Splinefunktionen" beliebiger Glattheit (Runge loc. cit.):
"Es bestehe die Kurve mit der Ordinate $f(x)$ aus einer Anzahl Bögen von Parabeln α-ten Grades, die sich so aneinander schließen, daß in den Übergangsstellen jedes Mal $f(x), f'(x), \ldots, f^{(\alpha-1)}(x)$ dieselben Werte haben, während nur $f^{(\alpha)}(x)$ sich von Bogen zu Bogen sprungweise ändert. ... Durch solche Parabelbögen wird man sich im allgemeinen bei gleicher Zahl der Bögen und Seiten viel genauer an eine beliebig gegebene stetige periodische Kurve anschließen können als durch eine gebrochene Linie."

Collatz und Quade [CQ] hatten damit 1938 durch Interpolation mit solchen Funktionen Näherungs
formeln für Fourierkoeffizienten konstruiert, ein Problem, auf das wir später noch eingehen werden. Eagle [Ea]hatte schon vorher 1928 die Spezialfälle von stückweise quadratischen und kubischen Funktionen behandelt und letztere "Lath"-Funktionen genannt (lath = Latte). Unabhängig davon war auch Schoenberg 1944/46 [Schoe1] auf diese Funktionen gestoßen, hatte sie ausführlich untersucht und ihnen den Namen **"Splines"** gegeben. Seine physikalische Motivation für diesen Namen war die gleiche wie bei Eagle: eine interpolierende (kubische) Splinefunktion verhält sich ungefähr wie eine biegsame Latte durch diese Punkte. Solche mechanischen Hilfsmittel haben im Englischen den Namen *"Splines"*.
Die exakte Formulierung von Runges Idee führt zu

Definition I.1.1 *Eine Splinefunktion k–ter Ordnung (oder vom Grade $k-1$), $k \geq 2$, mit Knoten $t_1 < \ldots < t_n$ ist eine Funktion, deren Ableitungen bis zur Ordnung $k-2$ stetig sind und deren punktweise $(k-1)$–te Ableitung eine Stufenfunktion aus $S_{1,\mathbf{t}}$ ist.*

Der einfachste Fall entsteht, wenn die Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{I.1.3}$$

$(k-1)$–fach integriert wird. Verschiebt man noch um t_i, so kommt man zu den sogenannten **abgebrochenen Potenzen** :

$$(t - t_i)_+^{k-1} := \begin{cases} (t - t_i)^{k-1} & , \quad t \geq t_i \\ 0 & , \quad t < t_i \end{cases} \tag{I.1.4}$$

Allgemeiner kann man Linearkombinationen von Stufenfunktionen bilden und $(k-1)$ –fach integrieren.Dann stellt sich die Frage, ob man auf diese Weise alle obigen Splinefunktionen erhält. Dazu folgendes

Lemma I.1.1 *Sei $k \geq 2$. Jede Splinefunktion s(t) aus Definition I.1.1 läßt sich darstellen durch*

$$s(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (t - t_i)_+^{k-1} \tag{I.1.5}$$

mit gewissen Koeffizienten α_i und einem Polynom $p \in \Pi_{k-1}$ .Dabei bezeichne Π_{k-1} den Raum der Polynome der Ordnung k oder vom Grade $k-1$. Bei vorgegebenen Knoten bildet diese Menge von Funktionen einen linearen $(n+k)$–dimensionalen Raum (der für $k \geq 2$ in der Menge der stetigen Funktionen liegt).

Wir beweisen Lemma I.1.1 an dieser Stelle nicht sondern weiter unten in allgemeinerer Form. Somit enthalten Splinefunktionen als Spezialfall Polynome. Ihr Wert und ihre Bedeutung für Approximationsprobleme kommt jedoch erst bei Anwesenheit von Knoten zum Tragen. Sie sind dann flexibler als Polynome, wie sich in den folgenden Kapiteln noch zeigen wird,jedoch so glatt wie möglich aneinander angeschlossen derart, daß jeder Knoten genau einen zusätzlichen "Freiheitsgrad" liefert. Ihre optimale Approximationskraft entfalten sie dann,wenn die Knoten (in Abhängigkeit vom Approximationsproblem) variabel sind. Dies führt aber zu Problemen, wie folgendes einfache Beispiel zeigt: Gegeben sei die Folge $(k \geq 3)$

$$s_n(t) = n\, t_+^{k-1} - n\, (t - \frac{1}{n})_+^{k-1} \qquad , t \in [-1, 1] \quad .$$

Man kann sieht sofort ,daß $s_n(t) = [g(t) - g(t-h)]/h$ mit $g(t) = t_+^{n-1}$ und $h = 1/n$ gilt und somit

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = t_+^{k-2}.$$

Der Grenzwert von Splinefunktionen der Ordnung k ist also im Sinne von Definition I.1.1 keine Splinefunktion vom Grad $k-1$ mehr, wenn Knoten zusammenlaufen, da Glattheit und Grad reduziert werden. In Verallgemeinerung des obigen Beispiels können noch mehr als zwei Knoten zusammenlaufen, wobei die Ordnung und Glattheit der Limesfunktionen immer weiter reduziert werden, bis schließlich keine Stetigkeit mehr vorzuliegen mehr braucht. Um dieses Phänomen, worauf wir später noch ausführlich eingehen werden, erfassen zu können, benötigt man die folgende Verallgemeinerung von Definition I.1.1

Definition I.1.2 *Gegeben sei eine Zerlegung* $\Delta = \{\xi_i\}$ *der reellen Achse, d.h. eine Folge mit* $\xi_i < \xi_{i+1}$*, die endlich, einseitig unendlich oder beidseitig unendlich sein kann, und mit* $\inf \xi_i = -\infty$ *und* $\sup \xi_i = +\infty$ *in letzterem Falle.Dieser Folge sei zugeordnet eine Folge* $Z = \{z_i\}$ *ganzer Zahlen mit* $0 \leq z_i \leq k-1$*. Dann heißt*

$$S_k(\Delta, Z) = \left\{ f(x) : f|_{(\xi_i,\xi_{i+1})} \in \Pi_{k-1} \quad \textit{für} \quad f^{(\nu)}(\xi_i^-) = f^{(\nu)}(\xi_i^+)\ , \qquad 0 \leq \nu < z_i \right\}$$

der Raum aller (verallgemeinerten) Splinefunktionen von der Ordnung k *mit den Knoten* ξ_i *und der jeweiligen Glattheit(sordnung)* $z_i - 1$*. Im Falle* $z_i = 0$ *ist Unstetigkeit zugelassen und der Wert in* ξ_i *durch die Forderung der rechtsseitigen Stetigkeit festgelegt.*

Dann kann man zeigen

Lemma I.1.2 *Sei* $\Delta = \{-\infty, \{\xi_i\}_{i=1}^n, +\infty\}, Z = \{z_i\}_{i=1}^n, 0 \leq z_i \leq k-1$ *gegeben. Der Raum* $S_k(\Delta, Z)$ *nach Definition I.1.2 ist d–dimensional,* $d = (n+1)\,k - \sum_{i=1}^n z_i$ *mit Basisfunktionen* $x^j, 0 \leq j \leq k-1$ *und den abgebrochenen Potenzen* $\{(x-\xi_i)_+^l\}_{l=z_i,i=1}^{k-1,n}$*.Insbesondere hat jedes* $s(t) \in S_k(\Delta, Z)$ *die Darstellung*

$$s(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=z_i}^{k-1} \alpha_{i,l}(t-t_i)_+^l. \tag{I.1.6}$$

Die Koeffizienten $\alpha_{i,l}$ *und* $p(t)$ *sind eindeutig bestimmt durch:*

$$p(t) = s(t)|_{(-\infty,t_1)} \tag{I.1.7}$$

$$l!\,\alpha_{i,l} = s^{(l)}(t_i^+) - s^{(l)}(t_i^-) \tag{I.1.8}$$

Beweis: Jedes $s(t)$ aus (I.1.6) genügt offenbar der DefinitionI.1.2,da dies speziell für jede abgebrochene Potenz in (I.1.6) gilt. Umgekehrt sei $s(t)$ aus der Definition gegeben. Man setze (beachte $t_0 := -\infty$, $t_{n+1} := \infty$)

$$p_i(t) = s(t)|_{(t_{i-1},t_i)} \qquad i = 1, \ldots, n+1 \tag{I.1.9}$$

Nun gilt aber nach Voraussetzung für $t = t_1, \ldots, t_n$ und $j = 0, \ldots, z_i - 1$

$$s^{(j)}(t_i) = p_i^{(j)}(t_i^-) = p_{i+1}^{(j)}(t_i^+). \tag{I.1.10}$$

Setzen wir also an

$$p_{i+1}(t) - p_i(t) := \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{i,l}(t-t_i)^l, \tag{I.1.11}$$

so folgt aus (I.1.10)

$$\alpha_{i,l} = 0 \quad , \quad l = 0, \ldots, z_i - 1 \quad .$$

Wir erhalten also $p_{i+1}(t) = p_i(t) + \sum_{l=z_1}^{k-1} \alpha_{i,l}(t-t_i)^l$ und unter Einführung der abgebrochenen Potenzen (I.1.4) mit (I.1.9)

$$\begin{aligned}
s(t)|_{(t_0,t_2)} &= p_1(t) + \sum_{l=z_1}^{k-1} \alpha_{1,l}(t-t_1)_+^l \\
s(t)|_{(t_0,t_3)} &= p_1(t) + \sum_{l=z_1}^{k-1} \alpha_{1,k-1}(t-t_1)_+^{k-1} + \sum_{l=z_2}^{k-1} \alpha_{2,k-1}(t-t_2)_+^{k-1}
\end{aligned}$$

usw. bis Darstellung (I.1.6) folgt. Speziell sieht man ,dass

$$p_1(t) = s(t) \mid_{(-\infty,t_1)}, \quad \alpha_i = \alpha_{i,k-1} \quad (i = 1, ..., n) \quad .$$

Aus (I.1.10), (I.1.11) folgt schließlich

$$l!\alpha_{i,l} = p_{i+1}^{(l)}(t_i) - p_i^{(l)}(t_i) = s^{(l)}(t_i^+) - s^{(l)}(t_i^-)$$

d.h. die gewünschten Formeln (I.1.7) und (I.1.8). □

Die obige Darstellung einer Splinefunktion mit der Basis aus Polynomen und abgebrochenen Potenzen hat zwar den Vorteil, daß sie die exakte Anzahl der freien Parameter (in Abhängigkeit von der Glattheit) angibt, jedoch wird sie nur selten verwendet, da sie folgende Nachteile hat:

1. Bei der Berechnung von einem Polynom $f(x) \in \Pi_k$ benötigt man mittels Horner–Schema nur k Multiplikationen und Additionen pro x, während nach Lemma I.1.2 je nach Lage von x bei $n\gamma k$ sehr viele Multiplikationen und Additionen nötig sein können, da viele abgebrochene Potenzen auf den Wert an der Stelle x Einfluß haben (nichtlokale Basis).

2. Die Basis mit abgebrochenen Potenzen ist schlecht konditioniert in dem Sinne, daß kleine relative Fehler in den Koeffizienten große relative Fehler in den resultierenden Splinefunktionen verursachen können.

Wir wollen den letzteren Punkt genauer diskutieren. Dazu betrachten wir allgemein den Begriff der Kondition einer Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von stetigen Funktionen in $C[a, b]$, dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$: sei

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varphi_i \qquad , \alpha_i \in \mathrm{R}$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \, \varphi_i \qquad , \tilde{\alpha}_i := \alpha_i + \delta\alpha_i$$

und $\delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \delta\alpha_i \, \varphi_i =$ Störung von φ mit Störungen $\delta\alpha_i$ der Koeffizienten. Dann bekommen wir für den "relativen Fehler" von φ

$$\frac{\|\delta\varphi\|_{\infty,[a,b]}}{\|\varphi\|_{\infty,[a,b]}} = \frac{\|\delta\varphi\|_{\infty,[a,b]}}{\sup|\delta\alpha_i|} \cdot \frac{\sup|\alpha_i|}{\|\varphi\|_{\infty,[a,b]}} \cdot \frac{\sup|\delta\alpha_i|}{\sup|\alpha_i|} \tag{I.1.12}$$

Da wir mit dem schlechtesten Fall rechnen müssen, folgt die Abschätzung

$$\frac{\| \, \delta\varphi \, \|_{\infty,[a,b]}}{\| \, \varphi \, \|_{\infty,[a,b]}} \leq K \frac{\sup\|\delta a_i\|}{\sup\|a_i\|}$$

für alle $\{\alpha_i\}$ und $\{\delta\alpha_i\}$, wobei wir einführen

Definition I.1.3 *Die Zahl*

$$K := \sup_{\{b_i\}} \frac{\| \, \Sigma b_i\varphi_i \, \|_{\infty,[a,b]}}{\sup \mid b_i \mid} \cdot \sup_{\{a_i\}} \frac{\sup \mid a_i \mid}{\| \, \Sigma a_i\varphi_i \, \|_{\infty,[a,b]}} \tag{I.1.13}$$

heißt **Konditionszahl** *der Basis* $\varphi_1, ...\varphi_n$.

Im folgenden einfachen Beispiel zeigen wir durch eine untere Abschätzung der Konditionszahl für die Basis der abgebrochenen Potenzen, daß sie beliebig groß werden kann:

$$[a,b] = [0,1]\,, \qquad \varphi_i(t) = (t-t_i)_+^{k-1} \qquad \text{für} \quad i = 1,2 \quad \text{mit} \quad 0 = t_1 < t_2 \le 1$$
$$\alpha_1 = \alpha = -\alpha_2 \qquad \delta\alpha_1 = \delta\alpha_2 = \text{beliebig.}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} K \quad &\ge \quad \frac{|\alpha| \cdot \|t_+^{k-1} + (t-t_2)_+^{k-1}\|_{[o,1]}}{\|\alpha t_+^{k-1} - \alpha(t-t_2)_+^{k-1}\|_{\infty,[0,1]}} \\ &\ge \quad \frac{1}{\max\left\{\sup_{0\le t\le t_2} t^{k-1}, \sup_{t\ge t_2} t^{k-1} - (t-t_2)^{k-1}\right\}} = \frac{1}{max\left(t_2^{k-1}, 1-(1-t_2)^{k-1}\right)}. \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz liefert $1-(1-t_2)^{k-1} = t_2(k-1)(1-\xi)^{k-2}$ mit $\xi \in (0,t_2)$, so daß für $t_2 \to 0$ folgt

$$K \ge \frac{1}{(k-1)t_2(1-\xi)^{k-2}} \ge \frac{1}{(k-1)t_2} \to \infty$$

d.h. die Kondition wird beliebig schlecht bei zusammenlaufenden Knoten.

I.1.2 Weitere Darstellungen von stückweisen Polynomen

Um den oben erwähnten Nachteil 1) der Darstellung durch abgebrochene Potenzen zu vermeiden, muß man andere Darstellungsmöglichkeiten benutzen. Eine radikale Methode besteht darin, Splinefunktionen auf jedem Segment separat als Polynom darzustellen. Die einfachste Möglichkeit ist dann, diese Polynome durch ihre Taylor-Koeffizienten zu beschreiben.Dazu benötigt man:

i) eine strikt ansteigende Folge $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von Knoten;

ii) die Matrix $(C_{j,i})_{j=1,i=1}^{k,n}$ der rechtsseitigen Ableitungen an den Knoten, d.h.

$$C_{j,i} = D^{j-1}s(\xi_i^+) \tag{I.1.14}$$

sowie die Angabe des Polynomstückes auf $(-\infty, \xi_1)$

Damit können s und seine Ableitungen am Punkt $x > \xi_1$ wie folgt berechnet werden:
a) zu x bestimme i mit

$$\xi_i \le x < \xi_{i+1},$$

wobei $\xi_{n+1} = \infty$ gesetzt wird,
b) berechne für $j = 0,1,2,\ldots$

$$D^j s(x) = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{C_{l,i}(x-\xi_i)^{l-j}}{(l-j)!} \quad . \tag{I.1.15}$$

Im Falle $-\infty < x < \xi_1$ verwendet man in analoger Weise die Größen des Polynomstücks auf $(-\infty, \xi_1)$. Schritt a) muß durch ein spezielles Programm realisiert werden und die Berechnung von (I.1.15) kann mit dem bekannten **Horner–Schema** geschehen, also z.B.

$$s(x) = \ldots((((C_{k,i}(x-\xi_i) + C_{k-1,i})(x-\xi_i) + C_{k-2,i}) + C_{k-3,i})\ldots \qquad \text{(I.1.16)}$$

Diese Darstellung der Splinefunktion $s(x)$ ist besonders günstig, wenn die Anzahl der Speicher - plätze keine Rolle spielt, und f und seine Ableitungen an sehr vielen Punkten ausgewertet werden müssen. Dann ist die Berechnung nach a) und b) vom Aufwand her sehr billig und bringt gegenüber der Verwendung von abgebrochenen Potenzen erhebliche Vorteile.

Zur Kondition der lokalen Basis in (I.1.15) sei bemerkt, daß dafür die Kondition der Basis der skalierten Monome $(x/b)^{j-1}, j = 1, \ldots, k$ auf Intervallen $[0, b]$ maßgebend ist. In C. de Boor [Boo], S.19, ist sie nach unten durch

$$K \geq T_{k-1}(3) \sim \frac{1}{2}(3+\sqrt{8})^{k-1} \qquad \text{(I.1.17)}$$

abgeschätzt, wobei $T_{k-1}(x)$ das **Tschebyscheff Polynom** $T_{k-1}(\cos\varphi) = \cos(k-1)\varphi$ ist.

Es gibt noch eine weitere lokale Basis, die von großer Bedeutung für die Praxis ist. Diese verwendet die Darstellung

$$s(t)|_{(\xi_i,\xi_{i+1})} = \sum_{l=0}^{k-1} c_{l,i}p_{l,k-1}((x-\xi_i)/(\xi_{i+1}-\xi_i)) \qquad \text{(I.1.18)}$$

mit Koeffizienten, wobei die $p_{l,k-1}(t)$ die sogenannten **Bernstein -Polynome** sind, die wir an dieser Stelle nur kurz vorstellen wollen. Ihre Anwendung für die Darstellung von stückweise polynomialen Funktionen wird in einem späteren Abschnitt behandelt.

Definition I.1.4 *Die Bernstein-Polynome vom Grad n sind definiert durch*

$$p_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^i t^{n-i} \quad , 0 \leq i \leq n. \qquad \text{(I.1.19)}$$

Diese Polynome wurden 1912 von S.N.Bernstein zum Beweis des Satzes von Weierstraß eingeführt und spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Es sei dazu auf das Buch[Lo] von G.G. Lorentz über Bernstein Polynome verwiesen, worin viele Verallgemeinerungen und Anwendungen behandelt werden.

Die Entscheidung bei der Wahl der Basis hängt wesentlich davon ab, bei welcher die Koeffizienten der Darstellung leichter zu bestimmen sind. Die Berechnung der Taylor-Koeffizienten in (I.1.14) kann z.B. durch ein Konstruktionsprinzip wie Interpolation oder Glättung von Daten mit gegebenen Stützstellen geschehen. In diesem Fall können Vorgaben an die Glattheit bei den Knoten berücksichtigt werden, um die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren. Die Auswertung von (I.1.15) etwa an der Stelle $x = \xi_{i+1}$ ergibt dann Relationen zwischen den Taylor-Koeffizienten benachbarter Segmente.
Ein Beispiel dafür bildet die Berechnung einer interpolierenden kubischen Splinefunktion. Schreibt man

$$s(t)|_{(\xi_i,\xi_{i+1})} = y_i + C_{1,i}(t-\xi_i) + M_i(t-\xi_i)^2/2 + C_{3,i}(t-\xi_i)^3,$$

wobei die y_i als Interpolationsdaten bekannt sind und die $M_i = s''(\xi_i) = 2C_{2,i}$ die noch zu berechnenden unbekannten Grössen, so kann man die $C_{1,i}$ und $C_{3,i}$ dadurch ausdrücken:

$$C_{i,1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} \cdot h_{i+1} \tag{I.1.20}$$

wobei $h_{i+1} := t_{i+1} - t_i$ gesetzt wurde.

Eine andere Möglichkeit zur Konstruktion, die besonders beim Modellieren von Kurven wichtig wird, ist die Verwendung geometrischer Informationen in Form von Kontrollpunkten im sogenannten **Computer Aided Design**. Hier hat die oben erwähnte Basis der Bernstein -Polynome erhebliche Vorteile gegenüber derjenigen der Monome. Man kann dann z. B. die Konvexität einer Polynom-Kurve an ihren Koeffizienten bezüglich der Bernstein- Polynome ablesen.

Ein Nachteil dieser neuen Möglichkeiten für lokale Basen ist, daß sie mehr Parameter verwenden, als es die Dimension der Spline- Räume erfordert. Durch Ausnützen von Glattheitbedingungen an den Übergangsstellen können zwar die überflüssigen Parameter eliminiert werden, aber dies geschieht auf Kosten zusätzlicher Gleichungen.

Eine weitere Vorgehensweise verfolgt daher das Ziel, Basisfunktionen mit möglichst kleinem Träger zu konstruieren, wobei die gewünschte Glattheit direkt eingebaut ist. Diese Idee stammt aus der Theorie der Finiten Elemente, die allgmeiner multivariate stückweise polynomiale Funktionen behandelt. Dort konstruiert man speziell **nodale Elemente**. Dies sind Basisfunktionen, die an *allen* Knoten des zugrunde liegenden Gitters bis auf *einem* vorgebenen verschwinden. Im univariaten Fall bezeichnen wir deshalb solche Basisfunktionen als **nodale Splines**. Ihr Träger besteht nach dem obigen Prinzip also nur aus zwei Segmenten mit genau einem Knoten, an dem ihr Wert $\neq 0$ ist.
Wir wollen nun untersuchen, wie $(k-1)$-mal stetig differenzierbare "nodale Splines" konstruiert werden können. Zunächst ist klar, daß die Werte der Ableitungen eines nodalen Splines $s(x)$ mit ξ_j als zentralem Knoten die Bedingungen

$$s^{(\nu)}(\xi_{j-1}) = 0, \qquad s^{(\nu)}(\xi_{j+1}) = 0 \qquad 0 \le \nu \le k-1 \tag{I.1.21}$$

und

$$s^{(\nu)}(\xi_j-) = s^{(\nu)}(\xi_j+) \qquad 0 \le \nu \le k-1 \tag{I.1.22}$$

erfüllen müssen. Dies bedeutet, daß $s(x)$notwendig stückweise vom Grad $2k-1$ sein muß, weil auf jedem der beiden Segmente $[\xi_{j-1}, \xi_j], [\xi_j, \xi_{j+1}]$ jeweils $2k$ Bedingungen zu erfüllen sind. Die gemeinsamen Werte in (I.1.22) sind noch freie Parameter, d.h. es gibt für den Knoten ξ_j jeweils k linear unabhängige nodale Splines $s_{j,\mu}(x), \mu = 1, \ldots, k$. Man erhält sie durch die Forderung, daß neben (I.1.21) die Bedingungen

$$s_{j,\mu}^{(\nu)}(\xi_j) = \delta_{\nu,\mu} \qquad 0 \le \nu \le k-1 \tag{I.1.23}$$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta_{\nu,\mu}$ gelten.
Im Falle $k = 1 = 2k-1$ gibt es genau eine stückweise lineare Funktion $s_{j,1}(x)$, die dies erfüllt. Sie hat die Form einer "Dachfunktion", die in den Punkten $\xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}$ die Werte $0, 1, 0$ interpoliert. Ihre explizite Form lautet

$$s_{j,1}(x) = \begin{cases} (x - \xi_{j-1})/(\xi_j - \xi_{j-1}) & , \quad x \in (\xi_{j-1}, \xi_j) \\ (\xi_{j+1} - x)/(\xi_{j+1} - \xi_j) & , \quad x \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & , \quad x \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{I.1.24}$$

Allgemein läßt sich die Berechnung dieser speziellen nodalen Splinefunktionen auf das Problem der **Zwei-Punkt-Taylor- Interpolation** ($a < b$) zurückführen:

$$p^{(j)}(a) = f^{(j)}(a), \qquad p^{(j)}(b) = f^{(j)}(b) \qquad 0 \le j \le k-1 \tag{I.1.25}$$

Dieses hat eine eindeutige Lösung $p \in \Pi_{2k}$, die sich explizit angeben läßt (s. Aufgabe 4). Durch Einsetzen der Interpolationsbedingungen (I.1.21) -(I.1.23) kann man damit leicht die beiden Polynome $(2k-1)$- ten Grades berechnen, aus denen die $s_{j,\mu}(x)$ zusammengesetzt sind.
Wir wollen dann noch untersuchen, welche Spline-Räume die nodalen Splines $s_{j,\mu}(x), \mu = 1, \ldots, k, j = 1, ..., n$ aufspannen. Offensichtlich liegen sie in den Räumen ($k = 1, 2, ...$)

$$H_{2k}(\Delta) \equiv S_{2k}(\Delta, Z) \mid_{[\xi_0, \xi_{n+1}]} \qquad \text{wo} \quad Z = \{z_i = k\}_{i=1}^{n} \quad , \tag{I.1.26}$$

deren Elemente stückweise polynomial vom Grad $2k-1$ und $k-1$- mal stetig differenzierbar sind, wobei $(-\infty, +\infty)$ in Lemma I.1.2 durch das endliche Intervall $[\xi_0, \xi_{n+1}]$ ersetzt wurde. Diese Räume haben danach die Dimension $d = 2k(n+1) - nk = k(n+2)$, also um $2k$ größer als die Anzahl der obigen nodalen Splines. Die Erklärung liegt darin, daß letztere homogene Randbedingungen bei ξ_0 und ξ_{n+1} erfüllen. Sie müssen daher durch jeweils k nodale Splines am Rand ergänzt werden, damit der volle Raum $H_{2k}(\Delta)$ aufgespannt werden kann. Es ist klar, daß diese ebenfalls durch Zwei-Punkt-Taylor-Interpolation auf den beiden Endsegmenten konstruiert werden können.

Stellt man nun die Elemente des Raumes $H_{2k}(\Delta)$ mit Hilfe dieser Basis aus nodalen Elementen dar, so sind die Koeffizienten gerade gleich den Werten der Funktion und ihrer Ableitung an den Stellen $\xi_j, j = 0, ..., n+1$. Gegenüber den Basen im vorigen Abschnitt hat dies den Vorteil, daß weniger Grössen gespeichert werden müssen. Aus diesen beiden Gründen werden nodale Basen bei Anwendungen vom Typ der Finiten Elemente bevorzugt eingesetzt.
Es sei noch bemerkt, daß die nodalen Splines in der Literatur auch als **Hermite - Splines** bezeichnet werden, da Zwei-Punkt-Taylor-Interpolation ein spezieller Typ der Hermite - Interpolation ist.

I.1.3 Verallgemeinerungen

Man kann alle bisherigen Überlegungen noch weiter ausdehnen auf allgemeinere Splinefunktionen, nämlich auf die sogenannten **L - Splines**. Dazu sei

$$L = \sum_{j=0}^{k} a_j(x) D^j \quad , \quad D \equiv d/dx \tag{I.1.27}$$

ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_j(x) \in C^j[a,b]$ und $a_k(x) \le \alpha > 0$. Aus der Theorie der Differentialgleichungen (vergl. z.B. W.Walter[Wal] weiß man, daß dann der Nullraum

$$N(L) := \{u(x) \in C^k[a,b] : (Lu)(x) = 0, \quad a \le x \le b\} \tag{I.1.28}$$

des Differentialoperators L genau die Dimension k besitzt und z.B. aufgespannt wird durch diejenigen eindeutig bestimmten Funktionen $u_j(x) \in N(L)$ mit $u_j^{(i)}(a) = \delta_{ij}$ für $o \le i, j \le k$. Man kommt dann zu

Definition I.1.5 *Es seien* Δ, Z *wie Lemma I.1.2 gegeben mit* $\xi_i \in (a,b)$*. Dann heißt*

$$S_L(\Delta, Z) = \{f(x) : f_{(\xi_i,\xi_{i+1})} \in N(L), f^{(\nu)}(\xi_i) = f^{(\nu)}(\xi_i^-) = f^{(\nu)}(\xi_i^+), 0 \le \nu < z_i\}$$

der Raum der L *-Splines zur Zerlegung* Δ *und Glattheits bedingungen aus* Z*.*

Weiterhin kann man Analoga zu den abgebrochenen Potenzen definieren. Dazu benützt man folgendes Ergebnis aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (z.B. zu finden in H.Werner - H.Arndt [WA], Kapitel 6.2): Ist $f \in C^k[a,b]$, so gibt es für jedes $x \in [a,b]$ genau ein Element aus $N(L)$ mit

$$u^{(j)}(t) = f^{(j)} \quad ,0 \le k-1, \tag{I.1.29}$$

und eine eindeutig bestimmte sogenannte **Greensche Funktion** $G(x,t)$, die auf $[a,b] \times [a,b]$ stetig ist und erfüllt

$$f(x) = u(x) + \int_a^b G(x,t)Lf(t)dt \tag{I.1.30}$$

Im Spezialfall eines Differentialoperators L mit konstanten Koeffizienten, d.h. L ist translationsinvariant, folgt daraus, daß die Greensche Funktion die Form $G(x-t)$ haben muß. Spezialisiert man L zu $L = D^k$, so erhält man die **Taylorsche Restgliedformel**:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{k-1} f^{(k)}(t)dt \tag{I.1.31}$$

Ein Vergleich von (I.1.30) mit (I.1.31) zeigt, daß die Greensche Funktion zum Operator L die Verallgemeinerung der abgebrochenen Potenz $(x-t)_+^{k-1}$ ist. (Umgekehrt kann man also abgebrochene Potenzen als Greensche Funktionen zum Differentialoperator D^k ansehen). Man kann diese Verallgemeinerung noch ausbauen und eine entsprechende Aussage wie in Lemma I.1.2 beweisen (s.Aufgabe 2). Einen Spezialfall mit weitgehenden Analogien zu den polynomialen Splines bilden die sogenannten **Tschebyscheff - Splines** von Karlin - Ziegler[KZ]. Sie können dadurch charakterisiert werden, daß der Differentialoperator L auf ganz $[a,b]$ faktorisiert werden kann:

$$L = D_k D_{k-1} \ldots D_1 \qquad , D_i f = D(f/w_i), w_i \in C^{k-i}[a,b], w_i(x) > 0 \tag{I.1.32}$$

Beispiele sind die **exponentiellen Splines** mit

$$L = (D - \alpha_1) \ldots (D - \alpha_k), \tag{I.1.33}$$

wobei die α_i reell sind, und die **hyperbolischen Splines** mit ebenfalls reellen α_i, aber

$$L = D^2(D^2 - \alpha_2^2) \ldots (D^2 - \alpha_k^2) \tag{I.1.34}$$

Die **trigonometrischen Splines** mit

$$L = D^2(D^2 + 1) \ldots (D^2 + k) \tag{I.1.35}$$

besitzen die Eigenschaft (I.1.32) nur auf geeigneten Teilintervallen. Als stückweise trigonometrische Polynome sind sie die nächst den polynomialen Splines am meisten verwendeten Splines. Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf das Buch von L.L. Schumaker[Schu], Kapitel 9 und 10, verwiesen. Wir werden später auf L - Splines nicht eingehen, da sie primär von theoretischem Interesse scheinen, obwohl in jüngster Zeit für die oben genannten drei Beispiele numerisch brauchbare Basisfunktionen entdeckt wurden (vergl. Bemerkungen in Abschnitt I.5).

I.1.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt I.1

AUFGABE 1)

Es sei durch

$$\tilde{B}_r(t) := r! \sum_l{}' \frac{e^{i2\pi lt}}{(i2\pi l)^r} \tag{I.1.36}$$

eine Funktion mit Periode 1 definiert, wobei $\sum'$ die Summierung über alle ganzzahligen $l \neq 0$ bedeutet. Man zeige, daß die Restriktionen $B_r(t)$ auf das offene Intervall (0,1) Polynome vom Grad r sind, die folgende Eigenschaften erfüllen

$$i) \qquad B_1(t) = \; t - 1/2, \tag{I.1.37}$$

$$ii) \qquad B_r'(t) = rB_{r-1}(t), \tag{I.1.38}$$

$$iii) \qquad \textstyle\int_0^1 B_r(t) = 0. \tag{I.1.39}$$

Bemerkung: Die Funktionen $\tilde{B}_r(t)$ heißen **Bernoulli - Splines**, weil diese Eigenschaften gerade die sogenannten **Bernoulli - Polynome** $B_r(t)$ definieren. (siehe J.Stoer[Stoer], Kapitel 3).

AUFGABE 3)

In Verallgemeinerung von (I.1.29),(I.1.30) ist bekannt (vergl. W.Walter loc.cit.), daß zu einem Differentialoperator L der Form (I.1.27) eindeutig bestimmte Greensche Funktionen $G_j(x,y)$ für $j = 0, 1, \ldots, k-1$ und jedes festes $y \in [a,b]$ mit den Eigenschaften

$$G_j(x,y) = 0 \quad , a \leq x < y$$

$$LG_j(x,y) = 0 \quad , y \leq x \leq b$$

$$D^i G_j(y+, y) = \delta_{ij} \quad 0 \leq i \leq k-1$$

existieren. Man zeige, daß die in Definition 3 definierten L- Splines die Basis

$$\{u_i\}_{i=1}^k \quad , \quad \{G_j(x_i, \xi_i)\}_{j=x_i, i=1}^{k-1, n}$$

besitzen, wobei die $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von $N(L)$ seien.
Hinweis: Man benütze die Tatsache, daß für festes y die $G_j(x,y)\}_j^{k-1} = 0$ linear unabhängig sind und gehe wie in Lemma I.1.2 vor.

Bemerkung:Im Falle eines Differentialoperators L mit konstanten Koeffizienten gilt $G_j(x-y) = (\partial/\partial y)^{k-1-j} G_{k-1}(x-y)$.

AUFGABE 4)

Es sei $s(t)$ eine Splinefunktion der Ordnung k wie in Definition I.1.1. Man zeige: verschwindet $s(t)$ außerhalb eines Intervalls der Form (t_i, t_{i+k-1}), so muß $s(t)$ identisch verschwinden.

Tip: verwende Lemma I.1.1 und benütze die Regularität der Vandermonde - Determinante , um die lineare Unabhängigkeit von Polynomen der Form $(t - t_j)^{k-1}, j = 1, ...k$, zu zeigen .

AUFGABE 5)

a) Man zeige, daß die Lösung der Zwei-Punkt-Taylor-Interpolation (I.1.25) durch die Formeln

$$p(x) = (x-a)^k \sum_{l=0}^{k-1} B_l (x-b)^l / l! + (x-b)^k \sum_{l=0}^{k-1} A_l (x-a)^l / l! \tag{I.1.40}$$

mit

$$A_l = \frac{d^l}{dz^l}\left[\frac{f(z)}{(z-b)^k}\right]_{z=a} \quad , B_l = \frac{d^l}{dz^l}\left[\frac{f(z)}{(z-a)^k}\right]_{z=b} . \tag{I.1.41}$$

gegeben ist.

b) Man wende dies zur Berechnung der nodalen Splines $s_{j,\mu}$ an und verifiziere, daß im Spezialfall $k=2$ die stetig differenzierbaren nodalen Splines, die stückweise vom Grad 3 sind, lauten

$$s_{j,1}(x) = \begin{cases} y^2(3-2y), & x \in (\xi_{j-1}, \xi_j] \\ (z-1)^2(2z+1) & x \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \end{cases}$$

sowie

$$s_{j,2}(x) = \begin{cases} y^2(y-1), & x \in (\xi_{j-1}, \xi_j] \\ z(z-1)^2 & x \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \end{cases}$$

wobei die Werte y und z durch

$$y := (x-\xi_{j-1})/(\xi_j - \xi_{j-1}), \qquad z := (x-\xi_j)/(\xi_{j+1}-\xi_j) \tag{I.1.42}$$

gegeben sind.

AUFGABE 6)

Sei $f \in C[\xi_1, \xi_n]$ und Δ wie in Lemma I.1.2 gegeben. Man zeige, daß die Funktion $H(f;x) \in H_{2k'}(\Delta)$, die den Interpolationsbedingungen ($k'=2$)

$$H^{(j)}(f;\xi_i) = \begin{cases} f(\xi_i) & , \ j=0 \\ 0 & , \ 1 \le j \le k'-1 \end{cases} \quad , \quad 1 \le i \le n$$

genügt, eindeutig bestimmt ist und folgende Form hat

$$H(f;x)\,|_{(\xi_i,\xi_{i+1})} = \left[f(\xi_i) \int_x^{\xi_{i+1}} \varphi_i(t)dt + f(\xi_{i+1}) \int_{\xi_i}^x \varphi_i(t)dt \right] / m_i \tag{I.1.43}$$

mit $\varphi_i(t) = (\xi_{i+1}-x)^{k'-1}(x-\xi_i)^{k'-1}$ und $m_i = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \varphi_i(t)$. Man zeige ferner, daß $H(f;x)$ monoton steigend (fallend) ist, wenn f dies ist.

Bemerkung: Dies zeigt, daß die durch (I.1.43) definierte stückweise polynomiale Funktion in $C^{k'-1}[\xi_1, \xi_n]$ ist und dabei die Monotonie der zu approximierenden Funktion f erhält. Bezüglich einer Fehlerabschätzung siehe Aufgabe 4), Abschnitt 4.

I.2 B-splines und ihre elementaren Eigenschaften

I.2.1 Dividierte Differenzen
Wir beginnen mit einer Zusammenstellung von Eigenschaften von dividierten Differenzen, die zum Standardstoff der Numerischen Mathematik gehören und in fast jedem entsprechenden Lehrbuch zu finden sind, z.B. in E. Issacson - H.B. Keller [IK].

Definition I.2.1 *Gegeben Punkte $t_i < t_{i+1} < ... < t_{i+k}$ ist die* **dividierte Differenz** $[t_i, ..., t_{i+k}]\, f$ *der Ordnung k einer stetigen Funktion f definiert als Koeffizient der Potenz x^k im Lagrange'schen Interpolationspolynom $L(f;t)$ k-ten Grades mit den Stützstellen $t_i, ..., t_{i+k}$.*

Aus dieser Definition folgt leicht

Satz I.2.1 *Es gilt die Darstellung*

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, f = \sum_{j=i}^{i+k} f(t_j) / \prod_{\substack{l \neq j \\ l=i}}^{i+k} (t_j - t_l) \tag{I.2.1}$$

sowie die Rekursionsformel

$$[t_i]\, f = f(t_i), \quad [t_i, ..., t_{i+k}]\, f = \frac{[t_{i+1}, ..., t_{i+k}]\, f - [t_i, ..., t_{i+k-1}]\, f}{t_{i+k} - t_i}. \tag{I.2.2}$$

Ferner bleiben die dividierten Differenzen bei einer Permutation der Stützstellen ungeändert. Die Anwendung einer dividierte Differenz $k-$ter Ordnung auf ein Polynom vom Grad $k-1$ ergibt den Wert 0.

Aus diesem Satz kann man die **Newton - Darstellung**

$$L(f;t) = f(t_i) + (t - t_i)\, [t_i, t_{i+1}]\, f + ... + (t - t_i)...(t - t_{i+k-1})\, [t_i, ..., t_{i+k}]\, f$$

für das Lagrange'sche Interpolationspolynom herleiten, sowie die Restgliedformel

$$f(t) - L(f;t) = [t, t_i, ..., t_{i+k}]\, f.$$

Andererseits gilt für $f \in C^{k+1}[t_i, t_{i+k}]$, d.h. f ist $(k+1)$-mal stetig differenzierbar auf $[t_i, t_{i+k}]$, bekanntlich die Restgliedformel

$$f(t) - L(f;t) = (t - t_i)...(t - t_{i+k}) f^{(k+1)}(\xi)/(k+1)! \quad ,$$

mit $\xi \in (t_i, t_{i+k})$. Damit folgt für $f \in C^k\, [t_i, t_{i+k}]$ die Beziehung

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, f = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\eta) \quad \text{mit} \quad \eta \in (t_i, t_{i+k}). \tag{I.2.3}$$

Eine weitere Restgliedformel haben wir mit (I.1.31)für die Taylorreihe kennengelernt. Daraus läßt sich eine allgemeine Restglieddarstellung ableiten, die von großer Bedeutung für das Folgende ist:

Satz I.2.2 (Peano) *Es sei F ein stetiges lineares Funktional auf $C^k[a,b]$ der Form*

$$F(f) := \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) f^{(i)}(t)\right] dt + \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{m_j} b_{i,j} f^{(i)}(x_{ij}) \tag{I.2.4}$$

mit $x_{ij} \in [a,b]$, $0 \le m_j \le k-1$, $b_{ij} \in (-\infty, \infty)$ und $a_i(t) \in C[a,b]$. Annihiliert F Polynome $\in \Pi_k$, d.h. $F(p) = 0$ für $p \in \Pi_k$, so gilt die Darstellung von Peano

$$F(f) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b F(\cdot - t)_+^{k-1} f^{(k)}(t) dt \quad .$$

Dieser Satz folgt aus (I.1.31), indem man auf beiden Seiten das Funktional F anwendet, da F das Taylor-Polynom annihiliert. Er gilt auch noch im Falle, daß $f^{(k)}$ nur L_p- integrierbar ist auf (a,b), $1 \le p \le \infty$ und daß F stetig auf dem dadurch gegebenen linearen Raum ist.
Wir gehen nun näher auf den Fall **zusammenfallender Stützstellen** ein, der weniger bekannt sein dürfte. Wir nehmen Eigenschaft (I.2.3) zum Anlaß folgender

Definition I.2.2 *Gegeben Zahlen $u_0 \le u_1 \le ... \le u_k$ und es sei $u_{i_1}, ..., u_{i_r}$ die Teilfolge der paarweise verschieden auftretenden Zahlen mit Vielfachheit α_v, d.h.*

$$u_0, ..., u_k \quad := \{\underbrace{u_{i_1}, ..., u_{i_1}}_{\alpha_i - mal}; ...; \underbrace{u_{i_r}, ..., u_{i_r}}_{\alpha_r - mal}\}$$

Dann definiert man, falls f in Umgebungen von u_{i_j} $(\alpha_j - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist,

$$[u_0, ..., u_k]\, f := \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \cdots \frac{1}{(\alpha_r - 1)!} \frac{\partial^{\alpha_1 - 1}}{\partial u_1^{\alpha_1 - 1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_r - 1}}{\partial u_r^{\alpha_r - 1}} [u_{i_1}, ..., u_{i_r}]\, f \quad .$$

Der Grund für diese Definition ist, daß der Spezialfall $r = 1, \alpha_1 = k+1$ gerade den Grenzfall $t_i = ... = t_{i+k}$ in (I.2.3) darstellt. Genauer gilt

Lemma I.2.1 *Unter den Annahmen der obigen Definition an die Differenzierbarkeit ist die dividierte Differenz eine stetige Funktion ihrer Knoten: es gilt*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_k^{(\varepsilon)}\right] f = [u_0, ..., u_k]\, f \quad , \tag{I.2.5}$$

wenn $u_0^{(\varepsilon)} < ... < u_k^{(\varepsilon)}$ eine Folge von einfachen Knoten mit $\lim_{\varepsilon \to 0} u_i^{(\varepsilon)} = u_i$ ist.

Beweis: Da er in der Literatur schwierig zu finden ist, sei er hier angeführt. Wir betrachten für die ersten $k - \alpha_r + 1$ Knoten eine feste Störung $u_0^{(\varepsilon)} < ... < u_k^{(\varepsilon)}$ und führen ein

$$F_\varepsilon(x) = \left[x, u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_{k-\alpha_r}^{(\varepsilon)}\right] f \quad ,$$

sodaß nach den Rekursionsformeln (I.2.2) und (I.2.3)

$$\begin{aligned} \left[u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_k^{(\varepsilon)}\right] f &= \left[u_{k-\alpha_r+1}^{(\varepsilon)}, ..., u_k^{(\varepsilon)}\right] F_\varepsilon = \frac{1}{(\alpha_r - 1)!} F_\varepsilon^{(\alpha_r - 1)}(\xi_{r,\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{(\alpha_r - 1)!} \frac{\partial^{\alpha_r - 1}}{\partial x^{\alpha_r - 1}} \left[x, u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_{k-\alpha_r}^{(\varepsilon)}\right] f \,|_{x = \xi_{r,\varepsilon}} \quad , \end{aligned}$$

wobei $\xi_{r,\varepsilon} \to u_{i_r}, \varepsilon \to 0$. Zur weiteren Berechnung schreiben wir nach (I.2.2)

$$\left[x, u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_{k-\alpha_r}^{(\varepsilon)}\right] f = \left[u_{k-\alpha_r-\alpha_{r-1}+1}, ..., u_{k-\alpha_r}^{(\varepsilon)}\right] F_{1,\varepsilon} \quad ,$$

wobei gesetzt wurde

$$F_{1,\varepsilon}(y) = \left[x, y, u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_{k-\alpha_r-\alpha_{r-1}}^{(\varepsilon)}\right] f \quad .$$

Wieder mit (I.2.3) folgt dann

$$\left[u_0^{(\varepsilon)}, ..., u_k^{(\varepsilon)}\right] f = \frac{1}{(\alpha_r-1)!}\frac{\partial x^{\alpha_r-1}}{\partial x^{\alpha_r-1}}\frac{1}{(\alpha_{r-1}-1)!}\frac{\partial^{\alpha_{r-1}-1}}{\partial x^{\alpha_{r-1}-1}}\left[x, y, u_0^{(\varepsilon)}, u_{k-\alpha_r-\alpha_{r-1}+1}^{(\varepsilon)}\right] f \,|_{x=\xi_{r-1,\varepsilon}} \quad ,$$

wobei $\xi_{r-1,\varepsilon} \to u_{i_{r-1}}, \varepsilon \to 0$. Fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens und abschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefern dann (I.2.5) nach Definition (I.2.1). □

Korollar I.2.1 *Die Aussagen von Satz I.2.1 bleiben bis auf (I.2.2) auch für zusammenfallende Knoten erhalten, wenn man die dividierten Differenzen im Sinne von Definition I.2.2 auffaßt. Das Lagrange'sche Interpolationspolynom $L(f;t) \in \Pi_k$ wird dabei sinngemäß durch das Hermite'sche Interpolationspolynom $H(f;t) \in \Pi_k$ ersetzt, das die Interpolationsaufgabe $\lambda_j(H(f)) = \lambda_j(f), 1 \le j \le k$ erfüllt, wobei die Funktionale λ_j definiert sind durch*

$$\lambda_j(f) = f^{(r)}(t_j), \qquad r = \max\{\nu : t_{j-v} = t_j, \nu = 0, 1, ...\} \quad . \tag{I.2.6}$$

Eine weitere Eigenschaft, die im Folgenden benötigt wird, liefert

Lemma I.2.2 *Für die dividierten Differenzen eines Produktes $f = gh$ von Funktionen gilt die* **Leibnizregel**

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, f = \sum_{j=0}^{k}([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)([t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h) \quad . \tag{I.2.7}$$

Beweis: Geschieht durch Induktion nach k. Im Fall $k = 0$ gilt trivialerweise $[t_i]\, f = f(t_i) = g(t_i)h(t_i)$. Aus der Gültigkeit von (I.2.7) für $k-1$ folgt

$$\begin{aligned}
(t_i - t_{i+k}) \quad \cdot \quad & [t_i, ..., t_{i+k}]\, f = [t_i, ..., t_{i+k-1}]\,(gh) - [t_{i+1}, ..., t_{i+k}]\,(gh) \\
= \; & \sum_{j=0}^{k-1}([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)([t_{i+j}, ..., t_{i+k-1}]\, h) - \sum_{j=1}^{k}([t_{i+1}, ..., t_{i+j}]\, g)([t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h) \\
= \; & \sum_{j=0}^{k-1}([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)\left\{[t_{i+j}, ..., t_{i+k-1}] - [t_{i+j+1}, ..., t_{i+k}]\right\} h \\
+ \; & \sum_{j=1}^{k}\left\{[t_i, ..., t_{i+j-1}] - [t_{i+1}, ..., t_{i+j}]\right\} g([t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h) \\
= \; & \sum_{j=0}^{k-1}([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)(t_{i+j} - t_{i+k})\,[t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h \\
+ \; & \sum_{j=1}^{k}(t_i - t_{i+j})([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)([t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h) \\
= \; & (t_i - t_{i+k})\sum_{j=0}^{k}([t_i, ..., t_{i+j}]\, g)([t_{i+j}, ..., t_{i+k}]\, h) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Rekursionsformeln (I.2.2) angewandt haben. Diese –und daher auch (I.2.7)– gelten nur für einfache Knoten . Jedoch kann man nach Lemma I.2.1 hierin durch Grenzübergang, falls nötig, zu mehrfachen Knoten übergehen. □

I.2.2 Einführung von B-Splines

Wir kommen nun zur Definition der B-Splines.

Definition I.2.3 *Gegeben sei eine Folge* $\mathbf{t} = \{t_i\}$ *von Zahlen (endlich oder einfach unendlich oder unendlich) mit mindestens* $k+1$ *Elementen derart, daß*

$$\ldots \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_i \leq \ldots \quad , \qquad t_i < t_{i+k} \quad , \tag{I.2.8}$$

d.h. die Vielfachheit der Knoten ist höchstens k*. Eine solche Folge bezeichnen wir als* **zulässig** *bzw. als* **regulär***.*
Dann heißt die Funktion $(k = 1, 2, ...)$

$$M_{i,k}(x) := k\,[t_i, ..., t_{i+k}]\,(t-x)_+^{k-1} \quad , \tag{I.2.9}$$

B-Spline der Ordnung k bezüglich der Knoten $t_i, ..., t_{i+k}$ *, wobei die dividierte Differenz auf die Variable* t *wirkt.*

Bevor wir den Namen "Spline" für die Funktionen $M_{i,k}(x)$ rechtfertigen, werden einige Eigenschaften bewiesen.

Lemma I.2.3 *Die bezüglich einer Folge* $\mathbf{t}$ *mit (I.2.8) gebildeten Funktionen* $M_{i,k}(x)$ *haben folgende Eigenschaften:*

1. *Für* $k = 1$ *gilt*
$$M_{i,1}(x) = \begin{cases} 1/(t_{i+1} - t_i) & : \quad x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & : \quad , x \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.10}$$

2. *für* $k \geq 2$ *gelten die Rekursionsformeln*
$$\frac{k-1}{k} M_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} M_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_i} M_{i+1,k-1}(x) \quad , \tag{I.2.11}$$
wenn immer die rechten Seiten definiert sind, d.h. im Falle
$$t_{i+1} < t_{i+k} \qquad \text{und} \qquad t_i < t_{i+k-1} \quad . \tag{I.2.12}$$

3. *Unter der Voraussetzung (I.2.12) berechnet sich die Ableitung* $(k \geq 2)$ *aus*
$$M'_{i,k}(x) = k \left\{ \frac{M_{i,k-1}(x) - M_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} \right\} \quad . \tag{I.2.13}$$

4. *Falls (I.2.12) nicht erfüllt ist, gilt*
$$\frac{k-1}{k} M_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{(x-t_i)}{(t_{i+k}-t_i)} M_{i,k-1}(x), & : \quad t_i < x < t_{i+1} = ... = t_{i+k} \\ \frac{(t_{i+k}-x)}{(t_{i+k}-t_i)} M_{i+1,k}(x), & : \quad t_i = ... = t_{i+k-1} < x < t_{i+k} \end{cases} \tag{I.2.14}$$

5. *die $M_{i,k}(x)$ hängen stetig von den Parametern $t_i, ..., t_{i+k}$ ab, solange höchstens $k-1$ von ihnen zusammenfallen.*

Beweis: Die Formel (I.2.10) für $M_{i,1}(x)$ kann man direkt aus Definition I.2.3 herleiten.
Zum Beweis von (I.2.11) wenden wir die verallgemeinerte Leibniz-Regel (I.2.7) auf das Produkt $f(t) := (k-1)(t-x)_+^{k-1} = \left[(k-1)(t-x)_+^{k-2}\right](t-x) := g(t)h(t)$ an. Dann folgt, weil alle dividierten Differenzen 2-ter und höherer Ordnung von h verschwinden

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{k}M_{i,k}(x) &= [t_i, ..., t_{i+k}]\, f \\
&= ([t_i, ..., t_{i+k}]\, g)h(t_{i+k}) + ([t_i, ..., t_{i+k-1}]\, g(t))\, [t_{i+k-1}, t_{i+k}]\, h(t) \\
&= \left\{\frac{[t_i, ..., t_{i+k-1}]\, g - [t_{i+1}, ..., t_{i+k}]\, g}{t_i - t_{i+k}}\right\}(t_{i+k}-x) + M_{i,k-1}(x)\cdot 1\,(\text{I.2.15}) \\
&= \frac{[M_{i,k-1}(x) - M_{i+1,k-1}(x)]\,(t_{i+k}-x)}{(t_i - t_{i+k})} + \frac{M_{i,k-1}(x)\,[t_i - t_{i+k}]}{(t_i - t_{i+k})} \\
&= \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}M_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i}M_{i+1,k-1}(x) \quad .
\end{aligned}$$

Zum Beweis von (I.2.12) beachten wir zunächst, daß für alle x, die nicht gleich einem k-fach auftretenden t_i sind, der Ausdruck

$$M'_{i,k}(x) = \frac{d}{dx}\, [t_i, ..., t_{i+k}]\, k(t-x)_+^{k-1}$$

durch Definition I.2.2 sinnvoll erklärt ist. Mit (I.2.2) folgt

$$M'_{i,k}(x) = k\frac{d}{dx}\left\{\frac{[t_{i+1}, ..., t_{i+k}]\,(t-x)_+^{k-1} - [t_i, ..., t_{i+k-1}]\,(t-x)_+^{k-1}}{(t_{i+k}-t_i)}\right\} = k\left\{\frac{M_{i,k-1}(x) - M_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_i}\right\}.$$

Um (I.2.14) zu beweisen, geht man wie in Beweis von ii) bis (I.2.15) vor, wobei wir im Falle $t_i < t_{i+1} = ... = t_{i+k}$ jedoch statt t_{i+k} einen Knoten $t'_{i+k} = t_{i+k} + \varepsilon$ nehmen, $\varepsilon > 0$, damit alle auftretenden dividierten Differenzen wohl definiert sind. Dann ist aber die dividierte Differenz $\left[t_{i+1}, ..., t_{i+k-1}, t'_{i+k}\right] g = 0$ für $x < t_{i+1}$, da $g(t) = (k-1)(t-x)^{k-2}$ bezüglich der Werte $t = t_{i+1}, ..., t_{i+k-1}, t'_{i+k}$. Bezeichnet man mit $\tilde{M}_{i,k}$ den B-Spline bezüglich $t_i, ..., t_{i+k-1}, t'_{i+k}$, so folgt also für jedes $\varepsilon > 0$ aus (I.2.15) für $x < t_{i+1}$

$$\frac{k-1}{k}\tilde{M}_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t'_{i+k}-t_i}M_{i,k-1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}+\varepsilon-t_i}M_{i,k-1}(x) \quad ,$$

woraus durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ der erste Teil von (I.2.14) folgt. Der zweite Teil folgt ähnlich. Schließlich folgt noch Eigenschaft 5 direkt aus Lemma I.2.1. □

Satz I.2.3 *Gegeben eine Folge $\tilde{t}$, die (I.2.8) erfüllt, und seien $t_{i_1} < ...t_{i_r}$ diejenigen Knoten unter den $t_i, ..., t_{i+k}$, die paarweise verschieden sind und sei $\alpha_j \le k$ die Vielfachheit von t_{i_j}. Dann ist $M_{i,k}(x)$, definiert durch (I.2.9), eine Linearkombination von Funktionen des Systems $\left\{(t_{i_j}-x)_+^l\right\}_{l=k-\alpha_j, j=1}^{k-1,r}$, also eine Splinefunktion der Ordnung k mit den Knoten $\left\{t_{i_j}\right\}_{j=1}^{r}$, und der jeweiligen Glattheit $k-\alpha_j-1$. Ferner ist $M_{i,k}(x) > 0$ für $x \in (t_i, t_{i+k})$ und $M_{i,k}(x) = 0$ für $x \notin (t_i, t_{i+k}]$. Es gilt die Formel*

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, f = \int_{t_i}^{t_{i+k}} M_{i,k}(x) f^{(k)}(x)dx/k! \qquad \text{(I.2.16)}$$

für k-stetig differenzierbares f, speziell gilt

$$1 = \int_{t_i}^{t_{i+k}} M_{i,k}(x)dx \quad . \tag{I.2.17}$$

Beweis: Nach Definition I.2.2 und (I.2.1) gilt

$$\begin{aligned} M_{i,k}(x) &= \tfrac{1}{(\alpha_1-1)!} \cdots \tfrac{1}{(\alpha_r-1)!} \tfrac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial t_{i_1}^{\alpha_1-1}} \cdots \tfrac{\partial^{\alpha_r-1}}{\partial t_{i_r}^{\alpha_r-1}} \left[t_{i_1}, ..., t_{i_r}\right] k(t-x)_+^{k-1} \\ &= \tfrac{1}{(\alpha_1-1)!} \cdots \tfrac{1}{(\alpha_r-1)!} \tfrac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial t_{i_1}^{\alpha_1-1}} \cdots \tfrac{\partial^{\alpha_r-1}}{\partial t_{i_r}^{\alpha_r-1}} \textstyle\sum_{j=1}^r k(t_{i_j}-x)_+^{k-1}/c_j \quad , \end{aligned}$$

wobei $c_j = \prod_{\substack{l \neq j \\ l=1}}^r (t_{i_l} - t_{i_j})$.
Hieraus folgert man sofort den ersten Teil des Satzes. Den zweiten Teil beweist man induktiv. Zunächst ergibt sich der Fall $k = 1$ aus (I.2.10). Gilt die Aussage für $k-1$, so ist in (I.2.11) — bzw. in (I.2.13), wenn (I.2.12) nicht erfüllt ist — für $x \in (t_i, t_{i+k})$ die rechte Seite immer positiv, also auch $M_{i,k}(x)$. Ist $x \notin [t_i, t_{i+k}]$, so schließt man wie folgt: Im Fall $x < t_i$ gilt

$$M_{i,k}(x) = [t_i, ..., t_{i+k}]k(t-x)_+^{k-1} = k[t_i, ..., t_{i+k}](t-x)^{k-1} = 0,$$

da dividierte Differenzen k-ter Ordnung Polynome $(k-1)$-ten Grades annihilieren (s. Satz I.2.1). Für $x > t_{i+k}$ gilt $M_{i,k}(x) = k\,[t_i, ..., t_{i+k}]\,0 = 0$.
Der dritte Teil des Satzes folgt durch Anwendung des Satzes I.2.2 von Peano auf das spezielle Funktional $[t_i, \ldots, T_{i+k}]$, so daß (I.2.16) direkt folgt. Setzt man dort $f(x) = x^k$ ein, so ergibt sich die angegebene Normierung für $M_{i,k}$. □

Es gibt anders normierte B-Splines, die für die meisten folgenden Untersuchungen praktischer sind, und zwar setzt man

$$N_{i,k}(x) := \frac{t_{i+k} - t_i}{k} M_{i,k}(x) \tag{I.2.18}$$

Dann nehmen die Formeln (I.2.11) die Form

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x) \tag{I.2.19}$$

an, wobei (I.2.12) erfüllt sein muß. In den komplementären Fällen (I.2.14) ergibt sich

$$N_{i,k}(x) = \begin{cases} [(x-t_i)/(t_{i+k-1}-t_i)]^{k-1} & : \quad t_i < x < t_{i+1} = ... = t_{i+k} \\ [(t_{i+k}-x)/(t_{i+k}-t_{i+1})]^{k-1} & : \quad t_i = ... = t_{i+k-1} < x < t_{i+k} \end{cases} \tag{I.2.20}$$

Man kann beide Formeln zusammenfassen, indem man die Größen

$$\omega_{i,k} \equiv \omega_{i,k}(t) = \begin{cases} (t-t_i)/(t_{i+k}-t_i) & , \quad \text{falls} \quad t_i < t_{i+k} \\ 0 & , \quad \text{, sonst} \end{cases} \tag{I.2.21}$$

einführt. Dann gilt

$$N_{i,k}(x) := \omega_{i,k-1}(x) N_{i,k-1}(x) + \ (1 - \omega_{i+1,k-1}(x)) N_{i+1,k-1}(x), \tag{I.2.22}$$

denn man verifiziert sofort, daß diese Formeln mit (I.2.19) und (I.2.20) übereinstimmen.

Für die Ableitung dieser neuen B-Splines folgt aus (I.2.13) unter der Voraussetzung (I.2.12)

$$N'_{i,k}(x) = (k-1) \left\{ \frac{N_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right\} \quad . \tag{I.2.23}$$

Wir betrachten nun noch einige Spezialfälle. Für $k = 1$ folgt aus (I.2.10) direkt

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & : \quad , x \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.24}$$

und mit etwas Rechnung für einfache Knoten t_i

$$N_{i,2}(x) = \begin{cases} (x - t_i)/(t_{i+1} - t_i) & : \quad x \in (t_i, t_{i+1}) \\ (t_{i+2} - x)/(t_{i+2} - t_{i+1}) & : \quad x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & : \quad x \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.25}$$

Es ist also $N_{i,1}$ eine "Hutfunktion" und $N_{i,2}$ eine "Dachfunktion" mit Höhe 1 und den Ecken t_i, t_{i+1} bzw. t_i, t_{i+1} und t_{i+2}. Ferner bestimmen wir den B-Spline im Fall von nur zwei verschiedenen Knoten mit Vielfachheit $r + 1$ und $k - r$, d.h.

$$t_i = ... = t_{i+r} = a < b = t_{i+r+1} = ... = t_{i+k}. \tag{I.2.26}$$

Auf dem dazwischen liegenden Intervall muß der zugehörige B-Spline gleich einem Polynom vom Grad $(k - 1)$ sein. Nach Definition I.2.1 und (I.2.18) hat er die Gestalt

$$N_{r,k}(x) = (b - a)\, [a, ..., a, b, ..., b]\, (-x)_+^{k-1} \qquad 0 \le r \le k - 1 \quad . \tag{I.2.27}$$

Die Punkte a, b treten hier in der dividierten Differenz $(r+1)$-fach bzw. $(k-r)$-fach auf, so daß man nach Definition I.2.2 für $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} N_{r,k}(x) &= \frac{(b-a)}{r!} \frac{1}{(k-r-1)!} \frac{\partial^r}{\partial a^r} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial b^{k-r-1}} [a, b]\, (. - x)_+^{k-1} \\ &= \frac{b-a}{r!(k-r-1)!} \frac{\partial^r}{\partial a^r} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial b^{k-r-1}} \frac{(b-x)^{k-1}}{b-a} = \frac{b-a}{(k-r-1)!} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial b^{k-r-1}} \frac{(b-x)^{k-1}}{(b-a)^{r+1}} \quad . \end{aligned}$$

Mit der Leibnizregel folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial b^{k-r-1}} \frac{(b-x)^{k-1}}{(b-a)^{r+1}} &= \sum_{\nu=0}^{k-r-1} \binom{k-r-1}{\nu} \frac{(b-x)^{k-1-\nu}}{(k-1-\nu)!} (k-1)!(-1)^{k-r-1-\nu} r! \frac{(k-\nu-1)!}{(b-a)^{k-v}} \\ &= (-1)^{k-1-r} \frac{(b-x)^{k-1}}{(b-a)^k} \sum_{\nu=0}^{k-1-r} \binom{k-1-r}{\nu} (\frac{b-a}{b-x})^\nu (-1)^\nu \frac{(k-1)!}{r!} \\ &= \frac{(k-1)!}{r!} \frac{(b-x)^{k-1}}{(b-a)^k} (-1 + \frac{b-a}{b-x})^{k-1-r} = \frac{(b-x)^r}{(b-a)^k} (x-a)^{k-1-r} \frac{(k-1)!}{r!} \end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt ergibt schließlich für $x \in (a, b)$

$$N_{r,k}(x) = \binom{k-1}{r} \Big(\frac{b-x}{b-a}\Big)^r \Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)^{k-1-r} \quad , \quad 0 \le r \le k - 1 \quad . \tag{I.2.28}$$

Im Spezialfall $a = 0, b = 1$ und $k - 1 - r$ statt r erhalten wir gerade die **Bernstein-Polynome**

$$p_{r,k-1}(x) = \binom{k-1}{r} (1-x)^r x^{k-1-r},$$

die bereits im vorigen Abschnitt in Definition I.1.4 eingeführt wurden. Man erhält dann die Bernstein-Polynome auf dem Intervall $[a, b]$ nach (I.2.28) durch die Skalierung

$$N_{r,k}(x) = p_{r,k-1}(y), \qquad y = \frac{x-a}{b-a}, \qquad y \in [0,1]\,.$$

Die Rekursionsformeln (I.2.20) haben dann (mit $m = k-1$) die Form

$$p_{r,m}(y) = y\ p_{r-1,m-1}(y) + (1-y)p_{r-1,m-1}(y) \qquad 1 \le r \le m-1. \tag{I.2.29}$$

und die Formeln für die Ableitung nach (I.2.23) die Form

$$p'_{r,m}(y) = m\ [p_{r-1,m-1}(y) - p_{r-1,m-1}(y)] \qquad 1 \le r \le m-1.$$

I.2.3 Darstellung von Polynomen und abgebrochenen Potenzen

Nachdem wir gesehen haben, daß B-Splines stückweise Polynome sind, wollen wir nun zeigen, daß man mit B-Splines umgekehrt auch Polynome und abgebrochene Potenzen darstellen kann. Dazu untersuchen wir Linearkombinationen von B-Splines, wobei wir von den obigen Rekursionsformeln ausgehen. Es sei also auf einem halboffene Intervall $[t_j, t_{r+1})$ eine Splinefunktion $s(x)$ als Linearkombination von B-Splines gegeben. Dann läßt sie sich als

$$s(x) = \sum_{i=j-k+1}^{r} a_i N_{i,k}(x), \qquad t_j \le x < t_{r+1}. \tag{I.2.30}$$

schreiben, wobei die Schranken für den Index i von daher rühren, daß nur für diese Indizes die B-Splines einen Träger mit nichtleerem Durchschnitt mit dem vorgebenen Intervall (t_j, t_{r+1}) haben. Die Rekursionsformel (I.2.22) liefert nun

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=r}^{j-k+1} a_i\omega_{i,k-1}N_{i,k-1}(x) + a_i(1-\omega_{i+1,k-1})N_{i+1,k-1}(x) \\ &= \sum_{i=r}^{j-k+1} a_i\omega_{i,k-1}N_{i,k-1}(x) + \sum_{i=r+1}^{j-k+2} a_{i-1}(1-\omega_{i,k-1})N_{i,k-1}(x). \end{aligned}$$

Wegen der Trägereigenschaft der $N_{i,k}(x)$ fallen bei Restriktion auf (t_j, t_{r+1}) die Terme mit $N_{j-k+1,k-1}(x)$ und $N_{r+1,k-1}(x)$ weg und es folgt

$$s(x)|_{(t_j,t_{r+1})} = \sum_{i=r}^{j-k+2} [a_i\omega_{i,k-1} + a_{i-1}(1-\omega_{i,k-1})]N_{i,k-1}(x). \tag{I.2.31}$$

Nimmt man für $\{a_i\}$ die spezielle Folge $a_i = 1$, so folgt durch Induktion

$$\sum_{i=r}^{j-k+1} N_{i,k}(x) = \cdots = \sum_{i=j}^{r} N_{i,1}(x) = 1 \qquad t_j \le x < t_{r+1}. \tag{I.2.32}$$

Damit haben wir gezeigt, daß die B-Splines $N_{i,k}(x)$ auf jedem Segment (t_j, t_{j+1}) eine Zerlegung der Eins bilden, wenn alle nicht verschwindenden B-Splines betrachtet werden.
Dieses Ergebnis läßt sich noch verallgemeinern.

Satz I.2.4 (Marsden- Formel, 1970) *Für $t_j \le x < t_{r+1}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(y-x)^{k-1} = \sum_{i=j+1-k}^{r} \psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x). \tag{I.2.33}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \psi_{i,1}(y) &:= 1, \\ \psi_{i,k}(y) &:= (t-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-1}), \qquad k \ge 2 \end{aligned} \tag{I.2.34}$$

Für $p \in \Pi_{k-1}$ gilt speziell

$$p(x) = \sum_{i=j+1-k}^{r} \lambda_{i,k}^{*}(p) N_{i,k}(x), \qquad t_j \le x < t_{r+1} \tag{I.2.35}$$

mit Funktionalen $\lambda_{i,k}^{*}$ definiert durch

$$\lambda_{i,k}^{*}(f) := \sum_{/gn=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(k-1)!}\ \psi_{i,k}^{(k-1-\nu)(y)} f^{(\nu)}(y). \tag{I.2.36}$$

Beweis: Wie bei der vorangegangenen Überlegung folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j+1-k}^{r} \psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) \\ = & \sum_{i=j+1-k}^{r} \Big(\omega_{i,k-1}(x) N_{i,k-1}(x) + [1-\omega_{i+1,k-1}(x)] N_{i+1,k-1}(x)\Big) \psi_{i,k}(y) \\ = & \sum_{i=j+2-k}^{r} \Big(\omega_{i,k-1}(x) \psi_{i,k}(y) + [1-\omega_{i,k-1}(x)] \psi_{i-1,k}(y)\Big) N_{i,k-1}(x) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} & \omega_{i,k-1}(x)\psi_{i,k}(y) + \psi_{i-1,k}(y)[1-\omega_{i,k-1}(x)] \\ = & \frac{(y-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-2})}{t_{i+k-1}-t_i} \Big((y-t_{i+k-1})(x-t_i) + (y-t_i)(t_{i+k-1}-x)\Big) \\ = & \frac{(y-t_{i+1})\cdots(y-t_{i+k-2})}{t_{i+k-1}-t_i} \Big((y-x)(t_{i+k-1}-t_i)\Big) = \psi_{i,k-1}(y)(y-x) \end{aligned}$$

für $\omega_{i,k}(x) \neq 0$. Ist aber $\omega_{i,k}(x) = 0$, so gilt $t_{i+k-1} = t_i$ und $N_{i,k-1}(x) = 0$. Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$\sum_{i=j+1-k}^{r} \psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) = (y-x) \sum_{i=j+1-(k-1)}^{r} \psi_{i,k-1}(y) N_{i,k-1}(x).$$

Mittels Induktion über k und unter Verwendung von (I.2.32) folgt somit (I.2.33). Differenziert man diese Formel nach y, so folgt für $t_j \le x < t_{r+1}$

$$\frac{1}{\nu!}(y-x)^{\nu} = \sum_{i=j+1-k}^{r} \frac{1}{(k-1)!}\ \psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) N_{i,k}(x).$$

Entwickelt man p um den Punkt y in eine Taylorreihe und setzt ein, so folgt dann

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!}(x-y)^{\nu} p^{(\nu)}(y) = \sum_{i=j+1-k}^{r} \Big\{ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(k-1)!} \ \psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) N_{i,k}(x) \Big\}$$

für beliebige $p \in \Pi_{k-1}$. □

Korollar I.2.2 *Für die Monome* $x^{l-1}(l = 1, ..., k-1)$ *gilt*

$$x^{l-1} = \sum_{i=j+1-k}^{r} \xi_i^{(l)} N_{i,k}(x) \qquad t_j \le x < t_{r+1} \tag{I.2.37}$$

mit

$$\xi_i^{(l)} = (-1)^{l-1} \frac{(l-1)!}{(k-1)!} \ \psi_{i,k}^{(k-l)}(0). \tag{I.2.38}$$

Beweis: Durch $(k-l)$-malige Differentiation von (I.2.33) nach y erhalten wir

$$\frac{(k-1)!}{(l-1)!}(y-x)^{l-1} = \sum_{i=j+1-k}^{r} \psi_{i,k}^{(k-l)}(y) N_{i,k}(x) \quad .$$

Setzt man hier $y = 0$ ein, so folgt die Aussage. □

Aus der Marsden - Formel von Satz I.2.4 folgt auch eine Darstellung für die abgebrochenen Potenzen in der Spline-Basis aus Lemma I.1.1.

Lemma I.2.4 *Für* $1 \le j \le r + k$ *und* x *wie in Satz I.2.4 gilt*

$$(t_j - x)_+^{k-1} = \sum_{i=1}^{r} \psi_{i,k}(t_j)(t_j - a_i)_+^0 N_{i,k}(x), \tag{I.2.39}$$

wobei a_i *beliebige Zahlen aus* $[t_i, t_{i+k})$ *sind.*

Beweis: Es genügt, (I.2.39) unter der Annahme $a_i \in (t_i, t_{i+k})$ zu beweisen. Wegen der vereinbarten rechtsseitigen Stetigkeit (s. (I.1.4)) folgt sie dann durch Grenzübergang auch für $a_i = t_i$. Es bezeichne nun S die rechte Seite von (I.2.39). Für $x \ge t_j$ ergibt sich dann wegen der Träger-Eigenschaft der $N_{i,k}(x)$ und wegen $a_i > t_i$

$$S = \sum_{i=j-k+1}^{r} \psi_{i,k}(t_j)(t_j - a_i)_+^0 N_{i,k}(x) = \sum_{i=j-k+1}^{j-1} \psi_{i,k}(t_j)(t_j - a_i)_+^0 N_{i,k}(x).$$

Nach Definition (I.2.34) gilt $\psi_{i,k}(t_j) = 0$ für $j-k+1 \le i \le j-1$, so daß $S = 0$ folgt, was mit der linken Seite von (I.2.39) für $x \ge t_j$ übereinstimmt. Für $x < t_j$ ergeben die Träger - Eigenschaft der $N_{i,k}(x)$, die eben erwähnte Eigenschaft von $\psi_{i,k}$ und die Tatsache, daß $(t_j - a_i)_+^0 = 1$ für $1 \le i \le j - k + 1$ gilt,

$$S = \sum_{i=1}^{j-1} \psi_{i,k}(t_j)(t_j - a_i)_+^0 N_{i,k}(x) = \sum_{i=1}^{j-k+1} \psi_{i,k}(t_j)(t_j - a_i)_+^0 N_{i,k}(x) = \sum_{i=1}^{j-k+1} \psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x).$$

Aus den gleichen Gründen folgt dann für $x \geq t_j$ auch

$$S = \sum_{i=1}^{j-k+1} \psi_{i,k}(t_j)N_{i,k}(x) \sum_{i=1}^{j-1} \psi_{i,k}(t_j)N_{i,k}(x) = (t_j - x)^{k-1},$$

wobei noch die Marsden-Formel (I.2.33) für $r = j - 1$ und $j = k$ benutzt wurde. Damit ist (I.2.39) bewiesen. □

Es sei noch erwähnt, daß (I.2.39) zu einer entsprechenden Formel für mehrfache Knoten t_j erweitert werden kann (Übungsaufgabe).

I.2.4 Äquivalente Definitionen von B-Splines

Die Rekursionsformeln des vorigen Abschnitts können dazu benutzt werden, um B–Splines alternativ zu definieren. Dazu definiert man nach (I.2.24)

$$N_{i,1}(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & : \quad , x \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{I.2.40}$$

für $k = 1$ und rekursiv

$$N_{i,k}(x) := \omega_{i,k-1}(x)N_{i,k-1}(x) + \ (1 - \omega_{i+1,k-1}(x))N_{i+1,k-1}(x). \tag{I.2.41}$$

nach (I.2.22). Alle vorangegangenen Ergebnisse sind dann anwendbar. Man kann aber unabhängig von den Überlegungen des vorigen Abschnitts allein aus (I.2.40), (I.2.41) auf ihre konkrete Form schließen. Man kann zum Beispiel direkt zeigen (Genaueres s.Übungsaufgabe 3):

- Es gilt
$$N_{i,k}(x) = \sum_{j=i}^{i+k-1} p_{j,k}(x)N_{j,1}(x),$$
wobei jedes $p_{j,k}(x)$ ein Polynom vom Grad $k - 1$ ist.
- $N_{i,k}(x)$ ist stückweise polynomial vom Grad $k - 1$ mit möglichen Sprungstellen bei den $t_i, i \leq j \leq i + k - 1$.
- $N_{i,k}(x)$ verschwindet außerhalb $[t_i, t_{i+k}]$ und ist in (t_i, t_{i+k}) echt positiv.

Eine dritte Möglichkeit zur Definition der B-Splines ergibt sich über die Formel (I.2.16), nach der der B-Spline $M_{i,k}(x)$ der Kern einer Integraldarstellung einer dividierten Differenz über die k-te Ableitung ist. Dies entspricht der Idee in Abschnitt I.1.4, die abgebrochene Potenz $(t-x)_+^{k-1}$ als Greensche Funktion anzusehen. Ebenso läßt sich hier Definition (I.2.9) aus (I.2.16) ableiten. Dazu benützt man die aus der Taylorformel folgende Beziehung

$$(k-1)!f(t_i) = \int_a^b (t_i - x)_+^{k-1} f^{(k)}(x)dx \qquad (t_i \in (a, b], f \in C_0^k[a, b]) \tag{I.2.42}$$

wobei

$$C_0^k[a, b] := \{f \in C^k[a, b] : f^{(\nu)}(a) = 0, 0 \leq \nu \leq k - 1\}.$$

Nimmt man nun (I.2.16) als Definition für $M_{i,k}(x)$ und setzt (I.2.42) ein, so ergibt sich die Charakterisierung

$$\int_{t_i}^{t_{i+k}} f^{(k)}(x)M_{i,k}(x)dx = k\int [t_i,\ldots,t_{i+k}](t-x)_+^{k-1}f^{(k)}(x)dx, \qquad \forall f \in C_0^k[t_i,t_{i+k}]$$

für $M_{i,k}(x)$. Da aber die k-te Ableitung ein Isomorphismus von $C_0^k[a,b]$ auf $C[a,b]$ ist, können wir dies auch als

$$\int^{t_{i+k}} g(x)M_{i,k}(x)dx = k\int_{t_i}^{t_{i+k}} [t_i,\ldots,t_{i+k}](t-x)_+^{k-1}g(x)dx, \tag{I.2.43}$$

d.h. als "schwache" Version von (I.2.9) schreiben.
Eine vierte Definitionsmöglichkeit, die ebenfalls von Schoenberg entdeckt wurde, benutzt die **Hermite-Gennochi- Formel** zur Darstellung von dividierten Differenzen. Diese lautet (s. Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned} [t_i,\ldots,t_{i+k}]f &= \int_0^1 d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_k f^{(k)}(t_i+\sigma_1(t_{i+1}-t_i)\ldots\sigma_k(t_{i+k}-t_i)) \\ &= \int_{\sigma_i\geq 0}\cdots\int_{\sigma_0+\ldots\sigma_k=1} f^{(k)}(\sigma_0 t_i+\ldots\sigma_k t_{i+k})d\sigma_1\ldots d\sigma_k \end{aligned} \tag{I.2.44}$$

Kombiniert man dies mit (I.2.16) und setzt man $f^{(k)} = g$, so erhält als weitere schwache oder "distributionelle" Definitionsgleichung für $M_{i,k}(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)M_{i,k}(x)dx = \int_{\sigma\geq 0,\sigma_0+\ldots+\sigma_k=1} g(\sigma_0 t_i+\ldots\sigma_k t_{i+k})d\sigma_1\ldots d\sigma_k \tag{I.2.45}$$

Führt man den Simplex $\sum_k \equiv \{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) : \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \sigma_i \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$ ein, so kann man hieraus folgern

$$M_{i,k}(x) = vol_{k-1}\{(x,u) \in \Sigma_k : u \in \mathbb{R}^{k-1}\} \qquad , x \in \mathbb{R}, \tag{I.2.46}$$

d.h. im Punkte x ist $M_{i,k}(x)$ das $(k-1)-$ dimensionale Volumen, das durch Projektion des Simplex $\sum_k$ auf den Punkt x entsteht.
Diese geometrische Definition eines B-Splines wurde von C. de Boor 1976 zu einer solchen für **multivariate B-Splines** erweitert, indem er in (I.2.46) $\sum_k$ durch einen Simplex $\sum_{k-1+d}$ in $\mathbb{R}^{k-1+d}$ ersetzte und auf Punkte x des $\mathbb{R}^d$ projizierte. Es war dies der Ausgangspunkt zu einer multivariaten Theorie von B-Splines, insbesondere wurde die multivariate Erweiterung zu (I.2.44), (I.2.45) von C. Micchelli(1979)gefunden und anschließend die multivariate Erweiterung der abgebrochenen Potenz von W.Dahmen (Bonn 1980).
Eine andere Art von Verallgemeinerung auf multivariate B-Splines entsteht, wenn man den Fall äquidistante Knoten im univariaten Fall betrachtet. Dann ergibt sich auch eine weitere äquivalente Definition von B-Splines durch sukzessive Faltung. Dies wird später in einem eigenen Abschnitt beschrieben.

Übungsaufgaben zu Abschnitt I.2.

AUFGABE 1

Es seien die Knoten $x_1, \ldots, x_{k+1}$ einfach in $[a,b]$ und $\tilde{x}_{k+1} \in [a,b]$ weitere einfache Knoten mit $\max|x_i - \tilde{x}_i| \leq \delta \leq \min|x_{i+1} - x_i|$. Die entsprechenden B-Splines seien genauer mit $N(x; x_1, \ldots, x_{k+1})$ und $N(x; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k+1})$ bezeichnet. Man zeige, daß für $1 \leq p < \infty$ gilt (bezügl. des Symbols $|| \quad ||_{p,(a,b)}$ siehe Definition (I.3.2)).

$$||N(x; x_1, \ldots, x_{k+1}) - N(x; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k=1}||_{p,(a,b)} \leq C\delta^{1/p} \quad ,$$

wobei die Konstante C nur von $[a,b]$ und k aber nicht von δ abhängt .

Hinweis: Man benütze Induktion in k und die Rekursionsformel (I.2.19).

AUFGABE 2

Man beweise, daß für $1 \leq r \leq j, 1 \leq j \leq k-1$ gilt

$$0 = N_{i,k}^{(j-r)}(t_{i+k}) = \int_{t_i}^{t_{i+k}} (t_{i+k} - s)^{r-1} N_{i,k}^{(j)}(s)ds/(r-1)!,$$

d.h. $N_{i,k}^{(j)}$ ist orthogonal zu π_j auf $[t_i, t_{i+k}]$ für jedes $j = 1, \ldots, k-1$.

AUFGABE 3

Man zeige, daß die Formeln (I.2.40) und (I.2.22) Funktionen $N_{i,k}(t)$ mit der Eigenschaft

$$N_{i,k}(t) - \sum_{j=i}^{i+k-1} b_{j,k}(t) N_{i,1}(t)$$

bestimmen, wobei die Koeffizienten $b_{j,k}(t)$ Polynome $\in \prod_k$ sind. Man folgere daraus, daß die $N_{i,k}(t)$ stückweise in $\prod_k$ mit Knoten $t_i, \ldots, t_{i+k}$ sind, den Träger in $[t_i, t_{i+k}]$ haben und auf (t_i, t_{i+k}) positiv sind. Ferner zeige man (über den Beweis von Lemma I.2.3), daß dann $N_{i,k}(t) = k[t_i, \ldots, t_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1}$ gilt, d.h. die $N_{i,k}$ stimmen mit den in (I.2.18) definierten B-Splines überein.

AUFGABE 4

Man beweise die Hermite - Gennocchi Formel (I.2.44) .

Hinweis: Man zeige, daß die rechte Seite von (I.2.44) der gleichen Rekursionsformel wie in (I.2.2) genügt.

AUFGABE 5

Gegeben $t_1 < t_{i+1} \ldots < t_{i+r}$ mit $r < k$, so zeige man, daß die Funktion

$$M(x; t_i, \ldots, t_{i+r}) := k[t_i, \ldots, t_{i+r}](t-x)_+^{k-1}$$

positiv für $x < t_{i+r}$ ist, für $x \geq t_{i+r}$ verschwindet, und auf $(-\infty, t_i)$ durch Polynom vom Grad exakt gleich $k - 1 - r$ gegeben ist.

AUFGABE 6

Man zeige, daß die Bernoulli - Splines aus Übungsaufgabe 1 des ersten Abschnitts folgende Darstellung vom Typ des Satzes von Peano

$$\int_0^1 \tilde{B}_r(x-t) f^{(r)}(t)dt = r![f(x) - \int_0^1 f(t)dt], \qquad x \in (0,1) \tag{I.2.47}$$

erfüllen, wobei f eine beliebige Funktion aus $C^r(-\infty, \infty)$ mit $f^{(r)} \in L_2(-\infty, \infty)$ ist.

I.3 B-Splines und biorthogonale Funktionale

I.3.1 Konstruktion von biorthogonalen Funktionalen

Zu einer gegebenen zulässigen Knotenfolge $\mathbf{t}$, s. Definition I.2.3, können wir den Spline - Raum

$$S_{k,\mathbf{t}} := \left\{ s(x) : s(x) = \sum_l a_l N_{l,k}(x) \right\} \tag{I.3.1}$$

definieren. Die Untersuchung dieses **B-Spline-Raumes**, speziell die Frage nach der Basis-Eigenschaft der B-Splines und der Zusammenhang mit den anfangs definierten Spline-Räumen $S_k(\Delta, Z)$ wird uns in diesem Abschnitt beschäftigen.
Dazu konstruieren wir eine "biorhogonale "oder "duale" Basis zu den B-Splines, die ein sehr nützliches Werkzeug zur Untersuchung dieser und weiterer wichtiger Eigenschaften bilden wird. Zur Präzisierung beginnen wir mit folgender

Definition I.3.1 *Gegeben sei eine Folge $\{t_i\}$ von Knoten mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $t_i < t_{i+k}$ mit zugehörigen B-splines $\{N_{i,k}\}$. Eine Folge von linearen Funktionalen $\{\lambda_j\}$ heißt* **biorthogonal** *bzw.* **dual** *zu diesen B-Splines, wenn gilt*

$$\lambda_j(N_{i,k}) = \delta_{ij} \quad . \tag{I.3.2}$$

Es gibt viele Möglichkeiten, solche dualen Funktionale zu konstruieren. Wir betrachten zunächst eine Art kanonischer Darstellung solcher Funktionale. Dies wird durch folgenden Satz beschrieben.

Satz I.3.1 (deBoor-Fix 1973) *Die Funktionale $\lambda_j^* \equiv \lambda_{j,\tau}^*$ seien für (genügend glatte) Funktionen f und beliebiges τ durch*

$$\lambda_{j,\tau}^*(f) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu f^{(\nu)}(\tau) \varphi_{j,k}^{(k-1-\nu)}(\tau)/(k-1)! \tag{I.3.3}$$

definiert, wobei wie in (I.2.34)

$$\varphi_{j,k}(t) := \prod_{v=1}^{k-1} (t - t_{j+v}) \in \Pi_k \quad .$$

definiert ist. Sie haben die Eigenschaft, daß für jedes $p \in \Pi_k$ die Darstellung

$$p(t) = \sum_{i=j-k+1}^{r-1} \lambda_{i,\tau}^*(p) N_{i,k}(t), \qquad t_j \leq t < t_r \tag{I.3.4}$$

gilt. Ihre Restriktionen auf Π_k sind von τ unabhängig. Ferner erfüllen sie die Biorthogonalitätsrelation (I.3.2).

Beweis: Die Funktionale $\lambda_{j,\tau}^*$ wurden schon im vorigen Abschnitt durch (I.2.36) im Zusammenhang mit der Marsden-Formel (I.2.33) definiert, die hier noch einmal in (I.3.4) angegeben ist.

Die Unabhängigkeit der Koeffizienten in dieser Darstellung bezüglich τ sieht man so: Differentiation von $\lambda^*_{i,\tau}(p)$ nach τ ergibt nach Definition (I.3.3)

$$\begin{aligned}(k-1)!(\frac{d}{d\tau})\lambda^*_{i,\tau}(p) &= \textstyle\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu p^{(1+\nu)}(\tau)\varphi_{j,k}^{(k-1-\nu)}(\tau) + \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu p^{(\nu)}(\tau)\varphi_{j,k}^{(k-\nu)}(\tau)\\ &= -\textstyle\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu p^{(\nu)}(\tau)\varphi_{j,k}^{(k-\nu)}(\tau) + \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu p^{(\nu)}(\tau)\varphi_{j,k}^{(k-\nu)}(\tau) = 0,\end{aligned}$$

wobei $p^{(k)}(\tau) = 0 = \varphi_{j,k}^{(k)}(\tau)$ benützt wurde.
Zum Beweis der Biorthogonalität (I.3.2) nehmen wir o.B.d.A. $\tau \in (t_l, t_{l+1})$ an. Es bezeichne dann p_i die Funktion in Π_k, die durch Restriktion von $N_{i,k}$ auf das Intervall (t_l, t_{l+1}) entsteht. Diese Funktionen verschwinden nur für $j = l+1-k, \cdots, l$ nicht identisch. Aus (I.3.4) angewendet mit $j = l, r = l+1$ folgt dann

$$p(t) = \sum_{i=l-k+1}^{l} \lambda_i^*(p)N_{i,k}(t) = \sum_{i=l-k+1}^{l} \lambda_i^*(p)p_i(t) \qquad t_l \le t < t_{l+1} \tag{I.3.5}$$

Da $p(t)|_{(t_l,t_{l+1})}$ einen $k-$ dimensionalen Raum durchläuft, muß $span\{p_i\}_{i=l-k+1}^{l}$ ebenfalls die Dimension k haben, und die $p_i(t)$ müssen auf (t_l, t_{l+1}) linear unabhängige Polynome sein. Wendet man nun (I.3.5) auf ein spezielles $p_j(t)$ an, so folgt

$$p_j(t) = \sum_{i=l-k+1}^{l} \lambda_i^*(p_j)p_i(t) = \sum_{i=l-k+1}^{l} \lambda_i^*(N_{j,k})p_i(t)$$

und daraus durch Koeffizientenvergleich (I.3.1). □

Jedes andere Biorthogonalsystem $\{\lambda_i\}$ muß auf $S_{k,\mathbf{t}}$ mit den $\{\lambda_i^*\}$ übereinstimmen, denn $\lambda_j(N_{i,k}) = \delta_{ij}$ impliziert

$$\lambda_j(s) = \sum_l a_l\delta_{i,l} = a_i = \lambda^*_{i,\tau}(s), \qquad s(x) = \sum_l a_l N_{l,k}(x) \in S_{k,\mathbf{t}}.$$

Es ist jedoch wünschenswert, biorthogonale Funktionale nicht nur durch Punktfunktionale und nur auf dem Splineraum, sondern als Funktionale auf einem der üblichen Funktionenräume definiert zu haben. Allgemein kann dies durch den Fortsetzungssatz von Hahn- Banach (s. Vorlesung “Funktionalanalysis”) geschehen, jedoch braucht man für viele Zwecke eine konkrete Darstellung.
Dazu betrachten wir die $N_{i,k}(x)$ als Elemente des Raumes $L_p(a,b)$, wobei

$$a = \min\{t_i\} \quad ; \qquad b = \max\{t_i\} \quad . \tag{I.3.6}$$

Hier kann auch $a = -\infty$ oder $b = \infty$ gelten, wenn die Folge $\mathbf{t}$ infinit oder biinfinit ist. Die Norm von $f \in L_p(a,b)$ bezeichnen wir mit $\|f\|_{p,(a,b)}$. Es ist

$$\|f\|_{p,(a,b)} := \begin{cases} (\int_a^b \mid f(x) \mid^p dx)^{1/p} & : \quad ,1 \le p < \infty \\ \text{wes.} \sup_{a\le x\le b} |f(x)| & : \quad ,p = \infty \end{cases} \tag{I.3.7}$$

Nun ist bekannt (s. Vorlesung “Funktionalanalysis”), daß eine Funktion $g \in L_q(a,b)$ mit $1/p + 1/q = 1$ ein stetiges lineares Funktional λ auf $L_p(a,b)$ bildet mittels

$$\lambda(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad , \qquad f \in L_p(a,b) \quad . \tag{I.3.8}$$

Es gilt folgender
Satz A *Jedes stetige lineare Funktional* λ *auf* $L_p(a,b)$ *mit* $1 \le p < \infty$ *besitzt eine Darstellung (I.3.8) mit einem eindeutig bestimmten* $g \in L_q(a,b)$. *Für seine Norm gilt*

$$\|\lambda\|_p := \sup_{f \in L_p(a,b)} \frac{|\ \lambda(f)\ |}{\|\ f\ \|_{p,(a,b)}} = \|\ g\ \|_{q,(a,b)} \qquad \text{(I.3.9)}$$

Im Falle $p = \infty$ *gilt für Funktionale des Typs (I.3.8)*

$$\|\lambda\|_\infty \le \|g\|_{1,(a,b)} \quad . \qquad \text{(I.3.10)}$$

Nach diesen Vorbemerkungen macht es Sinn, für das gesuchte Biorthogonalsystem den Ansatz

$$\lambda_j(\varphi) := \int_a^b g_j^{(k)}(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi \in L_p(a,b) \qquad \text{(I.3.11)}$$

zu betrachten, wobei g_j eine Funktion aus dem Sobolev-Raum ($1 \le q \le \infty$)

$$W_q^k(a,b) := \left\{ f : f^{(k-1)} \quad \text{absolut stetig auf} \quad [a,b] \quad , f^{(k)} \in L_q(a,b) \right\} \qquad \text{(I.3.12)}$$

ist. Der Ansatz (I.3.11) erfüllt nun (I.3.2) wenn

$$\lambda_j(N_{ik}) = \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k} \int_a^b M_{i,k}(x) g_j^{(k)}(x)dx = \delta_{ij} \quad . \qquad \text{(I.3.13)}$$

gilt. Wegen der fundamentalen Relation (I.2.16) von Satz I.2.3 ist dies äquivalent zu

$$\delta_{ij} = (k-1)!(t_{i+k} - t_i)\,[t_i, ..., t_{i+k}]\,g_j \quad . \qquad \text{(I.3.14)}$$

Hier muß noch bemerkt werden, daß (I.2.16) zwar nur für $g_j \in C^k[a,b]$ bewiesen wurde, jedoch wegen $M_{i,k}(x) \in L_\infty(a,b)$ aus Stetigkeitsgründen auch für $g_j \in L_1(a,b)$ gilt.
Wir sehen nun, daß f_j im wesentlichen durch das Verhalten an den Knoten t_i bestimmt ist. Es genügt daher *eine* Funktion zu finden, die dieses Verhalten aufweist, um f_j zu charakterisieren. Diese Idee führt zu

Satz I.3.2 *Ein Funktional* λ_j *der Form (I.3.11) mit* $g_j \in W_q^{(k)}(a,b), 1 \le q \le \infty$, *erfüllt (I.3.13) genau dann, wenn*

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\,g_j = [t_i, ..., t_{i+k}]\,\varphi_{j,k}^+/(k-1)! \quad . \qquad \text{(I.3.15)}$$

gilt. Dabei ist

$$\varphi_{j,k}^+(t) := \prod_{v=1}^{k-1}(t - t_{j+v})(t - \alpha_j)_+^0 \quad . \qquad \text{(I.3.16)}$$

mit beliebig in $[t_j, t_{j+k}]$ *vorgegebenem* α_j. *Hinreichend für (I.3.15) ist die Bedingung*

$$g_j(t_i) = \varphi_{j,k}^+(t_i)/(k-1)! \quad , \quad \textit{alle} \quad i \quad . \qquad \text{(I.3.17)}$$

BEWEIS: Wir sehen uns die Werte von $\varphi^+_{j,k}(t)$ an den Stellen t_i an. Es gilt nach Definition von α_j

$$\varphi^+_{j,k}(t_i) = \begin{cases} 0 & : \quad , i \leq j \\ 0 = \varphi_{j,k}(t_i) & : \quad , j+1 \leq i \leq j+k-1 \\ \varphi_{j,k}(t_i) & : \quad , i \geq j+k \end{cases}$$

Es folgt dann für $i < j$

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, \varphi^+_{j,k} = [t_i, ..., t_{i+k}]\, 0 = 0$$

und für $i \geq j+1$

$$[t_i, ..., t_{i+k}]\, \varphi^+_{j,k} = [t_i, ..., t_{i+k}]\, \varphi_{j,k} = 0 \quad .$$

Im Falle $i = j$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} [t_j, ..., t_{j+k}]\, \varphi^+_{j,k} &= \tfrac{[t_{j+k}, ..., t_{j+1}]\varphi^+_{j,k} - [t_{j+k-1}, ..., t_j]\varphi^+_{j,k}}{(t_{j+k} - t_j)} \\ &= \tfrac{[t_{j+k}, ..., t_{j+1}]\varphi_{j,k}}{(t_{j+k} - t_j)} \\ &= \tfrac{1}{(t_{j+k} - t_j)} \quad . \end{aligned}$$

Hier haben wir Eigenschaften der dividierten Differenz ausgenützt, insbesondere daß der Koeffizient der höchsten Potenz des Lagrange'schen Interpolationspolynoms gleich der dividierten Differenz gleicher Ordnung ist. Es folgt also insgesamt

$$(t_{j+k} - t_j)\, [t_i, ..., t_{i+k}]\, \varphi^+_{j,k} = \delta_{ij}.$$

Dies eingesetzt in (I.3.14) liefert die Bedingung (I.3.15).
Ist (I.3.17) erfüllt, so bilden wir im Falle einfacher Knoten mit der Differenz $\psi \equiv g_j - \varphi^+_{j,k}$ sukzessive

$$[t_i]\, (g_j - \varphi_{j,k}) = 0, \quad [t_i, t_{i+1}]\, (g_j - \varphi_{j,k}) = 0, ... \, [t_i, ..., t_{i+k}]\, (g_j - \varphi_{j,k}) = 0.$$

und erhalten (I.3.15). Durch Stetigkeitsargumente wie in Abschnitt I.2 folgt (I.3.15) auch für zusammenfallende Knoten. □

Als Folgerung ergibt sich:

Satz I.3.3 *Ist noch zusätzlich zu den Voraussetzungen vom vorigen Lemma an λ_j der Träger von $g_j^{(k)}$ einem Intervall (β_j, γ_j) mit $(\beta_j, \gamma_j) \subseteq [t_j, t_{j+k}]$, so erfüllt λ_j die Orthogonalrelation (I.3.13) genau dann, wenn g_j die folgende Form besitzt*

$$g_j(t) = \varphi_{j,k}(t) G(\frac{t - \beta_j}{\gamma_j - \beta_j})/(k-1)! \quad , \tag{I.3.18}$$

wobei $G(y)$ eine sogenannte **Übergangsfunktion** *aus $W^{(k)}_\infty(0,1)$ ist, d.h.*

$$G(y) = \begin{cases} 0 & : \quad k - fach \ bei \quad y = 0 \\ \in I\!R & : \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & : \quad k - fach \ bei \quad y = 1 \end{cases} \tag{I.3.19}$$

BEWEIS: Aus Konstruktion (I.3.18) ergibt sich, daß $f_j^{(k-1)}$ überall absolut stetig ist. Ferner zeigt sie, daß

$$f_j(t_i) = \varphi_{j,k}^{+}(t_i)/(k-1)! \qquad \text{für alle} \quad t_i \quad .$$

Anwendung des vorigen Lemmas ergibt den ersten Teil der Behauptung.
Umgekehrt folgt aus der vorausgesetzten Trägereigenschaft von f_j und der Interpolationseigenschaft (I.3.15), daß die k-te Aleitung von $f_j(t)/\varphi_{j,k}(t)$ aus $L_\infty(a,b)$ sein muß mit Träger in (β_j, γ_j). Hieraus folgt die Darstellung (I.3.18) mit G wie in (I.3.19). □

Dieser Satz liefert je nach Wahl von G viele weitere Möglichkeiten zur Konstruktion biorthogonaler Funktionale. Dies werden wir im Folgenden ausnützen.

I.3.2 B-Splines als Basis von Splineräumen

Als erste Folgerung aus Satz I.3.1 zeigen wir

Korollar I.3.1 *Gegeben seien eine Folge $\tilde{t} = \{t_i\}$ mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $t_i < t_{i+k}$ für jedes i und ein Intervall (c,d). Dann bildet die Menge $\{N_{i,k}\}_{i\in I}$ ein linear unabhängiges System auf (c,d), falls*

$$I = \{i : Maß\{(suppN_{i,k}) \cap (c,d)\} > 0 \quad \} \tag{I.3.20}$$

ist, wobei supp $N_{i,k}$ den Träger von $N_{i,k}$ bezeichnet. Speziell bilden alle $\{N_{i,k}\}$ ein lineares unabhängiges System auf $(a,b) = (\min t_i, \max t_i)$.

BEWEIS: Es sei $s(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i N_{i,k}(x) = 0$ für alle $x \in (c,d)$.

Da für $j \in I$ gilt $(t_j, t_{j+k}) \cap (c,d) = (t_j + \gamma(t_{j+k} - t_j), t_j + \delta(t_{j+k} - t_j))$ mit gewissen $0 \leq \gamma < \delta \leq 1$, ergibt die Anwendung von Satz I.3.1 mit $(\gamma, \delta) = (\beta_j, \gamma_j)$

$$0 = \lambda_j(s) = \sum_{i\in I} \alpha_i \lambda_j(N_{i,k}) = \alpha_j \quad .$$

und das Korollar ist bewiesen. □

Damit können wir zeigen, daß die B-Splines für die in Abschnitt I.1 definierten Splinefunktionen eine lokale Basis liefern. Wir betrachten dabei zunächst die Darstellung solcher Splinefunktionen auf einem endlichen Intervall (ξ_0, ξ_{n+1}), wobei gelte

$$\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_n < \xi_{n+1} \quad .$$

Wir betrachten dann den linearen Raum

$$S_k(\Delta, Z) \mid_{(\xi_0,\xi_{n+1})} := \{s(x) : \xi_0 < x < \xi_{n+1}, s \in S_k(\Delta, Z)\} \quad , \tag{I.3.21}$$

wobei $S_k(\Delta, Z)$ der in Definition I.1.2 von Kapitel 1 angegebene Splineraum sei. Hierfür gilt:

Korollar I.3.2 *Es sei $S_k(\Delta, Z) \mid_{(\xi_0,\xi_{n+1})}$ wie oben definiert. Dann definiere man eine Folge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{d+k}$ mit $d := k + \sum_{i=1}^{n}(k - z_i)$ durch*

$$\mathbf{t} : t_1, ..., t_k, \underbrace{\xi_1}_{(k-z_1)-mal}, ..., \underbrace{\xi_n}_{k-z_n-mal}, t_{d+1}, ..., t_{d+k} \quad , \tag{I.3.22}$$

wobei die Knoten $t_1, ..., t_k$ und $t_{d+1}, ..., t_{d+k}$ zusätzlich gewählte $2k$ Knoten sind, die nur den Bedingungen

$$t_1 \leq ... \leq t_k \leq \xi_0 < \xi_{n+1} \leq t_{d+1} \leq ... \leq t_{d+k} \tag{I.3.23}$$

genügen müssen. Dann können durch $\mathbf{t}$ die B-Splines $\{N_{i,k}\}_{i=1}^d$ gebildet werden, die eine Basis für $S_k(\Delta, Z) \mid_{(\xi_0,\xi_{n+1})}$ bilden.

BEWEIS: Nach Lemma I.1.2 ist die Dimension des linearen Raumes $S_k(\Delta, Z) \mid_{(\xi_0,\xi_{n+1})}$ gleich $d = k + \sum_{i=1}^n (k - z_i)$. Dies folgt einfach dadurch, daß man dort die Endintervalle $(-\infty, \xi_1)$ durch (ξ_0, ξ_1) und (ξ_n, ∞) durch (ξ_n, ξ_{n+1}) ersetzt. Nach Satz I.2.3 liegen die durch $\mathbf{t}$ gebildeten B-Splines $\{N_{i,k}\}_{i+1}^d$ alle in diesem Raum. Da sie nach dem vorigen Korollar ein linear unabhängiges System bilden, müssen sie eine Basis bilden. □

Die gebräuchlichste Wahl der $2k$ zusätzlichen Knoten in (I.3.23) ist

$$t_1 = \ldots = t_k = \xi_0 \quad , \quad t_{\alpha+1} = \ldots = t_{k+d} = \xi_{n+1}. \tag{I.3.24}$$

Als weiteren Fall betrachten wir in Definition I.1.2 von Abschnitt I.1 abzählbar viele Knoten mit Glattheit der Form

$$\Delta = \{\xi_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \quad \text{mit} \quad \xi_i < \xi_{i+1}; \quad Z = \{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \quad 0 \leq z_i \leq k-1. \tag{I.3.25}$$

Dann gilt:

Korollar I.3.3 *Jedes Element $s \in S_k(\Delta, Z)$ mit Δ, Z wie in (I.3.25) definiert , läßt sich schreiben als*

$$s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i N_{i,k}(x) \tag{I.3.26}$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und den zur Folge

$$\{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = ... \underbrace{\xi_i}_{k-z_i-mal} \quad , \quad \underbrace{\xi_{i+1}}_{(k-z_{i+1})-mal} \quad , ... \tag{I.3.27}$$

gebildeten B-splines $N_{i,k}$. Die Konvergenz in (I.3.26) ist punktweise zu verstehen.

BEWEIS: Wir betrachten die Restriktion von $s(x)$ auf (ξ_r, ξ_s) mit r und s beliebig, $r < s$, d.h.

$$s_{r,s}(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < \xi_r \\ s(x) & : \quad \xi_r \leq x < \xi_s \\ 0 & : \quad x \geq \xi_s \end{cases}$$

Nach dem vorigen Korollar gilt mit geeigneten Indizes i_r, i_s

$$s_{r,s}(x) = \sum_{i=i_r}^{i_s} \alpha_i^{(r,s)} N_{i,k}(x) \tag{I.3.28}$$

und eindeutig festgelegten Koeffizienten $\alpha_i^{(r,s)} \in \mathbb{R}$. Dann folgt (I.3.26), indem wir $r \to -\infty, s \to +\infty$ streben lassen. Dazu ist zu beachten, daß beim Übergang $r \to r' < r, \quad s \to s' > s$ in (I.3.28) alle $\alpha_i^{(r,s)}$ fest bleiben für diejenigen i, deren zugehörige $N_{i,k}$ ihren Träger in (ξ_r, ξ_s) haben. Dies folgt daraus, daß für $x \in (\xi_r, \xi_s)$

$$0 = s_{r',s'}(x) - s_{r,s}(x) = \sum [\alpha_i^{(r',s')} - \alpha_i^{(r,s)}] N_{i,k}(x)$$

gilt. Damit folgt die behauptete Invarianz der $\alpha_i^{(r,s)}$ nach Korollar I.3.1. □

Im Folgenden werden wir Splinefunktionen in der Regel als Linearkombinationen von B - Splines einer gegebenen Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}$ mit Eigenschaft (I.2.9) auffassen, insbesondere in obigen beiden Fällen. Im Zusammenhang damit führen wir ein

$$S_{k,\mathbf{t}} := span\{N_{i,k}\}_{\mathbf{t}} \tag{I.3.29}$$

Als letzten Fall betrachten wir **periodische Splinefunktionen** aus der Klasse $S_k(\Delta, Z)$. Darunter verstehen wir die Menge

$$S_k^*(\Delta, Z)_{(a,b)} = \{s \in S_k(\Delta, Z) : s(x+T) = s(x), \quad T := b - a\} \;\}, \tag{I.3.30}$$

wobei $S_k(\Delta, Z)$ wie in (I.3.25) definiert ist und $a \in [\xi_0, \xi_1), b \in [\xi_n, \xi_{n+1})$ angenommen wird. Wir bezeichnen (a, b) als das Grundintervall und T als Periode dieser Splinefunktionen.

Wir stellen dann fest (durch Differenzieren an entsprechenden x), daß in (I.3.22) gelten muß

$$\xi_{j+n\nu} = \xi_j + \nu T; \quad z_{j+n\nu} = z_j \quad 0 \le j \le n; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{I.3.31}$$

Speziell liegt bei a ein Knoten vor bzw. es gilt $a = \xi_0$ genau dann, wenn b mit dem Knoten ξ_n übereinstimmt, d.h. $b - a = \xi_n - \xi_0$. Damit können wir formulieren:

Korollar I.3.4 *Es gelte (I.3.31) mit $K = \sum_{i=1}^n (k - z_i) > k$ und es sei $\mathbf{t}$ die Folge*

$$..., \underbrace{\xi_1}_{k-z_1}, ..., \underbrace{\xi_n}_{k-z_n}, \underbrace{\xi_{n+1} = \xi_1}_{k-z_1} + T, ... \quad . \tag{I.3.32}$$

Dann bilden die **periodisierten B - Splines** $N_{i,k}^*(x)$ *definiert auf* $(-\infty, \infty)$ *durch*

$$N_{i,k}^*(x) = \begin{cases} N_{i,k}(x) & : \quad x \in (t_i, t_{i+k}) \cap (a, b+T) \\ N_{i,k}(x') & : \quad x = x' \; (mod\; \xi_n - \xi_0), \quad x' \in (t_i, t_{i+k}) \\ 0 & : \quad sonst \end{cases} \tag{I.3.33}$$

eine Basis für den in (I.3.30) definierten Raum der periodischen Splinefunktionen.

Beweis: Für die in (I.3.33) definierten Funktionen gilt $N_{i,k}^*(x) = N_{i,k}(x)$ auf dem Grundintervall (a, b), falls der Träger von $N_{i,k}$ ganz darin oder in einem um ein Vielfaches von T verschobenen Intervall liegt. Im anderen Fall, wenn der Träger von $N_{i,k}$ in zwei benachbarten solchen Intervallen liegt, wird $N_{i,k}^*$ dort gleich $N_{i,k}$ gesetzt und dann mit Periode $T = b - a$ fortgesetzt. In beiden Fällen ist $N_{i,k}$ eine Funktion mit Periode T und ebensolchen Träger, sowie von der gleichen Glattheit wie $N_{i,k}$. Da in der Knotenfolge (I.3.31) alle Knoten modulo $b - a$ einander gleich sind, gibt es nur genau $K = \sum_{i=1}^n (k - z_i)$ verschiedene Funktionen $N_{i,k}^*(x)$, die linear unabhängig sind. Die Behauptung folgt dann aus

$$\dim S_k^*(\Delta, Z)_{(a,b)} = K \quad . \tag{I.3.34}$$

Dies ergibt sich aber aus

$$S_k^*(\Delta, Z)_{(a,b)} = \{s \in S_k(\Delta, Z)_{(\xi_0,\xi_n)} : s^{(\nu)}(\xi_0) = s^{(\nu)}(\xi_n), 0 \leq \nu < z_n\}$$

und der Dimensionsformel $\dim S_k(\Delta, Z)_{(\xi_0,\xi_n)} = k + \sum_{i=1}^{n-1}(k - z_i)$ von Lemma I.1.2.

Bemerkung: Man kann Periodizität von Splines auch noch anders als wie in (I.3.33) definieren, nämlich durch die Forderung nach maximaler Glattheit an den Intervallenden, d.h. $s^{(\nu)}(\xi_n), 0 \leq \nu < k$, für solche Funktionen. Dies führt speziell zur Definition der Bernoulli-Splines aus Übungsaufgabe 1 zu Abschnitt I.1.

I.3.3 Stabilität der B-Spline-Basis

Die bisherigen Ergebnisse über die Basiseigenschaft der B-Splines (speziell Korollar I.3.1) können im wesentlichen durch die Aussage zusammengefaßt werden, daß die lineare Abbildung

$$J : \{\alpha_i\} \to \sum \alpha_i N_{i,k} \in S_{k,\mathbf{t}}$$

für jedes System von B-Splines bijektiv ist, das durch eine nach Definition I.2.3 zulässige Knotenfolge $\mathbf{t}$ gegeben ist. Diese Eigenschaft wird erheblich verstärkt, wenn eine solche Basis auch stabil ist. Dabei bedeutet die **Stabilität einer Basis** allgemein die Eigenschaft, daß sich kleine relative Fehler in den Koeffizienten der Basisfunktionen nur in einem kleinen relativen Fehler der resultierenden Linearkombination auswirken. Ein Maß dafür ist die Konditionszahl einer Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von stetigen Funktionen in $C[a, b]$, die bereits in Abschnitt I.1 eingeführt wurde. Der Bequemlichkeit halber wiederholen wir hier die Definition der Kondition :

Definition I.3.2 (Kondition) *Die Konditions(zahl) der Basis $\varphi_1, ...\varphi_n$ ist erklärt als die Zahl*

$$K := \sup_{\{b_i\}} \frac{\| \Sigma b_i \varphi_i \|_{\infty,[a,b]}}{\sup \mid b_i \mid} \cdot \sup_{\{a_i\}} \frac{\sup \mid a_i \mid}{\| \Sigma a_i \varphi_i \|_{\infty,[a,b]}}. \tag{I.3.35}$$

Wie wir in Abschnitt I.1 gesehen haben, bleibt die Konditionszahl der Basis der abgebrochenen Potenzen nicht beschränkt, wenn Knoten zusammenlaufen, und die Basis wird instabil. Dagegen werden wir im Folgenden zeigen, daß die B-Spline-Basis stabil unabhängig von der Lage der Knoten stabil bleibt, sofern sie nur die Grundvoraussetzung (I.2.8) erfüllen. Dies ist von grundlegender Bedeutung bei Untersuchungen von Splineproblemen mit variablen Knoten.

Um konkrete Aussagen zu erhalten, messen wir die Stabilität in der L_p-Norm (I.3.7) in den Räumen $L_p(a, b), 1 \le p \le \infty$, wobei a, b wie in (I.3.6) definiert sind. Dazu ist es zweckmäßig, die Basis der B-Splines $N_{i,k}(x)$ dem Raum $L_p(a, b)$ durch folgende Normierung anzupassen :

$$N_{i,k,p}(x) := \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k}^{-1/p} N_{i,k}(x) \qquad 1 \le p \le \infty. \tag{I.3.36}$$

Die bisherigen Definitionen (I.2.9),(I.2.18) ordnen sich in diese Schreibweise ein:

$$N_{i,k,\infty}(x) := N_{i,k}(x) \quad , \quad N_{i,k,1}(x) := M_{i,k}(x).$$

Wir betrachten dann die Abbildungen $(1 \le p \le \infty)$

$$J_p : \{\alpha_i\} \in l_p \to s(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i N_{i,k,p}(x) \in L_p(a, b). \tag{I.3.37}$$

Hierbei sind l_p die üblichen Folgenräume über der Indexmenge I mit der Norm

$$||\{\alpha_i\}||_p := \begin{cases} (\sum |a_i|^p)^{1/p} & : \quad 1 \le p < \infty \\ \sup |a_i| & : \quad p = \infty \end{cases} \tag{I.3.38}$$

Die Stabilität der B-Spline-Basis wird dann beschrieben durch

Satz I.3.4 (de Boor 1968,1973) *Die in (I.3.37) definierte Abbildung J_p ist für jede in Definition (I.2.3) gegebene Folge $\mathbf{t}$ ein Homorphismus von l_p auf $L_p(a, b) \cap S_{k,\mathbf{t}}$, d.h. sie ist linear, bijektiv und stetig. Die Normen von J_p und seiner Inversen sind dabei unabhängig von jeder Folge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i \in I}$ gemäß Definition I.2.3 beschränkt, speziell gilt*

$$(D_{k,p})^{-1} ||\{a_i\}||_p \le || \sum a_i N_{i,k,p}||_p \le ||\{a_i\}||_p \tag{I.3.39}$$

mit einer gleichmäßig in $\mathbf{t}$ beschränkten Konstanten $D_{k,p}$.

Bemerkung: Spezialfälle der linken Seite von (I.3.39) sind die aus den Identitäten (I.2.17) und (I.3.34) folgenden Abschätzungen

$$||N_{i,k}||_{\infty,(a,b)} \leq 1 \quad , \quad ||M_{i,k}||_{1,(a,b)} = 1$$

die die Motivation für die Normierung (I.3.36) der B-Splines liefern.

Diese Normierung hat allgemeiner zur Folge

Lemma I.3.1 *Unter obigen Voraussetzungen gilt für $1 \leq p \leq \infty$ die Abschätzung nach oben in (I.3.39), d.h. die Norm der Abbildung J_p ist durch 1 beschränkt.*

Beweis: Die Ungleichung nach oben in (I.3.39) ergibt sich im Falle $p = \infty$ sofort aus (I.2.32). Im Falle $1 \leq p < \infty$ schreiben wir zunächst (I.3.36) unter Einführung des dualen Parameters $q, 1/q + 1/p = 1$, als

$$N_{i,k,p}(x) = M_{i,k}(x)^{1/p} N_{i,k}(x)^{1/q}$$

Die Hölder - Ungleichung liefert dann

$$\int |\sum \alpha_i N_{i,k,p}|^p \leq \int (\sum_i |\alpha_i|^p M_{i,k})(\sum_i N_{i,k})^{p/q}$$

Im Hinblick auf die bereits erwähnte Eigenschaft $\sum N_{i,k} = 1$ von (I.2.32) folgt daraus

$$\int |\sum \alpha_i N_{i,k,p}|^p \leq \sum_i |\alpha_i|^p \int M_{i,k} = \sum_i |\alpha_i|^p$$

d.h. die Abschätzung nach oben in (I.3.39).

Der Beweis der inversen Abschätzung in (I.3.39) ist schwieriger und verwendet die Stetigkeit der dualen Funktionale aus Abschnitt I.3.1. Um diese zu präzisieren, zitieren wir aus der Vorlesung "Funktionalanalysis" folgenden

Satz B *Jede stetige Funktion $f \in L_q(a,b)$ mit $1/p + 1/q = 1$ bildet ein stetiges lineares Funktional λ auf $L_p(a,b)$ vermöge*

$$\lambda(g) = \int_a^b g(x) f(x) dx \quad , \qquad g \in L_p(a,b) \quad . \tag{I.3.40}$$

Umgekehrt besitzt jedes stetige lineare Funktional λ auf $L_p(a,b)$ mit $1 \leq p < \infty$ eine Darstellung (I.3.40) mit einem eindeutig bestimmten $f \in L_q(a,b)$. Für seine Norm gilt

$$\| \lambda \|_p := \sup_{f \in L_p(a,b)} \frac{| \lambda(f) |}{\| f \|_{p,(a,b)}} = \| g \|_{q,(a,b)} \, . \tag{I.3.41}$$

Im Falle $p = \infty$ gilt für Funktionale des Typs (I.3.41)

$$\| \lambda \|_\infty \leq \| g \|_{1,(a,b)} \quad . \tag{I.3.42}$$

Wir führen dann für die Knotenfolgen $\mathbf{t}$ die Größe

$$D_{k,p;\mathbf{t}} := \inf\{\sup_j (t_{j+k} - t_j)^{1/p} \| \lambda_j \|_p \quad : \lambda_j \quad \text{wie in Satz I.3.3}\} \tag{I.3.43}$$

ein, und zeigen zunächst, daß damit eine einfache untere Abschätzung in (I.3.39) folgt.

Lemma I.3.2 *Es gilt für jede in (I.2.8) zulässige Folge* $\mathbf{t}$

$$||\{a_i\}||_p \leq D_{k,p;\mathbf{t}} \;||\sum a_i N_{i,k,p}||_p \tag{I.3.44}$$

Beweis: Wir benützen die dualen Funktionale λ_j von Satz I.3.1. Mit der Darstellung $s = \sum \alpha_i N_{i,k,p}$ gilt nach (I.3.2),(I.3.36)

$$\lambda_j(s) = \sum \alpha_i \lambda_j(N_{i,k,p}) = [(t_{j+k} - t_j)/k]^{-1/p} \alpha_j$$

wobei man beachte, daß die Vertauschung von λ_j mit der Summe problemlos ist, da der Träger von λ_j nur endlich viele der t_i enthält und die Summe somit jeweils endlich ist. Mit der Definition von $D_{k,p;\mathbf{t}}$ und (I.3.41) erhält man daher

$$\begin{aligned} |\alpha_j| &\leq k^{-1/p}(t_{j+k} - t_j)^{1/p} \parallel \lambda_j \parallel_p ||s||_{p,(t_j,t_{j+k})} \\ &\leq k^{-1/p} D_{k,p;\mathbf{t}} \;||s||_{p,(t_j,t_{j+k})} \end{aligned}$$

Im Falle $p = \infty$ folgt daraus bereits

$$\sup |\alpha_j| \leq D_{k,p;\mathbf{t}} \;||s||_{\infty,(a,b)}.$$

Im andern Falle ergibt Summation über j

$$\sum_j |a_j|^p \leq k^{-1}(D_{k,p;\mathbf{t}})^p \sum_j ||s||^p_{(p,t_j,t_{j+k})} \leq (D_{k,p;\mathbf{t}} \;||s||_{p,(a,b)})^p$$

und somit die gewünschte Abschätzung (I.3.44).

Entscheidend ist nun der Umstand, daß die Größen $D_{k,p;\mathbf{t}}$ unabhängig von $\mathbf{t}$ beschränkt sind.

Lemma I.3.3 *Unter obigen Voraussetzungen an* $\mathbf{t}$ *gilt*

$$D_{k,p} := \sup_{\mathbf{t}} D_{k,p;\mathbf{t}} < \infty. \tag{I.3.45}$$

Beweis: Es sei $\mathbf{t}$ fest. Ausnützen der Darstellung (I.3.4) mit (I.3.11) ergibt über die Hölder - Ungleichung $(1/p + 1/q = 1)$ für beliebiges $g \in L_p(a,b)$

$$\begin{aligned} |\lambda_j(g)|(t_{j+k} - t_j)^{1/p} &\leq (t_{j+k} - t_j)^{1/p} \parallel f_j^{(k)} \parallel_{q,[t_j,t_{j+k}]} \parallel g \parallel_{p,(t_j,t_{j+k})} \\ &\leq (t_{j+k} - t_j) \parallel f_j^{(k)} \parallel_{\infty,(t_j,t_{j+k})} \parallel g \parallel_{p,(t_j,t_{j+k})} \end{aligned} \tag{I.3.46}$$

Zur weiteren Abschätzung von $f_j^{(k)}$ liefert die Leibniz- Regel angewandt auf (I.3.11)

$$|f_j^{(k)}(t)| \leq \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} |\varphi_{j,k}^{(k-r)}(t)||(d/dt)^r G((t - t_j)|/(t_{j_k} - t_j))/(k-1)!$$

Da G eine feste Funktion ist, folgt hieraus über die Kettenregel die Existenz einer nur von k abhängigen Konstanten γ_k mit

$$|f_j^{(k)}(t)| \leq \gamma_k \sum_{r=0}^{k} |\varphi_{j,k}^{(k-r)}(t)|(t_{j+k} - t_j)^r$$

Nach (I.2.30) ist $\varphi_{j,k}^{(k-r)}$ eine Summe von jeweils $(r-1)$-fachen Produkten aus Faktoren der Form $(t-t_i), j \leq i \leq j+k$. Also folgt $\| \varphi_{j,k}^{(k-r)} \|_\infty \leq C_k |t_{j+k}-t_j|^{r-1}$ mit einer absoluten Konstanten C_k und somit

$$(t_{j+k}-t_j) \| f_j^{(k)} \|_{\infty,(t_j,t_{j+k})} \leq (k+1)\gamma_k C_k$$

Dies in (I.3.45) eingesetzt ergibt nach dem oben angeführten Satz der Funktionalanalysis

$$||\lambda_j||_p \leq (k+1)\gamma_k C_k. \tag{I.3.47}$$

Da für alle möglichen dualen Funktionale mit der gleichen Konstante gilt, folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe der vorangegangenen Lemmata folgt nun direkt der Beweis des angekündigten Satzes über die Stabilität der B-Splines, denn Lemma I.3.1 und Lemma I.3.3 liefern zusammen

$$||\{a_i\}||_p \leq D_{k,p;\mathbf{t}} || \sum a_i N_{i,k,p}||_p \leq D_{k,p} || \sum a_i N_{i,k,p}||_p.$$

Insbesondere gilt für die Konditionszahl von J_p

$$\kappa_{k,p,\mathbf{t}} := \sup_{\{a_i\}\in l_p} \frac{|| \sum a_i N_{i,k,p}||_p}{||\{a_i\}||_p} \sup_{\{a_i\}\in l_p} \frac{||\{\alpha_i\}||_p}{|| \sum a_i N_{i,k,p}||_p} \leq D_{k,p}, \tag{I.3.48}$$

d.h. sie ist gleichmäßig bezüglich der Knotenwahl beschränkt. Damit ist das in bereits in Abschnitt I.1. angekündigte Ziel einer solchen Basis erreicht.

Interessant ist es, Spezialfälle von Knoten zu betrachten. Wählt man z.B.alle Knoten von höchster Vielfachheit, d.h. nach Abschnitt I.2.3 als B-Splines die Bernstein-Polynome auf jedem Segment, so kann man die Konditionszahl sogar explizit bestimmen. Dazu sei diese Zahl mit κ^* bezeichnet. Dann nimmt man $[a,b]=[0,1]$ in in Definition I.3.2 und $\varphi_i(x) = p_{i-1,n+1}((x+1)/2), i=1,\ldots,n+1$ als Basiselemente nach Definition I.1.4. Bei dieser affinen Transformation der Intervalle und der Bernstein- Polynome bleibt die Konditionszahl auf Grund ihrer Definition ungeändert. Man dividiert nun jeweils durch den $i-$ ten Koeffizienten in $p((x+1)/2) = \sum_{j=0}^n a_j p_{j,n}((x+1)/2)$ und erhält

$$\kappa^{-1} = \min_{0\leq i\leq n} \inf_{\{a_j\}} \|p_{i,n}((x+1)/2) - \sum_{0\leq j\neq i}^{n} a_j p_{j,n}((x+1)/2)\|_{\infty,[0,1]}. \tag{I.3.49}$$

Zur Lösung dieses Extremalproblems beachtet man, daß für jedes i das System $\{p_{j,n}((x+1)/2)\}_{0\leq j\neq i}$ einen Tschebyscheff-Raum in $C[-1,1]$ aufspannt (siehe Abschnitt I.6). Aus dem bekannten Alternantensatz für die beste Approximation in $C[-1,1]$ durch Tschebyscheff- Räume (siehe Abschnitt I.8.1) folgt dann, daß das Infimum in (I.3.49) dadurch charakterisiert ist, daß die Differenz in der Norm ein Vielfaches des **Tschebyscheff-Polynoms** $T_n(\cos x) := \cos nx$ ist. Wegen $\|T_n(x)\|_{\infty,[-1,1]} = 1$ folgt dann aus (I.3.49) die Formel

$$(\kappa^*)^{-1} = \min_{0\leq i\leq n} \{\alpha_i : \quad \alpha_i T_n(x) = p_{i,n}((x+1)/2) - \sum_{0\leq j\neq i}^{n} a_{i,j} p_{j,n}((x+1)/2)\},$$

wobei die Koeffizienten $a_{i,j}$ bei festem α_i dadurch festgelegt sind. Dies ist nach Substitution $\alpha_i = \beta_i^{-1}$ äquivalent zu

$$\kappa^* = \max_{0\leq i\leq n} \{\beta_i : T_n(x) = \beta_i p_{i,n}((x+1)/2) - \sum_{0\leq j\neq i}^{n} b_{i,j} p_{j,n}((x+1)/2)\}.$$

T.Lyche(1978) hat den maximalen Koeffizienten β_i dieser Charakterisierung von κ mit Hilfe der Rodrigues-Formel von $T_n(x)$ bestimmt. Das Resultat ist

$$\kappa^* = \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{n-1}{[(n-1)/2]}}. \tag{I.3.50}$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Wallis folgt daraus die einfachere Abschätzung

$$\kappa^* \leq ((n+1)/n)2^{n-1/2}.$$

Man kann sogar auch für die Zahl $D_{k,p}$ zeigen (Scherer- Shadrin[SS]), daß sie im wesentlichen dieses Wachstum in k besitzt, d.h. die Bernstein-Bezier- Basis stellt praktisch den schlechtesten Fall unter den B-Splines dar, was die Kondition betrifft. Eine bessere Konditionszahl liefert der Fall der **äquidistanten** Knoten. Hier kann man zeigen (s. Kapitel II.2 des Skripts), daß sich die Konditionszahl asymptotisch wie $(\pi/2)^k/2$ verhält.

Schließlich sei noch erwähnt, daß auch die Kondition der Basis der Monome auf einem Intervall $[0, b]$ abgeschätzt werden kann. Dafür ist es zweckmäßig $\varphi_j(x) = (x/b)^j, j = 0, ..., n$ als Basis zu wählen. Auf Grund dieser Skalierung sieht man sofort, daß das erste Supremum in (I.3.35) den Wert $n + 1$ hat. Man erhält daher

$$K = \max_{0\leq i\leq n} \sup_{p\in\Pi_{n+1}} |p^{(i)}(0)|b^i/(i!\|p\|_{\infty,[0,b]}.$$

Die Lösung dieses Extremalproblems ist bekannt (siehe T.Rivlin[Riv], S.93) und als Ergebnis (s. C.deBoor[Boo]) bekommt man mit elementaren Abschätzungen

$$K \geq T_n(3) \sim \frac{1}{2}(3+\sqrt{8})^n$$

wobei $T_n(x)$ wieder das Tschebyscheff-Polynom bezeichnet. Die Basis der Monome hat also eine etwas schlechtere Kondition als die der Bernstein- Bezier-Basis. In dieser Beziehung sei noch bemerkt, daß es für den Raum Π_k der Polynome vom Grad $k-1$ allein jedoch Basen gibt, deren Kondition (in der Supremumsnorm) nur wie *log k* in k wächst(s. C.deBoor, loc.cit.).

I.3.4 Übungsaufgaben zu Abschnitt I.3

AUFGABE 1
Mit Hilfe der biorthogonalen Funktionale von Satz I.3.1 zeige man: Hat eine Splinefunktion $s(x) \in S_{k,\mathbf{t}}$ (vgl. (I.3.28)) einen Träger (t_i, t_{i+s}) mit $t_{i+s} < t_{i+k}$, so muß $s(x) \equiv 0$ gelten, d.h. B-splines sind die Splinefunktionen aus $S_{k,\mathbf{t}}$ mit minimalem Träger. Ferner zeige man für Folgen $\mathbf{t}$ von einfachen Knoten: Jede Splinefunktion der Ordnung k mit Knoten aus $\mathbf{t}$ und Träger in (t_i, t_{i+k}) muß bis auf eine multiplikative Konstante gleich $N_{i,k}(x)$ sein.

AUFGABE 2
Man beweise die Marsden-Formel (I.2.4) mit Hilfe der biorthogonalen Funktionale von (I.3.3).

AUFGABE 3
Es sei $\mathbf{t} = \{t_i\}$ eine Knotenfolge, die (I.2.9) erfüllt und $\alpha = \{\alpha_i\}$ eine Folge von Daten mit der Eigenschaft

$$\sup |[t_i, ..., t_{i+k}]\alpha| \leq \infty \quad , \tag{I.3.51}$$

d.h. das Supremum über alle möglichen dividierten Differenzen k-ter Ordnung der Werte α_i ist endlich. Man zeige dann, daß es eine Funktion $f \in W_p^{(k)}(-\infty, \infty)$ gibt mit $f(t_i) = \alpha_i$ für alle Knoten t_i und $||f^{(k)}||_p$ beschränkt durch eine Konstante mal den Ausdruck in (I.3.50).
Ein solches f ist gegeben durch die Wahl

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_j ([t_j, ..., t_{j+k}]\, \alpha) f_j^{(k)}(x) \quad .$$

mit den f_j von Satz I.3.1.

AUFGABE 4
a) Gegeben seien Punkte $x_0 < \ldots < x_{k-1}$ und die Funktionen $\varphi_i(x) := (x - x_i)^{k-1}/(k-1)!$. Man zeige die Biorthogonalitätsrelation

$$f_j(\varphi_i) = \delta_{ij} \qquad , 0 \leq i \leq k-1$$

für die Funktionale

$$F_j(f) := \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-1-l} f^{(l)}(x_j) L_j^{k-1-l}(x_j)$$

wobei die $L_j(x)$ die Lagrangeschen Fundamentalpolynome von Grad $k-1$ zu den Knoten $x_0, \ldots, x_{k-1}$ sind.
b) Man formuliere und beweise einen analogen Sachverhalt wie in a) für zusammenfallende Knoten.

AUFGABE 5
Man zeige, daß die biorthogonalen Funktionale zur Basis von Lemma I.1.2 gegeben sind durch

$$\lambda_i(f) := f^{(i)}(0)/i! \quad , \quad 0 \leq i \leq k-1$$

$$\lambda_{j,l}(f) := [f^{(l)}(\xi_i^+) - f^{(l)}(\xi_i -)]/l! \quad ; z_i \leq l \leq k-1, 1 \leq i \leq n$$

AUFGABE 6
Die biorthogonalen Funktionale zu den Monomen $1,\ x,\ x^2, ...$ führen zur **Abel- Gontscharoff Interpolation**, s. P.J.Davis[Da], S.46ff. Man benütze dies, um eine Darstellung von ihnen anzugeben.

I.4 Approximationsgüte von Splinefunktionen

I.4.1 Einführung

Thema dieses Abschnitts ist die Güte, mit der Splinefunktionen vorgegebene Funktionen approximieren. Wir behandeln diese zentrale Frage hier im wesentlichen nur für die Supremum-Norm von Funktionen aus $C[a,b]$. Insbesondere wird untersucht, wie ihre Glattheitseigenschaften die Güte der Approximation durch Linearkombinationen von B-Splines beeinfluß t. Zur Einführung betrachten wir den einfachsten Fall der Approximation von $f(x) \in C[a,b]$ durch

$$Af := \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) N_{i,k} \tag{I.4.1}$$

wobei B-Splines $N_{i,k}$ bezüglich einer Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ gebildet seien, und die $\{\tau_i\}_{i=1}^{n}$ Stützstellen seien mit

$$a \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leq b. \tag{I.4.2}$$

Wir bilden dann für $x \in [t_j, t_{j+1}] \bigcap [a,b]$ die Differenz

$$f(x) - (Af)(x) = f(x) - \sum_{i=j-k+1}^{j} f(\tau_i) N_{i,k}(x) \tag{I.4.3}$$

wobei die Trägereigenschaft der $N_{i,k}$ ausgenutzt wurde. Daraus ist zu sehen, daß die Knotenfolge $\mathbf{t}$ nicht ganz willkürlich gewählt werden darf, um eine sinnvolle Approximation zu erzeugen. Notwendig ist sicherlich $t_{k+1} > a$ und $t_n < b$, da sonst entweder $N_{1,k}$ oder $N_{n,k}$ zur Summe (I.4.1) nichts beitragen würden, wenn $x \in [a,b]$. Eine weitere natürliche Forderung ergibt sich durch die Spezialisierung $f(x) \equiv 1$, denn dann zeigt (I.4.3), daß die $N_{i,k}$ eine Zerlegung der Einheit auf $[a,b]$ bilden sollten. Nach Formel (I.2.32) gilt aber für $x \in [t_r, t_{s+1}]$

$$1 = \sum_{i=r+1-k}^{s} N_{i,k}(x)$$

Dies bedeutet, daß in diesem Falle $t_k \leq a$ und $t_{n+1} \geq b$ sein sollte. Wir legen $\mathbf{t}$ also fest durch

$$\mathbf{t} : t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq a < t_{k+1} \leq \ldots \leq t_n < b \leq t_{n+1} \leq \ldots \leq t_{n+k} \tag{I.4.4}$$

Hier ist die Lage der ersten und letzten k Knoten noch beliebig wählbar. Die Standardwahl ist durch

$$t_1 = \ldots = t_k = a \quad , \quad b = t_{n+1} = \ldots = t_{n+k}$$

gegeben (vergl. (I.3.24)). Nach diesen Vorbetrachtungen ergibt sich nun für den Fehler in (I.4.3)

$$\begin{aligned} |f(x) - (Af)(x)| &= \Big|\sum_{i=j+1-k}^{j} [f(x) - f(\tau_i)] N_{i,k}(x)\Big| \\ &\leq \max_{j+1-k \leq i \leq j} |f(x) - f(\tau_i)| \sum_{i=j+1-k}^{j} N_{i,k}(x) \\ &\leq \max \Big\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [t_j, t_{j+1}] \cup [\tau_{j+1-k}, \tau_j] \Big\} \end{aligned} \tag{I.4.5}$$

Das in der Klammer angegebene Intervall sollte für eine gute Abschätzung möglichst klein sein. Man erreicht das durch Zentrieren der beiden Intervalle, d.h. durch die Forderung

$$\frac{t_j + t_{j+1}}{2} = \frac{\tau_{j+1-k} + \tau_j}{2} \qquad j = k, \ldots, n \tag{I.4.6}$$

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$t_{\nu+1/2} := \frac{t_\nu + t_{\nu+1}}{2} \quad , \quad \tau_{\mu+1/2} := \frac{\tau_\mu + \tau_{\mu+1}}{2} \tag{I.4.7}$$

für irgendwelche ganzzahligen ν, μ läßt sich (I.4.4) vereinfacht ersetzen durch $t_{j+1/2} = \tau_{j-(k-1)/2}$ bzw. durch

$$\tau_i = t_{i+k/2} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.4.8}$$

In diesem Fall erhalten wir dann aus (I.4.5)

$$|f(x) - (Af)(x)| \leq \quad \max\{|f(x - f(y)| : |x - y| \leq \max(t_{j+1} - t_{j+1-k/2}, t_{j+k/2} - t_j)\}$$

Führen wir nun ein

$$\bar{\Delta} := \max_i \Delta t_i := \max_i (t_{i+1} - t_i) \tag{I.4.9}$$

so haben wir durch Anwendung der letzten Abschätzung für $j = k, \ldots, n$ bewiesen

Lemma I.4.1 *Für $f \in C[a, b]$ gilt für Af aus (I.4.1) und* $\mathbf{t}$ *aus (I.4.4)*

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - (Af)(x)| \leq \omega(f; k\bar{\Delta}/2) \tag{I.4.10}$$

wobei der **Stetigkeitsmodul** $\omega(f; \delta)$ *durch*

$$\omega(f; \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta\} \tag{I.4.11}$$

erklärt ist.

Bemerkung: Aus dem Beweis dieses Lemmas geht hervor, daß man Konvergenz der Approximation gegen $f(x)$ für $\bar{\Delta} \to 0$ erreicht, d.h. die Knotenfolge wird immer mehr verfeinert. Es wird sich zeigen, daß dies typisch für die Approximation durch Splinefunktionen ist.

Bei der Herleitung von Lemma I.4.1 haben wir entscheidend die Zerlegung der Einheit durch B-Splines benützt, die wiederum durch die Forderung $A(f) = f$ für $f(x) \equiv 1$ motiviert wurde. Um ein noch besseres Approximationsverhalten zu erreichen, genügt der einfache Ansatz (I.4.1) nicht. Eine Verallgemeinerung ist

$$Af := \sum_{i=1}^{n} \mu_i(f) N_{i,k} \tag{I.4.12}$$

gegeben, wobei die B-Splines bezüglich der Folge $\mathbf{t}$ in (I.4.4) gebildet seien und die $\mu_i(f)$ stetige lineare Funktionale in $f \in L_p(a, b)$. Damit sind aber bereits alle sinnvollen Approximationsverfahren erfaßt, die linear in $f \in L_p(a, b)$ sind. Darunter sind besonders wichtig Projektions- und Interpolationsverfahren. Diese sind in dem folgenden Lemma charakterisiert:

Lemma I.4.2 *a) Das Approximationverfahren Af von (I.4.12) ist ein* **Projektionsverfahren** *bzw. ein Projektor auf $S_{k,\mathbf{t}} := span\{N_{i,k}\}_{i=1}^n$, d.h. es gilt $A(N_{i,k}) = N_{i,k}$ für $1 \le i \le n$ genau dann, wenn die Funktionale $\mu_i(f)$ biorthogonal sind.*

b) Sind die Funktionale $\mu_i(f)$ von der Form $\mu_i(f) = \sum_{j=1}^n b_{ij} f(\tau_j)$ (falls f stetig ist), so ist Af ein **Interpolationsverfahren** *mit den Stützstellen $f(\tau_j)$ genau dann, wenn die Matrix $\{b_{ij}\}$ Inverse der* **Kollokationsmatrix** *$\{N_{i,k}(\tau_j)\}$ ist.*

BEWEIS: Af ist ein Projektor genau dann, wenn

$$N_{j,k} = A(N_{j,k}) = \sum_{i=1}^n \mu_i(N_{j,k}) N_{i,k}$$

gilt. Aus der linearen Unabhängigkeit der $N_{i,k}$ folgt, daß dies genau dann vorliegt, wenn $\mu_i(N_{j,k}) = \delta_{i,j}$ erfüllt ist, d.h. die μ_i sind biorthogonal. Zum Beweis des zweiten Teils werten wir die Interpolationseigenschaft von Af aus, d.h.

$$\begin{aligned} f(\tau_l) = (Af)(\tau_l) = & \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f(\tau_j) \right) N_{i,k}(\tau_l) \\ = & \sum_{j=1}^n f(\tau_j) \sum_{i=1}^n b_{ij} N_{i,k}(\tau_l) \end{aligned}$$

Da dies für alle stetigen f gelten soll, folgt

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} N_{i,k}(\tau_l) = \delta_{l,j}$$

und damit die Behauptung . □

Projektionsverfahren spielen in der Approximationstheorie eine bedeutende Rolle bei der Untersuchung der Approximationsgüte. Um dies zu studieren, führen wir im vorliegenden Fall für Funktionen $f \in L_p(a,b)$ die Größe

$$dist(f; S_{k,\mathbf{t}})_p := \inf\{||f - s||_{(a,b),p} : s \in S_{k,\mathbf{t}}\} \tag{I.4.13}$$

ein, d.h. wir messen die Approximationsgüte durch die **beste Approximation mit Splinefunktionen** aus $S_{k,\mathbf{t}}$. Dann zeigen wir

Lemma I.4.3 *Es sei Af ein Projektor vom Typ (I.4.12) auf $S_{k,\mathbf{t}} \subset L_p(a,b)$. Dann gilt für jedes $f \in L_p(a,b)$ die Fehlerabschätzung*

$$||Af - f||_{p,(a,b)} \le (1 + ||A||_p)\ dist(f; S_{k,\mathbf{t}}))_p \tag{I.4.14}$$

wobei die Operatornorm $||A||_p$ von A durch

$$||A||_p := \sup_{f \in L_p(a,b), f \neq 0} \frac{||Af||_p}{||f||_p} \tag{I.4.15}$$

definiert ist (entprechend für $f \in C[a,b]$). Es gilt allgemein

$$||A||_p \le \Big(\sum_i ||\mu_i||_p^p (t_{i+k} - t_i)/k \Big)^{1/p} \tag{I.4.16}$$

wobei $||\mu_i||_p$ analog zu $||A||_p$ definiert ist. Im Falle, daß $b-a$ endlich ist, gilt speziell

$$||A||_p \le (b-a)^{1/p} \sup_i ||\mu_i||_p. \tag{I.4.17}$$

Beweis: Die Ungleichung (I.4.14) ist grundlegend und in der Approximationstheorie wohlbekannt. Der einfache Beweis basiert auf der Aufspaltung des Fehlers $Af - f$ in

$$Af - f = A(f - s) + s - f,$$

wobei die Projektionseigenschaft $As = s$ für beliebiges $s \in S_{k,\mathbf{t}}$ ausgenützt wurde. Die Dreiecksgleichung darauf angewandt und anschließende Bildung des Infimums über s liefert mit (I.4.15) und (I.4.13) sofort (I.4.14).
Ungleichung (I.4.16) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} ||Af||_p &= ||\textstyle\sum_i \mu_i(f)((t_{i+k} - t_i)/k)^{1/p} N_{i,k,p}||_p \leq \left(\sum_i |\mu_i(f)|^p (t_{i+k} - t_i)/k\right)^{1/p} \\ &\leq ||f||_{p,(a,b)} \left(\textstyle\sum_i ||\mu_i||_p^p (t_{i+k} - t_i)/k\right)^{1/p} \end{aligned}$$

und (I.4.17) weiter aus

$$\Big(\sum_i ||\mu_i||_p^p (t_{i+k} - t_i)/k\Big)^{1/p} \leq \sup_i ||\mu_i||_p \Big(\sum (t_{i+k} - t_i)/k\Big)^{1/p} (b-a)^{1/p} \sup_i ||\mu_i||_p.$$

□

Entscheidend dafür, daß die obige Fehlerabschätzung brauchbar wird, ist nun die gleichmäßige Beschränktheit der Norm $||A||_p$ des Projektors A unabhängig von der zugrunde liegenden Knotenfolge. Dann zeigt nämlich (I.4.14), daß die Approximationsgüte des Projektors A bis auf eine Konstante die gleiche wie bei der besten Approximation ist, und zwar unabhängig davon, wie fein die Knotenfolge gewählt ist. Letzteres ist aber notwendig für eine Konvergenz der Approximation (vergl. die Bemerkung im Anschluß an Lemma I.4.1). Gleichzeitig sichert die gleichmäßige Beschränktheit von $||A||_p$ auch die numerische Stabilität des Approximationsverfahrens Af bei dieser variablen $\mathbf{t}$.
Eine Hauptaufgabe der Approximationstheorie ist es, konkrete solche Verfahren zu entwickeln. Im Falle der Splinefunktionen können wir die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts über biorthogonale Funktionale heranziehen, um Projektionsverfahren anzugeben, die nach Teil a) von Lemma I.4.2 alle Funktionen eines vorgegebenen Splineraums exakt reproduzieren. Gegenüber Interpolationsverfahren hat dies den Vorteil, daß zur Konstruktion kein Gleichungssystem gelöst werden muß, was ja nach Teil b) dieses Lemmas notwendig ist. Trotzdem ist Approximation durch Interpolation von großer Bedeutung in der Splinetheorie, da die zugehörige Matrix $\{N_{i,k}(\tau_j)\}$ Bandstruktur besitzt. Das resultierende Gleichungssystem kann dann bekanntlich mit wenig Aufwand gelöst werden. Wir werden in Abschnitt I.7 näher darauf eingehen.

I.4.2 Lokale Fehlerabschätzungen

In diesem Unterabschnitt wollen wir lokale Fehlerabschätzungen in der L_p- Norm für Projektionsverfahren des Typs (I.4.12) herleiten. Nach Lemma I.4.2 benötigen wir dazu biorthogonale Funktionale zu den B– Splines. Sie sind durch die Sätze I.3.1 -I.3.3 des vorangegangenen Abschnitts genau charakterisiert worden. Die einfachsten derartigen Funktionale (I.3.3) nach deBoor-Fix eignen sich jedoch dafür nicht, da sie nur für glatte Funktionen definiert sind. Um Funktionale auf ganz $L_p(a, b)$ zu erhalten, muß man einen Ansatz der Form (I.3.11) wählen, und diesen nach Formel (I.3.18) konkretisieren. Die so erhaltenen biorthogonalen Funktionale haben den zusätzlichen Vorteil, daß sie lokalen Träger besitzen. Diese Eigenschaft wollen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen genauer formulieren.

Definition I.4.1: *Ein lineares Funktional $\mu_i(f)$ von $f \in L_p(a,b)$ hat den Träger (t_i, t_{i+r}) mit einer festen Zahl $r \in \mathrm{N}$, wenn gilt*

$$f(x) = 0, x \in [t_i, t_{i+r}] \qquad \Rightarrow \mu_i(f) = 0 \tag{I.4.18}$$

Hiermit läßt sich die trivialerweise geltende Aussage

$$|\mu_i(f)| \le ||\mu_i||_p \; ||f||_{p,(a,b)}$$

lokal verschärfen. Um dies zu sehen, betrachten wir eine beliebige stetige Funktion $\varphi(x)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad , x \notin [t_i - \delta, t_{i+r} + \delta] \\ 1 & : \quad , x \in [t_i, t_{i+r}] \\ \in (0,1) & : \quad , \text{sonst} \end{cases}$$

für δ genügend klein. Dann folgt $0 = g(x) - g(x)\varphi(x)$ für $x \in [t_i, t_{i+r}]$ und daher

$$|\mu(g)| = |\mu_i(g - g\varphi) + \mu(g\varphi)| \le ||\mu_i||_p \; ||g \cdot \varphi||_{p,[t_i-\delta, t_{i+r}+\delta]}$$

Da dies für alle derartige φ und $\delta > 0$ gilt, folgt gegenüber vorher stärker

$$|\mu_i(g)| \le ||\mu_i||_p ||g||_{p,[t_i,t_{i+r}]} \tag{I.4.19}$$

Die in (I.3.11) angesetzten biorthogonalen Funktionale

$$\mu_j(f) := \int_a^b g_j^{(k)}(x) \; dx, \qquad g_j \quad \text{wie in (I.3.18,} \tag{I.4.20}$$

erfüllen also Definition I.4.1 mit $r = k$. Entscheidend ist nun, daß für sie nach Lemma I.3.3 gilt

$$M_{k,p} := \sup_{\mathbf{t}} M_{k,p,\mathbf{t}} < \infty \tag{I.4.21}$$

wobei analog zu (I.3.43) definiert ist

$$M_{k,p,\mathbf{t}} := \sup_i (t_{i+k} - t_i)/k)^{1/p} ||\mu_i||_p. \tag{I.4.22}$$

Der folgende Satz zeigt, daß diese Eigenschaft genau dazu ausreicht, um lokale Fehlerabschätzungen für speziell aus biorthogonalen Funktionalen entstehende Projektionsverfahren zu erzielen. Sie verschärfen die globale Fehlerabschätzung (I.4.14), die erst unter der stärkeren Voraussetzung

$$\Big(\sum_i ||\mu_i||_p^p (t_{i+k} - t_i)/k\Big)^{1/p} < \infty$$

in (I.4.16) in dieser Form folgt.

Satz I.4.1 *Es sei durch (I.4.12) ein lineares Approximationsverfahren auf $L_p(a,b)$ gegeben, wobei die $\mu_i(f)$ biorthogonale Funktionale der Form (I.4.20) seien und (I.4.19), (I.4.21) erfüllen sollen. Dann gilt für $f \in L_p(a,b)$ und jedes Intervall $(t_j, t_{j+1}) \subseteq [a,b]$*

$$||f - Af||_{p,(t_j,t_{j+1})} \le (1 + M_{k,p}) \inf_{q \in \Pi_k} ||f - q||_{p, \; (t_{j+1-k}, t_{j+r})}. \tag{I.4.23}$$

Falls f auf $[t_{j+1-k}, t_{j+r}]$ weiter l-mal differenzierbar ist mit Ableitung $f^{(l)} \in L_p(t_{j+1-k}, t_{j+r})$ für ein $l = 1, \ldots, k$, so gilt

$$||f - Af||_{p,\ (t_j,t_{j+1})} \leq (t_{j+r} - t_{j+1-k})^l [(1 + M_{k,p})/l!] ||f^{(l)}||_{p,\ (t_{j+1-k},t_{j+r})}, \tag{I.4.24}$$

und speziell für $f^{(l)} \in L_p(a, b)$

$$||f - Af||_{p,(a,b)} \leq (1 + M_{k,p})[(k - 1 + r)^l/l!] |\bar{\Delta}|^l ||f^{(l)}||_{p,(a,b)}, \tag{I.4.25}$$

wobei $|\bar{\Delta}| := \max |t_{j+1} - t_j|$.

BEWEIS : Jedes Polynom $q \in \Pi_k$ liegt in $S_{k,\mathbf{t}}$. Da Af lt. Voraussetzung ein Projektionsverfahren ist , gilt also

$$f - Af = f - q - A(f - q), \qquad \forall q \in \Pi_k \tag{I.4.26}$$

und somit für $x \in [t_j, t_{j+1}]$ wegen der Träger -Eigenschaften der $N_{i,k}$ und (I.4.19)

$$\begin{aligned} |f(x) - (Af)(x)| &\leq |f(x) - q(x)| + \sum_{i=j+1-k}^{j} |\mu_i(f - q)| N_{i,k}(x) \\ &\leq |f(x) - q(x)| + \left(\sup_{j+1-k \leq i \leq j} ||\mu_i||_p \ ||f - \ q||_{p,\ (t_i,t_{i+r})} \right) \cdot 1 \end{aligned}$$

wobei wir noch $\sum_{i=j+1-k}^{j} N_{i,k}(x) = 1$ berücksichtigt haben. Bildung der L_p-Norm bezüglich (t_j, t_{j+1}) liefert dann

$$||f(x) - (Af)(x)||_{p,(t_j,t_{j+1})} \leq ||f - p||_{p,\ (t_j,t_{j+1})} + ((t_{j+1} - t_j)^{1/p} \sup_{j+1-k \leq i \leq j} ||\mu_i||_p) ||f - q||_{p,\ (t_{j+1-k},t_{j+r})},$$

und mit Voraussetzung (I.4.21) folgt weiter

$$||f(x) - (Af)(x)||_{p,\ (t_j,t_{j+1})} \leq (1 + M_{k,p}) ||f - \ q||_{p,\ (t_{j+1-k},t_{j+r})}$$

und hieraus (I.4.23) nach Bildung des Infimums über $q \in \Pi_k$.

Für den Rest benutzen wir die Taylor - Formel um den Punkt $c \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l-1} f^{(0)}(c)(x - c)^i/i! + \frac{1}{(l-1)!} \int_c^b (x - t)_+^{l-1} f^{(l)}(t) dt,$$

woraus mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung für L_p-Normen

$$\inf_{q \in \Pi_k} ||f - q||_{p,(c,d)} \leq \frac{1}{(l-1)!} || \int_c^d (\cdot - t)^{l-1} f^{(l)}(t)\ dt||_{p,(c,d)} \tag{I.4.27}$$

$$\leq \quad \frac{1}{(l-1)!} \int_c^d ||(\cdot - t)^{l-1} f^{(l)}(t)\ dt||_{p,(c,d)} \leq \frac{(d-c)^l}{l!} ||f^{(l)}||_{p,(c,d)}$$

folgt. Setzt man dies für $(c, d) = (t_{j+1-k}, t_{j+r})$ in (I.4.23) ein, so ergibt sich direkt (I.4.24). Bildet man anschließend auf beiden Seiten die $p-$te Potenz , summiert über j, und nochmals die $1/p-$ te Potenz, so erhält man (I.4.25). □

Als Konsequenz von Satz I.4.1 ergibt sich jetzt die gewünschte Aussage über die Approximationsgüte von Splinefunktionen .

Korollar I.4.1: *Es sei* $\bar{\Delta}$ *, wie in (I.4.25) definiert und* f *l-mal differenzierbar auf* (a,b) *für ein* $l = 0,...k$ *mit* $f^{(l)} \in L_p(a,b)$*. Dann gibt es eine von* $\bar{\Delta}$ *und* f *unabhängige Konstante* $C_{l,p}$*, so daß*

$$dist(f; S_{k,\mathbf{t}})_{p,(a,b)} \leq C_{l,p}\ \bar{\Delta}^{l-1}\omega_p(f^{(l-1)}; 2k\bar{\Delta}) \tag{I.4.28}$$

gilt, wobei der Stetigkeitsmodul $\omega_p(f;\delta)$ *von* $f \in L_p(a,b)$ *allgemeiner als in (I.4.11) erklärt ist durch*

$$\omega_p(f;\delta) := \sup_{|h|\leq\delta} ||f(\cdot + h) - f(\cdot)||_{p,(a,b)} \tag{I.4.29}$$

BEWEIS: Wir benötigen eine Modifikation der Abschätzung (I.4.27). Es sei $q^* \in \Pi_k$ derart, daß

$$||f' - (q^*)'||_{p,(c,d)} = \inf_{q\in\Pi_{k-1}} ||f' - q||_{p,(c,d)}$$

Dann folgt mit (I.4.27) für $l = 1$ angewendet auf $f - q^*$ statt f

$$\begin{gathered} \inf\nolimits_{q\in\Pi_k} ||f - q||_{p,(c,d)} = \inf\nolimits_{q\in\Pi_k} ||f - q^* - q||_{p,(c,d)} \\ \leq (d-c)||f' - (q^*)'||_{p,(c,d)} = (d-c)\inf\nolimits_{q\in\Pi_{k-1}} ||f' - q||_{p,(c,d)} \end{gathered}$$

Wiederholte Anwendung dieser Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} \inf_{q\in\Pi_k} ||f - q||_{p,\ (c,d)} &\leq (d-c)^{l-1} \inf_{q\in\Pi_{k-l+1}} ||f^{(l-1)} - q||_{p,\ (c,d)} \\ &\leq ((d-c)^{l-1} \inf_{q\in\Pi_1} ||f^{(l-1)} - q||_{p,\ (c,d)} \end{aligned}$$

Die letzte Größe schätzen wir mit der Abkürzung $g := f^{(l)}$ weiter ab durch

$$\begin{aligned} & \inf_{q\in\Pi_1} ||g - q||_{p,\ (c,d)} \leq ||g - (d-c)^{-1}\int_c^d g(u)\ du||_{p,\ (c,d)} \\ = \quad & (d-c)^{-1}||\int_c^d [g(\cdot) - g(u)]du||_{p,\ (c,d)} \leq (d-c)^{-1}\int_c^d du\ ||g(\cdot) - g(u)||_{p,\ (c,d)} \\ \leq \quad & (d-c)^{-1}\int_c^d du \sup_{|h|\leq d-c} ||g(\cdot) - g(\cdot + h)||_{p,\ (c,d)} \leq \sup_{|h|\leq d-c} ||g(\cdot) - g(\cdot + h)||_{p,\ (c,d)} \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\inf_{q\in\Pi_k} ||f - q||_{p,\ (c,d)} \leq (d-c)^{l-1} \sup_{|h|\leq d-c} ||g(\cdot) - g(\cdot + h)||_{p,\ (c,d)}$$

Setzen wir dies in (I.4.23) ein, bilden die $p-$te Potenz auf beiden Seiten und summieren über j, so folgt unmittelbar Abschätzung (I.4.28) $\square$.

Wir wollen Satz I.4.1 noch erweitern, indem wir untersuchen, wie gut das Approximationsverfahren Af auch Ableitungen approximiert. Dazu muß Af weiter modifiziert werden. Die entscheidende Idee (nach L.L. Schumaker) ist, die Knotenfolge $\mathbf{t}$ so auszudünnen, daß die Knoten " fast gleichmäßig" verteilt sind.

Lemma I.4.4 *Gegeben ist eine Zerlegung* $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b\}$ *des Intervalls* $[a,b]$*. Dann existiert eine Zerlegung* $\widetilde{\Delta} : a = \widetilde{x}_0 < \ldots < \widetilde{x}_{m+1} = b$ *von* Δ *mit der Eigenschaft*

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\bar{\Delta} \leq \min\nolimits_i(\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_{i-1}) \leq \max\nolimits_i(\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_{i-1}) \leq \tfrac{3}{2}\bar{\Delta} \\ \bar{\Delta} := \max\nolimits_i(x_i - x_{i-1}) \end{gathered} \tag{I.4.30}$$

BEWEIS: Man setze $x_0^* = a$ und definiere $x_1^*, \ldots, x_m^*$ rekursiv durch

$$x_j^* = \min\{x_i : x_i \in [x_{j-1}^* + \bar{\Delta}/2, x_{j-1}^* + 3\bar{\Delta}/2], \quad x_i < b - \bar{\Delta}/2\}$$

Dies läßt sich solange durchführen, bis $x_m^* \geq b - 3\bar{\Delta}/2$ erreicht ist. Dann setze man $x_{m+1}^* = b$, und es läßt sich leicht zeigen, daß die x_j^* mindestens den Abstand $\bar{\Delta}/2$ und höchstens den Abstand $3\bar{\Delta}/2$ untereinander haben, d.h. (I.4.30) gilt. □

Mit dieser so aus $\mathbf{t}$ entstandenen Knotenfolge

$$\tilde{\mathbf{t}} : \underbrace{a = \widetilde{t}_0}_{k-\text{fach}} \quad , \quad \widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_m \quad , \quad \underbrace{\widetilde{t}_{m+1} = b}_{k-\text{fach}}$$

wobei $\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_m$ nach Konstruktion alle einfach sind, definieren wir jetzt

$$\widetilde{A}(f) := \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\mu}_i(f) \tilde{N}_{i,k} \in S_{k,\tilde{\mathbf{t}}} \tag{I.4.31}$$

wobei die $\widetilde{N}_{i,k}$ bezüglich $\tilde{\mathbf{t}}$ gebildet seien, und $\widetilde{\mu}_i(f)$ entsprechend modifiziert gemäß (I.4.12) . Dann können wir annehmen, daß die Funktionale $\widetilde{\mu}_i$ die gleichen Eigenschaften wie die μ_i im Satz I.4.1 erfüllen, und es gilt

Satz I.4.2 *Es sei f $l-$ mal differenzierbar für ein $l = 1, \ldots, k$ mit $f^{(l)} \in L_p(a,b)$ und der Operator $\widetilde{A}(f)$ aus (I.4.31) besitze die oben beschriebenen Eigenschaften. Dann gilt für $x \in (\widetilde{t}_j, \widetilde{t}_{j+1}) \cap (a,b)$ und $\rho = 0, \ldots, l$*

$$||f^{(\rho)} - \widetilde{A}(f)^{(\rho)}||_{p,[\widetilde{t}_j,\widetilde{t}_{j+1}]} \leq c_{k,l,\rho} \bar{\Delta}^{l-\rho} ||f^{(l)}||_{p,\ (t_{j+1-k},t_{j+r})}$$

wobei $C_{k,l,\rho} = (1/(l-\rho)!) + M(k+r-1)^l 4^\rho / l!$. Eine (I.4.25) endsprechende Abschätzung gilt ebenfalls.

BEWEIS: Analog zu (I.4.26) haben wir

$$|f^{(\rho)}(x) - (\widetilde{A}f)^{(\rho)}(x)| \leq |f^{(\rho)}(x) - q^{(\rho)}(x)| + \sum_{i=j+1-k}^{j} |\mu_i(f-p)|\ |\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x)| \tag{I.4.32}$$

Zur Abschätzung des ersten Terms benützen wir die Taylor-Reihe für $f^{(\rho)}$

$$\begin{aligned} f^{(\rho)}(x) \quad &= \textstyle\sum_{i=0}^{l-1-\rho} f^{(\rho+i)}(c)(x-c)^i/i! + \left(\frac{1}{(l-1-\rho)!}\right) \int_c^b (x-t)_+^{l-\rho-1} f^{(l)}(t)dt \\ &= \left[(\textstyle\sum_{i=\rho}^{l-1} f^{(i)}(c)(x-c)^i/i!) \right]^{(\rho)} + \left(\frac{1}{(l-1-\rho)!}\right) \int_c^x (x-t)^{l-\rho-1} f^{(l)}(t)dt \end{aligned}$$

und erhalten mit q als Taylor-Polynom von f und $c = t_j$ analog zu (I.4.27)

$$||f^{(\rho)} - p^{(\rho)}||_{p,\ (t_j,t_{j+1})} \leq \frac{(t_{j+1}-t_j)^{l-\rho}}{(l-\rho)!} ||f^{(l)}||_{p,\ (t_j,t_{j+1})} \tag{I.4.33}$$

Den zweiten Term in (I.4.32) schätzen wir nach (I.4.19) ab durch

$$\sum_{i=j+1-k}^{j} |\mu_i(f-p)|\ |\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x)| \leq M\ ||f-p||_{p,\ (t_{j+1-k},t_{j+r})} \sum_{i=j+1-k}^{j} |\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x)| \tag{I.4.34}$$

Nun ziehen wir die Formel (I.2.23) zur Abschätzung der Ableitungen von B-Splines heran. Weil die Knoten von $\tilde{N}_{i,k}$ einfach sind, folgt

$$|\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x) \leq 2[\min_i(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1})]^{-1} \max(||\tilde{N}_{i,k-1}^{(\rho-1)}||_\infty, ||\tilde{N}_{i+1,k-1}^{(\rho-1)}||_\infty)$$

Wiederholte Anwendung von (I.2.23) zeigt zusammen mit (I.2.32) und (I.4.30), daß

$$|\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x)| \leq [2\min_i(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1})]^{-\rho} \leq (\bar{\Delta})^{-\rho}$$

gilt. Setzen wir dies zusammen mit (I.4.30) in (I.4.34) ein und berücksichtigen außerdem (I.4.27), so ergibt sich wie in Satz I.4.1

$$\sum_{i=j+1-k}^{j} |\mu_i(f-q)|\ |\tilde{N}_{i,k}^{(\rho)}(x)| \leq \left(\bar{\Delta})^{-\rho}(\sup_{j+1-k\leq i\leq j} ||\mu_i||_p||f-\ q||_{p,\ (t_i,t_{i+r})}\right) \cdot 1$$

Zusammen mit (I.4.33) sind nun beide Terme in (I.4.32) in gleicher Weise wie in Satz I.4.1 bis auf den zusätzlichen Faktor $(\bar{\Delta})^{-\rho}$ abgeschätzt und die Behauptung folgt. □

Zu den Sätzen I.4.1 und I.4.2 sei noch bemerkt, daß sich allgemeinere Abschätzungen mittels Stetigkeitsmoduli von höherer Ordnung beweisen lassen. Wir gehen in einem späteren Kapitel näher darauf ein.

I.4.3 Quasiinterpolanten

Eine wichtige Erweiterung betrifft die Möglichkeit, einfachere Operatoren als die Projektionsoperatoren in Satz I.4.1 zu konstruieren, wobei sich die Approximationsgüte gegenüber der optimal möglichen ebenfalls nur um einen konstanten, von der zu approximierenden Funktion unabhängigen Faktor verschlechtern darf. Statt der biorthogonalen Funktionale der Form (I.4.20) sollen jedoch nur Punktfunktionale verwendet werden. Dies ist von praktischem Interesse, denn auch in (I.4.20) muß das Integral erst diskretisiert werden, wenn die zugehörigen Projektionsoperatoren berechnet werden sollen.
Den Schlüssel dazu bildet die Beobachtung, daß bei der Herleitung von Satz I.4.1 die Projektionseigenschaft des Operators Af in (I.4.26) nur eingeschränkt auf dem Raum π_k der Polynome vom Grad $k-1$ ausgenutzt wurde. Dies legt die Idee nahe, mit der abgeschwächten Forderung

$$(Ap)(x) = p(x) \quad ; \quad p \in \Pi_r \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad 1 \leq r \leq k \tag{I.4.35}$$

zu arbeiten. Der folgende Satz zeigt, daß man dies mit Operatoren Af in (I.4.12) erreichen kann, die lineare Funktionale $\mu_i(f))$ der Form

$$\mu_i(f) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{il}[\tau_{i1}, \ldots, \tau_{il}]f \tag{I.4.36}$$

verwenden. Die Punkte $\tau_{i,l} < \ldots < \tau_{i,r}$ sind dabei für $f \in C(a,b)$ vorgegeben. Solche Approximationsverfahren werden in der Literatur **Quasiinterpolanten** genannt.

Satz I.4.3 (Lyche-Schumaker 1975) *Ein Operator Af der Form (I.4.12) mit Funktionalen der Form (I.4.36) erfüllt (I.4.35) genau dann, wenn für ein festes, aber beliebiges $y \in$ R*

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=0}^{j} g_{i,j}^{(l)}(y) \frac{\varphi_{i,k}^{(k-1-l)}(y)}{(k-1!)} \tag{I.4.37}$$

gilt, wobei

$$g_{i,j}(x) := \prod_{\nu=1)}^{j-1} (x-\tau_{i,\nu}), \qquad \varphi_{i,k}(t) := \prod_{\nu=1}^{k-1} (t-t_{i+\nu}). \tag{I.4.38}$$

BEWEIS: Wir erinnern uns der Marsden -Formel (I.2.4). Danach gilt für beliebiges (aber im Folgenden festes)y

$$\frac{(y-x)^{k-1}}{(k-1!)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i,k}(y)}{(k-1!)} N_{i,k}(x).$$

Analog zum daran anschließenden Korollar folgt daraus durch Differentiation nach y

$$g_j(x) := \frac{(y-x)^j}{j!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i,k}^{(k-1-j)}(y)}{(k-1!)} N_{i,k}(x) \quad t_k \le x \le t_{n+1}.$$

Daher gilt (I.4.35) genau dann, wenn für $j = 0, \ldots, r-1$

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i,k}^{(k-1-j)}(y)}{(k-1!)} N_{i,k}(x) = (Ag_j)(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(g_j) N_{i,k}(x).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der B-Splines ist dies äquivalent zu

$$\mu_i(g_j) = \frac{\varphi_{i,k}^{(k-1-j)}(y)}{(k-1!)} \qquad 1 \le i \le n \quad ; \quad 0 \le j \le r-1 \tag{I.4.39}$$

Um dies in Verbindung mit (I.4.37) zu bringen, wählen wir statt der Basis der $g_j(x)$ die den Funktionalen μ_i besser angepaßte Basis aus den Funktionen $g_{ij}(x)$ in (I.4.38). Sie bilden mit den Funktionalen $[\tau_{i1}, \ldots, \tau_{i,l}]$ ein Biorthogonalsystem, denn man verifiziert schnell, daß

$$[\tau_{i1}, \ldots, \tau_{il}] g_{ij} = \delta_{jl}. \tag{I.4.40}$$

gilt. Auf Grund der Darstellung

$$g_{ij}(x) = \sum_{l=0}^{j} g_{ij}^{(l)}(y) g_l(x)/l!.$$

ist nun leicht einzusehen, daß (I.4.39) genau dann gilt, wenn

$$\mu_i(g_{ij}) = \sum_{l=0}^{j} g_{ij}^{(l)}(y) \mu_i(g_l) = \sum_{l=0}^{j} g_{ij}^{(l)}(y) \frac{\varphi_{i,k}^{(k-1-l)}(y)}{(k-1!)}$$

für $j = 0, \ldots, r-1$ gilt. Nach (I.4.40) folgt aber

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{il} [\tau_{i1}, \ldots, \tau_{il}] g_{ij} = \mu_i(g_{ij}),$$

so daß sich damit die gesuchte Darstellung (I.4.37) der Koeffizienten α_{ij} in (I.4.36) ergibt.

Eine kurze Überlegung zeigt, daß die Aussage des Lemmas auch für evtl. zusammenfallende Stützstellen $\tau_{i,1} \le \ldots \le \tau_{i,r}$ erhalten bleibt, wenn wir die dividierten Differenzen in (I.4.36) entsprechend interpretieren (vergl. Abschnitt I.2) und f als genügend glatt vorauszusetzen. Im Spezialfall $\tau_{i1} = \ldots = \tau_{ik} = \tau_i \in (t_i, t_{i+k})$ erhalten wir so für $f \in C^{k-1}[a,b]$ aus (I.4.36)

$$\mu_i(f) = \sum_{l=1}^{k} \alpha_{i,l} f^{(l-1)}(\tau_i)/(l-1)! \tag{I.4.41}$$

Wegen (I.2.4) geht (I.4.37) im Falle $y = 0$ über in $(j - \mu := v)$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \textstyle\sum_{\mu=1}^{j} \frac{(j-1)!}{(j-\mu)!}(-\tau_i)^{j-\mu}(-1)^{\mu-1}\frac{(\mu-1)!}{(k-1)!}\varphi_{ik}^{(k-\mu)}(0)/(\mu-1)! = \\ &= \textstyle\frac{(j-1)!(-1)^{j-1}}{(k-1)!}\sum_{v=0}^{j-1}\frac{\varphi_{i,k}^{(k-j+v)}(0)}{v!}\tau_i^v = \\ &= \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!\varphi_{i,k}^{(k-j)}(\tau_i)}{(k-1)!} \end{aligned}$$

d.h. die Funktionale (I.4.41) stimmen mit denen von (I.3.17) in Lemma (I.3.2) überein.

Weiter diskutieren wir die Fälle $r = 1, 2$. Wegen $\alpha_{i1} = 1$ gilt trivialerweise im ersten Fall $\mu_i(f) = f(\tau_i)$. Im zweiten Fall ergibt (I.4.37) mit $y = 0$

$$\alpha_{i,2} = \eta_i^{(2)} - \tau_{i1} = -\varphi_{i,k}^{(k-2)}(0)/(k-1)! - \tau_{i1}$$

wobei $\varphi_{i,k}(t)$ durch (I.2.34) erklärt ist. Man sieht nun leicht, daß $\varphi_{i,k}^{(k-2)}(0)$ linear in $t_{i+1}, \ldots, t_{i+k-1}$ sein muß, und – weil Vertauschung der $t_{i+\gamma}$ nichts ändert– daß sogar $\varphi_{i,k}^{(k-2)}(0) = c(t_{i+1} + \ldots t_{i+k})$ mit einem festen c gelten muß. Dies liefert schließlich

$$\alpha_{i,2} = \frac{t_{i+1} + \ldots + t_{i+k-1}}{k-1} - \tau_{i1}$$

Formel (I.4.36) fällt nun besonders einfach aus, wenn $\alpha_{i,2} = 0$ erfüllt ist. Wir formulieren dies als

KOROLLAR I.4.3: Der lineare Operator

$$V(f;x) = \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j^*) N_{j,k} \quad , \tag{I.4.42}$$

der zu einer Folge $\mathbf{t}$ aus (I.4.4) durch die Wahl

$$\tau_j^* = \frac{t_{j+1} + \ldots + t_{j+k-1}}{k-1} \tag{I.4.43}$$

gebildet wird, ist exakt für alle Konstanten und lineare Funktionen.

Bemerkung: Dieser Operator wird als variationsvermindernde Spline-Approximation von Schoenberg (1965) bzw. kurz als **Schoenberg-Operator** bezeichnet.

Die Konstruktion von Punktfunktionalen noch höherer Exaktheit kann nach Satz I.4.1 rekursiv durchgeführt werden: sind bereits Punkte $\tau_{i1}, \ldots \tau_{ir}$ gewählt und die α_{ij} für $j = 1, \ldots, r$ aus (I.4.37) berechnet, so braucht man nur einen weiteren Punkt $\tau_{i,r+1}$ zu wählen und danach $\alpha_{i,r+1}$ aus (I.4.37) zu berechnen, um zu einem Verfahren zu kommen, das exakt für $p \in \pi_{r+1}$ ist.

I.4.4 Verfeinerte Abschätzungen

Im Falle der durch (I.4.12), (I.4.37) definierten Quasiinterpolanten kann man eine obere Schranke für $M_{k,\infty}$ in (I.4.21) herleiten .

Lemma I.4.5 *Es seien in (I.4.12), (I.4.36) die Stützstellen $\tau_{i,1} \dots \tau_{i,r}$ gemäß*

$$\tau_{ij} := t_i + (j-1) \cdot h \quad , \quad h := (t_{i+k} - t_i)/(r-1) \tag{I.4.44}$$

gewählt, wobei wir $r \geq 2$ voraussetzen. Dann gilt für die entsprechenden Funktionale

$$\sup_i ||\mu_i||_\infty \leq e^{4(r-1)} \tag{I.4.45}$$

BEWEIS: Wir wählen $y = t_{i+k}$ in der Darstellung (I.4.37). Dann folgt

$$|\left[\prod_{v=0}^{j-1}(x-\tau_{i,\nu})\right]^{(\mu-1)}(y)| \leq |[(x-t_i)^{j-1}]^{(\mu-1)}(y)| \leq (j-1)![(r-1)h]^{j-\mu}/(j-\mu)!$$

und analog

$$|\eta_i^{(\mu)}| \leq (\mu-1)!|[(t-t_1)^{k-1}]^{(k-\mu)}(y)|/(k-1)! \leq [(r-1)h]^{\mu-1},$$

also zusammen

$$|\alpha_{ij}| \leq \sum_{\mu=1}^{j} \binom{j-1}{\mu-1} ((r-1)h)^{j-1} = ((r-1)2h)^{j-1}. \tag{I.4.46}$$

Nun gilt bei Wahl (I.4.44) von äquidistanten Stützstellen

$$[\tau_{i,1}, \dots, \tau_{i,l}]f = h^{1-l} \Delta_h^{l-1} f(t_i)/(l-1)!,$$

wobei die Vorwärtsdifferenzen Δ_h^{j-1} durch

$$\Delta_h^1 f(x) \equiv \Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x) \quad , \quad \Delta_h^j f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{j-1} f(x)) \tag{I.4.47}$$

erklärt sind. Zusammen mit (I.4.46) folgt durch Einsetzen in (I.4.36)

$$|\mu_i(f)| \leq \sum_{l=1}^{r} (2(r-1))^{l-1} |\Delta_h^{l-1} f(t_i)|/(l-1)!$$

Aus (I.4.47) leitet man durch Induktion sofort

$$|\Delta_h^{l-1} f(t_i)| \leq 2^{l-1} ||f||_\infty$$

her. Damit ergibt sich

$$|\mu_i(f)| \leq ||f||_\infty \sum_{l=1}^{r} [4(r-1)]^{l-1}/(l-1)!$$

und daraus (I.4.45). □

Für spätere Zwecke sei noch ausgeführt, wie man in der Abschätzungen (I.4.27) auf der rechten Seite eine optimale Konstante erhalten kann. Ansonsten können der folgende Satz und das anschließende Korollar ohne Verlust für das Weitere ausgelassen werden.

Satz I.4.4 *Es sei $f \in C^k[a,b]$ und $1 \le p \le \infty$. Dann existiert ein $a \le \xi \le b$, so daß gilt*

$$\inf_{g\in\Pi_k} ||f-g||_{p,(a,b)} = c_{k,p}(b-a)^{k+1/p}|f^{(k)}(\xi)|, \tag{I.4.48}$$

wobei

$$c_{k,p} = \inf_{g\in\Pi_k} ||(x^k/k!) - g(x)||_{p,(0,1)}. \tag{I.4.49}$$

BEWEIS: Nach Satz I aus Abschnitt I.8.1 existiert eine beste Approximation p_f zu $f \in C[a,b]$ oder $f \in L_p(a,b)$. Im Falle $p = \infty$ zeigt der dortige Charakterisierungssatz V, daß für $i = 1,\dots,k$ Punkte $x_i \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ existieren müssen mit

$$p_f(x_i) = f(x_i) \qquad 1 \le i \le k \tag{I.4.50}$$

falls $f \in C[a,b]$. Im Falle $1 \le p < \infty$ liefert zunächst Satz IV

$$\int_a^b x^j|\delta(x)|^{p-1} \quad \mathrm{sgn}\delta(x)dx = 0 \qquad j = 0,\dots,k-1 \tag{I.4.51}$$

wobei $\delta(x) \equiv f(x) - p_f(x)$. Für $j = 0$ liefert dies die Existenz mindestens eines x_i mit (I.4.50). Gäbe es weniger solche Nullstellen, sagen wir $a \le x_1 < \ldots < x_m \le b$ mit $m < k$, so würde (I.4.51) liefern

$$\int_a^b (x-x_1)\ldots(x-x_m)|\delta(x)|^{p-1} \quad \mathrm{sgn}[\delta(x)]dx = 0$$

Nun ist aber $\mathrm{sgn}(x-x_1)\ldots(x-x_m) = \pm \quad \mathrm{sgn} \quad [\delta(x)]$, so daß ein Widerspruch vorliegt (mindestens wenn $f \notin \pi_k$). Also gilt (I.4.50) auch in diesem Falle.

Aus (I.4.50) ergibt sich über die Darstellung des Restglieds der Lagrange-Interpolation in Satz I.2.1

$$f(x) - p_f(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_k)f^{(k)}(\xi_x)/k!$$

mit einem von x abhängigen ξ. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} ||f-p_f||_{p,(a,b)} &\ge ||\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_k)}{k!}||_{p,(a,b)} \cdot \min_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)| \\ &\ge \inf_{g\in\Pi_k} ||\frac{x^k}{k!} - g(x)||_{p,(a,b)} \cdot \min_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

Mit Hilfe der linearen Transformation

$$x = (b-a)t + a \qquad , \qquad t \in [0,1]$$

sieht man leicht, daß

$$\inf_{g\in\Pi_k} ||\frac{x^k}{k!} - g(x)||_{p,(a,b)} = (b-a)^{k+1/p}c_{k,p} \tag{I.4.52}$$

gilt und folglich die Abschätzung

$$||f-p_f||_{p,(a,b)} \ge c_{k,p} \min_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)|(b-a)^{k+1/p}. \tag{I.4.53}$$

Zur Abschätzung nach oben betrachten wir das spezielle Approximationsproblem (I.4.49). Wieder Satz I aus Abschnitt I.8.1 zeigt zusammen mit (I.4.52) die Existenz eines $q^* \in \Pi_k$ derart, daß

$$k!(b-a)^{k+1/p}c_{k,p} = ||x^k - q^*(x)||_{p,(a,b)}$$

und die Sätze IV , IX aus I.8.1 die Existenz von Punkten $a \leq x_1^* < x_2^* < \ldots < x_k^* \leq b$ mit

$$(x_i^*)^k = q^*(x_i^*) \qquad 1 \leq i \leq k$$

Sei $L(f)$ das Interpolationspolynom $\in \Pi_k$, das f an den Stellen $x_1^*, \ldots, x_k^*$ interpoliert. Dann folgt nach Satz I.2.1

$$\begin{aligned} ||f(x) - L(f)(x)||_{p,(a,b)} &= ||(x - x_1^*) \ldots (x - x_k^*) f^{(k)}(\xi)/k!||_{p,(a,b)} \\ &\leq ||x^k - q^*(x)||_{p,(a,b)} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|/k! \\ &= c_{k,p}(b-a)^{k+1/p} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

Zusammen mit (I.4.53) ergibt dies die Behauptung durch den Zwischenwertsatz. □

Korollar I.4.2 *Die Abschätzung (I.4.24) von Satz I.4.2 läßt sich verbessern zu*

$$||f - Af||_{\infty,[t_j,t_{j+1}]} \leq (t_{j+q} - t_{j+1-k})^l (1 + M) \frac{2 \cdot 4^{-l}}{l!} \cdot ||f^{(l)}||_{\infty,[t_{j+1-k},t_{j+q}]}$$

BEWEIS: Statt (I.4.27) benützen wir über Satz I.4.4 mit $k = l, p = \infty$

$$\inf_{g \in \Pi_r} ||f - g||_{\infty,(c,d)} \leq \inf_{g \in \Pi_l} ||f - g||_{\infty,(c,d)} \leq (d-c)^l c_{l,\infty} ||f^{(l)}||_{[c,d],\infty} \qquad \text{(I.4.54)}$$

Dies liefert sofort (I.4.53), da bekanntlich

$$l! c_{l,\infty} = 2^{-l} \inf_{p \in \Pi_l} ||x^l - p(x)||_{\infty,[-1,1]} = 2^{-l} ||T_l(x)||_{\infty,[-1,1]} = 2 \cdot 4^{-l}$$

□

Übungsaufgaben zu Abschnitt I.4

AUFGABE 1)

Sei $S_{1,\mathbf{t}}$ definiert wie in (I.1.2) und $f \in C[t_1, t_n]$ gegeben, d.h. f stetig auf $[t_1, t_n]$. Die Gitterweite $|t|$ von $\mathbf{t}$ sei definiert als

$$|t| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \quad .$$

Ferner sei definiert als Minimalabweichung von f zu $S_{1,\mathbf{t}}$

$$dist(f; S_{1,\mathbf{t}})_\infty := \inf_{s \in S_{1,\mathbf{t}}} \sup_{t_1 \leq t \leq t_n} |f(t) - s(t)| \quad .$$

Man beweise die Abschätzung

$$dist(f; S_{1,\mathbf{t}}) \leq \frac{1}{2} \omega(f; |t|) \quad ,$$

wobei $\omega(f; \rho) := \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_1, t_n], |x - y| \leq \rho\}$. Für welche Funktionen aus $C[t_1, t_n]$ ist sie nicht zu verbessern?

AUFGABE 2)

Man zeige, daß für $f \in C[t_1, t_n]$ aus

$$\lim_{|t| \to 0} |t|^{-1} dist(f; S_{1,\mathbf{t}})_\infty = 0$$

folgt, daß f konstant auf $[t_1, t_n]$ ist.

AUFGABE 3)

Es sei $S_{2,\mathbf{t}}$ die Menge der Polygonzüge mit Knoten $t_1, \ldots, t_n$ und sei $f \in C^2[t_1, t_n]$, d.h. 2-mal stetig differenzierbar auf $[t_1, t_n]$. Dann bezeichne $S_2(f)$ den interpolierenden Polygonzug von f durch $(t_i, f(t_i))_{i=1}^n$. Man beweise folgende Abschätzung (und zeige, daß sie scharf ist)

$$\|f - S_2(f)\|_\infty \leq \frac{|t|^2}{8} \|f''\|_\infty \quad ,$$

HINWEIS: Benutze die Restgliedformel der Lagrange-Interpolation.

AUFGABE 4)

Man beweise eine zu Aufgabe 3) analoge Fehlerabschätzung für den Interpolationsoperator (I.1.29). Ist eine Erweiterung auf Funktionen höherer Glattheit im Sinne von Satz I.4.1 möglich?

AUFGABE 5)

Man beweise in Ergänzung zu Satz I.4.1 eine Fehlerabschätzung für $||f - Af||_{p,(t_j,t_{j+1})}$, falls die Ableitung $f^{(l)} \in L_q(t_{j+1-k}, t_{j+\kappa})$ mit $p \geq q$ liegt und entsprechend für $||f - Af||_{(a,b),p}$ falls $f^{(l)} \in L_p(a, b)$ gilt.

I.5 Algorithmen für B-Spline -Linearkombinationen

I.5.1 Algorithmen aus Rekursionsformeln

Das diesem Abschnitt zugrundeliegende Problem ist folgendes:
Es soll der Wert einer vektor -wertigen B-Spline-Linearkombination

$$\mathbf{s}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i N_{i,k}(x) \tag{I.5.1}$$

zum Knotensatz

$$\{t_i\}_{i=1}^{n+k} : t_1 \le t_2 \le ... \le t_{n+k} \qquad \text{mit} \quad t_i < t_{i+k} \quad \text{für} \quad i = 1, ..., n \tag{I.5.2}$$

und Vektoren

$$\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{n}, \qquad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^d \tag{I.5.3}$$

an der Stelle x berechnet werden .
Die nächstliegende Methode besteht darin, alle an der Stelle x nicht verschwindenden B-Splines $N_{i,k}(x)$ aus (I.2.19) zu berechnen und anschließend die Linearkombination (I.5.1) mit den Koeffizienten $\mathbf{c}_i$. Um dies durchzuführen benutzen wir die durch (I.2.19) und (I.2.20) gegebenen Rekursionsformeln und nehmen für x

$$t_i \le x < t_{i+1} \quad , \tag{I.5.4}$$

an. Zur Realisierung dieser Voraussetzung sei bemerkt:

Zu gegebenem x und der Knotenfolge $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ mit $t_i \le t_{i+1}$, $t_i \le t_{i+k}$ $\;i = 1, ..., n$ liefert ein einfacher Algorithmus den Index i_l mit $t_{i_l} \le x < t_{i_l+1}$ in höchstens $[\log_2(n+k)] + 1$ Vergleichen, sofern x in (t_1, t_{n+k}) liegt.
Ein solches Bisektionsverfahren wird "adaptiv", wenn der zuletzt berechnete Index i_l als neuer Anfangsratewert genommen wird. Dies kann den Algorithmus erheblich beschleunigen, wenn sich x von einem Durchlauf zum nächsten nur geringfügig ändert.

Es gilt nun $N_{i,1}(x) = 1$ nach (I.2.19) und $(k-2)-$ fache Anwendung von (I.2.20) liefert die $N_{i,k}(x)$. Auf Grund der Trägereigenschaft (Satz I.2.3) der B-Splines erhalten wir dadurch folgendes Schema:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 0 & N_{i,1}(x) \\
 & & & & \downarrow & \swarrow \\
 & & & 0 & N_{i-1,2}(x) & N_{i,2}(x) \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & & & \\
 & & & & & \vdots \\
 & 0 & N_{i+2-k,k-1}(x) & & \dots & N_{i,k-1}(x) \\
N_{i+1-k,k}(x) & \dots & & & & N_{i,k}(x)
\end{array} \tag{I.5.5}$$

Die unterste Zeile liefert die Werte aller B-Splines, die bei x nicht verschwinden. Dabei geht jede Zeile aus der vorigen durch Anwendung von (I.2.19) hervor.

Es ist leicht zu sehen, daß diese Rekursion auf einem Vektor der Länge k durchgeführt werden kann, solange die Elemente einer Zeile von links nach rechts aufgebaut werden. Die Formel (I.2.20) zeigt ferner, daß bei diesem Algorithmus nur konvexe Kombinationen von positiven Werten berechnet werden. Er ist also sehr stabil. Die Anzahl der "Punkt"- Operationen (1 Multiplikation + 1 Division) beträgt dabei $(3k^2 + k - 4)/2$.
Setzt man in (I.5.5) $x = t_{i+1}$ ein und führt den Algorithmus durch, erhält man für $j = 1, ..., k$ in der untersten Zeile von (I.5.5) die Werte

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_{i+j-k,k}(t_{i+1} - \varepsilon) \quad . \tag{I.5.6}$$

Dies folgt sehr einfach aus (I.2.20) mit $x = t_{i+1} - \epsilon$. Damit läßt sich der Algorithmus auch für $x = t_{i+1}$ benutzen, falls man als Wert einer Splinefunktion an einem Knoten ihren rechtsseitigen Limes nimmt. Der Wert der B-Spline-Linearkombination (I.5.1) an der Stelle x in (I.5.4) kann nun wie oben bemerkt mittels des Tableaus (I.5.5) berechnet werden.

Es gibt dazu jedoch (nach C.deBoor 1969) einen effizienteren Algorithmus, den wir jetzt vorstellen wollen. Er beruht auf folgendem

Satz I.5.1 *Es hat* $\mathbf{s}(x)$ *aus (I.5.1) für beliebiges* $1 \le j \le l \le k$ *und alle* x *die Darstellung*

$$\mathbf{s}(x) = \sum_{i=1}^{n+j-1} \mathbf{c}_i^j(x) N_{i,k-j+1}(x), \tag{I.5.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i^1(x) &\equiv \mathbf{c}_i, \qquad & i = 1, ..., n \\ \mathbf{c}_{n+j}^j = \mathbf{c}_0^j &:= 0, \qquad & j = 1, ..., k \end{aligned} \tag{I.5.8}$$

gesetzt ist, und die $\mathbf{c}_i^j$ *rekursiv berechnet werden für* $i = 1, ..., n+j$ *und* $j = 1, ..., k-1$ *durch*

$$\mathbf{c}_i^{j+1}(x) = \omega_{i,k-j} \mathbf{c}_i^j(x) + (1 - \omega_{i,k-j}) \mathbf{c}_{i-1}^j(x), \tag{I.5.9}$$

wobei $\omega_{i,k-j} = \omega_{i,k-j}(x)$ *wie in (I.2.21) definiert ist. Insbesondere gilt für* $t_i \le x < t_{i+1}$

$$\mathbf{s}(x) = c_i^k(x) \quad . \tag{I.5.10}$$

Beweis: Er erfolgt durch Induktion in j. Ist Darstellung (I.5.7) gegeben, so wende man die Rekursionsformel (I.2.22) für $k - j + 1$ statt k an, die sich unter Verwendung der Größen $\omega_{i,k-j}$ als

$$N_{i,k-j+1}(x) = \omega_{i,k-j} N_{i,k-j}(x) + (1 - \omega_{i,k-j}) N_{i+1,k-j}(x)$$

schreiben läßt. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+j-1} \mathbf{c}_i^j(x) [\omega_{i,k-j} N_{i,k-j}(x) + (1 - \omega_{i+1,k-j}) N_{i+1,k-j}(x)] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+j} [\omega_{i,k-j} \mathbf{c}_i^j(x) + (1 - \omega_{i,k-j}) \mathbf{c}_{i-1}^j(x)] N_{i,k-j}(x) \end{aligned}$$

wobei die Randterme mit gemäß obiger Vereinbarung verschwindenden $\mathbf{c}_i^j$ gleich 0 gesetzt worden sind.
Dies ergibt (I.5.9) und somit (I.5.7) für $j + 1$ statt j. Daraus folgt (I.5.10) mit $j = k$ und der Tatsache, daß für $t_i \le x < t_{i+1}$ der einzige nichtverschwindende B-Spline der Ordnung 1 die Funktion $N_{i,k}(x)$ mit Wert 1 in x ist. □

Dieser Satz führt nun zu dem Tableau

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{c}_{i+1-k}^1(x) & & \cdots & & \mathbf{c}_i^1(x) \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & \mathbf{c}_{i+2-k}^2(x) & \cdots & \mathbf{c}_i^2(x) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \mathbf{c}_i^k(x) \end{array} \qquad \text{(I.5.11)}$$

in dem die $\mathbf{c}_i^j$ wieder zeilenweise bestimmt werden können (mit I.5.9). Die gegebene Anordnung (I.5.11) ermöglicht es, die $\mathbf{c}_i^j(x)$ für festes x auf einem Vektor zu berechnen. Setzt man in diesem Tableau $x = t_{i+1}$ ein, so erhält man analog zu (I.5.6)

$$\mathbf{c}_i^k(t_{i+1}) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon\to 0}} \mathbf{s}(t_{i+1} - \varepsilon).$$

Auch dieser Algorithmus ist sehr stabil, da in (I.5.9) nur konvexe Kombinationen gebildet werden. Die Anzahl der "Punkt"-Operationen beträgt hier $\frac{3(k^2-k)}{2}$, was sparsamer als $(3k^2+3k-4)/2$ nach (I.5.5) ist.
Zwei Spezialfälle sind besonders erwähnenswert:
Falls x mit einem Knoten $t_{i+1} = \cdots = t_{i+s}$ der Multiplizität s zusammenfällt, reduziert sich der Algorithmus auf die Berechnung von $\mathbf{c}_i^{k-s}(x)$. In der Tat sieht man auf Grund der Definition von $\omega_{i,k-j}$ nach (I.2.21), daß $\omega_{i,s} = 0$ gilt und somit aus (I.5.9) folgt $\mathbf{c}_i^{k-s+1}(x) = \mathbf{c}_{i-1}^{k-s}(x)$, und daß sich dieser Wert bei weiterer Erhöhung von $j = k - s + 1$ nicht ändert. Ein instruktives Beipiel bilden kubische Splines ($k = 4$), wo im Falle eines doppelten Knotens ($s = 2$) dann $\mathbf{c}_2^i$ bereits auf der Spline-Kurve liegt.
Der zweite Spezialfall ist der, wenn die Knotenfolge (I.5.2) nur aus zwei benachbarten Knoten mit maximaler Vielfachheit besteht. Nehmen wir den Grad k bzw. die Ordnung der B-Splines als $k + 1$ an und die Knoten bei $0, 1$, so haben sie die Form

$$0 = t_1 = \cdots = t_{k+1} < t_{k+2} = \cdots t_{2k+2}.$$

Die zugehörigen B-Splines oder Bernstein-Polynome lauten nach (I.2.28)

$$N_{k+1-r,k+1}(x) = p_{r,k}(x) = \binom{k}{r} x^r (1-x)^{k-r}, \qquad r = 0, \cdots k$$

und die Polynom-Kurve mit Koeffizienten $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{p}(x) = \sum_{r=0}^{k} \mathbf{c}_r N_{k+1-r,k+1}(x) \equiv \sum_{r=0}^{k} \mathbf{c}_r p_{r,k}(x). \qquad \text{(I.5.12)}$$

Satz I.5.2 (Casteljeau -Algorithmus 1959) *Es gelten*

$$\mathbf{p}(x) = \sum_{r=0}^{k-j} \mathbf{c}_i^j(x) p_{i,k-j}(x), \qquad \text{(I.5.13)}$$

mit

$$\mathbf{c}_i^j(x) = \begin{cases} \mathbf{c}_i & : \quad j = 0 \\ x\mathbf{c}_i^{j-1}(x) + (1-x)\mathbf{c}_{i-1}^{j-1}(x) & : \quad j \geq 1 \end{cases} \qquad \text{(I.5.14)}$$

und im Grenzfall $\mathbf{p}(x) = \mathbf{c}_0^k$.

Der Beweis folgt durch Spezialisierung aus (I.5.9), kann aber auch direkt aus (I.2.29) abgeleitet werden (s. Übungsaufgabe 4).

Zur Berechung der Ableitungen von B-Spline-Linearkombinationen zeigen wir

Satz I.5.3 *Es gilt für die Linearkombination (I.5.1)*

$$\mathbf{s}'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i^{(2)} N_{i,k-1}(x) \tag{I.5.15}$$

für alle x, wobei $\mathbf{c}_i^{(1)} \equiv \mathbf{c}_i$ *und*

$$\mathbf{c}_i^{(2)} := (k-1) \begin{cases} \mathbf{c}_1/(t_k - t_1) & : \quad i = 1 \\ (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1})/(t_{i+k-1} - t_i) & : \quad ,2 \le i \le n \\ -\mathbf{c}_n/(t_{n+k} - t_{n+1} & : \quad ,i = n+1 \end{cases} \tag{I.5.16}$$

Allgemein gilt, falls D_+ den rechtsseitigen Differentiationsoperator bezeichnet,

$$D_+^l \mathbf{s}(x) = \sum_{i=l}^{n} \mathbf{c}_i^{l+1} N_{i,k-l}(x) \quad , t_k \le x < t_n \tag{I.5.17}$$

wobei für $l = 1, \ldots, k-2$

$$\mathbf{c}_i^{(l+1)} := \begin{cases} (k-d)(\mathbf{c}_i^{(l)} - \mathbf{c}_{i-1}^{(l)})/(t_{i+k-l} - t_i) & : \quad \textit{für} \quad t_{i+k-l} - t_i > 0 \\ 0 & : \quad \textit{sonst} \end{cases} \tag{I.5.18}$$

Beweis: Zum Beweis von (I.5.18) benützt man (I.2.23), wonach

$$D_+\mathbf{s}(x) = (k-1)\sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i [\frac{N_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}}]$$

Sammelt man die zu $N_{i,k-1}$ gehörigen Koeffizienten, so ergibt sich (I.5.16) für die neuen Koeffizienten $\mathbf{c}_i^{(2)}$. Durch sukzessives Anwenden dieses Schlußes bekommt man (I.5.17) mit Koeffizienten $\mathbf{c}_i^{(l)}$, wobei die Summe zunächst von $i = 1$ bis $n + l$ läuft. Im Falle $i = l, \ldots, n$ genügen die $c_i^{(l)}$ dabei der ersten Formel in (I.5.18). Im anderen Falle schneidet aber der Träger von $N_{i,k}$ nicht das Intervall $[t_k, t_n)$, so daß diese Koeffizienten wegfallen und die Behauptung folgt.

Man kann die Möglichkeit, Ableitungen einer B-Spline- Linearkombination zu berechnen, dazu benützen, eine solche Linearkombination in die **stückweise polynomiale Darstellung**(p. p. representation) zu konvertieren. Da die B-Splines Splinefunktionen sind, muß es zu $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i N_{i,k}(x)$ eine solche p.p. Darstellung geben. Um das Verfahren zur Konversion angeben können, müssen wir zuvor die verschiedenen Knoten-Notationen aus den Abschnitten I.1 und I.2 miteinander vergleichen. Sei $\{t_i\}_{i=1,\ldots,n+k}$ mit $t_i < t_{i+k}$ ein (B-spline)-Knotensatz wie in (I.2.8). Dann bezeichne mit $\xi_1, \ldots, \xi_r$ seien die paarweise verschiedenen Knoten unter den $t_{k+1}, \ldots, t_{n+k}$, wobei $t_{k+1} = \xi_1$ sei, und $t_{n+k} = \xi_r := b$ sei. Ferner wähle $\xi_0 := a$ derart, daß $t_1 \le \xi_0 < t_{k+1} = \xi_1$ erfüllt ist. Dann gilt für $s(x)$ die stückweise polynomiale Darstellung (siehe auch Lemma I.1.2):

$$s(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} d_{i,j}(x - \xi_i)^{j-1} & : \quad \xi_i \le x < \xi_{i+1} \quad \text{für} i \ge 1 \\ \sum_{j=1}^{k} d_{0j}(x - \xi_1)^{j-1} & : \quad a = \xi_0 \le x < \xi_1 \end{cases} \tag{I.5.19}$$

Die Koeffizenten $d_{i,j}$ $(i = 0, ..., r; j = 1, ..., k)$ bestimmen sich zu

$$d_{i,j} = \frac{D_+^{j-1} s(\xi_i)}{(j-1)!}, \quad 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k \qquad ; \qquad d_{0,j} = \frac{D_-^{j-1} s(\xi_1)}{(j-1)!} \quad j = 1, ..., k$$

so daß wir die $\{d_{i,j}\}_{j=1,...,k}^{i=1,...,r}$ gemäß (I.5.17),(I.5.18) berechnen können. Die Funktionsauswertung für $s(x)$ in der stückweisen polynomiale Darstellung (I.5.19) gestaltet sich dann so:
Durch die schon (zu (I.5.4)) beschriebene Bisektion findet man zu gegebenem $x, a \leq x < b$, denjenigen Index i heraus, für den $\xi_i \leq x < \xi_{i+1}$ gilt und berechnet $s(x)$ gemäß (I.1.16) nach dem Horner-Schema.
Der Aufwand zur Berechnung von $s(x)$ ist dann im wesentlichen gleich demjenigen zur Berechnung der Matrix $d = (d_{i,j})$, denn pro Funktionsauswertung werden nur $k-1$ Punktoperationen benötigt. Gegenüber $\frac{3}{2}k(k-1)$ im Satz I.5.1 ist ein Vorteil, denn diese Berechnungen brauchen nur einmal d.h. unabhängig von x durchgeführt zu werden, da sie nur vom Knotensatz und den Koeffizienten c_i abhängen. Daher ist die p.p. Darstellung (wie schon bei Lemma I.1.2 vermerkt) wesentlich effektiver, wenn man sehr viele Funktionswerte eines Splines zu berechnen hat, jedoch ist sie aufwendiger in Bezug auf Speicherplatz.

I.5.2 Berechnung von Integralen mit Splines

Um den Wert einer Stammfunktion zu einer Linearkombination von B-Splines (im Falle d=1) bzw. ein bestimmtes Integral zu berechnen, existiert ebenfalls ein einfaches Verfahren .

Satz I.5.4 *Für die Stammfunktion der Linearkombination (I.5.1) gilt (im Falle d=1 in (I.5.3))*

$$D_{t_1}^{-1} s(x) := \int_{t_1}^{x} s(t)dt = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(-1)} N_{i,k+1}(x), \qquad , t_k < x < t_{n+1}, \tag{I.5.20}$$

mit

$$c_i^{(-1)} = \sum_{j=1}^{i} c_j \frac{(t_{k+j} - t_j)}{k}. \tag{I.5.21}$$

Der Beweis dieses Satzes ist einfach und sei als Übungsaufgabe gestellt.

Ein weiteres oft auftretendes Problem ist die Berechnung von Skalarprodukten von B-Splines, insbesondere die Berechnung der **Gram-Matrix** $G = (g_{ij})_{i,j=1}^{n}$ definiert durch

$$g_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} N_{i,k}(x) N_{j,k}(x) dx. \tag{I.5.22}$$

Diese Matrix tritt u.a. bei der Lösung von Interpolationsproblemen (s. Abschnitt I.7) auf.
Wir bemerken zunächst (lokale Trägereigenschaft nach Satz I.2.3)

$$g_{ij} = \int_{t_i}^{t_{i+k}} N_{i,k}(x) N_{j,k}(x) dx = \int_{t_j}^{t_{j+k}} N_{i,k}(x) N_{j,k}(x) \tag{I.5.23}$$

und damit

$$g_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad j < i + 1 - k \quad \text{oder} \quad j > i + k - 1 \quad . \tag{I.5.24}$$

Die Gram-Matrix der B-Splines hat also Bandstruktur mit genau $2k-1$ Bändern, ist positiv definit (lineare Unabhängigkeit der $N_{i,k}$ nach Abschnitt I.3) und symmetrisch.

Wir können die Integrationsgrenzen in (I.5.24) noch weiter einschränken, denn aus

$$g_{ij} = \int_{t_i}^{t_{i+k}} N_{i,k}(x) \cdot N_{j,k}(x) dx = \sum_{\nu=i}^{i+k-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} N_{i,k}(x) N_{j,k}(x) dx$$

folgt mit $\nu_0 = \max(i,j)$, $\nu_1 = \min(i+k, j+k)$ und der Trägereigenschaft der B-Splines weiter

$$g_{ij} = \sum_{r=\nu_0}^{\nu_1 - 1} \int_{t_r}^{t_{r+1}} N_{i,k}(x) N_{j,k}(x) dx \quad . \tag{I.5.25}$$

Im Intervall $[t_r, t_{r+1})$ (falls $t_{r+1} > t_r$, sonst ist nichts zu berechnen) sind die B-Splines aber Polynome $(k-1)$-ten Grades. Die Integranden in (I.5.25) sind also Polynome vom Grade $2k-2$. Diesen Sachverhalt nützen wir nun aus, um mittels der Gauss-Quadratur die Größen in (I.5.25) und damit die Gram-Matrix *exakt* zu bestimmen.

Satz I.5.5 (Gauss-Quadratur) *Zu $k > 0$ gibt es Stützstellen $-1 < z_1 < ... < z_k < 1$ (die z_i sind symmetrisch um 0 angeordnet) und Gewichte $w_1, ..., w_k$ mit $w_i > 0$ für $i = 1, ..., k$. Die w_i unterliegen ebenfalls einer Symmetrie:*

$$w_1 = w_k, w_2 = w_{k-1}, ... \quad .$$

Mit diesen Stützstellen und Gewichten gilt für alle Polynome p bis zum Grad $2k-1$

$$\int_{-1}^{1} p(t) dt = \sum_{j=1}^{k} w_j p(z_j) \quad , \tag{I.5.26}$$

d.h. die sogenannte Gauss-Quadraturfomel (I.5.26) ist exakt für Polynome bis zum Grad $2k-1$.

Die Formel (I.5.26) läßt sich auf beliebige Integrationsgrenzen a und b $(a \neq b)$ übertragen, wenn wir die Substitutionsregel mit $x(t) = t \cdot \frac{(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2}$ anwenden. Wir erhalten für Polynome bis zum Grad $2k-1$

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k} w_j p(\frac{z_j(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2}) \quad .$$

Jetzt können wir alle Summanden aus (I.5.39) *exakt* berechnen, wobei wir zur Funktionsauswertung (I.5.5) benutzen, denn damit erhalten wir zu gegebenem z beide Werte $N_{i,k}(z)$ und $N_{j,k}(z)$.

Den Beweis des obigen Satzes findet man in (fast) jedem Lehrbuch über Praktische Mathematik. Tabellen für w_i und z_i findet man im Artikel von P.J. Davis - I. Polonsky (S. 916) im Handbuch von M. Abramovitz-I.A. Stegun[AS].
Abschließend sei bemerkt, daß wegen $w_r > 0$ und $N_{i,k}(x) \geq 0$ die Gauß-Integration hier sehr stabil ist. Aus diesem Grund ist es auch nicht so günstig, die exakte Formel (Beweis s. Übungsaufgabe 6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{i,k}(x) \cdot N_{j,l}(x) dx \quad =$$

$$\frac{(-1)^k (k-1)!(l-1)!}{(k+l-1)!} (t_{i+k} - t_i)(t_{j+l} - t_j) \quad \cdot \quad [t_i, ..., t_{i+k}]_x [t_j, ..., t_{j+l}]_y (y-x)_+^{k+l-1}$$

anzuwenden (für den Fall $k = l$).

I.5.3 Verfeinerung durch einen zusätzlichen Knoten

Wir wollen nun noch einen anderen Zugang zur Berechnung von Splinekurven vorstellen, der im Bereich des "**Computer Aided Geometric Design (CAGD)**" (mehr dazu in Farin[Fa], Hoschek–Lasser[HL]) von großer Bedeutung für das interaktive Modellieren ist. Dazu sei folgendes bemerkt:
Die Koeffizienten $\mathbf{c}_i$ der Spline–Kurve (I.5.1) werden in der Terminologie des *CAGD* **Kontrollpunkte** genannt und die sie interpolierende stückweise lineare Kurve das zugehörige **Kontrollpolygon**. Die B–Spline Kurve (I.5.1) stellt eine Approximation dieses Polygons dar, die man entweder weiter (interaktiv) modifizieren oder berechnen möchte. In beiden Fällen ist es dazu wünschenwert, für die Ausgangskurve eine Darstellung mit einer erweiterten Folge von Kontrollpunkten zu finden. Von dem zugehörigen Kontrollpolygon erwartet man entweder eine größere Flexibilität für die Zwecke des interaktiven Design oder hat alternativ eine bessere Übereinstimmung mit der B–Spline Kurve.
Die Erzeugung weiterer Kontrollpunkte geschieht nun mittels der Idee der **Knotenverfeinerung**, d.h. die B–Spline Kurve (I.5.1) wird bezüglich einer feineren Knotenflge dargestellt. Das einfachste Beispiel liegt vor, wenn eine reguläre Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ durch Hinzufügen eines einzigen Knotens verfeinert wird. Diesen Fall wollen wir nun genauer betrachten. Dazu sei die neue Knotenfolge $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{n+k+1}$ definiert durch

$$\tau_i := \begin{cases} t_i & ,1 \le i \le m-1 \\ \tau \in [t_{m-1}, t_m] & ,i = m \\ t_{i-1} & ,m+1 \le i \le n+k+1 \end{cases} \tag{I.5.27}$$

Der neue Knoten τ soll außerdem so eingefügt sein, daß die neue Folge τ wieder regulär ist, d.h. wenn τ mit t_i oder t_{i+1} zusammenfällt, darf die entsprechende Vielfachheit k nicht übersteigen. Man kann nun die B–Splines $\{\tilde{N}_{i,k}(x)\}_{i=1}^{n+1}$ bezüglich τ bilden und versuchen, die alten B–Splines $N_{i,k}$ als Linearkombinationen von diesen darzustellen. Dies gelingt deshalb, weil jeder B-Spline $N_{i,k}$ eine Splinefunktion zu den Knoten τ ist (s. Satz 3 in Abschnitt) und deshalb auch zu den Knoten τ. Die genauen Beziehungen sind im folgenden Satz formuliert:

Satz I.5.6 *Es gilt*

$$N_{i,k}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{N}_{i,k}(x) & ,1 \le i \le m-1 \\ \gamma_{i,k}\tilde{N}_{i,k}(x) + (1-\gamma_{i+1,k})\tilde{N}_{i+1,k} & ,m-k \le i < m \\ \tilde{N}_{i+1,k}(x) & ,m \le i \le n \end{array} \right\} \tag{I.5.28}$$

wobei

$$\gamma_{i,k} := \frac{\tau_m - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} \tag{I.5.29}$$

Beweis: Im Falle $1 \le i < m-k$ gilt $[t_i, \ldots, t_{i+k}] = [\tau_i, \ldots, \tau_{i+k}]$ für die zugrunde liegenden dividierten Differenzen nach (I.5.27), und für $m \le i \le n+1$ gilt $[t_i, \ldots, t_{i+k}] = [\tau_{i+1}, \ldots, \tau_{i+k+1}]$. Damit folgt (I.5.28) in diesen beiden Fällen.
Zum restlichen Beweis benützen wir die Identität

$$(y-x)[x,z,\ldots] = (y-z)[y,z,\ldots] + (z-x)[x,z,\ldots] \tag{I.5.30}$$

wobei die Punkte irgendwelche $k-1$ Stützstellen bedeuten, die in allen drei dividierten Differenzen die gleichen sind. Sie folgt durch Anwenden der Rekursionsformel (I.2.2) auf beide Seiten von (I.5.30), was jeweils $[y,\ldots]-[x,\ldots]$ ergibt. Aus (I.5.30) folgt nun für $m-k \le i < m$ mit $x=t_i=\tau_i,\ y=t_{i+k}=\tau_{i+k+1}$ und $z=\tau=\tau_m$

$$\begin{aligned}(t_{i+k}-t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}] &= (t_{i+k}-\tau)[t_{i+k},\tau,\ldots]+(\tau-t_i)[t_i,\tau,\ldots] \\ &= (\tau_{i+k+1}-\tau_m)[\tau_{i+1},\ldots,\tau_{i+1+k}]+(\tau_m-\tau_i)[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]\end{aligned}$$

Dann beachte man, daß lt. Definition (I.2.9), (I.2.18)

$$\tilde{N}_{i,k}(x)=[\tau_{i+k}-\tau_i][\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}](\cdot-x)_+^{k-1}$$

und der restliche Teil von (I.5.28) folgt. □

Als Anwendung ergibt sich die Darstellung einer B–Spline– Kurve mit Knoten aus $\mathbf{t}$ als eine B–Spline–Kurve mit Knoten τ:

Korollar I.5.1 *Es seien* $\mathbf{t}$ *und* τ *Knotenfolgen wie in (I.5.27) gegeben. Dann gilt für* $\mathbf{s}(x)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i\,N_{i,k}(x)$ *mit Kontrollpunkten* $\mathbf{c}_i$ *die Darstellung*

$$\mathbf{s}(x)+\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\mathbf{c}}_i\,\tilde{N}_{i,k}(x), \tag{I.5.31}$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{c}}_i=\tilde{\gamma}_{i,k}\mathbf{c}_i+(1-\tilde{\gamma}_{i,k})\mathbf{c}_{i-1}\,,\quad 1\le i\le n+1, \tag{I.5.32}$$

und

$$\tilde{\gamma}_{i,k}:=\min\left\{\frac{(\tau_m-\tau_i)_+}{\tau_{i+k}-\tau_i},1\right\}. \tag{I.5.33}$$

Beweis: Die Formeln (I.5.28) stimmen in den Grenzfällen $i=m-k-1$ und $i=m$ überein, denn es gilt $\gamma_{m-k,k}=0$ und $\gamma_{m,k}=1$. Definition (I.5.33) setzt daher die Folge der $\gamma_{i,k}$ zu $\tilde{\gamma}_{i,k}$ so fort, daß

$$N_{i,k}(x)=\tilde{\gamma}_{i,k}\tilde{N}_{i,k}(x)+(1-\tilde{\gamma}_{i+1,k})\tilde{N}_{i+1,k}(x)\ .$$

für *alle* $i,\ 1\le i\le n$ gilt. Setzt man dies in die ursprüngliche Darstellung von $\mathbf{s}(x)$ ein, so folgt direkt (I.5.31) mit (I.5.32). □

Bemerkung In den Fällen $i\ge m$ und $i<m-k$ gilt $\tilde{\mathbf{c}}_i=\mathbf{c}_{i-1}$, was man auch direkt aus (I.5.28) ablesen kann. Im übrigen stimmen die Formeln (I.5.32) von der Struktur her mit denen des Algorithmus in Satz I.5.1 in bemerkenswerter Weise überein (ersetze $\tilde{\gamma}_{i,k}$ durch $\omega_{i,k}$).

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn ein Knoten mehrfach eingefügt wird. Wenn nämlich die Knotenfolge $\mathbf{t}$ zu einer Knotenfolge τ derart erweitert wird, daß jeder Knoten von $\mathbf{t}$ die Vielfachheit k bekommt, müssen die B–Splines zu diesem τ in Bernstein–Polynome übergehen und die Darstellung von $\mathbf{s}(x)$ geht über in eine als stückweise polynomiale **Bézier –Kurve**. Die zugehörigen Kontrollpunkte bezeichnet man als **Bézier–Punkte**. Ihre Berechnung kann also durch wiederholte Anwendung der Formel (I.5.32) geschehen, wobei jeweils ein Knoten eingeführt wird. Genauer geschieht dies wie folgt:
Hat der Knoten t_{m-1} die Vielfachheit $k-s$, so soll τ durch s–maliges Einfügen von t_{m-1} entstehen. Dann werden im ersten Schritt die Kontrollpunkte $\mathbf{c}_i^{[1]}=\tilde{\mathbf{c}}_i$ für $i>m-k$ gemäß (I.5.32) neu berechnet (für $i\le m-k$ gilt $\tilde{\mathbf{c}}_i=\mathbf{c}_i$). Es ist dann $\mathbf{c}_{m-k+1}^{[1]}$ bereits ein Bézier–Kontrollpunkt, und im zweiten Schritt müssen die neuen Kontrollpunkte $\mathbf{c}_i^{[2]}=\left(\mathbf{c}_i^{[1]}\right)^{\sim}$ gemäß

(I.5.32) aus den $\mathbf{c}_i^{[1]}$ nur für $i > m-k+1$ berechnet werden. Man führt nun s Schritte so durch bis zur Berechnung der $\mathbf{c}_i^{[s]}$. Die alten Kontrollpunkte $\mathbf{c}_{m-k+1}^{[1]}, \ldots, \mathbf{c}_{m-k+s}^{[s]}, \mathbf{c}_{m-k+s+1}^{[s]}, \ldots, \mathbf{c}_{n+s}^{[s]}$ ersetzt und die Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}$ durch τ mit $\tau_i = ti$ für $i \leq m-1,\ \tau_{m-1+j} = t_{m-1}$ für $j = 1, \ldots, s$ und $\tau_{m+s+i} = t_{m+i}$ für $i = 0, 1, \ldots$.
In dieser Weise behandelt man jeden Punkt t_i der ursprünglichen Folge, bis er die Vielfachheit k erreicht hat. Ein entsprechender Algorithmus ist in W. Böhm[Boe] beschrieben(s. auch Hoschek–Lasser[HL], § 10.1, S. 350).

I.5.4 Diskrete B-Splines und Oslo-Algorithmus

Wir betrachten nun einen systematischen Zugang, der das Problem des Wechsels der Darstellung beim Übergang zu einer anderen Knotenfolge allgemein behandelt. Dazu sei $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_{n+k}\}$ eine Teilfolge von $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_{m+k}$ und beide Folgen seien regulär vom Typ (I.2.8). Mit $L_{i,k}(x)$ seien die B–Splines bezüglich τ und mit $N_{i,k}(x)$ wie bisher diejenigen bezüglich $\mathbf{t}$ bezeichnet. Man möchte dann $\mathbf{s}(x)$ in (I.5.1) als

$$\mathbf{s}(x) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{d}_j L_{j,k}(x) \tag{I.5.34}$$

schreiben. Da die Folge τ eine Verfeinerung von $\mathbf{t}$ ist folgt nach Satz I.2.2, daß solche $\mathbf{d}_j$ existieren und eindeutig bestimmt sind. Wir wollen für die $\mathbf{d}_j$ eine explizite Formel angeben. Dazu genügt es, die eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_{i,k}(j)$ in der Darstellung

$$N_{i,k}(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,k}(j)\, L_{j,k}(x) \tag{I.5.35}$$

zu kennen. Denn die Multiplikation dieser Formel mit $\mathbf{c}_i$ und Summation über i ergibt nach Vertauschung der Summen über i und j

$$\mathbf{s}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i\, N_{i,k}(x) = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}(j) c_i \right] L_{j,k}(x)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $L_{j,k}$ nach Korollar (I.3.1) folgt daraus

$$\mathbf{d}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}(j) \mathbf{c}_i \ , \tag{I.5.36}$$

d.h. die Koeffizienten $\mathbf{d}_j$ hängen linear von den $\mathbf{c}_i$ ab. Die Elemente dieser Umrechnungsmatrix haben nun sehr interessante Eigenschaften, die im folgendem Satz zusammangestellt sind.

Satz I.5.7 *Die durch (I.5.35) eindeutig bestimmten Zahlen haben folgende Eigenschaften:*

i) *mit den analog zu (I.2.34) gebildeten Polynomen* $\psi_{j,k}(y) = (y - \tau_{j+1}) \cdots (y - \tau_{j+k-1})$ *gilt:*

$$\alpha_{i,k}(j) = (t_{i+k} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k}]\, (\cdot - a_j)_+^{\circ}\, \psi_{j,k}(\cdot) \ , \tag{I.5.37}$$

wobei die a_j *beliebige Zahlen aus* $[t_j, t_{j+k})$ *sind.*

ii) *die aus den $\alpha_{i,k}(j)$ durch Skalierung gebildeten Zahlen*

$$\beta_{i,k}(j) := \alpha_{i,k}(j)(\tau_{j+k} - \tau_j)/(t_{i+k} - t_i) \tag{I.5.38}$$

haben die Eigenschaft, daß für jede Folge $\{g(j)\}_{j=1}^{m+k}$ von reellen Zahlen gilt

$$[t_i, \ldots, t_{i+k}]\, g = \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,k}(j)\, [\tau_j, \ldots, \tau_{j+k}]\, g \ , \tag{I.5.39}$$

wobei die dividierten Differenzen bezüglich der Werte der Folge $\{g(j)\}$ gebildet sind.

iii) *für die Indizes l mit $\tau_l < t_i$ oder $\tau_{l+k-1} \geq t_{i+k}$ gilt $\alpha_{i,k}(l) = 0$, d.h. es gilt $\alpha_{i,k} \neq 0$ nur für die Indizes $i = \mu - k + 1, \ldots, \mu$ wobei μ so bestimmt ist, daß τ_l in $[t_\mu, t_{\mu+1})$ liegt.*

iv) *Es gilt $\alpha_{i,k}(j) \geq 0$ und $\alpha_{i,k}(l) > 0$ für die Indizes l mit $t_i \leq \tau_l < \tau_{l+k-1} < t_{i+k}$.*

v) *für $t_k < \tau_j < t_{n+1}$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}(j) = 1 \ .$$

Beweis: Wir zeigen nur i)–iii), der Rest sei als Übungsaufgabe gestellt.
Zum Beweis von i) beachten wir, daß nach Lemma I.2.4 gilt

$$(y-x)_+^{k-1} = \sum_{j=1}^{n} \psi_{j,k}(y)(y-a_j)_+ L_{j,k}(x) \ .$$

Speziell können wir $y = t_1, \ldots, t_{n+k}$ einsetzen. Wendet man dann darauf die dividierte Differenz $[t_i, \ldots, t_{i+k}]$ an — zunächst für $a_l \notin \{t_1, \ldots, t_{n+k}\}$ — und multipliziert beide Seiten mit $(t_{i+k} - t_i)$, so erhält man nach Definition (I.2.18) der B–Splines daraus durch Vergleich mit (I.5.35) die Eigenschaft i).
Der Beweis von ii) folgt aus der fundamentalen Beziehung (I.2.16). Aus (I.5.35) folgt damit für genügend glatte Funktionen g

$$[t_i, \ldots, t_{i+k}]\, g = \int \frac{g^{(k)}(x)\, N_{i,k}(x)}{(k-1)!(t_{i+k} - t_i)} dx = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i,k}(j)}{(t_{i+k} - t_i)} \int \frac{g^{(k)}(x)\, L_{j,k}(x)}{(k-1)!} dx$$

Wieder mit Anwendung von (I.2.16) auf das letzte Resultat folgt die Beziehung (I.5.39) mit den $\beta_{i,k}(j)$ aus (I.5.38).
Zum Beweis von iii) betrachten wir zunächst den Fall $k = 1$. Dann sind die $N_{i,1}$ und die $L_{j,1}$ die charakteristischen Funktionen auf $[t_i, t_{i+1})$ und $[\tau_j, \tau_{j+1})$ und der Vergleich von (I.5.21) und (I.5.34) ergibt unmittelbar, daß Formel (I.5.36) mit

$$\alpha_{i,1}(j) = \begin{cases} 1 \ , & t_i \leq \tau_j < t_{i+1} \\ 0 \ , & \text{sonst} \end{cases} \tag{I.5.40}$$

gilt. Dies zeigt iii) im Falle $k = 1$.
Wäre nun $\alpha_{i,k}(l) \neq 0$ für ein $\tau_l < t_i$, so könnte man eine glatte Funktion g mit Träger in $(\tau_l - \varepsilon, \tau_l + \varepsilon) und \varepsilon > 0$ genügend klein finden derart, daß $[\tau_j, \ldots, \tau_{j+k}]\, g = \delta_{jl}$. Relation (I.5.39) würde dann implizieren $0 = \beta_{i,k}(l)$, ein Widerspruch!

Wäre $\alpha_{i,k}(l) \neq 0$ für ein l mit $\tau_{l+k-1} \geq t_{i+k}$, so könnte man — zunächst unter der Annahme $\tau_{l+k} > \tau_{l+k-1}$ — eine glatte Funktion g mit Träger in $(\tau_{l+k} - \varepsilon, \tau_{l+k} + \varepsilon)$ und der Eigenschaft $[\tau_j, \dots, \tau_{j+k}]\, g = \delta_{jl}$ finden. Dies führt in gleicher Weise wie eben zum Widerspruch. Durch Grenzübergang $\tau_{l+k} \downarrow \tau_{l+k-1}$ folgt dann die Aussage auch für diesen Grenzfall (wobei Bedingung (I.2.8) gewahrt sein muß).
Die zweite Formulierung in ii) folgt dann so: aus $t_\mu \leq \tau_l < t_{\mu+1}$ folgt $\tau_l > \tau_i$ für $i = \mu{+}1, \mu{+}2, \dots$ und daher $\alpha_{i,k}(l) = 0$ für solche i. Andererseits folgt daraus auch $\tau_{l+k-1} \geq t_{i+k}$ für $i \leq \mu - k$ und daher $\alpha_{i,k}(l) = 0$ für solche i. □

Bemerkung : Relation (I.5.39) ist offensichtlich ein diskretes Analogon zur Beziehung (I.2.16), wobei die Folge $\{\beta_{i,k}(j)\}$ der Funktion $M_{i,k}(x)$ entspricht und $\{\alpha_{i,k}(j)\}$ dem B–Spline $N_{i,k}(x)$. Die Eigenschaft iii) ist so zu verstehen, daß $\alpha_{i,k}(j)$ bei gegebenem i einen "Träger" von höchstens k verschiedenen Indizes besitzt. Auch iv) und v) bilden Analoga für entsprechende Eigenschaften von B–Splines (vergl. Abschnitt I.2).
Diese Bemerkung motiviert

Definition I.5.1 *Die durch (I.5.37) gegebene Folge $\{\alpha_{i,k}(j)\}$ in j heißt* **diskreter B–Spline** *bezüglich τ zu den Punkten $t_i, \dots, t_{i+k}$.*

Diese Bezeichnung wird weiter gerechtfertigt durch die Tatsache, daß sie asymptotisch mit den B–Splines $N_{i,k}(x)$ übereinstimmen. Dies ist der Inhalt von

Lemma I.5.1 *Für die durch (I.5.35) definierten Koeffizienten $\alpha_{i,k}(j)$ gilt*

$$|\alpha_{i,k}(j) - N_{i,k}(x)| \leq \text{const.} |\tau_{j+k} - \tau_j| \, \|N'_{i,k}\|_{\infty, I_j} \;, \quad x \in I_j \cup [t_i, t_{i+k}]$$

wobei $I_j = (\tau_l, \tau_{l+1})$ das größte Teilsegment von $[\tau_j, \tau_{j+k}]$ ist. Im Falle $x = x_j^* = (\tau_{j+1} + \cdots \tau_{j+k-1})/(k-1)$ gilt sogar mit einer nur von k abhängigen Konstanten

$$|\alpha_{i,k}(j) - N_{i,k}(x_j^*)| \leq \text{const.} \max\left((\tau_{j+1-k} - \tau_{j+1})^2, (\tau_{j+k} - \tau_j)^2\right) \|N''_{i,k}\|_\infty$$

Beweis: Wendet man Satz I.3.3 auf $\mathbf{s}(x) = N_{i,k}(x) = \sum_j \alpha_{i,k}(j)\, L_{i,k}(x)$ gemäß (I.5.35) an, wobei die dortigen B–Splines durch die B–Splines zur Knotenfolge τ ersetzt werden, so folgt der erste Teil.
Zum Beweis der zweiten Aussage gehen wir etwas anders vor. Wir approximieren zuerst $N_{i,k}$ durch den Schoenberg- Operator $g = V(N_{i,k}; x) = \sum_l N_{i,k}(x_l^*)\, L_{l,k}(x)$ aus (I.4.42). Darauf wenden wieder ein biorthogonales Funktional λ_j gemäß Lemma I.3.2 an und erhalten

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,k}(j) - N_{i,k}(x_j^*)| &= \left|\lambda_j \left(\sum \alpha_{i,k}(f)\, L_{l,k}(x)\right) - \lambda_j(g)\right| \\ &\leq \|\lambda_j\|_\infty \, \|N_{i,k} - V(N_{i,k})\|_{\infty,[\tau_j,\tau_{j+k}]} \\ &\leq D_{k,\infty} \, \|N_{i,k} - V(N_{i,k})\|_{\infty,[\tau_j,\tau_{j+k}]}, \end{aligned}$$

wobei $D_{k,\infty}$ die Konstante aus (I.3.43) und Lemma I.3.2 ist. Für die Abschätzung der Größe $\|N_{i,k} - V(N_{i,k})\|$ geben wir einen direkten Beweis an: für $x \in [t_j, t_{j+1}]$ gilt mit $N_{i,k}(x) \equiv f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) - V(f;x) &= \sum_{l=j-k+1}^{j} [f(x) - f(\tau_l^*)]\; L_{l,k}(x) \\ &= \sum_{l=j-k+1}^{j} \left[f'(x)(x - \tau_l^*) + \frac{f''(\xi_l)}{2}(x - \tau_l^*)^2\right] L_{l,k}(x) \end{aligned}$$

so daß, weil V lineare Funktionen reproduziert (s.Abschnitt I.4),

$$|f(x) - V(f;x)| \leq \|f''\|_{\infty,[t_{j-k+1},t_{j+k}]} \max\left((\tau_{j+k}-\tau_j)^2, \tau_{j+1-k}-\tau_{j+1})^2\right).$$

$\square$

Dieses Lemma liefert die Grundlage für die Idee, die Spline-Kurve (I.5.1) approximativ durch die Kontrollpunkte zu immer feiner werdenden Knotenunterteilungen zu erzeugen. Entscheidend für die praktische Verwertung dieser Idee ist nun das Bestehen einer Rekursionsformel auch für die diskreten B–Splines.

Lemma I.5.2 *Es seien $t_{i+k} > t_i$ gegeben und $\alpha_{i,k}(j)$ durch (I.5.37). Führt man*

$$\bar{\alpha}_{i,k-1}(j) = \begin{cases} \alpha_{i,k-1}(j)/(t_{i+k-1}-t_i) & , \text{ falls } (t_{i+k-1}-t_i) > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \tag{I.5.41}$$

ein, so gilt für $k \geq 2$ und alle i, j

$$\alpha_{i,k}(j) = (\tau_{j+k-1}-t_i)\bar{\alpha}_{i,k-1}(j) + (t_{i+k}-\tau_{j+k-1})\bar{\alpha}_{i+1,k-1}(j) \tag{I.5.42}$$

Beweis: Wir gehen analog zum Beweis der Rekursionsformel im kontinuierlichen Fall in Lemma I.2.3 vor und wenden die Leibniz–Regel auf das Produkt

$$\psi^+_{j,k}(y) := (y-a_j)^\circ_+ \psi_{j,k}(y) = (y-\tau_{j+k-1})\psi^+_{j,k-1}(y) := g(y)\cdot h(y)$$

mit $h(y) = \psi^+_{j,k-1}(y), g(y) = y - \tau_{j+k-1}$ an. Es folgt

$$\begin{aligned}
[t_i,\ldots,t_{i+k}]\,\psi^+_{j,k} &= \sum_{r=1}^{i+k}[t_i,\ldots,t_r]\,g\,[t_r,\ldots,t_{i+k}]\,h \\
&= g(t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}]\,h + [t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h
\end{aligned}$$

da die dividierten Differenzen von g für $r \geq 2$ verschwinden und $[t_i, t_{i+1}]\,g = 1$ ist. Mit der Rekursionsformel (I.2.2) können wir schreiben

$$(t_{i+k}-t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}]\,h = [t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h - [t_i,\ldots,t_{i+k-1}]\,h$$

und erhalten so mit dem Vorigen aus (I.5.37)

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,k}(j) &= (t_{i+k}-t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}]\,\psi^+_{j,k} \\
&= g(t_i)\Big\{[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h - [t_i,\ldots,t_{i+k-1}]\,h\Big\} + (t_{i+k}-t_i)[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h \\
&= (t_{i+k}-\tau_{j+k-1})[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]h + (\tau_{j+k-1}-t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k-1}]\,h
\end{aligned}$$

Nach Definition von $h(y)$ und (I.5.37) gilt nun $[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h = \alpha_{i+1,k-1}(j)/(t_{i+k}-t_{i+1}) = \bar{\alpha}_{i+1,k-1}(j)$ und analog $[t_i,\ldots,t_{i+k-1}]\,h = \bar{\alpha}_{i,k-1}(j)$. Damit folgt (I.5.42), falls die Nenner dieser beiden Größen nicht verschwinden.
Im Falle, daß sie verschwinden, argumentiert man wie folgt:
Nach Definition von $h(x) = \Psi^+_{j,k-1}(x) \in \Pi_{k-1}$ verschwindet $[t_i,\ldots,t_{i+k-1}]\,h$ oder $[t_{i+1},\ldots,t_{i+k}]\,h$, wenn dort alle t_i zusammenfallen, denn die dividierte Differenz ist dann eine $(k-1)$–te Ableitung und a_j in (I.5.37) kann geeignet gewählt werden. Beachtet man dies, so folgt (I.5.42) auch in diesen Grenzfällen. $\square$

Es sei bemerkt, daß die Rekursionsformel (I.5.42) eine konvexe Kombination von den Größen $\alpha_{i,k}(j)$ darstellt, die auf Grund von Satz I.5.6 nicht negativ sind. Sie ist also numerisch sehr stabil. Wir könnten nun den gleichen Algorithmus wie in (I.5.5) verwenden und dann die neuen Koeffizienten d_j nach (I.5.36) berechnen. Für diese Linearkombination von diskreten B–Splines gibt es jedoch einen gistigeren Algorithmus, analog zu dem von Satz I.5.1:

Satz I.5.8 (Cohen-Lyche-Riesenfeld) *Unter den Voraussetzungen von Satz I.5.6 definiere man*

$$c_{i,j}^{(1)} := c_i, \qquad c_{n+r,j}^{(r)} := c_{0,j}^{(r)} := 0, \quad 1 \le r \le k, \tag{I.5.43}$$

und damit Koeffizienten $c_{i,j}^{(r)}$ durch die Rekursionsformeln

$$c_{i,j}^{(r+1)} = \begin{cases} 0 & , \textit{ falls } t_{i+k-r} - t_i = 0 \\ \dfrac{(\tau_{j+k-r} - t_i)\, c_{i,j}^{(r)} + (t_{i+k-r} - \tau_{j+k-r})\, c_{i-1,j}^{(r)}}{t_{i+k-r} - t_i} & \textit{sonst} \end{cases} \tag{I.5.44}$$

in Abhängigkeit von j. Dann gilt für die d_j aus (I.5.36)

$$d_j = \sum_{i=1}^{n+r+1} c_{i,j}^{(r)} \alpha_{i,k-r+1}(j)\ , \qquad 1 \le r \le k\ , \tag{I.5.45}$$

Ist insbesondere der Index j so gegeben, daß $t_\mu \le \tau_j < t_{\mu+1}$ gilt, so erhält man

$$d_j = c_{\mu,j}^{(k)} \tag{I.5.46}$$

und die Summe in (I.5.45) braucht jeweils nur über $i = \mu - k + r, \ldots, \mu$ erstreckt zu werden.

Beweis: Gilt (I.5.45) für r so folgt aus Lemma I.5.2

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i=1}^{m+r+1} c_{i,j}^{(r)} \left[(\tau_{j+k-r} - t_i)\, \bar{\alpha}_{i,k-r}(j) + (t_{i+k-r+1} - \tau_{j+k-r})\, \bar{\alpha}_{i+1,k-r}(j) \right] \\ &= \sum_{i=2}^{m+r-1} \bar{\alpha}_{i,k-r}(j) \left[(\tau_{j+k-r} - t_i) c_{i,j}^{(r)} + (t_{i+k-r+1} - \tau_{j+k-r}) c_{i-1,j}^{(r)} \right] \\ &\quad + c_{1,j}^{(r)} (\tau_{j+k-r} - t_1)\, \bar{\alpha}_{1,k-r}(j) + c_{m+r-1,j}^{(r)} (t_{m+k} - \tau_{j+k-r})\, \bar{\alpha}_{m+r,k-r}(j) \end{aligned}$$

Nach Definition (I.5.43) der $c_{i,j}^{(r+1)}$ zusammen mit der Festlegung $c_{m+r,j}^{(r)} \equiv c_{0,j}^{(r)} \equiv 0$ ergibt sich gerade (I.5.45) für $r+1$ statt r.
Der Rest der Aussage folgt aus der Trägereigenschaft iii) in Satz I.5.6. □

Die Relationen (I.5.43), (I.5.44) dieses Satzes können nun zum Aufbau eines Tableaus analog zu (I.5.11) für die $\{c_{i,j}^{(r)}\}_{i=\mu-k+r}^{\mu}$ benutzt werden, falls $\tau_\mu \le t_j < \tau_{\mu+1}$ gilt. Der entsprechende Algorithmus ist als **Oslo–Algorithmus** bekannt, wie oben bereits erwähnt.

Als Anwendung von Lemma I.5.1 notieren wir:

Korollar I.5.2 *Gegeben sei eine Folge von Verfeinerungen $\tau^{(N)}$ von $\mathbf{t}$, deren maximale Gitterlänge $\max_j \left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right)$ gegen 0 für $N \to \infty$ strebt. Dann konvergieren die nach dem Oslo–Algorithmus berechneten neuen Kontrollpunkte $\mathbf{d}_j^{(N)}$ gegen die Kurve $\mathbf{s}(x)$, wobei $j = j(N)$ so zu dem festen x zu wählen ist, daß $x \in I_j^{(N)} = \left(\tau_l^{(N)}, \tau_{l+1}^{(N)}\right)$ gilt.*

Übungen zu Abschnitt I.5

Aufgabe 1 .

Zeigen Sie für die diskreten B–Splines in Satz I.5.6 die folgenden Eigenschaften:

a. Für die Indizes l mit $\tau_l < t_i$ oder $\tau_{l+k-1} \geq t_{i+k}$ sind $\alpha_{i,k}(l) = 0$.

b. Es gilt $\alpha_{i,k}(j) \geq 0$ und speziell $\alpha_{i,k}(l) > 0$ für alle Indizes l mit $t_i \leq \tau_l < \tau_{l+k-1} < t_{i+k}$.

c. Für $t_k \leq \tau_j < t_{n+1}$ hat man $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}(j) = 1$.

Aufgabe 2 (Darstellung durch Erhöhung des Grades)**.**
Zeigen Sie, daß folgende Identitäten gelten:

a. Für die Bernstein-Polynome $p_{i,n}$:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i p_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(1)} p_{i,n+1}(x) \quad \text{mit} \quad b_i^{(1)} := \frac{1}{n+1} \left(i b_i + (n-1-i) b_{i-1} \right).$$

b. Für die B-Splines zu Knoten $\{t_i\}$

$$N_{i,k+1}(u) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=i}^{k+1+i} N_{i,k+2}(u|u_j),$$

wobei $N_{i,k+2}(u|u_j)$ den B-Spline zu den Knoten $\{t_i, \ldots, t_{i+k}\} \cup \{t_j\}$ bezeichnet.

Aufgabe 3 .
Man ermittle den Gesamtaufwand an Operationen für die Berechnung der Ableitungen $D_+^{l-1} s(x), 1 \leq l \leq k-1$, nach den Formeln (I.5.17) - (I.5.18) .

Aufgabe 4 .
Man beweise die Formeln des Algorithmus von Casteljeau in Satz I.5.2 direkt sowie als Spezialfall von Satz I.5.3 solche für die Ableitungen von Linearkombinationen von Bernstein-Polynomen.

Aufgabe 5 .
Man zeige: Sind t_1, t_{n+k} Knoten der (höchstmöglichen) Vielfachheit von einer Splinefunktion $s = \sum_{j=1}^{n} d_j N_{j,k}$, so gilt

$$\int_{t_1}^{t_n} s(t)dt = \sum_{j=1}^{n} d_j (t_{j+k} - t_j)/k$$

Aufgabe 6 .
Man beweise Formel (I.5.27) für Skalarprodukte von B-Splines.

I.6 Splines als schwache Tschebyscheff–Systeme

I.6.1 Tschebyscheff-Systeme und schwache Tschebyscheff-Systeme

Von großer Bedeutung in der Approximationstheorie sind die Begriffe **Tschebyscheff–System** und **schwaches Tschebyscheff–System**. Wir wollen untersuchen, in welcher Weise sie für Splinefunktionen gelten.

Definition I.6.1 *Eine Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ von stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathrm{C}[a,b]$ heißt* **Tschebyscheff–System***, wenn es die* **Haar–Bedingung** *erfüllt, d.h. für jede Wahl von n verschiedenen Punkten $x_1,\ldots,x_n$ in $[a,b]$ bilden die Vektoren $g_i := \{\phi_i(x_j)\}_{j=1}^n$ ein linear unabhängiges System in R^n. Der von den $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ aufgespannte Raum heißt* **Tschebyscheff–Raum** *oder kurz* **T-Raum**.

Um die Rolle der Haar-Bedingung zu näher zu beleuchten, wird folgendes Lemma formuliert:

Lemma I.6.1 *Die obige Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ erfüllt die Haar–Bedingung genau dann, wenn*

1. *die Determinante*

$$D\begin{pmatrix} \phi_1, & \ldots & ,\phi_n \\ x_1, & \ldots & ,x_n \end{pmatrix} := \det \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & \\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

   ist für jede Wahl von paarweise verschiedenen x_i ungleich 0,

2. *die Interpolationsaufgabe*

$$\phi(x_i) = r_i \ , \qquad \phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j\, \phi_j$$

   mit zu bestimmenden Koeffizienten α_j ist für jede Wahl von Daten $\{r_i\}_{i=1}^n$ eindeutig lösbar,

3. *jede Linearkombination $\phi = \sum_{j=1}^n \beta_j\, \phi_j$ hat höchstens $n-1$ paarweise verschiedene Nullstellen in $[a,b]$.*

Der (leichte) Beweis sei dem Leser überlassen. Die Eigenschaft 2) zeigt am besten die Wirkung der Haar–Bedingung, da die Lösbarkeit einer beliebigen Interpolationsaufgabe mit einer vorgegebenen Basis von Funktionen sowohl praktisch wie theoretisch von großer Bedeutung ist. Die bekanntesten Basissysteme wie Polynome und trigonometrische Polynome in it einer Variablen erfüllen die Haar–Bedingung. Ferner schließ t man aus Eigenschaft 2) einfach, daß jede Basis eines T–Raumes ist wieder ein Haar–System ist, da ein Basiswechsel nur die Multiplikation mit einer festen regulären Matrix bedeutet.

Von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus betrachtet stellt die Haar–Bedingung jedoch eine sehr einschränkende Bedingung dar, was durch folgenden Satz deutlich wird.

Satz I.6.1 *Es gibt kein Haar–System der Dimension > 1 im Raum $\mathrm{C}(B)$ der stetigen Funktionen, wobei $B = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathrm{R}^2$ ist.*

Bezüglich eines Beweises sei auf das Buch von J.R. Rice[Ri] verwiesen. Es gibt einen weitergehenden Satz von Mairhuber–Curtis, der sogar besagt, daß falls ein Raum $\mathrm{C}(B)$ mit einer kompakten Menge B ein reelles Haar–System der Dimension ≥ 2 enthält, die Menge B homeomorph zu einer Teilmenge des Einheitskreises im R^2 sein muß. Damit gilt die negative Aussage des obigen Satzes allgemeiner für beliebige kompakte Mengen und man kann bei einer gegebenen kompakten Menge B i.a. nicht erwarten, daß es eine Basis von linear unabhängigen stetigen Funktionen gibt, die die Haar–Bedingung erfüllen.

Betrachten wir vor diesem Hintergrund Räume von B-Splines, so zeigt sich, daß sie i.a. keine Tschebyscheff–Räume liefern (Übungsaufgabe). Sie erfüllen jedoch noch eine abgeschwächte Form der Determinanten–Eigenschaft 1), die wir jetzt beschreiben.

Definition I.6.2 *Eine Folge* $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ *von linear unabhängigen Funktionen in* $\mathrm{C}[a,b]$ *heißt* **schwaches Tschebyscheff–System**, *wenn für jede Wahl von* $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$

$$D(x_1, \ldots, x_n) \ge 0 \ , \qquad \text{oder} \qquad D(x_1, \ldots, x_n) \le 0 \ . \tag{I.6.1}$$

für die Determinante aus Lemma I.6.1 gilt. Entsprechend heißt der von den $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ *aufgespannte Raum* **schwacher Tschebyscheff–Raum** *oder kurz* **WT-Raum**.

Andererseits kann auch die Vorzeicheneigenschaft 2) in Lemma I.6.1 abgeschwächt werden. Dies führt zu einer anderen Charakterisierung von WT-Räumen, die durch folgenden Satz beschrieben wird:

Satz I.6.2 (Jones-Karlovitz) *Ein linearer Raum mit Basis* $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ *von linear unabhängigen Funktionen in* $\mathrm{C}[a,b]$ *ist ein WT–Raum genau dann, wenn jede nichttriviale Linearkombination* ϕ *der* ϕ_i *höchstens* $n-1$ **starke Vorzeichenwechsel** x_i *in* $[a,b]$ *hat, d.h.* ϕ *ändert in höchstens* $n-1$ *verschiedenen Punkten* x_i *in* $[a,b]$ *sein Vorzeichen.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem folgenden Satz, der von zentraler Bedeutung für den Übergang von WT-Systemen zu T-Systemen ist.

Satz I.6.3 (Karlin-Studden 1966) *Ein* $n-$ *dimensionaler Teilraum* M *von* $\mathrm{C}[a,b]$ *ist ein schwacher Tschebyscheff–Raum genau dann wenn eine Basis* $g_1, \ldots, g_n$ *von* M *existiert, für die*

$$\lim_{\delta \to 0+} ||g_i - g_i^{(\delta)}||_{\infty,[a,b]} = 0 \tag{I.6.2}$$

gilt, wobei span $\{g_1^{(\delta)}, \ldots, g_n^{(\delta)}\}$ *für jedes* $\delta > 0$ *ein Tschebyscheff-Raum der Dimension* n *ist.*

Man kann also WT-Räume konkret als Grenzfall von T-Räumen erhalten, was auch schon durch Definition I.6.2 nahegelegt wird. Im Folgendem ist vor allem die Notwendigkeit der Bedingung (I.6.2) von Bedeutung, da sie Untersuchung von WT-Räumen auf diejenige von T-Räumen zurückführt. Wir werden daher nur auf deren Beweis näher eingehen. Außerdem ist die Hinlänglichkeit von (I.6.2) leicht zu nachzuweisen (Übungsaufgabe 4).
Der erste Schritt besteht darin, aus jedem WT-System durch einen **Glättungsprozess** eine Familie von T-Systemen mit der Approximationseigenschaft (I.6.2) zu gewinnen. Ein solcher (in der Analysis wohlbekannter) "Glättungsprozess" wird in folgendem Lemma angegeben.

Lemma I.6.2 *Es ist für* $t > 0$

$$K_t(x,u) := G_t(x-u), \qquad G_t(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\ t}}\ e^{-y^2/2t}$$

der sogenannte **Gauss-Kern** *definiert und für* $f \in C(-\infty,\infty) \cap L_\infty(-\infty,\infty)$ *die Familie*

$$f_t(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u) K_t(x,u)\ du := (f * G_t)(x), \qquad \forall t > 0.$$

Dann liegt jedes f_t *in* $C^\infty(-\infty,\infty)$ *und es gilt für jede kompakte Menge* $K \subseteq (-\infty,\infty)$

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{x\in K} |f_t(x) - f(x)| = 0. \tag{I.6.3}$$

Beweis: Differentiation von f_t nach x ist erlaubt, weil das nach Differentiation von $K_(x,u)$ entstehende Integral wieder absolut konvergent ist. Dies kann man beliebig oft wiederholen, so daß f_t in $C^\infty(-\infty,\infty)$ gilt.
Für den zweiten Teil der Aussage benützt man die wohlbekannte Normierungseigenschaft

$$\int_\infty^\infty G_t(y)\ dy = \int_\infty^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\ t}}\ e^{-y^2/2t}\ dy = 1$$

des Gauss-Kerns. Damit folgt (für jedes $R > 0$)

$$\begin{aligned}|f_t(x) - f(x)| &= |\int_\infty^\infty\ [f(x-y) - f(x)]\ G_t(y)\ dy| = |\int_\infty^\infty\ [f(x-u\sqrt{t}) - f(x)]\ G_1(u)\ du| \\ &\le |\int_R^R\ [f(x-u\sqrt{t}) - f(x)]\ G_1(u)\ du| + |\int_{-\infty}^R + \int_R^\infty G_1(u)\ du| \cdot ||f||_{\infty,\mathrm{R}}.\end{aligned}$$

Das zweite Integral kann kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$ gemacht werden, wenn R groß genug gewählt wird, da $G_1(u)$ exponentiell in u abfällt. Anschließend kann man das erste Integral wegen $\int_\infty^\infty G_1(u)\ du = 1$ durch

$$|\int_R^R\ [f(x-u\sqrt{t}) - f(x)]\ G_1(u)\ du| \le \sup_{x\in K}\ \sup_{u\in[-R,R]} |f(x-u\sqrt{t}) - f(x)|$$

abschätzen. Die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$ auf K zeigt dann, daß die rechte Seite gegen 0 strebt für $t \to 0$. □

Als Hilfsmittel benötigen wir zwei weitere Lemmata.

Lemma I.6.3 *Die allgemeine Exponentialsumme*

$$H(x) = \sum_{j=1}^{s} P_j(x) e^{b_j x}, \qquad P_j(x) = \sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k} x^k$$

mit paarweise verschiedenen reellen b_j *und reellen* $a_{j,k}$ *hat höchstens* $N-1$ *reelle Nullstellen oder es ist* $H(x) \equiv 0$*. Dabei ist* $N := \sum_{j=1}^s (m_j + 1)$ *mit* $m_j := -1$ *definiert, falls* $P_j(x) \equiv 0$ *.*

Der Beweis sei als Übungsaufgabe gestellt (Aufgabe 5).

Lemma I.6.4 *Es seien die Funktionen* g_i *und* f_j *aus* $C(-\infty,\infty)$ *und es existiere jedes Integral* $I_{i,j} := \int_{-\infty}^\infty g_i(x) f_j(x) dx$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\det\begin{vmatrix} I_{11} & \dots & I_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ I_{1n} & \dots & I_{nn}\end{vmatrix} &= \frac{1}{n!}\int\limits_{\mathrm{R}^n} D\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ u_1, & \dots, & u_n\end{pmatrix} D\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_n \\ u_1, & \dots, & u_n\end{pmatrix} du_1 \dots du_n \\ &= \int\limits_{\Delta_n} D\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ u_1, & \dots, & u_n\end{pmatrix} D\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_n \\ u_1, & \dots, & u_n\end{pmatrix} du_1 \dots du_n, \\ \Delta_n &:= \{(t_1,\dots,t_n) \in \mathrm{R}^n : t_1 \le \dots \le t_n\}\end{aligned}$$

BEWEIS: Das Integral über R^n sei mit S_1 bezeichnet. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten kann es (zunächst formal) geschrieben werden als

$$S_1 = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \sigma \int_{\mathrm{R}^n} f_1(u_{\rho(1)}) \dots f_n(u_{\rho(n)}) g_1(u_{\sigma(1)}) \dots g_n(u_{\sigma(n)}) du_1 \dots du_n$$

wobei die Summen über alle Permutationen σ, ρ von $\{1, \dots, n\}$ laufen mit der üblichen Definition von sgn ρ bzw. sgn σ. Die weitere (formale) Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) \int_{\mathrm{R}^n} f_1(u_1) \dots f_n(u_n) g_1(u_{\rho^{-1}\sigma(u)}) \dots g_n(u_{\rho^{-1}\sigma(u)}) du_1 \dots du_n \\
&= \sum_{\tau} \operatorname{sgn}\tau \int_{\mathrm{R}^n} f_1(u_1) \dots f_n(u_n) g_1(u_{\tau(1)}) \dots g_n(u_{\tau(n)}) du_1 \dots du_n \\
&= \sum_{\tau} \operatorname{sgn}\tau \int_{\mathrm{R}} f_1(u_1) g_{\tau^{-1}(1)}(u_1) du_1) \dots \int_{\mathrm{R}} f_n(u_n) g_{\tau^{-1}(n)}/u_n) du_n = \det (I_{ij})_{i,j=1}^{n}.
\end{aligned}$$

Die restliche Identität folgt aus

$$S_1 = \sum_{\sigma} \int_{\Delta_n} D \begin{pmatrix} g_1, & \dots & , g_n \\ u_{\sigma(1)}, & \dots & , u_{\sigma(n)} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} f_1, & \dots & , f_n \\ u_{\sigma(1)}, & \dots & , u_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

Schließlich überlegt man sich, daß auf Grund der Voraussetzung die obige Rechnung mit mehrfachen Integralen als Produkt von einfachen Integralen nach dem Satz von Fubini auch streng gültig ist. □

Mit diesen Hilfssätzen folgt nun relativ einfach der Beweis des Satzes von Karlin-Studden:

BEWEIS: Es sei M ein WT-Raum mit Basis $\{g_1, \dots, g_n\}$, für die Definition I.6.2 erfüllt ist. Dann sei definiert $g_i^{(\delta)}(x) := (\bar{g}_i \star G_\delta)(x)$ gemäß Lemma I.6.2, wobei $\bar{g}_i(x) = g_i(x)$ für $x \in [a, b]$ und $\bar{g}_i(x) = g_i(a), \bar{g}_i(x) = g_i(b)$ für $x \leq a$ bzw. $x \geq b$ definiert seien. Nach diesem Lemma gilt dann $\lim_{\delta \to 0} g_i^{(\delta)} = g_i$ gleichmäßig auf $[a, b]$ wie gewünscht. Es bleibt also noch

$$D_\delta \equiv D \begin{pmatrix} g_1^{(\delta)}, & \dots & , g_n^{(\delta)} \\ x_1, & \dots & , x_n \end{pmatrix} > 0 \qquad , a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$$

zu zeigen. Dazu beachte man, daß nach Definition der $g_i^{(\delta)}$ gilt

$$D_\delta \equiv D \begin{pmatrix} g_1^{(\delta)}, & \dots & , g_n^{(\delta)} \\ x_1, & \dots & , x_n \end{pmatrix} = det(I_{i,j})_{i,j=1}^{n} \quad \text{mit} \quad I_{i,j} = \int_{\mathrm{R}} \bar{g}_i(u) K_\delta(x_j, u) du.$$

Anwendung von Lemma I.6.4 liefert nun

$$D_\delta = \frac{1}{n!} \int_{\Delta_n} D \begin{pmatrix} \bar{g}_1, & \dots & , \bar{g}_n \\ u_1, & \dots & , u_n \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} K_\delta(x_1, \cdot), & \dots & , K_\delta(x_n, \cdot) \\ u_1, & \dots & , u_n \end{pmatrix} du_1 \dots du_n$$

Nun beachten wir, daß $D \begin{pmatrix} \bar{g}_1, & \dots & , \bar{g}_n \\ u_1, & \dots & , u_n \end{pmatrix} > 0$ sein muß auf einer Teilmenge $\tilde{\Delta} \subseteq \Delta_n$ vom Maße > 0, denn andernfalls würde diese Determinante f.ü. verschwinden und damit wegen der Stetigkeit der $\bar{g}_i$ auch für alle $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathrm{R}^n$.

Halten wir dann $u_2, \ldots, u_n$ fest, setzen $u_1 = u$ und entwickeln nach der Spalte $(\bar{g}_1(u), \ldots, \bar{g}_n(u))$, so würde daraus die lineare Abhängigkeit der $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ folgen, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.
Zur Untersuchung der zweiten Determinante schreiben wir.

$$D\begin{pmatrix} K_\delta(x_1, u), & \ldots & , K_\delta(x_n, u) \\ u_1, & \ldots & , u_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\right)^n \det(e^{-2(x_i-u_j)/\delta})_{i,j=1}^n$$

und berücksichtigen, daß nach den Regeln der Determinantenrechnung

$$\begin{aligned} \det(e^{-(x_i-u_j)^2})_{i,j=1}^n &= \det(e^{-x_i^2/\delta}\ e^{-u_j^2/\delta}\ e^{-2u_jx_i/\delta})_{i,j=1}^n \\ &= \Pi_{i=1}^n e^{-(x_i^2)/\delta}\ \Pi_{j=1}^n e^{-(u_j^2)/\delta} \det(e^{-2x_iu_j/\delta})_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Die letztere Determinante ist niemals 0, da nach Spezialfall $P_j(x) \equiv 1$) von Lemma I.6.3 span $(e^{-2x_1u/\delta}, \ldots, e^{-2x_nu/\delta})$ einen Haar-Raum der Dimension n bildet.
Das Vorzeichen dieser Determinante muß also konstant sein für $(u_1, \ldots, u_n)\epsilon\Delta_n$. Es ist aber > 0, denn für $n = 1$ ist dies richtig, und wenn es für alle $(n-1) \times (n-1)$ Determinanten dieser Form > 0 ist, so folgt dies für $(n \times n)$ Determinanten durch Entwicklung nach der Spalte $(e^{-2x_1u_1/\delta}, \ldots, e^{-2x_nu_1/\delta}$, in dem man $u_2, \ldots, u_n$ festhält und $u_1 \to -\infty$ streben läßt. Dann bleibt das Vorzeichen fest und der Term mit $e^{-2x_1u_1/\delta}$ dominiert.
Damit folgt nun, daß der Integrand in Δ_n auf einer Menge $\tilde{\Delta}$ von Maße > 0 immer > 0 ist, und der Satz ist bewiesen. $\square$

Als unmittelbare Folge aus dieser Definition und dem Satz von Karlin-Studden erhalten wir

Korollar I.6.1 *Es ist die Menge M ein WT-Raum der Dimension n genau dann, wenn sie eine Basis besitzt, deren Elemente gleichmäßig durch Basen von Tschebyschff-Räumen approximiert werden können.*

Im folgenden Unterabschnitt werden wir mit Hilfe der Methode der **Knotenverfeinerung** aus Abschnitt I.5 zeigen, daß Linearkombinationen von B–Splines die in Satz I.6.2 angegebenen Vorzeicheneigenschaften von WT–Räumen besitzen. Damit wird es auch unnötig, die Richtung $\Leftarrow$ von Satz I.6.2 zu diesem Zweck anzuwenden. Außerdem werden wir mit diesem Hilfsmittel die WT-Eigenschaft von Räumen von B-Splines direkt im Sinne von Definition I.6.2 nachweisen.

Im letzten Unterabschnitt gehen wir auch auf das Interpolationsproblem ein. Obwohl wie oben festgestellt Splineräume kein T–System bilden, kann man doch ein exaktes Kriterium dafür angeben, wann dieses Problem eindeutig lösbar bzw. **korrekt gestellt (well poised)** ist.

I.6.2 Vorzeichenwechsel und Nullstellen von Splinefunktionen

Zuerst präzisieren wir den Begriff " Vorzeichenwechsel" in Definition I.6.2 zu

Definition I.6.1 *Die Anzahl* $S^-(\alpha)$ *der* **starken Vorzeichenwechsel** *in der Folge* $\alpha = \{\alpha_i\}$ *ist definiert als*

$$S^-(\alpha) := \max\{r : \exists\ i_0 < i_1 < \dots i_r \text{ mit } \alpha_{i_{j-1}}\alpha_{i_j} < 0,\ 1 \le j \le r\}$$

Mit $S^+(\alpha)$ *bezeichnet man die Anzahl der* **schwachen Vorzeichenwechsel** *, d.h. erscheint eine Null in der Folge, so darf sie als Zahl mit Vorzeichen so interpretiert werden, daß dadurch die Anzahl der Vorzeichenwechsel maximal wird.*

Es ist klar, daß entsprechende Definitionen für eine Funktion $f \in \mathrm{C}[a,b]$ statt einer Folge möglich sind, z.B.

$$S^-(f) := \max\left\{r : \exists\ x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_r} \text{ in } [a,b] \text{ mit } f(x_{i_{j-1}})f(x_{i_j}) < 0\right\}$$

Für das Folgende führt man zum Vergleich der starken Vorzeichenwechsel (nach [BoVo]) noch ein:

$$\begin{array}{rl} & Es\ gilt \quad S^-(\alpha) \prec S^-(\beta) \\ \Longleftrightarrow & S^-(\alpha) \le S^-(\beta)\ und\ die\ Vorzeichen\ der\ jeweils\ ersten\ nicht\ verschwindenden \\ & Koeffizienten\ in\ \alpha\ und\ \beta\ sind\ gleich,\ falls\ S^-(\alpha) = S^-(\beta) \end{array}$$

Lemma I.6.5 *Es seien* $\{\tilde{N}_{i,k}\}$ *die B–Splines zur Folge* $\tau = \{\mathbf{t}\} \cup \tau$*, wobei* $\tau \in [t_{m-1}, t_m]$ *gemäß (I.5.27) gewählt sei. Dann gilt*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, N_{i,k} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\beta}_i\, \tilde{N}_{i,k} \Longrightarrow S^-(\tilde{\beta}) \prec S^-(\beta)$$

Beweis: Es gilt $S^-(\beta_{i-1}, \tilde{\beta}_i, \beta_j) \le S^-(\beta_{i-1}, \beta_i)$, weil nach Korollar I.5.1 $\tilde{\beta}_i$ eine Konvexkombination von β_{i-1} und β_i ist. Allgemeiner folgt

$$S^-(vec\tilde{\beta}) \le S^-(\dots, \beta_{i-1}, \tilde{\beta}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_{i+1}, \dots) = S^-(\beta).$$

Dabei gilt die Beziehung $\le$ trivialerweise, weil die mittlere Folge eine Erweiterung der ersten ist, und die Gleichheit, weil alle $\tilde{\beta}_i$ Konvexkombinationen ihrer Nachbarelemente sind.
Um die gleiche Orientierung im Sinne des obigen Symbols $\prec$ zu zeigen, nehme o.B.d.A. $\tilde{\beta}_i = 0$ für $i < r$ und $\tilde{\beta}_r > 0$ an, sowie andererseits $\beta_i = 0$ für $i < j$ und $\operatorname{sgn} \beta_j < 0$, also entgegengesetzte Orientierung. Dann muß nach Korollar I.5.1 entweder $\beta_{r-1} < 0$ oder $\beta_r < 0$ sein und folglich $j < r$, da andernfalls β gleich orientiert zu $\tilde{\beta}$ wäre. Damit folgt nun

$$S^-(\tilde{\beta}) \le S^-(\tilde{\beta}_r, \beta_r, \tilde{\beta}_{r+1}, \dots) < S^-(\dots, \beta_j, \tilde{\beta}_{j+1}, \dots, \tilde{\beta}_r, \beta_r, \dots) = S^-(\beta).$$

Hier kommt beim mittleren Übergang mindestens ein Vorzeichenwechsel bei $\beta_j, \dots, \tilde{\beta}_r$ hinzu, weil ja $\beta_j < 0$ und $\tilde{\beta}_r > 0$ lt. Annahme.
Ist also $S^-(\tilde{\beta}) = S^-(\beta)$, so muß die Orientierung von $\tilde{\beta}$ und β gleich sein, da andernfalls nach dem eben Gezeigten $S^-(\tilde{\beta}) < S^-(\beta)$ wäre. □

Satz I.6.4 *Unter Voraussetzungen von obigem Lemma gilt*

$$S^{-}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, N_{i,k}\right) \prec S^{-}(\beta)$$

BEWEIS: Wir wollen zeigen, daß für $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, N_{i,k}(x)$ und jede strikt ansteigende Folge $\{x_i\}_{i=1}^{r}$ gilt $S^{-}\Big(\{f(x_i)\}\Big) \leq S^{-}(\beta)$. O. b.d.A. können die x_i alle in $[t_1, t_{n+k}]$ angenommen werden, da außerhalb davon $f(x)$ verschwindet. Wir verfeinern dann $\mathbf{t}$ so zu einer Folge τ, daß jedes der x_i *genau* $(k-1)$mal in der Folge τ auftritt. Dazu nehmen wir zunächst an, daß jeder Knoten in $\mathbf{t}$ höchstens die Vielfachheit $k-1$ hat. Hat ein Knoten x_i bereits diese maximale Vielfachheit, so fügen wir dieses x_i nicht weiter ein, andernfalls (wenn dazwischen liegend) $(k-1)$fach. Für die neue Folge τ mit B–Splines $\tilde{N}_{i,k}$ gilt nun

$$f(x_j) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{\beta}\, \tilde{N}_{l,k}(x_j) = \sum_{l=i_j-k+1}^{i_j-1} \tilde{\beta}_l\, \tilde{N}_{l,k}(x_j) \tag{I.6.4}$$

wobei $x_j = \tau_{i_j}$ sei und i_j der größte solche Index von τ. Man beachte, daß alle B–Splines stetig sind, sodaß $\tilde{N}_{i_j,k}(x_j) = 0$ gilt. Nach Voraussetzung gilt aber weiter $\tau_{i_j} = \tau_{i_j-1} = \ldots = \tau_{i_j-k+2}$ und so auch $\tilde{N}_{i_j-k+2}(x_j) = \ldots = \tilde{N}_{i_j,k}(x_j) = 0$. Weil aber die $\tilde{N}_{i,k}$ eine Zerlegung der Eins bilden und nur k der B–Splines an einem Punkt nicht verschwinden, muß $\tilde{N}_{i_j-k+1,k}(x_j) = 1$ sein und daher $f(x_j) = \tilde{\beta}_{i_j-k+1}$. Es erscheint also jeder Wert $f(x_j)$, $1 \leq j \leq r$, in der Folge der Koeffizienten $\tilde{\beta}_i$ der Darstellung $f(x) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{\beta}_l\, \tilde{N}_{l,k}(x)$.Nach dem obigen Lemma folgt dann

$$S^{-}\Big(\{f(x_i)\}\Big) \prec S^{-}(\tilde{\beta}) \prec S^{-}(\beta)$$

was den Satz für B–Splines zu Folgen $\mathbf{t}$ mit Koeffizientenvielfachheit $\leq k = 1$ beweist.
Es bleibt noch der Fall zu überlegen, daß $t_{i_j} = \ldots = t_{i_j-k+1}$ für einen Knoten der Ausgangsfolge $\mathbf{t}$ gilt. Sind alle $\{x_i\}_{i=1}^{r}$ davon verschieden, so läuft das gleiche Argument wie vorher durch. Gilt andernfalls $t_{i_j} = x_j$ für ein j, so gilt analog zu eben $N_{i_j,k}(x_j) = \ldots = N_{i_j-k+2,k}(x_j) = 0$, aber $N_{i_j-k+1}(x_j) \equiv N_{i_j-k+1}(t_{i_j}) = 1$. Dann gilt aber $f(x_j) = \beta_{i_j-k+1}$ und der Rest des Arguments folgt wie eben. □

Als unmittelbare Folge von Satz I.6.4 erhalten wir das angekündigte Ergebnis über die WT-Eigenschaft von Splineräumen.

Korollar I.6.2 *Sei $S_{\mathbf{t}}$ der durch Linearkombinationen von B–Splines zu einer zulässigen (endlichen) Knotenfolge erzeugte lineare Raum. Dann ist $S_{\mathbf{t}}$ ein WT–Raum.*

Als weiteres Korollar erhalten wir eine wichtige Aussage zum Design–Problem mit B–Spline Kurven:

Korollar I.6.3 *Durchstößt das Kontrollpolygon zu Kontrollpunkten $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{n}$ eine allgemeine Hyperebene in R^d höchstens m–mal, $m \leq n-1$, so gilt dies auch für die entsprechende B–Spline –Kurve $\mathbf{s}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, N_{i,k}(x)$ in R^d. (In R^2 ist solch eine Hyperebene eine Gerade).*

BEWEIS: Man kann eine Drehung U (mit $d \times d$ Matrix U) und eine Verschiebung (mit Vektor $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^d$) der Hyperebene so vornehmen, daß sie durch die Gleichung $e_1 = 0$ beschrieben wird, wobei $e_1 = 1$–ter Einheitsvektor in R^dist. Die neuen Kontrollpunkte haben dann die Form $\mathbf{d}_i = U\mathbf{c}_i + \mathbf{b}$ und die Folge $\{d_{i,1}\}_{i=1}^{n}$ der ersten Komponenten vor $\mathbf{d}_i$ hat höchstens m Vorzeichenwechsel. Dann hat die erste Komponente der Kurve $U\mathbf{s}(x)+\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n}(U\mathbf{c}_i + \mathbf{b})N_{i,k}(x)$ nach vorigem Satz auch höchstens m Vorzeichenwechsel. Dreht man wieder zurück und verschiebt ebenso, so bedeutet dies, daß $\mathbf{s}(x)$ höchstens m Durchstoßpunkte mit der Ausgangs–Hyperebene hat. $\square$

Als Spezialfall in der Ebene gewinnt man daraus folgendes Ergebnis:

Korollar I.6.4 *Ist das Kontrollpolygon konvex, so gilt dies auch für die B–Spline Kurve.*

An dieser Stelle sei bemerkt, dass eine B–Spline –Kurve $\mathbf{s}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, N_{i,k}(x)$ auch die für Design–Probleme wichtige Eigenschaft der konvexen Hülle besitzt, d.h sie liegt in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{n}$.

Eine weitere Anwendung, die den Schoenberg–Operator

$$V(f:x) := \sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)\, N_{j,k}(x)\ , \qquad t_j^* = (t_{j+1} + \cdots + t_{j+k-1})/(k-1)\ .$$

betrifft, ist eine Variante für Funktionen statt Kontrollpolygone :

Korollar I.6.5 *Schneidet $f \in \mathrm{C}[a,b]$ eine Gerade g höchstens p–mal, so schneidet auch $V(f)$ die Gerade höchstens p–mal.*

BEWEIS: Nach Satz I.6.4 gilt $S^-\Big(V(f) - g\Big) = S^-\Big(V(f-g)\Big) \prec S^-(f-g)$. $\square$

Die bisherigen Aussagen über Vorzeichenwechsel von Splines bzw. Linearkombinationen von B-Splines lassen sich zu solchen über Nullstellen ausbauen. Bevor wir dies tun können, müssen wir definieren, was wir unter Nullstellen und ihrer Vielfachheit verstehen. Es treten dann zusätzliche Komplikationen auf, denn Splinefunktionen können an den Knoten verschieden glatt sein und auf Intervallen verschwinden. Wir betrachten im Folgenden nur die einfache Situtation der Splines von höchst möglicher Glattheit. (Allgemeinere und genauere Definitionen von Nullstellen von Splines mit Vielfachheiten werden bei L.L. Schumaker[Schu] untersucht, s. auch T.Goodman[Goo]).

Definition I.6.2 *Es sei $s \in S_k(\Delta, Z)_{(\xi_0,\xi_{n+1})}$ (vergl. (I.3.22)) aus $C^{k-2}(\xi_0, \xi_{n+1})$. Wir definieren die* **Anzahl** $z(s)$ **der Nullstellen** *von s als*

$$z(s) = \nu(s) + k \cdot r(s) + i(s). \tag{I.6.5}$$

Dabei sei $\nu(s)$ die Anzahl der isolierten Nullstellen x_i einschließlich ihrer Viefachheit, d.h. es gibt eine Umgebung $(x_i - \delta, x_i + \delta)$, worauf s nur bei x_i verschwindet. Die Zahl $r(s)$ ist die Anzahl der maximalen abgeschlossenen Intervalle, worauf s verschwindet, und $i(s)$ die Anzahl der Knoten von Δ im Innern solcher Intervalle.

Bemerkung: Intervalle, worauf s verschwindet, können als Randpunkte nur Knoten besitzen. Es ist a priori nicht klar, wie die Anzahl der Nullstellen von s in einem solchen Fall definiert werden soll. Der folgende Satz zeigt, daß die Setzung (I.6.5) sinnvoll ist.

Satz I.6.5 *Unter den Voraussetzungen von Definition I.6.2 gilt für jedes nicht triviale s*

$$z(s) \le n + k - 1 = \dim(S_k(\Delta, Z)|_{(\xi_0,\xi_{n+1})}) - 1. \tag{I.6.6}$$

BEWEIS:: Es seien $\{I_i\}_{i=1}^r = \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^r$ diejenigen maximalen Intervalle, worauf s nur isolierte Nullstellen hat. Es sei ν_i die Anzahl dieser Nullstellen im offenen Intervall. Nach dem verallgemeinerten Satz von Rolle besitzt dann die Ableitung s' noch mindestens ν_i+1 solcher Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) im offenen Intervall (α_i, β_i), falls es echt in (ξ_0, ξ_{n+1}) enthalten ist. Falls entweder $\alpha_i = \xi_0$ oder $\beta_i = \xi_{n+1}$ gilt, so besitzt s' noch mindestens ν_i solcher Nullstellen. Ist nun $r'+1$ die Anzahl derjenigen I_i die echt in (ξ_0, ξ_{n+1}) liegen, so muß es mindestens $r'+1$ maximale Intervalle J_i geben, auf denen s ganz verschwindet. Nach (I.6.5) reduziert sich auf jedem der J_i die Anzahl der Nullstellen von s' um 1. Insgesamt erhalten wir also $z(s') \geq z(s) - 1$. Wiederholte Anwendung dieses Arguments liefert $z(s^{(k-2)}) \geq z(s) - k + 2$.
Wäre also $z(s) > n + k - 1$ entgegen (I.6.6), so müßte $z(s^{(k-2)}) > n + 1$ gelten. Nun ist $s^{(k-2)}$ ein stetiger Polygonzug nach Voraussetzung. Verschwindet dieser auf einem Intervall der Form $[\xi_j, \xi_{j+p_j}]$, so zählt (I.6.5) dort genau p_j Nullstellen. Ist p die Gesamtzahl dieser Nullstellen, so besitzt $s^{(k-2)}$ auf dem Intervall, wo es nicht identisch verschwindet, noch $> n+1-p$ Nullstellen. Die Menge dieser Intervalle besteht aber aus $n+1-p$ Segmenten der Form (ξ, ξ_{i+1}). Da $s^{(k-2)}$ auf jedem solchen Segment aber höchstens eine (isolierte) Nullstelle haben kann, ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme $z(s) > n + k - 1$. □

Als Anwendung betrachten wir Interpolation mit periodischen Splines (vergl. Korollar I.3.4). Wir beschränken uns dabei auf den Spezialfall, daß Knoten und Stützstellen zusammenfallen und einfach sind.

Korollar I.6.6 *Es sei $S_k^*(\Delta, Z)_{(a,b)}$ der in (I.3.30) definierte Raum der Splines mit Periode $T \equiv b - a$ und einfachen Knoten*

$$\{\xi_i\}_{i=1}^n : \qquad a < \xi_1 < \ldots < \xi_n < b$$

Ferner sei $k > 2$. Dann hat das Interpolationsproblem

$$s(\xi_i) = r_i \quad ,1 \leq i \leq n \quad ,s \in S_k^*(\Delta, Z)_{(a,b)} \tag{I.6.7}$$

eine eindeutige Lösung, falls n ungerade ist.

BEWEIS: Wir nehmen an, daß es eine nichttriviale Lösung s_0 des homogenen Problems zu (I.6.7) gibt. Es seien dann α, β die Anzahl der isolierten Nullstellen von s_0 in (a, b) in den Knoten ξ_i bzw. außerhalb der Knoten, jeweils mit Vielfachheit gezählt. Ferner verschwinde s_0 identisch auf r maximalen Intervallen $\{(\xi_{j_i}, \xi_{j_i+p_i})\}_{i=1}^r$ mit $p_i \geq 1$ und $j_i \in \{0, \ldots, n\}$. Hierbei seien die Knoten periodisch fortgesetzt : $\xi_0 = \xi_n - T \quad ,\xi_{n+1} = \xi_1 + T$ usw. Nach Definition I.6.2 ist dann

$$z(s)|_{(a,b)} \geq \alpha + \beta + \sum_{i=1}^r (k - 1 + p_i) \equiv n + \gamma + \beta + \sum_{i=1}^r (k-2),$$

und $\gamma := \alpha - n + \sum_{i=1}^r 1 + p_i$ ist genau dann > 0, wenn es in mindestens einem Knoten eine mehrfache Nullstelle gibt. Betrachtet man q Perioden, so folgt daraus

$$z(s)-_{(a,b+rT)} \geq q(n + \gamma + \beta) + r(k-2)q$$

Nun gilt aber $dim[S_k^*(\Delta, Z) \bigcup C^{k-2}(-\infty, \infty)|_{(a,b+rT)} \leq k + n \cdot q$ und daher nach Satz I.6.5

$$z(s)-_{(a,b+qT)} \leq k - 1 + q \cdot n \quad .$$

Der Vergleich mit dem vorigen ergibt $k - 1 \geq q(\beta + \gamma + r(k-2))$, d.h. einen Widerspruch, falls γ, β oder r größer als null sind.
Also kann s_0 Nullstellen nur in den Knoten besitzen, und zwar einfache. Daher ändert s_0 sein Vorzeichen genau an den n Knoten, so daß $sgns_0(b) = (-1)^n sgns_0(a)$ ist. Bei ungeraden n erhält man also einen Widerspruch zur Annahme $s_0 \not\equiv 0$, und das Korollar ist bewiesen. □

I.6.3 Regularität von Kollokationsmatrizen mit B-Splines

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir, wann die Determinante

$$D\begin{pmatrix} N_1,\ldots,N_n \\ \tau_1,\ldots,\tau_n \end{pmatrix} \tag{I.6.8}$$

nicht verschwindet , wobei $N_i = N_{i,k}(x)$ die B–Splines zu einer regulären Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ definiert sind, d.h. jeder Knoten tritt höchstens $k-$ mal auf. Die Stützstellen τ_i–auch **Kollokationspunkte** genannt–können vielfach auftreten und zwar wird vereinbart, daß ein τ_i höchsten $(k-1)$mal vorkommen darf und höchstens $k-1-\rho_j$ mal, wenn es mit einem t_j der Vielfachheit ρ_j zusammenfällt. Dies garantiert, daß die Interpolation auch im Hermite- Sinn nach Abschnitt I.1 wohldefiniert ist, denn dadurch gilt genügend hohe Differenzierbarkeit der N_i an den Stützstellen $N_{i,k}(\tau_j) = N_{i,k}(\tau_j-) = N_{i,k}(\tau_j+)$, insbesodere die stetige Abhängigkeit von den Stützstellen.
Wir beginnen mit einer notwendigen Bedingung.

Lemma I.6.6 *Notwendig dafür, daß die obige Determinante regulär ist, ist Bedingung*

$$\tau_j \in (t_j, t_{j+k})\ , \qquad 1 \le j \le n\ .$$

Dies ist äquivalent dazu, daß die Diagonalelemente $N_j(\tau_j)$ der **Kollokationsmatrix**

$$K = (N_i(\tau_j))$$

alle von 0 verschieden sind. Das gleiche gilt für Minoren von K, d.h. $(N_{i_r}(\tau_{j_s}))_{r=1,s=1}^{m,m}$ ist regulär $\Leftrightarrow N_{i_r}(\tau_{i_r}) \ne 0,\ 1 \le r \le m$.

Beweis: Es sei $\tau_j \notin (t_j, t_{j+k})$ für ein j, also z.B. $t_{j+k} \le \tau_j$. Dann gilt auch $t_{r+k} \le \tau_s$ für alle r mit $1 \le r \le j$ und alle s mit $j \le s \le n$ und folglich $N_r(\tau_s) = 0$ für diese r und s. Die Matrix K sieht dann so aus

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} \times & & \times \\ 0\ 0 \cdots & 0 & - - - \\ & 0 & \\ & \vdots & \times \\ & 0 & \end{array}\right) \leftarrow j\text{–te Zeile}$$

j–te Spalte

Die ersten j Spaltenvektoren, als Vektoren in R^{j-1} aufgefaßt, müssten daher linear abhängig sein, d.h. K wäre nicht regulär.
Die gleiche Beweisidee läßt sich ohne weitere Modifikation auf Untermatrizen von K übertragen.
□

Nun wollen wir die Determinanteneigenschaft (I.6.1) für Splines zeigen, d.h. daß sie WT-Räume sind, und dies in einer stärkeren Form. Dazu

Definition I.6.3 *Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ (von reellen Zahlen) heißt* **total positiv**, *wenn alle ihre Minoren nichtnegativ sind, d.h.*

$$D\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_r \\ j_1,\ldots,j_r \end{pmatrix} = \det(N_i(\tau_j))_{i\in I,\ j\in J} \ge 0, \qquad \textit{mit} \quad \begin{array}{l} I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \\ J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \end{array}$$

Satz I.6.6 *Die Matrix* $K = \Big(N_i(\tau_j)\Big)_{i,j=1}^{n}$ *mit einer strikt monotonen Folge* $\{\tau_j\}_{j=1}^{n}$ *ist total positiv.*

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen (notfalls mit Umindizieren), daß der Minor von der Form $D\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ j_1,\ldots,j_r \end{pmatrix}$ ist. Wir verfeinern dann die Knotenfolge $\mathbf{t}$ zu

$$\mathbf{s}: \;\; (\ldots, t_{m-1}, s_m, t_m, \ldots)$$

Dann gilt nach Satz I.5.6

$$\begin{aligned} N_i &= (1-\tilde{\gamma}_i)\,\tilde{N}_i + \tilde{\gamma}_{i+1}\,\tilde{N}_{i+1} \quad \text{mit } 0 \leq \tilde{\gamma}_i \leq 1 \\ &:= \sum \alpha_i(l)\,\tilde{N}_l \quad \text{mit } \operatorname{supp}\alpha_i(l) \subseteq \{i, i+1\}, \text{ d.h. } l \in \{i, i+1\} \end{aligned}$$

Man kann dann die Determinante entwickeln

$$D\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ j_1,\ldots,j_r \end{pmatrix} = \sum_{l_1}\cdots\sum_{l_r} \alpha_{j_1}(l_1)\alpha_{j_2}(l_2)\cdots\alpha_{j_r}(l_r)\,\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix}$$

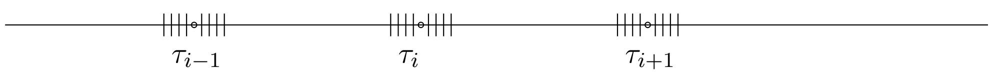
Jede Summe hier besteht nur aus zwei Termen und $\tilde{D}$ ist von der gleichen Form wie D, nur werden die B–Splines $N_{j_1},\ldots,N_{j_r}$ durch die $\tilde{N}_{l_1},\ldots,\tilde{N}_{l_r}$ ersetzt. Genauer gesagt erhalten wir in der Summe Beiträge $\neq 0$ genau dann, wenn $l_\mu = j_\mu$ oder $l_\mu = j_{\mu+1}$ ist (lt. Verfeinerungsformel). Wegen $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ folgt daraus $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_r$. Sind aber zwei Indices $l_\mu,\ l_{\mu+1}$ gleich, so verschwindet $\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix}$, weil zwei Spalten gleich sind. Somit folgt $l_1 < l_2 < \ldots < l_r$ und mit entsprechender Summation

$$D\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ j_1,\ldots,j_r \end{pmatrix} = \sum_{l_1}\cdots\sum_{l_r} \alpha_{j_1}(l_1)\cdots\alpha_{j_r}(l_r)\,\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix}$$

Auf $\tilde{D}$ mit B–Splines $\tilde{N}_{l_1},\ldots,\tilde{N}_{l_r}$ wenden wir wiederholt diese Formel an, so daß $D\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ j_1,\ldots,j_r \end{pmatrix}$ als Linearkombination mit positiven Koeffizienten von Determinanten des Typs $\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix}$ darstellbar ist, wobei die B–Splines zu beliebigen Verfeinerungen $\mathbf{s}$ von $\mathbf{t}$ gebildet sein können. Speziell wählen wir die Verfeinerung $\mathbf{s}$ so fein, daß für festes j gilt

$$\tilde{N}_j(\tau_j) \neq 0 \text{ impliziert } \tilde{N}_j(\tau_r) = 0 \text{ für } \tau_r \neq \tau_j \tag{I.6.9}$$

Dies geht, wenn wir zu τ_i ein s_{l_i} wählen mit $|s_{l_i} - \tau_i| < \varepsilon$ genügend klein sowie $|s_{l_i \pm k} - \tau_i| < \min_{r\neq 0}(\tau_{i+r} - \tau_i)$. Anschaulich bedeutet dies für die Wahl von $\mathbf{s}$, daß seine Knoten (als Striche markiert) sich zu den τ_i wie folgt verhalten:



Eigenschaft (I.6.9) bedingt nun, daß in jeder Spalte von $\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix} \neq 0$ genau ein Element $\neq 0$ ist. Dann kann man auch das Vorzeichen kontrollieren, denn es ist

$$\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\ldots,r \\ l_1,\ldots,l_r \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{r} N_{l_\mu}(\tau_\mu) \geq 0. \tag{I.6.10}$$

Da dies simultan für alle solchen $\tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\dots,r \\ l_1,\dots,l_r \end{pmatrix}$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar I.6.7 *Die Spline–Räume $S_k(\Delta, Z)$ aus (I.3.21) sind WT-Räume.*

Mit etwas genauerer Überlegung kann man auf gleiche Weise ein Kriterium für die strikte Positivität der Determinanten gewinnen.

Satz I.6.7 (Schoenberg-Whitney 1953) *Die Determinante $D\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix}$ ist > 0 genau dann wenn*

$$\tau_{i_m u} \in \operatorname{supp} N_{j_\mu} = (t_{j_\mu}, t_{j_\mu+k}) \ , \qquad 1 \le \mu \le r \ . \tag{I.6.11}$$

Insbesondere ist die Interpolationsaufgabe (mit einfachen Knoten)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, N_{j,k}(\tau_i) \ = \ f_i \ , \qquad 1 \le i \le n$$

mit Daten f_i genau dann eindeutig lösbar, wenn $\tau_i \in \operatorname{supp} N_{i,k}$ für $1 \le i \le n$ gilt.

Beweis: Wir arbeiten diesmal direkt mit den diskreten B–Splines zu beliebigen Verfeinerungen **s** von **t**, wonach gilt (siehe Satz I.5.7)

$$N_{i,k} = \sum \alpha_{i,k}(l) \, \tilde{N}_{l,k}$$

Damit folgt

$$D\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix} = \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_r} \alpha_{j_1,k}(l_1) \cdot \alpha_{j_r,k}(l_r) \tilde{D}\begin{pmatrix} 1,\dots,r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix}$$

Wir wissen bereits, daß alle Determinanten $\tilde{D} \ge 0$ sind, und daß alle diskreten B–Splines $\alpha_{j_\mu,k}(l_\mu)$, $1 \le \mu \le r$, nichtnegativ sind.
Wir wählen dann Verfeinerung **s** so, daß (I.6.9) gilt. Speziell sei für $1 \le \mu \le r$ zu τ_{i_μ} ein Index l_μ so gewählt, daß

$$s_{l_\mu} < \tau_{i_\mu} \le s_{l_\mu+1} \ .$$

Lt. Voraussetzung (I.6.11) haben wir $N_{j_\mu}(\tau_{i_\mu}) > 0$, so daß mit (I.6.9)

$$t_{j_\mu} \le s_{l_\mu} < \tau_{i_\mu} < t_{j_\mu+k} \quad \text{und} \quad s_{l_\mu+k-1} < t_{j_\mu+k} \tag{I.6.12}$$

folgen. Damit gilt auch $\tilde{N}_{l_\mu}(\tau_{i_\mu}) > 0$ und wegen (I.6.10) dann

$$\tilde{D}\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix} > 0$$

Ferner folgt wegen (I.6.12) nach der Träger Eigenschaft der diskreten B–Splines (siehe Satz I.5.7, iv)), daß $\alpha_{j_\mu,k}(l_\mu) > 0$ für $1 \le \mu \le r$. Damit muß in obiger Summe wenigstens ein Term positiv sein und die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Aus diesem Satz sieht man noch einmal deutlich, daß Splineräume nur in einem schwachen oder eingeschränkten Sinne Tschebyscheff Systeme sind.

Es sei noch erwähnt, daß man aus Satz I.6.5 auch die Regularität des Hermite–Problems folgern kann, nämlich es gilt

Satz I.6.8 *Die Determinante* $D\begin{pmatrix} \tau_1,\ldots,\tau_n \\ N_1,\ldots,N_n \end{pmatrix}$ *ist* >0 *genau dann, wenn* $\tau_i \in \mathrm{supp}\ N_i = (t_i, t_{i+k})$ *auch im Falle wenn die Stützstellen* τ_i *vielfach auftreten und zwar wenn aus* $\tau_{i+1} = \ldots = \tau_{i+r} = t_{j+1} = \ldots = t_{j+\mu}$ *folgt* $r+\mu \leq k$.

Diese letzte Bedingung entspricht den anfangs dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen an die Knoten und Stützstellen.
Der Beweis von Satz I.6.8 kann durch Grenzübergang von einfachen Stützstellen τ_i zu zusammenfallenden geschehen (Differenzenbildung von Zeilen (s. Schumacher[Schu]). Dieses Argument versagt, wenn Unterfolgen $\tau_1,\ldots,\tau_{i_r}$ betrachtet werden. Daher ist der Satz in diesem allgemeinen Fall nicht mehr gültig !

I.6.4 Korrekt gestellte (well poised) Interpolationsprobleme

Wir geben nun noch eine Übersicht von Fällen, wo das zentrale Schoenberg-Whitney Kriterium erfüllt ist. In späteren Abschnitt gehen wir dann jeweils auf die Frage der Stabilität ein.
Im Fall **A)** betrachten wir die Knoten als gegeben entsprechend folgenden Knotentypen und untersuchen mögliche Stützstellen:

A1) Bezier–Bernstein Kurven: jedes t_j tritt k–fach auf, d.h. es liegt eine Bernstein– Bezier Kurve vor, die stückweise polynomial vom Grad k ist. Daher sind auf jedem Stück k Punkte zur Interpolation nötig. Die Indizierung $\tau_j = \tau_{ik+r}$ mit $1 \leq r \leq k$ liefert die Bedingung $\tau_j \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ für j mit $ik+1 \leq j \leq (i+1)k$. Da alle ξ_i k–fach sind, gilt aber für die Folge $\mathbf{t}$: $t_j = t_{ik+r} = \xi_i$, $t_{j+k} = \xi_{i+1}$, also $\tau_j \in (t_j, t_{j+k})$ wie nach dem Schoenberg–Whitney Kriterium gefordert.

A2) Hermite–Fall: hier ist die Ordnung $k = 2k'$ und jeder Knoten tritt $t_j = k'$–fach auf. Man kann also die Knotenfolge als durch $t_j = t_{ik+r} = \xi_i$, $j = ik' + r$ mit $0 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq k'$ gegeben annehmen. Eine lokale Basis auf (ξ_i, ξ_{i+1}) läßt sich durch die Grundfunktionen der 2–Punkt–Taylor Interpolation in ξ_i, ξ_{i+1} bis zur Ordnung $k'-1$ gewinnen. Wählt man die τ_j jeweils $(k'-1)$ -fach gleich den paarweise verschiedenen ξ_i, so kann man die entsprechende Interpolationsaufgabe lösen (s. Abschnitt I.1.2). Insbesondere ist die Bedingung des Satzes von Schoenberg– Whitney erfüllt. Diese zeigt aber auch, daß noch allgemeinere Interpolationsaufgaben lösbar sind. Die allgemeine Bedingung an die Stützstellen τ_j lautet hier (Beweis als Übungsaufgabe)

$$\tau_j \in (\xi_i, \xi_{i+2}) \ , \quad 0 \leq i \leq n-2;\ 1 \leq r \leq k'\ j = ik' + r \ . \tag{I.6.13}$$

A3) Stützstellen = Knoten:
Die B–Splines zu $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ sollen den Spline–Raum $S_k(\Delta, Z)$ auf $[a,b]$ liefern. Dann muß nach Korollar I.3.2 gelten

$$t_1 \leq \ldots \leq t_k = a < t_{k+1} \ldots < t_n < b = t_{n+1} = \ldots = t_{n+k} \tag{I.6.14}$$

denn dann bilden die B–Splines eine Basis für diesen Spline– Raum mit (inneren) Knoten bei $t_{k+1},\ldots,t_n$ und Glattheit C^{k-z_i-1} in t_i mit der Vielfachheit z_i . Bei der Wahl $\tau_i = t_{i+k_0}$ für ein k_0 muß daher $z_i \leq k/2$ gelten, damit die Interpolation mit Ableitungen bis zur Ordnung $k - z_i - 1$ überhaupt definiert ist. Ferner ist eine "symmetrische Position" der Stützstellen wünschenswert. Dies ergibt die Möglichkeiten

1. $k = 2k'$ und $\tau_i = t_{i+k'}$, $1 \le i \le n$

   Damit alle $\tau_i \in [a,b]$ liegen, impliziert dies, daß je k' der τ_i auf a bzw. b liegen und insbesondere symmetrische Randbedingungen entstehen.

2. $k = 2k' + 1$ und $\tau_i = t_{i+k'}$ liefert keine symmetrischen Randbedingung. Deshalb betrachtet man hier $\tau_i = t_{i+k/2} = t_{i+k'+1/2} := (t_{i+k'} + t_{i+k'+1})/2$ (im Inneren). Im einfachsten Spezialfall $k' = 1$ quadratischer Splines bedeutet dies die Wahl $\tau_i = (t_{i+1} + t_{i+2})/2$, $2 \le i \le n-1$ und $\tau_1 = a$, $\tau_n = b$.

A4) Stützstellen = arithmetisches Mittel der Knoten (Schoenberg–Wahl):

$$\tau_i = (t_{i+1} + \cdots t_{i+k-1})/(k-1) \ , \quad 1 \le i \le n$$

Damit alle $\tau_i \in [a,b]$ liegen, muß $t_1 = \ldots = t_k = a$, $t_{n+1} = \ldots = t_{n+k} = b$ gelten.

Es gibt weitere, sehr wichtige Interpolationsverfahren mit Splines, die nicht ganz in den Rahmen des Satzes von Schoenberg–Whitney passen:

C1) Cardinale Interpolation: $\mathbf{t} = \{i\}_{i=-\infty}^{\infty}$

Eine umfassende Untersuchung wurde für die Fälle $\tau_i = t_i$,falls $k = 2k'$ und $\tau_i = t_{i+1/2}$ falls $2k' + 1$ von I.J. Schoenberg in seiner Monographie[Schoe] von 1971 durchgeführt. Die Regularität des Interpolationsproblems

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \, M_k(\tau_j - i) = r_j \ , \quad j \in \mathrm{Z}$$

folgt hier nicht direkt aus dem Schoenberg–Whitney–Satz, sondern in Abhängigkeit von Eigenschaften, die die Datenfolgen $\{r_i\}_{i\in Z}$ erfüllen müssen. In Teil II dieses Skripts werden wir allgemeiner den Fall $\tau_j = j + \alpha$ mit $\alpha \in (0,1)$ untersuchen.

C2) Interpolation mit periodischen Splines bzw. geschlossenen Kurven bei äquidistanten Knoten

Hier hat die Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}$ die Form $a = t_1 < \cdots < t_n = b$ und $t_{jn+r} = t_r + j(b-a)$, $1 \le r \le n$, mit $j \le 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Dieser Fall hat viele Analogien mit der Cardinal Interpolation (s. Teil II).

Wir erwähnen noch kurz Beispiele für den Fall B), d.h. es sind die Stützstellen $a = \tau_1 < \cdots < \tau_n = b$ vorgegeben und die Knoten geeignet zu wählen. Standardwahlen sind

B1) $t_j = (\tau_{j-k} + \tau_j)/2$

B2) $\tau_j^* := (\tau_{j-k} - \tau_{j-1})/(k-1) \qquad j = k+1, \ldots, n$

B3) $t_j = \tau_{j-1}$ bzw. $t_{j+1} = \tau_j$

sowie $t_1 = \ldots = t_k = a = t_1$ und $t_{n+1} = \ldots = t_{n+k} = b$ am Rand. In allen Fällen ist das Schoenberg–Whitney Kriterium erfüllt. Positive Resultate über die Norm $||P||_\infty$ des entsprechenden Interpolationsoperators P sind jedoch nur sehr wenig bekannt und kaum untersucht (s. Abschnitt I.7).

Übungen zu Abschnitt I.6

Aufgabe 1 Man zeige, daß jedes Tschebyscheff-System auch ein schwaches Tschebyscheff-System ist.

Hinweis: Man zeige, daß ein Vorzeichenwechsel der Determinante in Lemma I.6.1 eine Vertauschung in der Reihenfolge der Stützstellen impliziert.

Aufgabe 2 Man zeige, daß die Gramsche Matrix $(N_{i,k}, N_{j,k})$ total positiv ist.

Hinweis: Benütze die **Cauchy-Binet Formel** für Determinanten.

Aufgabe 3 Man zeige, daß der Splineraum (XX) kein T-System ist.

Aufgabe 4 Es sei M ein $n-$ dimensionaler Teilraum von C$[a, b]$ ist ein mit einer Basis $g_1, \ldots, g_n$, die durch

$$\lim_{\delta \to 0+} ||g_i - g_i^{(\delta)}||_{\infty,[a,b]} = 0 \tag{I.6.15}$$

approximiert werden kann, wobei span $\{g_1^{(\delta)}, \ldots, g_n^{(\delta)}\}$ für jedes $\delta > 0$ ein Tschebyscheff-Raum der Dimension n ist. Man zeige, daß M ein schwacher Tschebyscheff– Raum ist.

Aufgabe 5 Man beweise die Richtung $\Rightarrow$ von Satz I.6.2 mittels Korollar I.6.1.

Bezüglich der Umkehrung dieser Aussage sei auf [JK] verwiesen.

Aufgabe 6 Man beweise Lemma I.6.3.

Aufgabe 7 Man beweise für B-Splines mit einfachen Knoten direkt mit Hilfe des Satzes von Rolle den Spezialfall

$$S^- \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, N_{i,k} \right) \leq n - 1$$

von Satz I.6.4.

Aufgabe 8 Man zeige mit Hilfe von Satz I.6.4, daß ein B-Spline (mit einfachen Knoten) genau ein Extremum = Maximum besitzt.

I.7 Interpolation mit Splines

I.7.1 Stabilität der Interpolation

Das allgemeine Interpolationsproblem mit $\mathbf{t}$ und τ für stetige Funktionen kann durch den Interpolationsoperator

$$P:\ f \in C[a,b] \to S_{k,\mathbf{t}} = \mathrm{Span}\{N_{i,k}\}_{i=1}^{n} \qquad \text{(I.7.1)}$$

beschrieben werden, definiert durch (wobei $\tau_j \in [a,b]$)

$$(Pf)(\tau_j) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, N_{i,k})(\tau_j) = f(\tau_j)\ , \quad 1 \le j \le n \qquad \text{(I.7.2)}$$

Die Berechnung der Koeffizienten α_i erfolgt über das lineare Gleichungssystem

$$A\,\alpha = \mathbf{f}, \qquad \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\ , \qquad \mathbf{f} = \{f(\tau_j)\}_{j=1}^{n} \qquad \text{(I.7.3)}$$

mit der Kollokationsmatrix A definiert durch

$$A := A_{ij} := \{N_{i,k}(\tau_j)\}_{i,j=1}^{n} \qquad \text{(I.7.4)}$$

Der Satz von Schoenberg–Whitney liefert dann exakte Kriterien für die *Regularität* der Matrix A in Abhängigkeit von $\mathbf{t}$ und τ.
Das Thema dieses Unterabschnitt ist nun die **Stabilität der Interpolation**. Dies bedeutet, daß untersucht werden soll, ob die Lösung des Gleichungssystems (I.7.3) für diese $\mathbf{t}$, τ auch numerisch stabil durchgeführt werden kann. Dazu muß zusätzlich garantiert sein, daß die Kondition von $A \equiv A(\mathbf{t},\tau)$ gleichmäßig beschränkt bleibt, wenn die Punktverteilungen $\mathbf{t}$ bzw. τ beliebig fein werden, denn solche Punktverteilungen muß man benützen, will man *Konvergenz* der Interpolation erreichen.

Die Kondition einer Matrix A ist bekanntlich durch

$$\mathrm{cond}\ A := ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$$

gegeben. Betrachtet man die Supremumsnorm für die Vektoren α in (I.7.3), so gilt $||A||_\infty \le 1$, weil die B-Splines eine Zerlegung der Eins bilden. Daher kann man für die Stabilität einfacher

$$\mathrm{cond}\ A \le ||A^{-1}||_\infty < \infty \qquad \text{(I.7.5)}$$

fordern. Außer der gleichmäßigen Beschränktheit der Norm der Inversen A^{-1} ist noch diejenige der Norm von P als Operator auf $C[a,b]$ wichtig:

$$||P||_\infty := \sup_{f \in C[a,b]} \frac{||Pf||_{\infty,[a,b]}}{||f||_{\infty,[a,b]}} \qquad \text{(I.7.6)}$$

Diese beiden Größen stehen in engen Zusammenhang.

Lemma I.7.1 *Es gelten*

a) Ist A eine beliebige total positive reguläre Matrix, so haben die Vorzeichen der Elemente der Inversen Schachbrettstruktur und es gilt

$$||A^{-1}||_\infty = ||\alpha^*||_\infty \quad \textit{wobei } (A\alpha^*)_i = (-1)^i\ ,\ 1 \le i \le n,$$

b) Mit der Konstanten $D_{k,\infty}$ aus Satz I.3.4 in Abschnitt I.3.3 gilt

$$D_{k,\infty}^{-1}\ ||A^{-1}||\infty\ \le ||P||_\infty\ \le\ ||A^{-1}||\infty. \tag{I.7.7}$$

Beweis: zu a):
Nach der Cramerschen Regel gilt für Elemente b_{ij} der Inversen

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} D\begin{pmatrix} 1,\dots,i-1,i+1,\dots,n \\ 1,\dots,j-1,j+1,\dots,n \end{pmatrix} \Big/ D, \quad D = \det A$$

Nach Satz I.6.6 sind alle Determinanten positiv (nichtnegativ) und die Behauptung über die Vorzeichenstruktur ergibt sich. Es folgt dann mit $(\mathbf{y})_i^* := (-1)^i$ aus

$$||A^{-1}||_\infty = \sup_{||\mathbf{y}||_\infty=1} \sup_i |\sum_{j=1}^n b_{ij}y_j| = \sup_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \sup_i |\sum_{j=1}^n b_{ij}(-1)^j| = \sup_i |\alpha_i|,$$

da $A^{-1}\mathbf{y}^* = \alpha^*$. □

Beweis: zu b):
Die Ungleichung nach oben folgt nach (I.7.3) durch

$$\begin{aligned} ||Pf||_{\infty,[a,b]} &= ||\sum \alpha_i(f)\, N_{i,k}||_{\infty,[a,b]} \le \sup_i |\alpha_i(f)| \\ &\le ||A^{-1}||_\infty \sup_i |f(\tau_i)| \le ||A^{-1}||_\infty\, ||f||_{\infty,[a,b]}. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Ungleichung nach unten wähle eine Funktion $f^* \in C[a,b]$ mit $f^*(\tau_i) = (-1)^i$ und $||f^*||_{\infty,[a,b]} = 1$. Für den Interpolanten Pf^* gilt dann

$$(Pf)(\tau_j) := \sum_{i=1}^n \alpha_i^*\, N_{i,k})(\tau_j), \qquad (A\alpha^*)_i = (-1)^i,$$

und Satz I.3.4 liefert zusammn mit Teil a)

$$||P||_\infty \ge ||Pf^*||_{\infty,[a,b]} \ge D_{k,\infty}^{-1}\ ||\alpha^*||_\infty = D_{k,\infty}^{-1}\ ||A^{-1}||\infty\ .$$

□

Es ist also die Norm $||P||_\infty$ genau dann gleichmäßig beschränkt in $\mathbf{t}$ und τ, wenn dies für die Norm der Inversen der Kollokationsmatrix A gilt. Dies ist für die Konvergenz der Projektoren Pf bedeutsam, denn nach dem *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit* (s. Skript "Funktionalanalysis") ist diejenige von $||P||_\infty$ für die Konvergenz der Pf (mit beliebig feinen τ) notwendig. Dazu ist weiter zu bemerken, daß bei *reiner Polynom-Interpolation* und Grad $\to \infty$ für jede Folge von derartigen Interpolationsprojektoren die Folge der Normen $||P_n||_\infty$ *nicht gleichmäßig beschränkt* bleibt für $n \to \infty$ (siehe E.W. Cheney[Ch]).

Weiter hat die Größe der Norm $||P||_\infty$ entscheidenden Einfluß auf den Approximationsfehler der Interpolation mit P. Dies folgt aus der bereits gezeigten Abschätzung (s.Lemma I.4.3)

$$||f - Pf||_\infty \le (1 + ||P||_\infty)\, dist(f; S_{k,\mathbf{t}}), \tag{I.7.8}$$

Zusammen mit dem obigen Lemma ergibt sich daraus unmittelbar

Korollar I.7.1 *Ist die Interpolation (I.7.2) stabil, d.h. die Norm* $||A^{-1}||_\infty$ *gleichmäßig in* $\mathbf{t}$ *beschränkt, so gilt*

$$||f - Pf||_\infty \leq (1 + ||A^{-1}||_\infty)\, dist(f; S_{k,\mathbf{t}}) \leq Cdist(f; S_{k,\mathbf{t}}). \tag{I.7.9}$$

mit einer von $\mathbf{t}$ *unabhängigen Konstanten* C.

Stabile Interpolation mit Elementen aus $S_{k,\mathbf{t}}$ besitzt also bis auf eine feste Konstante denselben Approximationsfehler wie die beste Approximation.

Es ergeben sich nun für die Interpolation mit Splines zwei grundlegende Fragestellungen:

A) Gegeben eine Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ und zugehörige B–Splines, finde dazu eine Folge $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{n}$ von Stützstellen in Form einer Vorschrift $\mathbf{t} \to \tau$, so daß die entsprechende Interpolationsaufgabe lösbar ist. Die Vorschrift soll so sein, daß die Berechnung *stabil* erfolgt und der entstehende Projektionsoperator *unabhängig* von $\mathbf{t}$ beschränkt ist.
Man kann dieses Problem auch als Frage formulieren: gilt

(A) $\quad \sup_{\mathbf{t}} \ \inf_\tau \ ||A^{-1}||_\infty \ < \ \infty$?

B) Gegeben eine Stützstellenfolge $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{n}$, finde eine Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ und zugehörige B–Splines, so daß die Interpolationsaufgabe lösbar ist. Wie vorher soll die Berechnung der Lösung stabil geschehen und der Projektionsoperator *unabhängig* von τ eine beschränkte Norm besitzen.
Dieses Problem ist "dual" zu Problem (A) und kann ebenfalls als Frage:

(B) $\quad \sup_\tau \ \inf_{\mathbf{t}} \ ||A^{-1}||_\infty \ < \ \infty$?
formuliert werden.

Das zweite Problem behandelt die der Praxis nähere Fragestellung, besitzt jedoch im Gegensatz zu ersterem keine positive Antwort. Man kann aber beide Fragestellungen abschwächen und die gleichmäßige Beschränktheit in $\mathbf{t}$ nur für bestimmte Folgen von Stützstellen in (A) bzw. diejenige in τ nur für bestimmte Folgen von Knoten in (B) betrachten. Hierzu gibt es eine Reihe von positiven Ergebnissen, von denen wir im Folgenden einige vorstellen.

Zuvor soll gezeigt werden, daß Frage (A) positiv beantwortet werden kann, während für (B) dies nicht gilt.
Die Lösbarkeit von (A) beruht auf der Wahl der Alternationspunkte des **Chebychev–Splines**[1] als Interpolationspunkte (wobei wir der Existenz dieses Splines in Abschnitt I.8 vorgreifen).

Satz I.7.1 *Es gelten folgende Aussagen*

a)

$$||A^{-1}||\infty \geq \kappa_{k,\mathbf{t},\infty},$$

wobei $\kappa_{k,\mathbf{t},\infty}$ *die Konditionszahl der B-Spline-Basis zu* $S_{k,\mathbf{t}}$ *bezeichnet,*

b) Wählt man die Kollokationspunkte τ_l^* *gemäß*

$$s(\tau_j^*) = (-1)^j \ , \quad 1 \leq j \leq n \ , \quad ||s||_{\infty,[a,b]} = 1,$$

[1] Zur Unterscheidung von den in Abschnitt I.1 erwähnten Tschebyscheff-Splines ist hier eine andere Schreibweise gewählt worden!

wobei $s(x)$ der nach Satz I.8.4 eindeutig bestimmte Chebychev–Spline ist, so gilt für die zugehörige Matrix A_*

$$||A_*^{-1}||_\infty = \kappa_{k,\mathbf{t},\infty}.$$

Beweis: zu a): Aus

$$||A^{-1}|| = \sup_{\alpha\in\ell_\infty} \frac{||\alpha||_\infty}{||A\alpha||_\infty} \geq \sup_{\alpha\in\ell_\infty} \frac{||\alpha||_\infty}{||\sum \alpha_i\, N_{i,k}||_{\infty,[a,b]}} = \kappa_{k,\tau,\infty}$$

folgt direkt die Aussage. □

Beweis: zu b): Es ist

$$(-1)^j = s(\tau_j^*) = \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i^*\, N_{i,k})(\tau_j^*) = (A_*\,\alpha^*)_j.$$

Nach Lemma I.7.1, b) folgt dann die Ungleichung

$$\kappa_{k,\mathbf{t},\infty} \geq \frac{||\alpha^*||_\infty}{||s^*||_{\infty,[a,b]}} \geq ||\alpha^*||_\infty = ||A_*^{-1}||_\infty$$

und mit a) darin die Gleichheit. □

Damit hat Problem A) eine positive Antwort:

Korollar I.7.2 *Für jede Knotenfolge* $\mathbf{t}$ *liefert die Interpolation an den Extrema des zugehörigen Chebychev–Splines optimale Stabilität der Interpolationsmatrix. Darüber hinaus ist in diesem Falle die Kollokationsmatrix gleichmäßig in* $\mathbf{t}$ *stabil und* $||P||_\infty$ *gleichmäßig beschränkt.*

Die letzte Aussage folgt nach Abschnitt I.3, denn dort wurde gezeigt

$$\kappa_{k,\mathbf{t},\infty} \leq \kappa_{k,\infty} < \infty.$$

Das Problem B) hat dagegen eine negative Antwort. Dies folgt aus dem folgenden

Satz I.7.2 *Es seien* $\mathbf{t}, \tau$, *wie in (I.7.2) gegeben und die zugehörigen B-Splines in* $L_\infty^r(\tau_1, \tau_n)$. *Es sei ferner definiert* $e(x)$ *mit* $e(j) = (-1)^j$. *Dann gilt*

$$||A^{-1}||_\infty \geq r! \frac{|[\tau_i, \cdots, \tau_{i+r}]e|}{\Delta_{i,r}}, \qquad \textit{für } i = 1, \cdots, n-r,$$

wobei definiert sei

$$\Delta_{i,r} := \max_j \Big\{ |(\nabla_k^{(r)} e)_j| : [t_j, t_{j+k-r}] \cap [\tau_i, \tau_{i+r}] \neq \emptyset \Big\},$$

sowie rekursiv $(\nabla_k^{(r)} := \nabla_{k-r+1}^{(1)}(\nabla_k^{(r-1)})$ *mit* $(\nabla_k^{(1)}\alpha)_j := (k-1)(\alpha_j - \alpha_{j-1})/(t_{j+k-1} - t_j)$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $r = 1$. Der allgemeine Fall ist etwas aufwendiger zu beweisen, folgt aber demselben Grundprinzip.
Für $s^*(t) = \sum \alpha_i^* N_{i,k}$ gelte $s^*(\tau_j) = (-1)^j = e(j)$. Dann folgt mit $\sigma_i \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ und Satz I.5.3

$$[\tau_i, \tau_{i+1}]e = \frac{s^*(\tau_{i+1}) - s^*(\tau_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i} = \Big(\sum \alpha_j^* N_{j,k}\Big)'(\sigma_i) = \sum (\nabla_k^{(1)} \alpha^*)_j \ \mathrm{N}_{j,k-1}(\sigma_i).$$

Wegen der totalen Positivität von A besitzen die α_j^* alternierende Vorzeichen und es folgt

$$|[\tau_i, \tau_{i+1}]e| \le ||\alpha^*||_\infty \sum (\nabla_k^{(1)} e)_j \ \mathrm{N}_{j,k-1}(\sigma_i) \le ||\alpha^*||_\infty \, \Delta_{i,1}$$

nach Definition von $\Delta_{i,1}$. Lemma I.7.1, a) ergibt daher die Behauptung. □

Hieraus kann man folgern, daß Frage (B) eine negative Antwort besitzt, denn $||A^{-1}||_\infty$ kann nicht gleichmäßig in τ nach oben beschränkt werden. Um dies zu sehen, wähle τ mit $\tau_{2j-1} = j$, $\tau_{2j} = j - \varepsilon$ und $0 < \varepsilon \ll 1$ (d.h. jeweils "Paare"). Dann müßte auch $\min\{(t_{i+k-1} - t_i) : [t_i, t_{i+k-1}] \cap [j, j+\varepsilon] \neq 0\} \le \varepsilon$ const gelten, damit $||A^{-1}||_\infty \le$ const. Dies würde aber bedeuten, daß in einer ε–Umgebung von $\tau_{2j} = j$ jeweils irgendwelche $k-1$ der Knoten t_i liegen müssen, damit der Durchschnitt nicht leer ist. Wegen $j = 1, \ldots, [n/2]$ würden bei dieser Wahl also ca. $k[n/2]$ Knoten benötigt. Wir haben aber nur $n + k$ in der Folge $\{t_i\}_{i=1}^{n+k} = \mathbf{t}$ zur Verfügung.

In [Boo4] sind diese Überlegungen präziser durchgeführt und

$$||P||_\infty \ge \text{const.} \ \max_i \frac{((\tau_{i+2} - \tau_i), (\tau_{i+1} - \tau_{i-1}))}{(\tau_{i+1} - \tau_i)} \quad \text{falls } k \ge 4.$$

gezeigt. Im quadratischen Fall mit Ordnung $k = 3$ sind dort auch einige positive Ergebnisse über die Beschränktheit der Spline-Interpolation bei *gegebenem* τ in Abhängigkeit von $\mathbf{t}$ angegeben. Es werden im Falle $t_{j+1} \neq \tau_j$

$$\sup_{f \in C^1[a,b]} \frac{||(Pf)'||_\infty}{||f'||_\infty} \le 8 \tag{I.7.10}$$

gezeigt und Fehlerabschätzungen mit optimaler Fehlerordnung in $\Delta\tau = \max(\tau_{i+1} - \tau_i)$ abgeleitet.

I.7.2 Spezielle Interpolationsprobleme

Die Behandlung der Interpolation mit quadratischen Splines kann in verschiedener Weise geschehen. Setzt man für die Knoten

$$a = t_1 = t_2 = t_3 < t_4 < \cdots < t_n < b = t_{n+1} = t_{n_2} = t_{n+3} \tag{I.7.11}$$

an, so führt die Darstellung mit den entsprechenden B-Splines auf das lineare Gleichungssystem

$$s(\tau_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, N_{i,3}(\tau_j) = f_j \ , \quad \tau_j \in (t_j, t_{j+2}), \qquad 1 \le j \le n, \tag{I.7.12}$$

für den interpolierenden Spline $s(x)$. Dann kann man die Rekursionsformeln aus Abschnitt I.5 zu verwenden, um mit $\alpha_0 := \alpha_{n+1} = 0$

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_j^{(2)} \, N_{j,2}(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_j^{(2)} := \frac{(x - t_j)\alpha_j + (t_{j+2} - x)\alpha_{j-1}}{t_{j+2} - t_j} \tag{I.7.13}$$

zu schreiben. Hält man x in $\alpha_j^{(2)}$ fest und setzt $\tilde{s}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)} N_{i,2}(t)$, so wird $\tilde{s}(t)$ linear in t und es gilt $\tilde{s}(t_{i+1}) = \alpha_i^{(2)}$. Daher gilt für $\tau \in (t_{j+1}, t_{j+2})$, $2 \le j \le n$ die Darstellung

$$\tilde{s}(\tau) = [(\tau - t_{j+1})\,\alpha_{j+1}^{(2)} + (t_{j+2} - \tau)\,\alpha_j^{(2)}]/(t_{j+2} - t_{j+1})$$

Hierin setze nun $\tau = \tau_j$ ein und erhalte mit (I.7.12) (I.7.13)

$$\begin{aligned}(t_{j+2} - t_{j+1})\, f_j \quad &= \quad \frac{(\tau_j - t_{j+1})}{t_{j+3} - t_{j+1}}\Big\{(\tau_j - t_{j+1})\alpha_{j+1} + (t_{j+3} - \tau_j)\alpha_j\Big\} \\ &+ \quad \frac{(t_{j+2} - \tau_j)}{t_{j+2} - t_j}\Big\{(\tau_j - t_j)\alpha_j - (t_{j+2} - \tau_j)\alpha_{j-1}\Big\}\end{aligned} \tag{I.7.14}$$

Im Spezialfall $\tau_j = \tau_j^* := (t_{j+1} + t_{j+2})/2$ vereinfachen sich diese Gleichungen zu ($\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{(t_{j+2} - t_{j+1})}{t_{j+3} - t_{j+1}}\alpha_{j+1} \quad &+ \quad \Big(\frac{2t_{j+3} - t_{j+2} - t_{j+1}}{t_{j+3} - t_{j+1}} + \frac{t_{j+2} + t_{j+1} - 2t_j}{t_{j+2} - t_j}\Big)\alpha_j \\ &+ \quad \frac{(t_{j+2} - t_{j+1})}{t_{j+2} - t_j}\alpha_{j-1} = 4f_j\end{aligned} \tag{I.7.15}$$

Dieses System ist wegen $2t_{j+3} - t_{j+2} - t_{j+1} > t_{j+2} - t_{j+1}$ und $t_{j+2} + t_{j+1} - 2t_j > t_{j+2} - t_{j+1}$ diagonaldominant. C. de Boor[Boo4] zeigt damit die Schranke $||P||_\infty \le 8$.

S. Demko[Dem] und vorher M. Marsden[Ma] benutzen einen anderen Zugang, der für den Spezialfall $\tau_i = (t_{i+1} + t_{i+2})/2$ bessere Ergebnisse liefert.
Dazu stellt man $s(x)$ auf $[t_j, t_{j+1}]$, $3 \le j \le n$, als quadratisches Lagrange-Interpolationspolynom mit den Stützstellen t_j, τ_{j-1}, t_{j+1} dar mit den Unbekannten $s_j := s(t_j)$, während die Werte $s(\tau_{j-1}) = f(\tau_{j-1}) := f_{j-1}$ für $j = 2, \ldots, n+1$ und bekannt sind. Damit sind Interpolationsbedingungen im Innern von [a,b] bereits berücksichtigt. Unter Beachtung von $t_1 = t_2 = t_3 = a$, $t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = b$, also $\tau_1 = a, \tau_n = b$, ergeben sich wie oben noch die Randbedingungen

$$s_3 = s(a) = f(a) = f_1\ , \qquad s_{n+1} = s(b) = f(b) = f_n. \tag{I.7.16}$$

Es bleiben die Unbekannten s_j, $4 \le j \le n$ zu bestimmen, um $s(x)$ stückweise auf $[t_j, t_{j+1}]$ darzustellen. Dies geschieht durch die $n-3$ Übergangsbedingungen $s'(t_{j+1}-) = s'(t_{j+1}+), 3 \le j \le n-1$.
Mit der neuen Variablen $t - t_j := uh_j := u(t_{j+1} - t_j)$ und $\tau_{j-1} - t_j = \lambda_{j-1}h_j$, wobei die $\lambda_{j-1} \in (0,1)$ fest vorgegeben ist, transformieren sich die Interpolationspunkte des Lagrange-Interpolationspolynoms zu $u = 0, \lambda_{j-1}, 1$ und es gilt dann für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ bzw. $u \in [0,1]$

$$s(t)|_{(t_j,t_{j+1})} = s_j\frac{(u-1)(u-\lambda_{j-1})}{\lambda_{j-1}} + f_{j-1}\frac{u(u-1)}{(\lambda_{j-1}-1)\lambda_{j-1}} + s_{j+1}\frac{u(u-\lambda_{j-1})}{1-\lambda_{j-1}}. \tag{I.7.17}$$

Eine entsprechende Darstellung gilt auf dem Intervall $[t_{j+1}, t_{j+2}]$. Differentiation nach u und Einsetzen von $t = t_{j+1}-, t = t_{j+1}+$ in die oben erwähnte Übergangsbedingung liefert das $(n-3) \times (n-3)$ Tridiagonalsystem

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_j}\quad \Big\{\quad s_j\frac{(1-\lambda_{j-1})}{\lambda_{j-1}} + f_{j-1}\frac{1}{(\lambda_{j-1}-1)\lambda_{j-1}} + s_{j+1}\frac{(2-\lambda_{j-1})}{1-\lambda_{j-1}}\Big\} \\ &= \quad \frac{1}{h_{j+1}}\Big\{-s_{j+1}\frac{(1+\lambda_j)}{\lambda_j} + \frac{f_j}{(1-\lambda_j)\lambda_j} - s_{j+2}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}\Big\}, \qquad 3 \le j \le n-1\end{aligned} \tag{I.7.18}$$

für die s_j, weil s_3, s_n bereits durch die Randbedingungen (I.7.16) festgelegt sind. Marsden (loc. cit.) betrachtete hierin nur den Fall $\lambda_j = 1/2$, in dem sich das System zu

$$h_{j+1}\, s_j + 3(h_j + h_{j+1})s_{j+1} + h_j\, s_{j+2} = 4h_{j+1}\, f_{j-1} + 4h_j\, f_j \ , \quad 3 \le j \le n-1 \ . \tag{I.7.19}$$

Daraus schließt man mit dem Gerschgorin-Trick für diagonaldominante Matrizen (s. unten im kubischen Fall), daß

$$\max_{3\le j\le n+1} |s_j| \le 2 \max_{2\le j\le n-1} |f(\tau_j)|$$

Außerdem erhält man aus (I.7.17) nach einfacher Rechnung die Abschätzung

$$\max_{t_j\le t\le t_{j+1}}|s(t)| \le |s_j| \max\{\frac{(1-\lambda_{j-1})^2}{4\lambda_{j-1}},1\} + \frac{|f_{j-1}|}{(1-\lambda_{j-1})^2}4\lambda_{j-1} + |s_{j+1}| \max\{\frac{\lambda_{j-1}^2}{4(1-\lambda_{j-1})},1\}.$$

Damit folgt im Falle $\lambda_j = 1/2$ für $j = 3, \cdots, n-1$ für den durch (I.7.12) definierten Interpolationsoperator $Pf := s$ sofort

$$||Pf||_\infty \le 2||f||_\infty.$$

und nach Korollar I.7.1 die Fehlerabschätzung

$$||f - Pf||_\infty \le 3\ dist(f; S_{3,\mathbf{t}}). \tag{I.7.20}$$

Allgemein kann man aus (I.7.18) relativ leicht folgern, daß die Matrix genau dann diagonaladominant ist, wenn $\lambda_j^2 < 1/2$ und $(1-\lambda_j)^2 < 1/2$ gelten. Demko (loc.cit.) zeigte genauer

Satz I.7.3 *Es sei $\tau_j = t_{j+1} + \lambda_j h_{j+1}$ für $j = 2, \cdots, n-1$ für die Stützstellen gesetzt und es gelte $|\lambda_j - 1/2| \le \gamma < \sqrt{2} - 1/2$. Dann gibt es eine Konstante $K = K(\gamma)$ unabhängig von den Knoten und den Stützstellen, so daß der Interpolationsoperator eine Norm $||P||_\infty \le K$ besitzt. Im Falle $\gamma > \sqrt{2} - 1/2$ wird diese Aussage falsch, d.h. Interpolation mit quadratischen Splines mit solchen Stützstellen ist i.a. instabil.*

Zu erwähnen sind noch der periodische Fall bzw. geschlossene Kurven. Dann können die Randbedingungen nicht in der Form $s(a) = f(a)$, $s(b) = f(b)$ gestellt werden, weil der Wert $s(a)$ ein freier Parameter ist. Es müssen daher die periodischen Bedingungen $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$ angesetzt werden. Dies kombiniert mit (I.7.18) gibt dann wieder $n-3+2$ Bedingungen für die $n-1$ Unbekannten $s_3 = s(a), s_4, \ldots s_n, s_{n+1} = s(b)$ des quadratischen Splines $s(x)$.

An diesen Fall anschließend, der die Schoenberg–Wahl **(A4)** im vorigen Unterabschnitt für $k=3$ umfaßt, kann man als nächstes den Fall kubischer interpolierender Splines mit dem Gleichungssystem

$$s(\tau_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, N_{i,4}(\tau_j) = f_j \ , \quad 1 \le j \le n \tag{I.7.21}$$

und $a = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 < t_5 < \ldots < t_n = b = t_{n+1} = \ldots = t_{n+5}$ betrachten. Wie im quadratischen Fall kann die Kollokationsmatrix auch über Rekursionsformeln aufgestellt bzw. umgeformt werden. Zwar ist sie nicht mehr diagonal dominant, jedoch kann der Umstand, daß sie total positiv ist (vergl. Abschnitt I.6), dazu ausgenützt werden, um für den Interpolationsoperator mit den Stützstellen des Schoenberg-Operators

$$Pf = \sum \alpha_i\, N_{i,k}, \quad Pf(\tau_j) = f(\tau_j), \qquad \tau_j = \frac{t_{j+1} + t_{j+2} + t_{j+k-1}}{k-1}$$

im Falle $k = 4$ zu zeigen, daß gilt

$$||Pf||_\infty \le 27||f||_\infty.$$

Eine ausführliche Darstellung dazu findet man in de Boor[Boo3]). Man könnte vermuten, daß die gleichmäßige Beschränktheit der Norm dieser P für beliebige $k \geq 3$ gilt. Leider ist dies falsch, wie von R.Q.Jia[**?**] gezeigt.

Alternativ wird (I.7.21) in Farin[Fa],§9.1, über die segmentweise betrachtete Bernstein-Bezier Basis hergeleitet. Deren Kontrollpunkte b_{3j} sind wegen $s(t_{j+1}) = f(t_{j+1})$ bekannt, während die restlichen b_{3j-1}, b_{3j-2} wie oben durch die Kontrollpunkte α_j der B–Spline ausgedrückt werden. Offen bleibt bei diesem Zugang, wann das Gleichungssystem lösbar ist.

Das Standard–Gleichungssystem für kubische Spline–Interpolation entsteht–wie bereits analog im quadratischen Fall demonstriert– durch Auswerten der C^2–Glattheitsbedingungen und Wahl von $m_i = s''(t_i)$ als Parametern (s. z.B. Stoer[Stoer]). Als Interpolationspunkte werden die Knoten der Splines gewählt. Das Ergebnis ist ein diagonaldominantes Tridiagonalsystem.
Es gibt aber in diesm Fall den mittlerweile klassischen Zugang über die "beste Interpolation", bei dem die Interpolationspunkte vorgegeben sind und sich die "beste Interpolation" als Interpolation mit Splines ungerader Ordnung und Knoten = Stüzstellen herausstellt. Dies wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

I.7.3 Beste Interpolation

In diesem Abschnitt sind die Interpolationsstellen als Knoten des interpolierenden Splines gewählt, wobei dieser von gerader Ordnung ist. Man hat also folgendes Problem: bestimme die Spline–Funktion $s(x)$ vom stückweisen Grad $2k-1$ und einfachen Knoten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$, d.h. $Z = \{z_i\}$ mit $z_i = 1$, durch die Interpolationsbedingungen

$$s(x_i) = f_i \ , \quad 0 \leq i \leq N+1, \qquad s(x) \in S_{2k}(\Delta, Z) \subseteq C^{2k-2}[a,b] \tag{I.7.22}$$

Wegen $\dim S_{2k}(\Delta, Z) = N + 2k$ fehlen noch $2k-2$ Bedingungen, die wir später als zusätzliche Randbedingungen formulieren werden. Man verwendet nun wieder eine Darstellung von $s(x)$ durch B–Splines und setzt

$$s(x) = \sum_{i=-2k-1}^{N} \alpha_i \, N_{i,2k}(x) \tag{I.7.23}$$

an mit B–Splines der Ordnung $2k$ zu den Knoten

$$x_{-2k+1} \leq \ldots \leq x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b \leq x_{N+2} \leq x_{N+2k} \tag{I.7.24}$$

Es sind also die $2k+N$ Unbekannten α_i zu bestimmen. Der Trick ist nun, statt s seine $k-$te Ableitung

$$s^{(k)}(x) = \sum_{j=-k+1}^{N} \beta_j \, N_{j,k}(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{I.7.25}$$

mit den Unbekannten β_j zu betrachten und dann die Interpolationsbedingungen mittels dividierter Differenzen zu umzuschreiben. Dies geschieht über die Darstellungsformel

$$\int_{x_{-k+1}}^{x_{N+k}} s^{(k)}(x) \; N_{i,k}(x) \; dx = \frac{(x_{i+k} - x_i)}{k}[x_1, \ldots, x_{i+k}] \, s \ , \quad -k+1 \leq i \leq N. \tag{I.7.26}$$

Es ergibt sich das $(N-k+2) \times (N+k)$ Gleichungssystem

$$\sum_{j=-k+1}^{N} \beta_j \int_a^b N_{j,k}(x) \, N_{i,k}(x) = \Big(\frac{x_{i+k} - x_i}{k}\Big)[x_i, \ldots, x_{i+k}] \, f \ , \quad i = 0, \ldots, N+1-k, \tag{I.7.27}$$

wobei $f(x)$ als eine Funktion mit $f(x_i) = f_i$ zu verstehen ist. Wir haben also (in Übereinstimmung mit obiger Dimensionsbetrachtung) je $k-1$ zusätzliche Bedingungen an Randpunkten a, b einzuführen, um das Gleichungssystem zu ergänzen. Am einfachsten geschieht dies durch Bedingungen der Form

$$[x_{-k+j}, \ldots, x_j]\, s = a_j \ , \quad [x_{n+1-k+j}, x_{N+1+j}]\, s = b_j \ , \quad 1 \le j \le k-1.$$

Die Werte a_j, b_j können willkürlich gewählt werden oder gleich den dividierten Differenzen $[x_{-k+j}, \ldots, x_j]\, f$ bzw. $[x_{N+1-k+j}, x_{N+1+j}]\, f$ gesetzt werden, falls die Werte f_i für $i = -k+1, \ldots, -1$ und $i = N+2, \ldots, N+k$ zusätzlich vorgegeben sind. Günstiger ist es, diese zusätzlichen Bedingungen in der äquivalenten Form

$$[x_{-j}, \ldots, x_0]\ s \ = \ A_j \qquad 1 \le j \le k-1, \tag{I.7.28}$$

$$[x_{N+1}, \ldots, x_{N+j+1}]\ s \ = \ B_j \qquad 1 \le j \le k-1, \tag{I.7.29}$$

anzusetzen. Man sieht, daß aus den Bedingungen mit A_j, B_j die Bedingungen mit a_j, b_j durch Hinzufügen der inneren Interpolationsbedingungen erhalten werden können. Es verwenden (I.7.28), (I.7.29) jedoch nur Punkte $\le a$ oder $\ge b$, also echte Randbedingungen. Insbesondere liefert die Wahl $x_{-k+1} = \ldots = x_0 = a$ und $x_{N+1} = \ldots = x_{N+k} = b$ die Randbedingungen

$$s^{(j)}(a) = \alpha_j \ ; \quad s^{(j)}(b) = \beta_j, \quad 1 \le j \le k-1 \tag{I.7.30}$$

Die Berechnung von $s^{(k)}(x)$ erfolgt nun durch (I.7.25) vervollständigt mit (I.7.28), (I.7.29):

$$\sum_{j=-k+1}^{N} \beta_j G_{i,j} := \sum_{j=-k+1}^{N} \beta_j \int_{x_{-k+1}}^{x_{N+k}} N_{j,k}(x)\, N_{i,k}(x)\, dx = F_i \ , \quad -k+1 \le i \le N \tag{I.7.31}$$

wobei

$$F_i := \begin{cases} (1/k)(x_{i+k} - x_i)[x_i, \ldots, x_{i+k}]f, & , \quad 0 \le i \le N+1-k \\ A_i & , \quad , -k+1 \le i \le -1 \\ B_i & , \quad i = N-k+1+j, 1 \le j \le k-1 \end{cases} \tag{I.7.32}$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit der symmetrischen, positiv definiten Gramschen Matrix $G = (G_{ij})_{i,j=-k+1}^{N}$. Es gilt $G_{i,j} = 0$ falls $|i-j| \ge k$, da dann die Träger von $N_{i,k}$ und $N_{j,k}$ leeren Durchschnitt haben, d.h. die Matrix G hat die Bandbreite $2k-1$. Es gibt viele günstige numerische Methoden zur Lösung solcher Gleichungssysteme wie z.B. das Cholesky–Verfahren. Dazu ist zu bemerken, daß Pivotsuche unnötig ist, wie deBoor–Pinkus[BP] auf Grund der Tatsache, daß auch G total positiv ist, gezeigt haben.

Damit ist das durch (I.7.22) gegebene Interpolationsproblem auf die Lösung des Gleichungssystems (I.7.31) zurückgeführt. Den genauen Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen $s(x)$ und $s^{(k)}(x)$ beschreibt

Lemma I.7.2 *Die Splinefunktion (I.7.3) erfüllt (I.7.22) zusammen mit (I.7.28), (I.7.29) genau dann, wenn $s^{(k)}(x)$ aus (I.7.25) erfüllt (I.7.31) zusammen mit (I.7.28) und (I.7.3).*

Beweis: Die eine Richtung ist durch die obige Herleitung bereits gezeigt, die Umkehrung sei dem Leser überlassen (beachte: $s(x)$ erfüllt k Bedingungen mehr als $s^{(k)}(x)$). □

Die praktische Berechnung von $s(x)$ aus $s^{(k)}(x)$ kann z.B. durch sukzessives Integrieren mit Hilfe der Formeln von Satz I.5.4 geschehen.

An dieser Stelle bietet es sich an, auf die Minimaleigenschaft von $s^{(k)}(x)$–bekannt als "Beste Interpolation"– einzugehen.

Satz I.7.4 *Unter allen interpolierenden Funktionen der Klasse*

$$\mathcal{F} := \{f \in W_2^k(a,b): \ f \ \textit{erfüllt} \ \ (I.7.22), (I.7.28), (I.7.29)\}$$

wobei $W_2^k(a,b)$ *wie in (I.3.12) definiert sei, besitzt genau die interpolierende Splinefunktion* $s(x)$ *eine minimale* L_2- *Norm der* $k-$*ten Ableitung, d.h. es gilt*

$$||s^{(k)}||_{2,(a,b)} = \min\{||f^{(k)}||_{2,(a,b)}: \ f \in \mathcal{F}\}. \tag{I.7.33}$$

Ferner gilt für alle $f \in \mathcal{F}$

$$||s^{(k)} - f^{(k)}||_{2,(a,b)} \leq ||f^{(k)}||_{2,(a,b)}. \tag{I.7.34}$$

Beweis: Ist $f(x) \in \mathcal{F}$, so gelten

$$[x_{-j}, \ldots, x_0] \ f = A_j \quad [x_{N+1}, \ldots, x_{N+j+1}] \ f = B_j, \qquad 1 \leq j \leq k-1,$$

und daher nach (I.7.26), (I.7.27)

$$\int_{x_{-k+1}}^{x_{N+k}} s^{(k)}(x) \ N_{i,k}(x) \ dx = \int_{x_{-k+1}}^{x_{N+k}} f^{(k)}(x) \ N_{i,k}(x) \ dx, \quad -k+1 \leq N.$$

Dies kann man als Orthogonalitätsrelation interpretieren, und zwar als

$$s^{(k)} - f^{(k)} \perp S_k(\Delta, Z) = \text{Span}\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^{N}.$$

Da $s^{(k)} \in \text{Span}\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^{N}$ folgt daraus bekanntlich, daß $s^{(k)}$ beste Approximation zu $f^{(k)}$ ist, d.h. (I.7.34) gilt. Ferner folgt aus dieser Orthogonalität

$$(s^{(k)}, s^{(k)})_2 = (s^{(k)}, f^{(k)})_2 \leq ||s^{(k)}||_{2,(a,b)} \cdot ||f^{(k)}||_{2,(a,b)}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $s^{(k)} = f^{(k)}$ gilt. Dies ergibt die Minimaleigenschaft (I.7.33). □

Den klassische Spezialfall der obigen Ausführungen bildet der Fall kubischer Splines. Die Koeffizienten β_j werden nun durch "Momentengleichungen"(I.7.26) für $k = 2$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \int_{x_{-1}}^{x_{N+2}} s''(x) \, N_{i,2}(x) \, dx \qquad &= (x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \, s \\ &= \left(\tfrac{s(x_{i+2}) - s(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}}\right) - \left(\tfrac{s(x_{i+1}) - s(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right) \end{aligned}$$

für $i = -1, \ldots, N$. Einsetzen der Interpolationsbedingungen $s(x_i) = f_i$ aus (I.7.22) ergibt

$$\sum_{j=-1}^{N} \beta_j \int_{x_{-1}}^{x_{N+2}} N_{j,2}(x) \, N_{i,2}(x) \, dx = \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0, \ldots, N-1. \tag{I.7.35}$$

Die Matrix dieses (noch nicht vollständigen) Gleichungssystems ist nach obigen Ausführungen eine positiv definite Gramsche Matrix. Wegen $G_{i,j} = 0$ für $|i - j| \geq 2$ ist sie tridiagonal. Die restlichen Elemente lassen sich leicht berechnen. Mit $h_i := x_{i+1} - x_i, 0 \leq i \leq N$ gilt

$$G_{ii} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i,2}(x)^2 \, dx = \int_0^{h_i} (\frac{u}{h_i})^2 \, du + \int_0^{h_{i+1}} (\frac{u}{h_{i+1}})^2 \, du = \frac{h_i + h_{i+1}}{3} \tag{I.7.36}$$

$$G_{i-1,i} = G_{i,i-1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i-1,2}(x) \, N_{i,2}(x) \, dx = \int_0^{h_i} (1 - \frac{u}{h_i})(\frac{u}{h_i}) \, du = \frac{h_i}{6}. \tag{I.7.37}$$

Dann folgen aus (I.7.35) N Gleichungen für die $N+2$ Unbekannten β_j

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & h_{N-1} & 2(h_N+h_{N+1}) & h_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{-1} \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix}$$

wobei

$$h_j := x_{i+1} - x_i, \quad 0 \le i \le N, \qquad w_j := \frac{\Delta f_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{\Delta f_j}{h_j}, \qquad j = 0, \dots N-1. \tag{I.7.38}$$

Es sind also noch–wie bereits oben bemerkt– zwei Zusatzinformationen in Form von Randbedingungen nötig, die zwei weitere Gleichungen liefern. Vier Varianten haben sich in der Literatur eingebürgert, die in Form von Randbedingungen gestellt werden.
Möglichkeit 1): Legen wir β_{-1} und β_N direkt fest, so erhalten wir das $N \times N$ System

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ & & h_{N-1} & 2(h_{N-1}+h_N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-2} \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 - \frac{h_0}{6}\beta_{-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} - h_N\beta_N/6 \end{pmatrix}$$

Die einfachste Möglichkeit ist hier $\beta_{-1} = \beta_N = 0$ zu setzen. Dies läßt sich so deuten: wegen $N_{j,2}(x_i) = \delta_{i,j+1}$ gilt $s''(x_i) = \beta_{i-1}$ nach Darstellung (**??**), also bedeutet die Festlegung von β_{-1}, β_N diejenige von $s''(a), s''(b)$.
Möglichkeit 2): man legt erste Ableitungen $s'(a), s'(b)$ am Rand fest. Diese Ableitungen kann durch die β_i und y_i ausdrücken. Dazu bilde z.B. Taylorentwicklung von $s(x)$ bei $x = a \equiv x_0$

$$f_1 = s(x_1) = f_0 + s'(a)h_0 + \beta_{-1}h_0^2/2 + s'''(a)h_0^3/6$$

Um hierin $s'''(a)$ zu berechnen beachte, daß $s''(x)$ linear ist, also für $x \in [0, x_1]$

$$s'''(x) = \text{const} = \frac{s''(x_1) - s''(a)}{x_1 - a} = \frac{\beta_0 - \beta_{-1}}{h_0}$$

Einsetzen in obige Gleichung ergibt nun

$$f_1 - f_0 = s'(a)h_0 + \beta_{-1}h_0^2/3 + +\beta_{-1}h_0^2/6 \quad \text{bzw.} \quad -s'(a) + \frac{f_1 - f_0}{h_0} = \frac{h_0}{6}(\beta_0 + 2\beta_{-1})$$

und diese Gleichung ergänzt (I.7.35) für β_{-1}. Analog per Taylorentwicklung von $s''(x)$ bei $x = b$

$$f_N = s(x_N) = f_{N+1} - s'(b)h_N + \beta_N\, h_N^2/2 - s'''(b)\, h_N^3/6$$

Mit

$$s'''(x) = \text{const.} = \frac{s''(b) - s''(x_N)}{b - x_N} = (\beta_N - \beta_{N-1})/h_N$$

folgt analog

$$s'(b) - (f_{N+1} - f_N)/h_N = h_N(2\beta_N + \beta_{N-1})/6.$$

Es ergibt sich also insgesamt das $(N+2) \times (N+2)$–System

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & h_{N-1} & 2(h_{N-1}+h_N) & h_N \\ & & & & h_N & 2h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{-1} \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta f_0/h_0 - s'(a) \\ w_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ s'(b) - \Delta f_N/h_N \end{pmatrix}$$

Möglichkeit 3): ergibt sich wenn Interpolant periodisch sein soll mit Periode $b-a$. Natürlich muß dann $f_0 = f_N$ gelten.
Das Vorgehen ist dann so, daß Daten und Knoten periodisch fortgesetzt werden (ℓ ist eine beliebige ganze Zahl)

$$\begin{array}{rll} x_{-1} := x_N - (b-a) & x_{N+2} := x_1 + (b-a)\ , & \text{usw. } x_i := -x_{i-\ell(N+1)} + \ell(b-a) \\ s(x_{-1}) := s(x_N) = f_N\ , & s(x_{N+2}) := s(x_1) = y_1\ , & \text{usw. } s(x+\ell(b-a)) = s(x) \end{array}$$

Wir können dann in (I.7.35), (I.7.38) durch die Grenzfälle $i=-1, i=N+1$ definieren:

$$\begin{array}{cc} h_{-1} := x_0 - x_{-1} = b - x_N = h_N & h_{N+1} := x_{N+2} - x_{N+1} = x_1 - a = h_0 \\ \dfrac{s(x_0)-s(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}} = \dfrac{f_{N+1}-f_N}{h_N} & \dfrac{s(x_{N+2})-s(x_{N+1})}{x_{N+2}-x_{N+1}} = \dfrac{f_1 - f_0}{h_0} \end{array}$$

Entsprechend werden die Matrixelemente G_{ij} in (I.7.36), (I.7.37) periodisch fortgesetzt, d.h. Indizes $> N+1$ und < 0 werden modulo $N+1$ in den Bereich $[0, N+1]$ verschoben und die dann entstehenden $G_{i',j'}$ genommen. Auf diese Weise kann (I.7.35) ergänzt werden zu

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (2h_0+h_N) & h_0 & & & & h_N \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & h_{N-1} & 2(h_{N-1}+h_N) & h_N \\ h_0 & & & & h_N & 2h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{-1} \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{\Delta f_N}{h_N} \\ w_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{\Delta f_N}{h_N} \end{pmatrix}$$

Es gibt noch eine vierte Möglichkeit, die man benutzen kann, wenn die Information über gewünschten Interpolation nicht ausreicht, um eine der Möglichkeiten 1)–3) durchzuführen. Sie beruht auf dem "neutralen Prinzip", für den Interpolanten keine Knoten bei x_1 und x_N zu verlangen, d.h. dort soll der Sprung der dritten Ableitung verschwinden. Dies liefert ebenfalls zwei zusätzliche Gleichungen für die Bestimmung von β_0 und β_N (eine Darstellung findet man in [Scha] oder [Boo]).
Für die Auflösung der obigen symmetrischen Tridiagonalsysteme gibt es günstige Varianten des Gauß–oder Cholesky–Verfahrens, speziell im periodischen Fall eine Variante der Cholesky–Zerlegung (Einzelheiten siehe z.B. in [Schw], 3.7). Weil die Gleichungssysteme sämtlich ßtark diagonal dominantßind, ist aber auch eine iterative Auflösung mit dem cg–Verfahren möglich. Im Falle äquidistanter Knoten sieht man dies besonders deutlich, da dann im wesentlichen der Wert auf der Diagonalen das Doppelte der Werte auf den Nebendiagonalen beträgt.

I.7.4 Fehlerabschätzungen

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte beste Interpolation mit Splines lieferte bereits eine erste Fehlerabschätzung durch (I.7.34).
Zur Erweiterung dieser Fehlerabschätzung dient folgendes Lemma, das für allgemeine Interpolationsoperatoren formuliert wird.

Lemma I.7.3 *Es sei $s \in S_{2k}(\Delta, Z)$ und interpoliere $f \in C^k[a,b]$ in den Punkten $\{x_i\}_{i=1}^{N+1} \in [a,b]$ wie oben mit $N > 2k$. Sei $h := \max h_i$, $h_i := x_{i+1} - x_i$. Dann gilt für $1 \le p \le \infty$*

$$||f^{(\ell)} - s^{(\ell)}||_{p,[a,b]} \le (k!/\ell!)\ h^{k-\ell} ||f^{(k)} - s^{(k)}||_{p,[a,b]}.$$

Beweis: Er benützt Rolle's Theorem, d.h. man schreibt

$$f^{(\ell)}(x) - s^{(\ell)}(x) = \int_{\xi_i^{(\ell)}}^{x} \Big[f^{(\ell+1)}(\xi) - s^{(\ell+1)}(\xi) \Big] d\xi$$

mit $x \in [\xi_i^{(\ell)}, \xi_{i+1}^{(\ell)}]$, wobei $\xi_i^{(\ell)}$ die Nullstellen in $f^{(\ell)} - s^{(\ell)}$ sind. Die Hölder-Ungleichung ergibt unter Beachtung von $(1 + p/q)/p = 1$

$$\begin{aligned}
||f^{(\ell)}(x) - s^{(\ell)}(x)||_{p,(\xi_i^{(\ell)},\ \xi_{i+1}^{(\ell)})} &\le \left\{ \int_{\xi_i^{(\ell)}}^{\xi_{i+1}^{(\ell)}} \Big[\int_{\xi_i^{(\ell)}}^{\xi_{i+1}^{(\ell)}} |f^{(\ell+1)}(\xi) - s^{(\ell+1)}(\xi)| \Big]^p \, dx \right\}^{1/p} \\
&\le \left\{ \int_{\xi_i^{(\ell)}}^{\xi_{i+1}^{(\ell)}} |\xi_i^{(\ell)} - \xi_i^{(\ell)}|^{p/q} \, dx \int_{\xi_i^{(\ell)}}^{\xi_{i+1}^{(\ell)}} |f^{(\ell+1)}(\xi) - s^{(\ell+1)}(\xi)|^p \, d\xi \right\}^{1/p} \\
&= |\xi_i^{(\ell)} - \xi_i^{(\ell)}| \ ||f^{(\ell+1)} - s^{(\ell+1)}||_{p,(\xi_i^{(\ell)},\ \xi_{i+1}^{(\ell)})}
\end{aligned}$$

Summation über i ergibt mit $|\xi_i^{(\ell)} - \xi_i^{(\ell)}| \le (\ell + 1)h$

$$||f^{(\ell)} - s^{(\ell)}||_{p,[a,b]} \le (\ell+1)h||f^{(\ell+1)} - s^{(\ell+1)}||_{p,[a,b]}$$

Dies induktiv dies angewandt ergibt die Behauptung. □

Korollar I.7.3 *Besteht im vorigen Lemma zusätzlich die Schranke $||s^{(k)}||_p \le K||f^{(k)}||_p$, so gelten die Fehlerabschätzungen*

$$||f^{(\ell)} - s^{(\ell)}||_{p,[a,b]} \le (K+1)(k!/\ell!)\, h^{k-\ell} ||f^{(k)}||_{p,[a,b]}, \qquad 0 \le \ell \le k.$$

Um hierin die Fehlerordnung zu steigern, benutzt man folgendes Prinzip

Lemma I.7.4 *Seien s und f wie oben und s als Operator $s = S(f)$ geschrieben. Für diesen Operator seien für die Interpolationsaufgabe die Randbedingungen so gestellt, daß Operator S exakt für $g \in S_r(\Delta, Z)$ mit $r \ge k$ ist. Dann gilt im Falle $||(Sf)^{(k)})||_p \le K\ ||f^{(k)}||_p$ und $f \in C^k[a,b]$, für $0 \le \ell \le k$ schärfer*

$$||f^{(\ell)} - s^{(\ell)}||_p \le (k!/\ell!)\ (1+K)\ h^{k-\ell}\ dist(f^{(k)}; S_{r-k}(\Delta, Z))_p$$

BEWEIS: Sei g beliebig in $S_r(\Delta, Z)$, dann folgt lt. Voraussetzung

$$||f^{(k)} - s(f)^{(k)}||_{p,[a,b]} \leq ||f^{(k)} - g^{(k)}||_{p,[a,b]} + ||S(g-f)^{(k)}||_{p,[a,b]} \leq \ (1+K)||f^{(k)} - g^{(k)}||_{p,[a,b]}$$

Nun durchläuft $g^{(k)}$ ganz $S_{r-k}(\Delta, Z)$, wenn g ganz $S_r(\Delta, Z)$ durchläuft und Δ aus einfachen Knoten besteht. Dies ergibt die Aussage für $\ell = k$. Der Fall $0 \leq \ell < k$ folgt durch Anwendung von Lemma I.7.3. □

Bemerkung: Beide Lemmas gelten auch für Interpolation mit vielfachen Knoten und Splineräumen mit vielfachen Knoten, falls die gesamte Vielfachheit an einem Knoten r nicht übersteigt.

Um dieses Lemma auf Ableitungen der Ordnung $\ell > k$ auszudehnen, benötigen wir

Lemma I.7.5 *Ist $s(x)$ eine Splinefunktion aus $S_k(\Delta, Z)$, so gilt die Ungleichung*

$$||s'(x)||_{p,[a,b]} \leq C_{k,p}(\underline{\Delta})^{-1}||s(x)||_{p,[a,b]}, \qquad 1 \leq p \leq \infty, \tag{I.7.39}$$

wobei $\underline{\Delta}) := \min h_i$ und $C_{k,p}$ eine nur von k, p abhängige Konstante ist.

BEWEIS: Es sei (t_j, t_{j+1}) ein nichtleeres Intervall von $[a, b]$ und $q(x) := s(x)|_{(t_j,t_{j+1})}$ die entsprechende Restriktion von $s(x)$. Dann setze $q(x) = q(t_j + y(t_{j+1} - t_j)) := r(y)$ mit $y \in [0, 1]$. Da auf der Menge der Polynome vom Grad $k-1$ auf $[0, 1]$ als k-dimensionalem Raum alle Normen äquivalent sind, gibt es eine nur von k, p abhängige Konstante $C_{k,p}$ mit $|q'(x)| \leq (t_{j+1} - t_j)^{-1}\ ||r'||_{\infty,[0,1]} \leq C_{k,p}\ (t_{j+1} - t_j)^{-1}\ ||r||_{p,[0,1]}$. Damit schließen wir

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} |s(x)|^p\ dx &\leq (t_{j+1} - t_j)^{-p+1}||r'||_{p,[0,1]} \\ &\leq \underline{\Delta}^{-p}\ C_{k,p}^p\ (t_{j+1} - t_j) \int_0^1 |r(y)|^p\ dy = \underline{\Delta}^{-p}\ C_{k,p}^p \int_{t_j}^{t_{j+1}} |s(x)|^p\ dx.\end{aligned}$$

Summation über die Intervalle (t_j, t_{j+1}) und anschließendes Potenzieren mit $1/p$ ergibt die Behauptung. □

Damit läßt sich zeigen

Lemma I.7.6 *Unter den Voraussetzungen von Lemma I.7.4 gilt für $r \geq \ell > k$ und $f \in C^r[a, b]$*

$$||f^{(\ell)} - s^{(\ell)}||_{p,[a,b]} \leq C_{k,l,p,r}\ \bar{\Delta}^{r-\ell}\ (1 + \gamma^{\ell-k})||f^{(r)}||_{p,[a,b]}, \qquad \gamma := \bar{\Delta}/\underline{\Delta}, \tag{I.7.40}$$

mit einer nur von k, ℓ, p, r abhängigen Konstante $C_{k,\ell,p,r}$.

BEWEIS: Wir spalten analog wie in Lemma I.7.4 auf:

$$||f^{(\ell)} - s(f)^{(\ell)}||_p \leq ||f^{(\ell)} - g^{(\ell)}||_p + ||s(g-f)^{(\ell)}||_p,$$

wobei g beliebig in $S_r(\Delta, Z)$ ist. Den zweiten Term schätzen wir mittels Lemma I.7.5 und Vorassetzung an $s(g-f)^{(k)}$ ab

$$||s(g-f)^{(\ell)}||_{p,[a,b]} \leq \tilde{C}_{k,p}\ \underline{\Delta}^{\ell-k}||s(g-f)^{(k)}||_{p,[a,b]} \leq \tilde{C}_{k,p}\ K\ \underline{\Delta}^{\ell-k}||g^{(k)} - f^{(k)}||_{p,[a,b]}$$

und $\tilde{C}_{k,p}$ hängt nur von k, p ab. Dann wählen wir g als Quasiinterpolanten $\widetilde{A}f$ in $S_r(\Delta, Z)$ nach (I.4.31) und erhalten aus Satz I.4.2

$$||g^{(l)} - f^{(l)}||_{p,[a,b]} \leq \bar{C}_{r,l,p}\bar{\Delta}^{r-l}||f^{(r)}||_{p,[a,b]}$$

mit einer von l, r, p abhängigen Konstanten $C_{k,l,p,r}$. Setzt man dies für $l = k, \ell$ in obige Abschẗzungen ein, so erhält man (I.7.40). $\square$

Eine direkte Anwendung dieser Lemmata ist im Falle $p = 2$ nach Satz I.7.4 möglich, wenn die Randbedingungen für S und f die gleiche Form haben, wie z.B. bei den erwähnten Randbedingungen vom Typ I oder II. Dann ist nämlich diese Form von Interpolation exakt für alle Splines aus $S_{2k}(\Delta, Z)$ (mit einfachen Knoten). Wir erhalten

Korollar I.7.4 *Es sei $s \in S_{2k}(\Delta, Z)$ und interpoliere $f \in C^k[a, b]$ in den Punkten $\{x_i\}_{i=1}^{N+1} \in [a, b]$ gemäß (I.7.22) und*

$$[x_{-j}, \dots, x_0]\; s = [x_{-j}, \dots, x_0]\; f, \qquad 1 \le j \le k-1, \tag{I.7.41}$$

$$[x_{N+1}, \dots, x_{N+j+1}]\; s = [x_{N+1}, \dots, x_{N+j+1}]\; f, \qquad 1 \le j \le k-1, \tag{I.7.42}$$

mit zusätzlichen Werten $f(x_i)$, falls $x_i \notin [a, b]$. Dann gelten für $s = s(f)$ die Fehlerabschätzungen

$$||f^{(\ell)} - s(f)^{(\ell)}||_{2,[a,b]} \le 2(k!/\ell!)\, \bar{\Delta}^{k-\ell}\; dist(f^{(k)}; S_k(\Delta, Z))_2 \qquad 0 \le \ell \le k,$$

wobei $\bar{\Delta} := \max h_i$, $h_i := x_{i+1} - x_i$.

Im Falle $k < \ell \le 2k$ gelten Fehlerabschätzungen des Typs von Lemma I.7.6. Wenn dann f als optimal glatt vorausgesetzt wird, d.h. $f \in C^{2k}[a, b]$, ergibt sich nach den Ergebnissen von Section I.4 für alle $0 \le \ell \le 2k - 1$

$$||f^{(\ell)} - s(f)^{(\ell)}||_{2,[a,b]} \le C\bar{\Delta}^{2k-\ell}\; ||f^{(2k)}||_{2,[a,b]} \tag{I.7.43}$$

mit einer Konstanten C, die im Falle $\ell \le k$ von f, Δ, Z unabhängig ist und anderfalls noch von der Gitter-Konstanten γ abhängen kann.

Es ist für die Praxis sehr wichtig, daß solche Fehlerabschätzungen auch in der L_∞−Norm gelten. Um obige Überlegungen auf diesen Fall anzuwenden zu können, muss man noch min $||s(f)^{(k)}||_\infty \le K||f||_\infty$ zeigen. Im Falle kubischer Splines $k = 2$ ist dies einfach, weil dann das Gleichungssystem diagonal dominant ist.

Satz I.7.5 *Es sei $s(f)$ der kubische interpolierende Spline gemäß $k = 2$ in Korollar I.7.4. Es sei außerdem $x_1 = a = x_0$ und $x_{N+1} = b = x_{N+2}$ angenommen, d.h. die Randbedingungen $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$ in (I.7.28), (I.7.29) für $k = 2$. Dann gelten die Schranken ($h :=$ $\max(x_{i+1} - x_i)$)*

a) $\quad ||s(f)''||_{\infty,[a,b]} \le 3||f''||_{\infty,[a,b]}$

b) $\quad ||f'' - s(f)''||_{\infty,[a,b]} \le 4||f''||_\infty$

c) $\quad ||f^{(\ell)} - s(f)^{(\ell)}||_{\infty,[a,b]} \le 8\; \bar{\Delta}^{2-\ell} dist(f''; S_2(\Delta, Z)),$ *für* $\ell = 0, 1.$

Beweis: Die Interpolationsbedingungen (I.7.22) und die Randbedingungen (I.7.41), (I.7.42) liefern über (I.7.31) die Gleichungen

$$\sum_{j=-k+1}^{N} \beta_j G_{i,j} = F_i := \Big(\frac{x_{i+k} - x_i}{k}\Big)[x_i, \dots, x_{i+k}]\; f, \quad -k+1 \le i \le N$$

Im Falle $k=2$ ergibt dies das unter **Möglichkeit 2)** beschriebene Gleichungssystem mit $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$. Wir multiplizieren die zweite bis zur vorletzten Gleichung jeweils mit $3(h_i + h_{i+1} = 3(x_{i+2} - x_i)$, wobei jeweils $2(h_i + h_{i+1})$ das Diagonalelement ist. Dann gelten

$$\frac{h_i/2}{h_i + h_{i+1}}\beta_{i-1} + \beta_i + \frac{h_{i+1}/2}{h_i + h_{i+1}}\beta_{i+1} = 3[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f = F_i \tag{I.7.44}$$

für $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Die erste und letzte Gleichung werden jeweils mit $3/h_0$ bzw. $3/h_N$ multipliziert. Dies ergibt die Gleichungen (mit $f_i \equiv f(x_i)$)

$$\begin{aligned} \beta_{-1} + \beta_0/2 &= 3\{[x_0, x_1]f - f'(x_0)\}/h_0 = F_0 && \text{(I.7.45)} \\ \beta_{N-1}/2 + \beta_N &= 3\{f'(b) - [x_N, x_{N+1}]f\}/h_N = F_N && \text{(I.7.46)} \end{aligned}$$

Die Größen auf der rechten Seite kann man nach (I.2.3) abschätzen:

$$|F_i| \equiv |3[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f| \le (3/2)||f''||_{\infty,[a,b]} \ , \quad 0 \le i \le N-1$$

und ebenso

$$|F_{-1}|, |F_N| \le (3/2)||f''||_{\infty,[a,b]}$$

durch Taylorentwicklung von $f(x_1)$ bzw. $f(x_N)$ um $x_0 = a$ bzw. $x_{N+1} = b$.
Nun verwende den sogenannten Gerschgorin–Trick: Sei $|\beta_j| = \max_{-1\le i\le N} |\beta_i|$. Dann folgt aus (I.7.44) im Falle $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$:

$$(3/2)||f''||_{\infty,[a,b]} \ge |\beta_j| - \Big(\frac{h_j/2}{h_j + h_{j+1}} + \frac{h_{j+1}/2}{h_j + h_{j+1}}\Big)|\beta_j| = \frac{|\beta_j|}{2} = \frac{1}{2}\max_{-1\le i\le N} |\beta_i|$$

Im Falle $j = 0$ oder $j = N$ schließt man dies analog aus (I.7.45), (I.7.46). Da $s''(f;x)$ der Polygonzug mit den Ecken $s''(f;x_\ell) = \beta_{\ell-1}N_{\ell-1,2}(x_\ell) = \beta_{\ell-1}$ ist, folgt hieraus

$$||s(f)''||_{\infty,[a,b]} \le \max_{-1\le i\le N} |\beta_i| \le 3||f''||_{\infty,[a,b]},$$

d.h. die gewünschte Abschätzung a). Daraus schließt man sofort auf b), während c) aus Lemma I.7.4 folgt. □

Bemerkung: Die Größe $dist(f''; S_2(\Delta, Z))$ läßt sich im Falle $f \in C^2[a,b]$ nach Aufgabe 3) in Abschnitt I.4 durch

$$\|f - S_2(f)\|_\infty \le \frac{\bar\Delta^2}{8}\|f''\|_\infty$$

weiter abschätzen, wobei $S_2(f)$ der f interpolierende Polygonzug ist. Diese Abschätzung ist scharf, liefert aber nicht die besten Konstanten. Diese sind durch C.A.Hall-W.W.Meyer[HM] angegeben worden. Danach gilt

$$||f^{(\ell)} - s(f)^{(\ell)}||_{\infty,[a,b]} \le D_\ell\ \bar\Delta^{4-\ell}\ ||f^{(4)}||_{\infty,[a,b]}, \qquad \ell = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{mit} \quad D_0 = 5/384, \quad D_1 = 1/24, \quad D_2 = 3/8, \quad D_3 = (\gamma + \gamma^{-1})/2,$$

und die Konstanten D_0, D_1 sind optimal.

Man möchte nun den Fall beliebiger k und $1 \le p \le \infty$ untersuchen und

$$||s(f)^{(k)}||_p \le K||f^{(k)}||_p\ , \quad f \in W_p^k(a,b)\ , \forall\ 1 \le p \le \infty \tag{I.7.47}$$

mit einer Konstante K zeigen, die unabhängig von f und möglichst auch von Δ ist. Dazu beachte man, daß das Interpolationsproblem von Korollar I.7.4 äquivalent zur Bestimmung von $s(f)^{(k)}(x) = \sum_{i=-k+1}^{N} \beta_i N_{i,k}(x)$ durch

$$\int_{x_{-k+1}}^{x_{N+k}} s(f)^{(k)}(x) N_{j,k}(x)\, dx = \Big(\frac{x_{j+k} - x_j}{k}\Big)[x_j, \ldots, x_{j+k}]\ f, \qquad -k+1 \leq N+k,$$

ist. Führt man die **Orthogonalprojektion** P^* von $C[a,b]$ auf $S_{k,\mathbf{t}} := \mathrm{Span}\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^{N+k}$ durch

$$P^* g \quad := \quad \sum_{i=-k+1}^{N+k} \alpha_i\, N_{i,k} \tag{I.7.48}$$

$$\sum_{i=-k+1}^{N+k} \alpha_i\, (N_{i,k}, N_{j,k}) \quad = \quad (g, N_{j,k}), \;\; -k+1 \leq j \leq N+k. \tag{I.7.49}$$

ein, so gilt nach der Darstellungsformel (I.7.26) folgender Zusammenhang zwischen Orthogonalprojektion und Interpolationsprojektion

$$(P^* f^{(k)}, N_{j,k}) = (s(f)^{(k)}, N_{j,k}), \;\; -k+1 \leq j \leq N+k, \qquad \text{bzw. } P^* f^{(k)} = s(f)^{(k)}.$$

Auch in (I.7.48) hat die Gramsche Matrix Bandstruktur und ist total positiv. Das Problem, (I.7.47) zu beweisen, ist dann äquivalent zu der Frage, ob die Orthogonalprojektion P^* in der $L_\infty-$Norm unabhängig von $\mathbf{t}$ beschränkt ist. Dieses Problem (de Boor's Problem) ist kürzlich nach vielen Anstrengungen gelöst worden (A.Yu. Shadrin [Sh]).

Übungen zu Abschnitt I.7

Aufgabe 1) Beweise eine periodische Variante von Satz I.7.2

Aufgabe 2) Man zeige: Unter allen interpolierenden Funktionen der Klasse

$$\mathcal{G} := \{f \in W_2^k(a,b) : \ f \text{ erfüllt } \ (I.7.22), (I.7.28), (I.7.29)\}$$

Aufgabe 3) Benütze die C^1–Glattheitsbedingungen des kubischen interpolierenden Splines, um ein lineares Gleichungssystem mit den Parametern $s'(t_i)$ als Unbekannten aufzustellen. Man zeige, daß es tridiagonal und diagonaldominant ist.

Aufgabe 4) Es sei $s(x)$ eine Splinefunktion auf dem Intervall $[a,b]$ mit Knoten $\{x_i\}_{i=1}^n$ in (a,b), die stückweise vom Grad $2k-1$ und Glattheit $C^{2k-2}[a,b]$ ist. Man betrachte dann das Interpolationsproblem von (I.7.22) mit den allgemeineren **Hermite-Birkhoff-** Randbedingungen (a_i, b_i gegeben)

$$s^{(j_i)}(a) = a_i, \quad s^{(k_i)}(b) = b_i, \qquad 1 \le i \le k-1$$

statt denen von (I.7.30). Man gebe ein Kriterium für die Wahl der j_i, k_i an, das Existenz und Eindeutigkeit von $s(x)$ garantiert.

Hinweis: Man zeige, daß aus $s(x_i) = 0, 1 \le i \le n$ folgt

$$\int_a^b |s^{(k)}(x)|^2 \; dx = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r [s^{(k+r)}(b) s^{(k-1-r)}(b) - s^{(k+r)}(a) s^{(k-1-r)}(a)].$$

Aufgabe 5) Es sei $t(x)$ eine Splinefunktion mit Knoten wie in Aufgabe 4, jedoch stückweise vom Grad $2k$ und Glattheit $C^{2k-1}[a,b]$. Man betrachte dann das Interpolationsproblem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} t(x) \; dx = q_i, \qquad 0 \le i \le n$$

mit gegebenen q_i und **Hermite-Birkhoff-** Randbedingungen wie in Aufgabe 4. Man untersuche in analoger Weise Existenz und Eindeutigkeit von $s(x)$.

I.8 Beste Approximation mit Splines

I.8.1 Beste Approximation in Tschebyscheff - Systemen

In der klassischen Theorie der besten Approximation spielt die Haar - Bedingung eine zentrale Rolle. Sie ermöglicht eine genaue Charakterisierung der besten Approximation von stetigen Funktionen durch lineare Unterräume, die diese Bedingung erfüllen. Solche Räume wurden bereits in Abschnitt I.6 eingeführt und als **T–Systeme** bezeichnet. Durch das dort angebene Lemma I.6.1 zur Charakterisierung der Haar - Bedingung ist gesichert, daß Unterräume von algebraischen und trigonometrischen Polynomen sie erfüllen.
Ferner wurde dort bewiesen, daß Räume von B-Splines i.a. zwar keine Tschebyscheff-Räume jedoch noch **WT-Räume (schwache Tschebyscheff–Räume)** sind, und der enge Zusammenhang beider Eigenschaften durch Satz I.6.2 beschrieben. Dadurch ist zu erwarten, daß ähnliche Ergebnisse auch für Splinefunktionen gelten.
Um sie in den Rahmen der klassischen Theorie der besten Approximation einordnen zu können, folgt deshalb ein kurzer Abriß dieser Theorie. Insbesondere geben wir die grundlegenden Sätze über Existenz und Eindeutigkeit der besten Approximation an, auf denen wir im Folgenden aufbauen werden. Beweise findet man z.B. in E.W. Cheney [Ch], J.R. Rice[Ri], D. Braess[Brae] und K. Scherer: Theorie der besten Approximation. Vorlesungsskript, Bonn 1992.

Satz I : *Es sei M ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum eines linearen normierten Raums X. Dann existiert zu jedem $f \in X$ mindestens ein* **Element bester Approximation** *g^* aus M, d.h.*

$$||f - g^*|| = \inf_{g \in M} ||f - g|| := \operatorname{dist}(f; M). \tag{I.8.1}$$

Eine Variante davon ist

Satz II : *Es sei M eine (bezüglich der Norm von X) abgeschlossene und konvexe Menge eines vollständigen linearen und normierten Raums X. Dann existiert zu jedem $f \in X$ mindestens ein Element bester Approximation g^* aus M.*

Die Voraussetzungen dieser Sätze genügen jedoch noch nicht, um die Eindeutigkeit der besten Approximation allgemein zu beweisen. Es gibt jedoch eine "geometrische" Eigenschaft der Norm von X, die dafür charakteristisch ist:

Definition I.8.1 *Ein linearer normierter Raum X und seine Norm heißen* **strikt konvex**, *falls für alle $f, g \in X$ mit $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$ und $f \neq g$ folgt $\|\lambda f + (1-\lambda)g\| < 1$ für $\lambda \in (0,1)$. Geometrisch ausgedrückt heißt dies : die Oberfläche der Einheitskugel $S := \{f \in X : ||f|| = 1$ von X enthält keine Verbindungsstrecke zwischen je zwei Elementen f und g aus S.*

Es gilt dann
Satz III : *Sei X ein linearer normierter Raum. Dann ist X strikt konvex genau dann, wenn in jeder abgeschlossenen und konvexen Menge A höchstens ein Element bester Approximation zu jedem $f \in X$ existiert.*

Die wichtigsten Beispiele von strikt konvexen (und sogar "gleichmäßig konvexen") Räumen sind die Lebesgue-Räume $L^p(\mu; \Omega)$ im Falle $1 < p < \infty$, wobei Ω ein offenes und beschränktes Gebiet des R^n ist. Für diese Räume gilt auch folgender Charakterisierungssatz
Satz IV : Es sei $X := L^p(\mu; \Omega), 1 < p < \infty$ und n eine konvexe Teilmenge von X. Dann ist $g^* \in N$ beste Approximation zu $f \in X$ genau dann, wenn

$$\int_\Omega (f - g^*)|f - g^*|^{p-2} \; (g - g^*) d\mu \; \geq 0, \qquad \forall g \in N.$$

Im Falle eines linearen Unterraums N gilt Gleichheit für alle $g \in N$.

Besonders einfach ist der Fall $p = 2$, wo ein Hilbert-Raum vorliegt. Dann gilt diese Charakterisierung aber in viel allgemeinerem Rahmen. Wegen seiner Bedeutung für die Approximationtheorie formulieren wir separat

Satz H : Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $||f||_X := \sqrt{(f,f)}$. Ist N ein abgeschlossener Unterraum, so gelten folgende Aussagen:
1. Zu jedem $f \in X$ gibt es genau eine beste Approximation $g^* \in N$ mit $dist(f;N) = \|f - g^*\|_X$.

2. $g^* \in N$ ist beste Approximation zu $f \qquad \Longleftrightarrow \qquad (f - g^*, g) = 0$ für alle $g \in N$.

3. Die Abbildung P definiert durch $f \to Pf := g^*$ ist linear und beschränkt, insbesondere gilt $\sup\{||Pf||_X/||f||_X\} = 1$. Sie heißt **Orthogonalprojektion** von X auf N.

Mit diesen Sätzen wären die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung der besten Approximation in befriedigender Weise beantwortet, wenn alle linearen normierten Räume strikt konvex wären. Leider besitzen wichtige Räume bzw. Normen wie $C[a,b]$ und $L_1(a,b)$ nicht diese Eigenschaft. Für diese aber liefert die Haar-Bedingung einen mehr als vollwertigen Ersatz, wie die folgenden Sätze noch zeigen werden. Zunächst ermöglicht sie eine Charakterisierung der besten Approximation:

Satz V : *Es sei M ein $n-$ dimensionales T-System in $C[a,b]$, d.h. die Haar-Bedingung sei erfüllt. Dann ist g^* beste Approximation aus M zu $f \in C(a,b]$ in der Supremum - Norm genau dann, wenn die Fehlerfunktion $f - g^*$ in $[a,b]$ eine* **Alternante der Länge n+1** *besitzt. Dies ist per Definition der Fall, wenn $f - g^*$ mindestens $n+1$ alternierende Extremalpunkte $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$* in [a,b] *besitzt, d.h. es gilt mit einem $\sigma \epsilon \{-1,1\}$*

$$\sigma[f(x_i) - g_f(x_i)](-1)^i = \|f - g_f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Aus diesem Satz kann man leicht die Eindeutigkeit folgern:

Satz VI : *Ist M ein $n-$ dimensionales T-System in $C[a,b]$, so gibt es genau eine beste Approximation aus M zu $f \in C(a,b]$ in der Supremum - Norm.*

Analog zur strikten Konvexität in Satz **III** ist die Haar- Bedingung auch charakteristisch für die Eigenschaft der globalen Eindeutigkeit der besten Approximation in der Supremumsnorm:

Satz VII (Haar): *Es gibt eine eindeutige beste Approximation aus M zu* **jedem** *$f \in C(a,b]$ in der Supremum - Norm genau dann, wenn M die Haar- Bedingung erfüllt.*

Die Haar - Bedingung ist auch hilfreich bei der Untersuchung der besten Approximation in der L_1- Norm. Zunächst liefert sie den Eindeutigkeitssatz

Satz VIII (Jackson): *Es sei M ein* n-*dimensionaler Unterraum von $C[a,b]$, für den die Haar - Bedingung erfüllt sei. Dann gibt zu jedem $f \in C(a,b]$ genau eine beste Approximation g^* aus M mit $||f - g^*||_{1,(a,b)} = \inf_{g \in M} ||f - g||_{1,(a,b)}$.*

Eine Charakterisierung gibt
Satz IX : *Unter den Voraussetzungen von Satz* **VIII** *ist $g^* \in M$ eine beste Approximation im L_1- Sinne genau dann, wenn gilt*

$$\int_a^b \text{sign } (f - g^*)(x)\ g(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M. \tag{I.8.2}$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes von Kripke - Rivlin, der allgemeiner für abgeschlossene und konvexe Teilmengen M in $L_1(a,b)$ gilt und Satz I.8.1 ergänzt. Im vorliegenden Fall gilt aber noch mehr: die beste Approximation läßt sich für eine bestimmte Teilklasse von $C[a,b]$ sogar durch Interpolation bestimmen. Dazu führen wir die Begriffe " kanonische Punkte" und "konvexer Kegel" ein:

Definition I.8.2 *Es sei M ein $n-$ dimensionaler Unterraum von $C[a,b]$ und $d\mu$ ein Maß auf [a,b] derart, daß $C[a,b] \subset L_1(\mu)$ gilt. Die Punkte $x_1, \cdots, x_r$ werden als* **kanonische Punkte** *von M bezeichnet, wenn gilt ($x_0 := a, x_{r+1} := b$)*

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M. \tag{I.8.3}$$

Definition I.8.3 *Der* **konvexe Kegel K(M)** *eines linearen Unterraums M von $C[a,b]$ mit Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, der die Haar - Bedingung erfüllt, ist die Menge aller $f \in C[a,b]$, für die $\{f, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ wieder ein Haar -System bzw. T -System ist.*

Mit diesen beiden Begriffen gilt nun

Satz X : *Jeder $n-$ dimensionale Haar - Raum M in $C[a,b]$ besitzt eine eindeutig bestimmte Menge von n kanonischen Punkten in [a,b]. Liegt $f \ni M$ im konvexen Kegel von M, so ist die beste Approximation $g^* \in M$ zu f der eindeutig bestimmte Interpolant von f an den kanonischen Punkten von M.*

Dieser Satz zeigt, daß die beste Approximation im L_1- Sinne sogar noch günstigere Eigenschaften als diejenige im $L_\infty-$ Sinne besitzt, da sie wenigstens für eine Teilklasse durch einen einfachen linearen Operator erhalten werden kann. In dieser Hinsicht verhält sie sich also wie die beste Approximation im Hilbert - Raum.

Um die folgenden Ergebnisse über die beste Approximation mit Splines darstellen und beweisen zu können, führen wir abschließend noch die Begriffe CT-Räume ünd ÖWCT-Räumeëin.

Definition I.8.1 *Ein Unterraum $M = span\{g_1, \ldots, g_n\}$der Dimension n in C[a,b] heißt*
CT-Raum (complete Tschebyscheff space) *oder* **Markoff-Raum***, wenn jedes Teilsystem der Form $\{g_1, \ldots, g_k\}$ ein Haar-Raum der Dimension $k, 1 \leq k \leq n$ ist, und*
OCT-Raum (order complete Tschebyscheff space)*, wenn jedes Teilsystem der Form $\{g_{\nu_1}, \ldots, g_{\nu_k}\}$ mit irgendwelchen Indices $\nu_1, \cdots, \nu_k$ ein Haar-Raum der Dimension k ist.*
WCT-Räume (weak complete Tschebyscheff spaces) *und* **OWCT-Räume** *definiert man genauso, indem man den Begriff "Haar-Raum" durch den des schwachen Haar-Raumes (WT-Raum) ersetzt.*

In Verschärfung von Korollar I.6.7 gilt dann

Korollar I.8.1 *Die Spline–Räume $S_k(\Delta, Z)$ aus (I.3.21) sind OCWT-Räume.*

I.8.2 Gleichmäßige beste Approximation mit Splines

Unser Ziel sind Charakterisierungs- und Eindeutigkeitsaussagen. In letzterer Hinsicht ist zu betonen, daß nach Satz **VII** grundsätzlich keine Eindeutigkeitsaussagen für WT-Räume zu erwarten sind, die nicht schon Haar-Räume sind. Vor diesem Hintergrund ist das folgende Ergebnis schon das Beste, was man für allgemeine WT-Räume erwarten kann.

Satz I.8.1 (Jones-Karlovitz 1970) *Ist M ein WT-Raum der Dimension n in $C[a,b]$, so gibt es zu jedem $f \epsilon C[a,b]$ eine beste gleichmäßige Approximation (im $L_\infty - Sinne$) $g_f \in M$ derart, daß $f - g_f$ eine Alternante der Länge n+1 besitzt.*
Besitzt umgekehrt ein $g \in M$ diese Eigenschaft, so ist es beste Approximation zu f im L_∞-Sinne.

Beweis: Es gelte für g_f die obige Eigenschaft und es sei $\tilde{g} \in M$ eine bessere gleichmäßige Approximation zu f als g_f, d.h. es sei $\|f - \tilde{g}\|_{\infty,[a,b]} < \|f - g_f\|_{\infty,[a,b]}$. Dann folgt

$$\sigma(-1)^i[f(x_i) - \tilde{g}(x_i)] \leq ||f - \tilde{g}||_{\infty,[a,b]} < \|f - g_f\|_{\infty,[a,b]} = \sigma(-1)^i[f(x_i) - g_f(x_i)]$$

für $1 \leq i \leq n+1$ und daher

$$\sigma(-1)^i[g_f(x_i) - \tilde{g}(x_i)] < 0, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Also hätte $g_f - \tilde{g} \in M$ mindestens n Vorzeichenwechsel, im Widerspruch zu Satz I.6.4.
Sei nun $f \in C$ [a,b] beliebig gegeben und $M^\delta := \text{Span}[g_1^\delta, \ldots, g_n^\delta]$, wobei die g_i^δ wie in Satz I.6.3 definiert seien. Nach diesem Satz sind die M^δ Haar-Räume. Satz **V** liefert daher zu f und jedem $\delta > 0$ genau ein Element bester Approximation $g_\delta \in M^\delta$ mit der Alternanteneigenschaft

$$\sigma_\delta[f(x_i^\delta) - g_\delta(x_i^\delta)](-1)^i = \|f - g_\delta\|_{\infty,[a,b]} \quad , \sigma_\delta \in \{-1, 1.\}$$

Es gilt ferner

$$\|g_\delta\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]} + dist(f_i; M^\delta)_{\infty,[a,b]} \leq \ 2\|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Per Definition kann man g_δ darstellen als

$$g_\delta(x) = \sum_{i=n}^{n} a_i(\delta)(\bar{g}_i \star G_\delta)(x), \qquad \text{mit} \quad a_i(\delta) \in \mathrm{R},$$

wobei $\bar{g}_i$ die im Beweis von Satz I.6.3 angebene Fortsetzung von g_i auf ganz R ist.
Wir behaupten dann, daß $\max_i |a_i(\delta)| \leq C$ gleichmäßig in δ gilt. Andernfalls könnte man eine Nullfolge $\{\delta_m\}, m \to \infty$ finden mit $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i(\delta_m)| = |a_{i_0}(\delta_m)| \to \infty$ für $m \to \infty$, da es ja nur endlich viele Möglichkeiten für den extremalen Index i_0 gibt. Daraus folgt nun mit Lemma I.6.2 punktweise für alle $x \in [a,b]$

$$0 = \lim_{m \to \infty} \frac{g_{\delta_m}(x)}{|a_{i_0}(\delta_m)|} = \sum_{\imath=1}^{n} \alpha_i \, \bar{g}_i(x) = \sum_{\imath=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$$

mit gewissen $\alpha_i = \lim_{m \to \infty} a_i(\delta)/|a_{i_0}(\delta_m)|$, die nicht alle 0 sind. Dies widerspricht aber der linearen Unabhängigkeit der $\{g_1, \ldots, g_n\}$.
Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der $a_i(\delta)$ gibt es nun eine Teilfolge $\{\delta_\nu\}, \nu \to \infty$, so daß wieder mit Lemma I.6.2 folgt $\lim_{\nu \to \infty} g_{\delta_\nu}(x) = \sum_{\imath=1}^{n} \alpha_i^\star \bar{g}_i(x) := g^\star(x)$ gleichmäßig in $x \in [a,b]$.
Ferner können wir noch voraussetzen, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} x_i^{\delta_\nu} = x_i^\star, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sigma_{\delta_\nu} = \sigma^\star \in \{-1, 1\}$$

gilt. Dann folgt durch Grenzübergang $\nu \to \infty$ in

$$\sigma^\star[f(x_i^\star) - g^\star(x_i^\star)](-1)^i = \|f - g^\star\|_{\infty,[a,b]}.$$

Es ist klar, daß die $x_i^\star$ dann paarweise verschieden sein müssen. Mit dem bereits bewiesenen Teil des Satzes folgt nun die restliche Behauptung. □

Bemerkung: Jones-Karlovitz (siehe [JK]) beweisen darüber hinaus, daß endlich-dimensionale Unterräume von $C[a,b]$, für die dieser Satz gilt, notwendigerweise WT-Räume sein müssen, d.h. die Aussage des Satzes charakterisiert gerade die WT-Räume.

Zur Anwendung auf die beste Approximation mit Splinefunktionen betrachten wir die Splineräume

$$S_k(\Delta, Z) = \text{Span}\{N_{i,k}|_a^b\}_{i=1}^{n+k} \qquad \subset \quad C[a,b] \tag{I.8.4}$$

mit B-Splines $N_{i,k}$ zu den Knoten $t_1, \dots, t_{n+2k}$, wobei

$$t_1 \leq \ldots \leq t_k = a < \underbrace{\xi_1}_{z_1-fach} < \cdots < \underbrace{\xi_r}_{z_r-fach} < b = t_{k+n} < t_{n+k+1} \leq \cdots \leq t_{n+2k} \tag{I.8.5}$$

wobei noch $\xi_0 := a, \xi_{r+1} := b$ gesetzt sei und $z_i \leq k-1$ gelte. Daher sind die Elemente von $S_f(\Delta, Z)$ stückweise Polynome vom Grad $k-1$ und Glattheit C^{k-1-z_i} in den ξ_i.

Im Folgenden schließen wir den Fall $k = 1$ aus, weil er Approximation durch Stufenfunktionen bedeutet und deshalb auf den trivialen Fall der besten Approximation durch Konstanten zurückgeführt werden kann. Ebenso können wir den Fall $z_i = k$ weglassen, da dann der Splineraum $S_k(\Delta, Z)$ in zwei voneinander unabhängige Teilräume auf $[a, \xi_i]$ und $[\xi_i, b]$ zerfällt. Ferner schließ wir den Fall $n = 1$ aus, da er Approximation durch Polynome $(k-1)$-ten Grades bedeutet. Diese bilden aber einen Haar-Raum der Dimension k und fallen daher unter die Theorie des vorigen Abschnitts.

Die Anwendung von Satz I.8.1 in Verbindung mit Satz I.6.4 ergibt dann

Korollar I.8.2 *Es sei M der in (I.8.4) definierte Splineraum $S_k(\Delta, Z)$ der Dimension $n+k$. Dann gibt es zu jedem $f \in C[a,b]$ eine beste Approximation $s_f \in S_k(\Delta, Z)$, so daß die Differenz $f - s_f$ maximal alterniert, d.h. es gilt*

$$\sigma[f(x_i) - s_f(x_i)](-1)^i = ||f - s_f||_{\infty,[a,b]}, \quad 1 \leq i \leq n+k+1, \qquad \sigma \in \{-1, 1.\} \tag{I.8.6}$$

Unter zusätzlichen Bedingungen an f kann auch Eindeutigkeit der besten Approximation gezeigt werden. Diese muß dann mit der oben angegebenen übereinstimmen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß f im sogenannten konvexen Kegel von M liegt. Dieser Begriff ist in leichter Abwandlung von Definition I.8.3 hier gegeben durch

Definition I.8.4 *Der* **konvexe Kegel K(M)** *eines WT- Raums M von $C[a,b]$ mit Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ ist die Menge aller $f \in C[a,b]$, für die $\{f, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ wieder ein WT -System ist.*

Satz I.8.2 *Es sei M als Unterraum von $C[a,b]$ wie in Korollar I.8.2 gegeben. Dann gibt zu jedem $f \in C(a,b]$ genau eine beste Approximation g^* aus M mit der Alternanteneigenschaft (I.8.6).*

Beweis: Es sei g^* die nach Korollar I.8.2 existierende beste Approximation mit den Alternantenpunkten $\{x_i\}_{j=1}^{n+1}$. Wir nehmen nun an, daß es noch eine weitere beste Approximation $\tilde{g}$ gibt. Die Differenz $g^* - \tilde{g}$ hat dann an den Alternantenpunkten entweder den Wert $\neq 0$ oder dort eine isolierte doppelte Nullstelle, d.h. ihr Vorzeichen ändert sich in einer Umgebung der Nullstelle nicht. Denn andernfalls wäre g^* entgegen der Voraussetzung extremal auf einem Intervall.

Wir bezeichnen erstere Punkte als vom Typ 1 und letztere als vom Typ 0 und sei $[x_{1+k_\nu}, x_{1+k_{\nu+1}})$ ein Intervall, worin die ersten ρ_ν Punkte $x_{1+k_\nu}, \cdots, x_{k_\nu+\rho_\nu}$ mit $\rho_\nu \geq 1$ vom Typ 0 sind, d.h. die Differenz $g^* - \tilde{g}$ verschwindet dort, und die restlichen vom Typ 1. Da $g^* - \tilde{g}$ stetig ist, existiert ihre Ableitung bis auf isolierte Sprungstellen. Folglich besitzt sie auf $[x_{1+k_\nu}, x_{k_\nu+\rho_\nu}]$ jeweils einen Vorzeichenwechsel in den Alternantenpunkten $x_{1+k_\nu}, \cdots x_{k_\nu+\rho_\nu}$ und zusätzlich einen dazwischen, also insgesamt $2\rho_\nu - 1$ Vorzeichenwechsel. (Wir beziehen dabei Sprungstellen mit Vorzeichenwechsel mit ein). Auf dem restlichen Intervall $(x_{k_\nu+\rho_\nu}, x_{1+k_{\nu+1}})$ muß die Differenz $g^* - \tilde{g}$ noch mindestens so viele Vorzeichenwechsel der Ableitung besitzen, wie dort Alternantenpunkte vorhanden sind, also $k_{\nu+1} - k_\nu - \rho_\nu$ solche Vorzeichenwechsel. Auf dem Intervall $[x_{1+k_\nu}, x_{1+k_{\nu+1}})$ besitzt $g^* - \tilde{g}$ daher mindestens $k_{\nu+1} - k_\nu + \rho_\nu - 1 \geq k_{\nu+1} - k_\nu$ Vorzeichenwechsel der Ableitung.

Es gebe nun r solcher Intervalle und wir unterscheiden folgende Fälle:
i) es sei $k_1 = 0$ und $n + k + 1 = k_{r+1}$, d.h. der gesamte Alternantenbereich $[x_1, x_{n+k+1}]$ sei mit solchen Intervallen überdeckbar. Dann gilt auf $[a, b]$

$$\text{Anzahl der Vorzeichenwechsel von } \ (g^* - \tilde{g})' \ \geq \ \sum_{\nu=1}^{r} (k_{\nu+1} - k_\nu) = k_{r+1} = n + k.$$

ii) es sei $k_1 = 0$ und $n + k + 1 = k_{r+1} + s$ mit $s = 1, 2, \cdots$. Dann ist noch das Intervall $[x_{1+k_{r+1}}, x_{n+k+1}]$ zu betrachten, worauf $(g^* - \tilde{g})'$ nach den vorigen Überlegungen noch mindestens $2s - 1$ Vorzeichenwechsel besitzt, d.h. wir erhalten

$$\text{Anzahl der Vorzeichenwechsel von } \ (g^* - \tilde{g})' \ \geq \ k_{r+1} + (2s - 1) = n + k + s.$$

iii) es sei $k_1 > 0$, d.h. es gibt links von x_{1+k_1} noch Alternantenpunkte vom Typ 1, also auf $[x_1, x_{1+k_1})$. Nach dem Vorigen kommen noch mindestens k_1 Vorzeichenwechsel von $(g^* - \tilde{g})'$ zu denen auf $[x_{1+k_1}, x_{n+k+1}]$ hinzu, d.h.

$$\text{Anzahl der Vorzeichenwechsel von } \ (g^* - \tilde{g})' \ \geq \ \sum_{\nu=1}^{r} (k_{\nu+1} - k_\nu) + k_1 = k_{r+1}.$$

Letztere Zahl ist aber schon in den Fällen i),ii) nach unten abgeschätzt worden. Wir schließen daraus, daß die Differenz $(g^* - \tilde{g})'$ in allen Fällen mindestens $n + k$ (starke) Vorzeichenwechsel hat. Sie liegt aber in einem Splineraum der Dimension $n + k$ (lokal ist der Grad $\geq k - 2$) und muß daher nach Satz I.6.4 gleich null sein. Also muß $g^* - \tilde{g}$ konstant und daher gleich null sein. $\square$

Für Splineräume gibt es exakte Kriterien dafür, wann eine Splinefunktion beste Approximation zu $f \in C[a,b]$ bezüglich der L_∞-Norm ist. Sie sind allerdings komplizierter als für Tschebyscheff-Räume. Wir betrachten nun den Splineraum

$$S_k(\Delta, Z) = span\{N_{i,k}|_a^b\}_{i=1}^{n+k} \qquad \subset \quad C[a,b] \tag{I.8.7}$$

mit B-Splines $N_{i,k}$ zu den Knoten $t_1, \ldots, t_{n+2k}$ der Form wie in (I.8.5).

Satz I.8.3 *Es seien $k, n \geq 2$ und $f \in C[a,b]$. Es ist $s \equiv s_f \in S_k(\Delta, Z)$ beste Approximation zu f in der L_∞-Norm genau dann, wenn ein Intervall $[\xi_j, \xi_{j+l}] \subseteq [a,b]$ mit $l \geq 1$ existiert, in dem $f - s_f$ mindestens $k + 1 + \sum\limits_{i=j+1}^{j+l-1} z_i$ Alternantenpunkte besitzt.*

Bemerkung 1: Der Maximalfall $[\xi_j, \xi_{j+l}] = [\xi_0, \xi_{r+1}]$ ist gerade vom vorigen Satz erfasst. Es können jedoch auch die anderen Fälle eintreten, insbesondere wenn keine Eindeutigkeit der besten Approximation vorliegt (s. Übungsaufgabe).

Bemerkung 2: Der Beweis der Hinlänglichkeit wird zeigen, daß das Kriterium wie folgt interpretiert werden kann: auf dem Segment $[\xi_j, \xi_{j+l}]$ ist die lokale Dimension des Splineraums $S_k(\Delta Z)$ gleich $d_{j,l} := k + z_{j+1} + \ldots + z_{j+l-1}$ und es wird gefordert, daß $d_{j,l} + 1$ Alternantenpunkte auf $[\xi_j, \xi_{j+l}]$ existieren. Der Wert des Fehlers $|f - s_f(x)|$ an einem Alternantenpunkt muß dabei gleich dem *globalen Fehler* $||f - s_f||_\infty, [a,b]$ sein!

Der Beweis des Satzes geschieht in mehreren Schritten.

Beweis: (Hinlänglichkeit) Es habe $f - s_f$ auf einem Intervall der Form $[\xi_j, \xi_{j+l}]$ mindestens $k + 1 + z_{j+1} + \ldots + z_{j+l-1}$ Alternantenpunkte. Es sei dann $w_j := z_1 + \ldots z_j$ definiert, so daß wegen $\xi_j = t_{w_j - i + k}$ für $i = 0, \ldots, z_j - 1$ mindestens $k + 1 + w_{j+l-1} - w_j$ Alternantenpunkte in $[\xi_j, \xi_{j+l}]$ liegen. Speziell gilt mit Koeffizienten c_i

$$d := ||f - s_f||_{\infty,[a,b]} = ||f - s_f||_{\infty,[\xi_j,\xi_{j+l}]} = ||f - \sum_{i=w_j-k+1}^{w_{j+l-1}} c_i N_{i,k}||_{\infty,[\xi_j,\xi_{j+l}]}$$

Nun ist $M_{j,l} := span\{N_{i,k}\}_{i=w_j-k+1}^{w_{j+l-1}}$ ein $(k + w_{j+l-1} - w_j)$ - dimensionaler WT-Raum nach Abschnitt I.6. Daher ist $s_f^\star := \sum\limits_{i=w_j-k+1}^{w_{j+l-1}} c_i N_{i,k}$ beste Approximation aus $M_{j,l}$ zu f, denn gäbe es ein $\tilde{s} \in M_{j,l}$ mit $||f - \tilde{s}||_{\infty,[\xi_j,\xi_{j+l}]} < d$, so würde mit gleicher Argumentation wie im vorigen Satz ein Widerspruch folgen, da $f - s_f^\star$ dann $k + 1 + w_{j+l-1} - w_j$ Alternantenpunkte auf $[\xi_j, \xi_{j+l}]$ besitzen würde. Daraus schließen wir

$$||f - s_f||_{\infty,[a,b]} = ||f - s_f^\star||_{[\xi_j,\xi_{j+l}]} = \inf_{g \in M_{j,l}} ||f - g||_{\infty,[\xi_j,\xi_{j+l}]}$$

$$= \inf_{g \in S_k(\Delta,Z)} ||f - g||_{\infty,[\xi_j,\xi_{j+l}]} \leq \inf_{g \in S_k(\Delta,Z)} \equiv ||f - g||_{\infty,[a,b]},$$

d.h. S_f ist beste Approximation. □

Zum Beweis der Notwendigkeit des Kriteriums dieses Satzes nehmen wir an, daß es nicht erfüllt sei. Die Idee (nach Kolmogorov) ist dann, durch Interpolation an den Alternantenpunkten eine Splinefunktion $\tilde{s}$ aus $S_k(\Delta, Z)$ zu finden, so daß $s_f + \epsilon\ \tilde{s}$ mit einem genügend kleinem ϵ eine bessere Approximation zu f liefert, und so einen Widerspruch zu erzielen. Wir formulieren dies genauer als

Lemma I.8.1 *Es gebe eine eindeutig bestimmte Splinefunktion $\tilde{s} \in span\{N_{i,k}\}_{i=1}^{n+k}$, die den Interpolationsbedingungen*

$$\tilde{s}(\sigma_j) = (-1)^j \qquad ,1 \leq j \leq \rho \tag{I.8.8}$$

genügt, wobei die $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\rho}$ die Alternantenpunkte von $f - s_f$ auf $[a, b]$ seien und $d := ||f - s_f||_{\infty,[a,b]} > 0$. Dann kann s_f nicht beste Approximation zu f aus $S_k(\Delta, Z)$ sein.

Beweis: Für $\eta > 0$ genügend klein gibt es zu jedem Alternantenpunkt σ_i eine Umgebung $V_i = \{x \in [a, b] : |x - \sigma_i| \leq \delta_i\}$ derart, daß $|f(x) - s_f(x) \geq d - \eta > 0$ für $x \in V_i$ gilt und ferner $|f(x) - s_f(x)| \leq d - \eta$ für $x \in V_i := (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ (wobei $\sigma_0 := a, \sigma_{\rho+1} := b$)). Dann sei für die nach (I.8.8) existierende Splinefunktion $\tilde{s}$ gesetzt

$$\alpha := \max_i \sup_{x \in V_i} |\tilde{s}(x)|, \qquad \beta := \min_i \inf_{x \in V_i} |\tilde{s}(x)|.$$

Wegen der angenommenen Eindeutigkeit von $\tilde{s}$ gilt $\alpha < \infty$. Durch Wahl von genügend kleinen δ_i kann man außerdem $\beta > 0$ und $(-1)^i \tilde{s}(x) = |\tilde{s}(x)|$ für $x \in V_i$ garantieren.
Nun betrachte die Fehlerfunktion $e(x) := f(x) - s_f(x) - \epsilon\, \sigma\tilde{s}(x)$ mit genügend kleinem $\epsilon > 0$. Durch geeignete Wahl von $\sigma \in \{-1, 1\}$ folgt

$$|e(x)| = |f(x) - s_f(x)| - \epsilon|\tilde{s}(x)| \leq d - \epsilon \cdot \beta, \qquad x \in V_i, \quad \forall i.$$

Auf den Komplementärmengen V_i dagegen gilt

$$|e(x)| \leq |f(x) - s_f(x)| + \epsilon|\tilde{s}(x)| \leq d - \eta + \epsilon \cdot \alpha$$

Bei genügend kleinem ϵ erreicht man auch $\epsilon \cdot \alpha \leq \eta/2$ und damit $\sup_{x \in [a,b]} |e(x)| < d$. Damit ist $s_f(x) + \epsilon\sigma\tilde{s}(x)$ eine bessere Approximation zu f als s_f, und die Behauptung ist bewiesen. □

Um dieses Lemma anzuwenden, muß man die eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems (I.8.8) zeigen, wenn die Alternantenpunkte von Satz I.8.3 die hinreichenden Bedingungen nicht erfüllen. Wir bemerken dazu, daß im Falle eines Tschebyscheff-Systems diese Lösbarkeit bereits durch die Haar-Bedingung garantiert wäre.
Außerdem führen wir den Beweis nur für den Fall einfacher Knoten in (a,b) durch, d.h. wir nehmen $z_i = 1$ für $i = 1, \ldots, r = n$ in (I.8.5) an. Es gilt dann $\xi_j = t_{k+j}$ für $1 \leq j \leq n$.
Genauer setzen wir dann voraus, daß $\rho_j \geq 0$ die exakte Anzahl der Alternantenpunkte in $I_j := [t_{k+j}, t_{k+j+1}], 0 \leq j \leq n-2$ sei (beachte $n \geq 2$), sowie ρ_{n-1} deren Anzahl in $I_{n-1} = t_{k+n-1}, b]$.
Da das Kriterium von Satz I.8.2 nicht erfüllt sein soll, muß für die Alternantenpunkte gelten

$$\text{in} \quad \bar{I}_j \quad \text{liegen höchstens} \quad k \quad \text{der} \quad \sigma_i, \quad 0 \leq j \leq n-1, \tag{I.8.9}$$

$$\rho_0 + \ldots + \rho_l \leq k + l \qquad \text{für} \quad l = 0, \ldots, n-1. \tag{I.8.10}$$

Damit kann man formulieren

Lemma I.8.2 *Unter den Voraussetzungen (I.8.9), (I.8.10) an die Alternantenpunkte gibt es Indizes $j_i \in \{1, \ldots, n+k\}$, so daß $\tilde{s} \in span\{N_{j_i,k}\}_{i=1}^{\rho}$ eindeutig durch die Interpolationsbedingungen (I.8.8) bestimmt ist, wobei $\rho = \rho_0 + \ldots \rho_n$ die Gesamtzahl der Alternanten ist. Der Index j_i kann dabei der kleinste Index gewählt werden, für den $\sigma_i \in (t_{k+j_i}, t_{k+1+j_i})$ und $j_i \geq i$ gilt.*

Beweis: Er geschieht durch Induktion in $n \geq 2$. Im Falle $n = 2$ hat man $a = t_k, b = t_{k+2}$ vorliegen.

Betrachte zunächst den Fall $\rho_0 = 0$: es gilt $\sigma_i > t_{k+1}$, daher $\rho_1 \leq k$ nach (I.8.10), und somit

$$\sigma_i \in [t_{k+1}, t_{k+2}] \subset (t_{i+1}, t_{k+1+i}) \subseteq \text{ supp } N_{i+1,k} \qquad \text{falls} \qquad 2 \leq i \leq k-1. \tag{I.8.11}$$

Im Falle $i = 1$ und $\rho_1 > 1$ gilt zusätzlich $\sigma_1 < \sigma_2 \leq t_{k+2}$ und im Falle $i = \rho_1 = k$ zusätzlich $\sigma_k > \sigma_1 \geq t_{k+1}$ wegen $k \geq 2$. Es gilt also (I.8.11) auch für $1 \leq i \leq k$.
Im Ausnahmefall $\rho_0 = 0, \rho_1 = 1$ und $\sigma_1 = t_{k+2} = b$ gilt

$$\sigma_1 \in (t_{k+1}, t_{2k+1}) \subseteq \text{ supp } N_{k+1,k},$$

so daß also die Bedingung des Satzes von Schoenberg-Whitney für $\rho_0 = 0$ immer erfüllt ist.

Betrachte nun den Fall $\rho_0 \geq 1$: es gilt notwendig $\sigma_1 < t_{k+1}$. Dies für $i = 1$ beachtend folgt

$$\sigma_i \in [a, t_{k+1}] \ \subset \ (t_i, t_{i+k}) \subseteq \text{ supp } N_{i,k}, \qquad \text{falls } 1 \leq i \leq \rho_0 < k \tag{I.8.12}$$

Im Grenzfall $\rho_0 = k \geq 2$ gilt aber $\sigma_k > \sigma_1 \geq a = t_k$ so daß (I.8.12) auch dann gilt.

Für die restlichen Indizes mit $\rho_1 < i \leq \rho_0 + \rho_1 \leq k$ gilt

$$\sigma_{\rho_0+i} \in [t_{k+1}, t_{k+2}] \ \subset \ (t_{\rho_0+i}, t_{\rho_0+i+k}) \ \subset \text{ supp } N_{\rho_0+i,k} \tag{I.8.13}$$

Lt. (I.8.10) ist nun noch $\rho_0 + \rho_1 = k + 1$ möglich. Dann kann aber nicht $\sigma_{k+1} = t_{k+1}$ gelten, da es sonst im Gegensatz zu (I.8.9) $k + 1$ Alternantenpunkte in $\bar{I}_0$ gäbe. Also gilt (I.8.13) auch in diesem Fall. Damit ist die Bedingung des Satzes von Schoenberg-Whitney für $n = 2$ und alle ρ_0, ρ_1 in (I.8.9), (I.8.10) erfüllt.

Sei nun die Behauptung gültig für $n-1$ und dann Alternantenpunkte $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\rho}, \rho = \rho_0 + \ldots + \rho_{n-1}$, gegeben, die (I.8.9), (I.8.10) erfüllen. Im Falle $\rho_{n-1} = 0$ ist die Behauptung für n mit derjenigen für $n - 1$ identisch und es ist daher nichts zu beweisen. Dieser Fall kann also im Folgenden ausgeschlossen werden.
Wir unterscheiden dann die Fälle

$$i) : \sigma_1 \geq t_{k+1} \qquad \text{und} \qquad ii) : \sigma_1 < t_{k+1}$$

Zu i): Hier ist $\rho_0 = 0$ und die Induktionsannahme kann direkt auf das Intervall $[t_{k+1}, b]$ statt $[a, b]$ angewandt werden, wobei die Folge $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ durch $\{t_{i+1}\}_{i=1}^{n-1+k}$ ersetzt wird.

Zu ii): In diesem Fall sei $r := \rho_0 + \ldots + \rho_{n-2}$ gesetzt. Da (I.8.9), (I.8.10) auch für $n - 1$ statt n erfüllt sind, liefert die Induktionsannahme

$$\sigma_i \in \text{supp} N_{j_i,k}, \quad 1 \leq i \leq r$$

Für die restlichen i mit $i = r + \nu, 1 \leq \nu \leq \rho_{n-1}$ haben wir per Definition $\sigma_{r+\nu} \in I_{n-1}$, d.h. $\sigma_{r+\nu} \geq t_{k+n-1}$, und wollen die Inklusion

$$\sigma_{r+\nu} \in \text{ supp} N_{r+\nu,k} \tag{I.8.14}$$

nachweisen, d.h. die Bedingung des Satzes von Schoenberg-Whitney. Nun gilt $t_{r+\rho_{n-1}} \leq t_{k+n-1}$ nach (I.8.10), so daß die Ungleichung nach unten in (I.8.14), d.h. $t_{r+\nu} \leq \sigma_{r+\nu}$, im Falle $r + \nu \leq k + n - 1$ erfüllt ist. Im Grenzfall $r + \rho_{n-1} = k + n - 1$ ist sie aber ebenfalls erfüllt, denn es gilt dann $t_{r+\rho_{n-1}} < t_{k+n-1}$, da sonst $\sigma_{r+\rho_{n-1}} \in [a, t_{k+n-1}]$ und somit Bedingung (I.8.10) verletzt wäre.

Die rechte Ungleichung in (I.8.14) gilt im Falle $r \geq n-1$ wegen $t_{r+k+1} \geq t_{k+n} = b$. Andernfalls, d.h. wenn $r \leq n-2$, liegen in $[a, t_{k+n-1}]$ höchstens $n-2$ Alternantenpunkte. Dann wählen wir das kleinste $j_i \geq i$, das die Forderung

$$\sigma_i \in (t_{k+j_i}, t_{k+1+j_i}) \ \subseteq \ \operatorname{supp} N_{j_i+1,k}, \qquad 1 \leq i \leq r \tag{I.8.15}$$

erfüllt (die Induktionsannahme garantiert, daß solche j_i existieren). Aus $\sigma_r \leq t_{k+n-1}$ und (I.8.15) schließen wir weiter $t_{j_r+k+1} \leq t_{k+n-1}$, also $j_r \leq n-2$. Für die restlichen $i = r+\nu$ beachten wir, daß wegen $\rho_{n-1} \leq k$

$$\sigma_{r+\nu} \in I_{n-1} := [t_{k+n-1}, b] \ \subset \ \operatorname{supp} N_{n-2+\nu,k}, \qquad 1 \leq \nu \leq \rho_{n-1}$$

gilt. Offensichtlich lassen sich dann mit der Wahl mit $j_{r+\nu} := n+\nu$ die Inklusionen in (I.8.15) für diese $\sigma_r + \nu$ erfüllen und der Satz von Schoenberg-Whitney ist auch für den Fall n statt $n-1$ anwendbar. $\square$

Damit folgt für einfache Knoten schnell
BEWEIS (Notwendigkeit in Satz I.8.2): Wäre das angebene Kriterium nicht erfüllt, so würde nach Lemma I.8.2 ein $\tilde{s}$ gemäß (I.8.8) existieren und Lemma I.8.1 zeigen, daß s_f nicht beste Approximation zu f ist.
Der Fall vielfacher Knoten läßt sich auf diesen zurückführen (siehe Übungsaufgabe).

Als Anwendung der bisherigen Theorie zeigen wir die Existenz des **Chebychev-Splines**, die in Satz I.7.1 des vorigen Abschnitts vorausgesetzt wurde.

Satz I.8.4 *Es sei $S_{k,\mathbf{t}}$ wie in (I.3.1) zur Folge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ als B-Spline-Raum definiert mit Dimension n. Dann gibt es genau eine Splinefunktion $s^* \in S_{k,\mathbf{t}}$, die n Alternationspunkte besitzt und den Wert $+1$ bei dem erste Extremum.*

BEWEIS: Die Existenz folgt durch Anwendung von Satz I.8.1 auf $f = N_{1,k}$ und den Raum $M = \text{Span}\{N_{i,k}\}_{i=2}^{n}$, der nach Korollar I.8.1 ein WT-Raum der Dimension $n-1$ ist. Durch geeignete Skalierung dieses Splines kann man erreichen, daß seine Supremumsnorm gleich 1 ist und er den Wert $+1$ bei seinem ersten Extremum besitzt.
Zum Beweis der Eindeutigkeit beachten wir an, daß $f = N_{1,k}$ im konvexen Kegel von $M = \text{Span}\{N_{i,k}\}_{i=2}^{n}$ liegt, denn $\text{Span}\{N_{i,k}\}_{i=1}^{n}$ ist ein WT-Raum. Satz I.8.2 liefert dann die Eindeutigkeit von s^*. $\square$

I.8.3 Beste Approximation mit Splines in der L_1- Norm

Das Gegenstück zu den Alternantenpunkten bilden bei der besten Approximation im $L_1-Sinne$ durch WT-Räume die kanonischen Punkte .

Satz I.8.5 *(Michelli 1977) Es sei M ein WCT-Raum der Dimensionn in $C[a,b]$. Dann gibt es eine Menge von n kanonischen Punkten $\tau_0 := a \le \tau_1 < \cdots < \tau_n \le \tau_{n+1} := b$ zu M derart, daß*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M. \tag{I.8.16}$$

Beweis: Es sei $\{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Basis von M und $\{g_1^{(\delta)}, \ldots, g_n^{(\delta)}\}$ eine Basis des Haar-Raumes $M^{(\delta)}$ gemäß Satz I.6.2. Nach Satz V besitzt $M^{(\delta)}$ eine eindeutig bestimmte Menge $\{\tau_{1,\delta}, \ldots, \tau_{n,\delta}\}$ von n kanonischen Punkten in [a,b], also per Definition von $M^{(\delta)}$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int\limits_{\tau_{i,\delta}}^{\tau_{i+1,\delta}} (g \star G_\delta(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M.$$

Geht man hier zur Grenze $\delta \to 0$ über, so folgt (eventl. mit Teilfolge) die Existenz von Punkten $\tau_i, 1 \le i \le n$, mit $\lim\limits_{\delta\to 0} \tau_{i,\delta} = \tau_i$, sodaß die gewünschte Beziehung für alle $g \in M$ formal erfüllt ist. Bezüglich der Anzahl der paarweise verschiedenen τ_i kann man damit jedoch nur $l \le n$ folgern. Es ist also noch $l = n$ zu zeigen.
Es sei dann $\varphi(x) := sgn \prod_{i=1}^{l}(x - \tau_i)$ mit paarweise verschiedenen $\tau_1, \ldots, \tau_l in[a,b]$ und es gelte

$$\int\limits_a^b \varphi(x)g(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M.$$

Weil M ein WCT-System ist, ist M^δ ein CT-System (s. Korollar I.6.1). Also kann mit einem Teilsystem der Dimension $l+1 \le n$ an beliebigen Punkten in [a,b] interpoliert werden. Also gibt es ein $\tilde{g} \in$ span $\{g_1^{(\delta)}, \cdots, g_{l+1}^{(\delta)}\}$ mit $\tilde{g}(\tau_i) = 0, 1 \le i \le l$, und $\tilde{g}(\tilde{\tau}) = 1$ für ein weiteres $\tilde{\tau} \in [a,b]$ mit $\tilde{\tau} \ne \tau_i, 1 \le i \le l$. Dieses $\tilde{g} \in M$ hat dann genau an den Stellen τ_i Nullstellen, wechselt also dort sein Vorzeichen. Folglich muß $\int_a^b \varphi(x)\tilde{g}(x)dx = \pm \int_a^b |\tilde{g}(x)|dx \pm 0$ gelten, ein Widerspruch.
□

Dieser Satz gilt auch für beliebige WT-Systeme (vergl. C.A.Micchelli [Mic]), für WCT-Systeme vereinfacht sich aber der Beweis wie hier angegeben. Bei Räumen von B-Splines ist dies erlaubt, denn man weiß nach Korollar I.6.1, daß diese bereits WCT-Räume sind.
Wir wollen nun das Ergebnis der Sätze VIII und IX auf WT- Systeme von Splinefunktionen erweitern. Dazu muß sichergestellt werden, daß an den kanonischen Punkten interpoliert werden kann.

Lemma I.8.3 *Es sei M wie in Korollar I.8.2 als WT-System $S_{\mathbf{t}} =$ Span $\{N_{i,k}\}_{i=1}^n$ gegeben. Dann ist die Lagrangesche Interpolationsaufgabe an den n kanonischen Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ von M eindeutig in M lösbar.*

Beweis: Es ist genügt zu zeigen, daß der Träger eines jeden $N_{i,k}$ wenigstens einen kanonischen Punkt τ_i enthält. Da es genau n solche Punkte gibt, muß dann in supp $N_{i,k}$ genau ein solcher liegen, d.h. es gilt $t_i < \tau_i < t_{i+k}$ für $1 \le i \le n$. Nach dem Satz von Schoenberg - Whitney folgt dann die Behauptung. Würde aber der Träger eines $N_{i,k}$ keinen kanonischen Punkt enthalten, so müßte ein Index $l, 0 \leq l \leq n$ existieren mit supp $N_{i,k} \subset (\tau_l, \tau_{l+1})$, so daß nach (I.8.16)

$$0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} N_{i,k}(x)dx = (-1)^l \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} N_{i,k}(x)dx \neq 0$$

gelten würde, was ein Widerspruch wäre. □

Eine unmittelbare Folge dieses Lemmas ist eine Aussage analog zu Satz VIII.

Satz I.8.6 *Es gelten für M die Voraussetzungen des vorigen Lemmas und es seien $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ kanonische Punkte von M. Dann besitzt jedes f aus dem konvexen Kegel $K(M)$ von M eine eindeutige beste L_1-Approximation g_f aus M. Man erhält sie durch Interpolation an den kanonischen Punkten. Ferner gilt*

$$\int_a^b |f(x) - g_f(x)|dx = |\lambda(f)|, \qquad \lambda(f) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} f(t)dt.$$

Beweis: Es sei g_f der Interpolant zu $f \in K(M)$ an den Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^n$, der gemäß dem obigen Lemma eindeutig bestimmt ist. Es liegt $f - g_f$ in Span$\{g_1, \ldots, g_n, f\}$ = WT-System. Letzteres bedingt, daß $\sigma(-1)^i(f(x) - g_f(x) \geq 0$ für $x \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ bei festem $\sigma = \pm 1$ gelten muß. Es folgt für alle $g \in M$ nach (I.8.16)

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)|dx &\geq \sum_{i=0}^{n} \sigma(-1)^i \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} [\ f(x) - g(x)\ ]dx = \sum_{i=0}^{n} \sigma(-1)^i \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sigma(-1)^i \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} [\ f(x) - g_f(x)\ ]dx = \int_a^b |f(x) - g_f(x)|\ dx. \end{aligned}$$

Dies ergibt die Behauptung einschließlich der Formel für den Fehler der besten Approximation. □

Auch die Eindeutigkeit der kanonischen Punkte kann gezeigt werden. Dazu benötigt man folgendes Lemma, das wir nicht beweisen wollen (siehe dazu [Mic] bzw. Übungsaufgabe 3):

Lemma I.8.4 *Es sei M wie in (I.8.4) als WT-System $S_{\mathbf{t}} =$ Span $\{N_{i,k}\}_{i=1}^n$ gegeben. Dann enthält der kleinste lineare Teilraum, der den konvexen Kegel $K(M)$ enthält, den Raum $C^k[a, b]$ und somit einen Haar-Raum der Dimension n.*

Satz I.8.7 *Unter den Voraussetzungen des vorigen Lemmas sind die kanonischen Punkte eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es gebe außer den kanonischen Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ noch eine zweite Menge $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ von kanonischen Punkten vom M, d.h. $a \leq \xi \leq b$ und es gelte $(a \equiv \xi_0, b \equiv \xi_{n+1})$ sowie

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\xi_i}^{\xi_{n+1}} g(x)dx = 0, \qquad \forall g \in M.$$

Dann gibt es ein $f^\star \in K(M)$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^j \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} f^\star(x)dx \ \neq\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f^\star(x)dx. \qquad \text{(I.8.17)}$$

Denn andernfalls würde Gleichheit für alle $f \in K(M)$ gelten, und daher auch für alle f aus dem kleinsten linearen Teilraum, der $K(M)$ enthält, und somit schließlich lt. Voraussetzung für alle f eines Haar-Raumes M_0 der Dimension n. Nach Satz IV.3 sind aber dessen kanonische Punkte eindeutig bestimmt und es wäre daher $\xi_i = \tau_i, 1 \leq i \leq n$, was wir (zunächst) ausschließen können, da sonst die Behauptung bewiesen wäre.
Weiter können wir in (I.8.17) $f^\star \neq M$ annehmen, da sonst beide Seiten gleich 0 wären. Die Fehlerformel von Teil a) dieses Satzes zeigt dann

$$\sigma(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \int_{\tau_i}^{\tau_{j+1}} f^\star(t)dt) = \int_a^b |f_i^\star(t) - g_{f^\star}(t)|dt = dist(f;M)_1.$$

Für $g_{f^\star}(t)$ hat man aber nach der Cramer-Regel die explizite Formel

$$f^\star(t) \ - \ g_{f^\star}(t) = D\begin{pmatrix} g_1,\ldots,g_n,f^\star \\ \tau_1,\ldots,\tau_n,t \end{pmatrix} \Big/ D\begin{pmatrix} g_1,\ldots,g_n \\ \tau_1,\ldots,\tau_n \end{pmatrix}$$

Hieraus entnimmt man $f^\star(t) - g_{f^\star}(t) \leq 0$ für $t \leq (\tau_{n-1}, \tau_n)$, so daß in der obigen Restgliedformel $\sigma = (-1)^n$ festgelegt ist. Die gleiche Formel gilt nun für die kanonischen Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Dies widerspricht aber der obigen Ungleichheit in (I.8.17). $\square$

Abschließend sei erwähnt, daß sich die Ergebnisse dieses Abschnitts auch auf die beste einseitige L_1- Approximation mit WT-Räumen ausdehnen lassen, wobei Stützstellen von Quadraturformeln die Rolle der kanonischen Punkte spielen (siehe C.A. Micchelli - A. Pinkus[MP]).

Uebungen zu Abschnitt I.8

Aufgabe 1 Es sei die stetige Funktion $f(t)$ auf $[-1,1]$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -1 \leq t \leq -1/2, \\ -2t & : \quad -1/2 \leq t \leq 0, \\ 2t & : \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es sei $S_2(\{0\})$ die Menge der stetigen linearen Splines mit einzigem Knoten bei $t = 0$. Man zeige, daß alle beste Approximationen aus $S_2(\{0\})$ zu f in der Supremumsnorm gegeben sind durch

$$s(t) = 1/4 - t + c\, t_+^1, \qquad 5/2 \leq c \leq 3$$

und bestimme dasjenige c für das die Fehlerfunktion maximal oszilliert. Man diskutiere den Zusammenhang mit Satz I.8.3 und Korollar I.8.2.

Aufgabe 2 Es seien $f(t)$ und $S_2(\{0\})$ wie in Aufgabe 1 gegeben. Dann sei

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & : \quad -1 \leq t \leq 0, \\ -f(t) & : \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gesetzt. Man zeige, es existiert genau eine beste Approximation zu $\tilde{f}$ aus $S_2(\{0\})$.

Aufgabe 3 Es sei der Raum $S_{k,n}$ der Splines der Ordnung k mit Knoten $x_1, \cdots, x_n$ in $(0,1)$ definiert durch

$$S_{k,n} := \mathrm{Span}\Big(\{t^i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{(t - x_j)_+^{k-1}\}_{j=1}^n\Big).$$

Man zeige, daß der kleinste lineare Teilraum, der den konvexen Kegel von $S_{k,n}$ enthält, den Raum $C^k[0,1]$ enthält.
Hinweis: Jedes $f \in C^k[0,1]$ ist darstellbar als

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} f^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-t)_+^{k-1}\, f^{(k)}(t)dt.$$

Daher genügt es nachzuweisen, daß die Funktionen

$$F_j(x) := \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-t)_+^{k-1}\, g(t)dt, \quad g(t) \geq 0, \quad t \in (x_j, x_{j+1}$$

im konvexen Kegel von $S_{k,n}$ liegen.

Aufgabe 4 Der Beweis der Notwendigkeit von Satz I.8.2) läßt sich auf den Fall einfacher Knoten zurückführen, indem man die stetige Abhängigkeit der B-Splines von ihren Knoten ausnützt (s. Lemma I.2.3, Eigenschaft 5). Speziell können die B-Splines $N_{i,k}$ der Basis des Splineraumes in (I.8.7) durch $N_{i,k}^{(\delta)}$ mit einfachen Knoten gleichmäßig approximiert werden. Man zeige, daß dann auch beste Approximationen aus den Splineräumen mit $N_{i,k}^{(\delta)}$ gegen solche aus $\mathrm{Span}\{N_{i,k}\}$ konvergieren.

II Cardinal Splines

II.1 Grundlagen

II.1.1 Äquidistante Knoten und Fourier-Transformation

Kardinale Splines (engl. 'cardinal splines') bilden einen besonders einfachen Spezialfall der Splines, mit dem wir uns im Folgenden näher beschäftigen werden. Im engeren Sinne bezeichnet man als kardinale Splines vom Grad $k-1$ die Elemente des Raumes

$$S_k := \left\{ s(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}) : s(x)|_{(i,i+1)} \in \Pi_{k-1} \right\}$$

Nach Abschnitt I.1 sind sie also Splinefunktionen mit ganzzahligen Knoten, d.h. zur Knotenfolge $\{j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Allgemeiner versteht man unter **kardinalen Splines** die Elemente der Räume

$$S_{k,h,a} := \{ s(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}) : s(x)|_{(a+ih,a+(i+1)h)} \in \Pi_{k-1} \} \tag{II.1.1}$$

Dies sind Räume von Splinefunktionen mit äquidistanten Knoten, die durch eine Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}$ der Form

$$t_j = a + jh \qquad , \quad j \in ZZ \quad . \tag{II.1.2}$$

gegeben sind, wobei $h > 0$ die „Schrittweite“ und a eine festgewählte reelle Zahl ist.

Wir untersuchen zunächst die Eigenschaften der zugehörigen B-Splines. Dazu führt man **normalisierte B-Splines** ein. Dies sind B-Splines der Form

$$N_{i,k}(x) = k[0,\ldots,k](\cdot - x)_+^{k-1} \ , \qquad k \geq 1 \tag{II.1.3}$$

mit den Knoten $i,\ldots,i+k$, d.h. der Fall $a=0$ und $h=1$ der Knoten (II.1.2) liegt vor. Für die B-Splines $N_{i,k,h,a}(x)$ bezüglich der allgemeinen Knoten (II.1.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} N_{i,k,h,a}(a+uh) \qquad &= (t_{i+k} - t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}](t-a-uh)_+^{k-1} \\ &= kh[t_0,\ldots,t_k](t+ih-uh)_+^{k-1} \\ &= kh^k[0,\ldots k](\cdot - (u-i))_+^{k-1} = h^k N_{0,k}(u-i) \end{aligned}$$

d.h. mit $x = a + uh$ gilt die Beziehung

$$N_{i,k,h,a}(x) = h^k N_{0,k}(\frac{x-a}{h} - i) \tag{II.1.4}$$

Die einzelnen B-Splines gehen also durch Skalierung und Verschiebung aus dem normalisierten B-Spline N_k hervor. Dies wird im Folgenden von grundlegender Bedeutung sein, denn daraus folgt, daß die obigen Splineräume $S_{k,h,a}$ sogenannte **translationsinvariante Räume** bilden. Per Definition gehen die Elemente solcher Räume durch Verschiebung und Translation auseinander hervor. Später werden wir auf die Theorie solcher Räume noch näher eingehen. Im vorliegenden Fall sieht man, daß s_h genau dann Element in $S_{k,h,a}$ ist, wenn $s_h(x) = s((x-a)/h)$ mit $s \in S_k$ gilt und daß auch $s_h(x+jh) \in S_{k,h,a}$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$.

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf den Fall $a=0$ und $h=1$.Wir spezialisieren dann die Formel aus Abschnitt I.2 für B-Splines auf äquidistante Knoten, um eine Formel für die “normalisierten” B-Splines $N_{0,k}$ zu erhalten. Bekanntlich gilt in diesem Falle für dividierte Differenzen

$$[t, t+h, \ldots, t+k\cdot h]f = h^{-k}\Delta_h^k f(t)/k! = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t+jh) h^{-k}/k!,$$

wobei Δ_h^k die k-te Vorwärtsdifferenz mit Zuwachs h bezeichnet. Ihre Definition lautet

$$\Delta_h^k f(x) := \Delta_h[\Delta_h^{k-1} f(x)] \qquad , \Delta_h f(x) := f(x+1) - f(x) \tag{II.1.5}$$

Bezeichnet man mit Δ die Vorwärtsdifferenz mit Zuwachs 1, so folgt nun die Formel

$$\begin{aligned} N_{0,k}(x) &= \frac{1}{(k-1)!}\Delta^k(-x)_+^{k-1} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(j-x)_+^{k-1} \end{aligned} \tag{II.1.6}$$

Es gibt jedoch einen anderen eleganteren Weg, den normalisierten B-Spline $N_{0,k}$ zu definieren. Eine Motivation dazu gibt die Formel für Ableitungen, die sich nach (I.2.21) spezialisiert zu

$$N'_{i,k}(x) = N_{i,k}(x) - N_{i,k}(x-1). \tag{II.1.7}$$

Aus (I.2.19) folgt weiter die Rekursionsformel

$$N_{i,k+1}(x) = \frac{1}{k}[(x-i)N_{i,k}(x) + (k-i+1-x)N_{i,k}(x-1)). \tag{II.1.8}$$

Integration von (II.1.7) für $k = 0$ liefert

$$\begin{aligned} N_{0,k}(x) &= \int_0^x N'_{0,k}(t)dt = \int_0^x [N_{0,k-1}(t) - N_{0,k-1}(t-1)]dt \\ &= \int_{x-1}^x N_{0,k-1}(t)dt = \int_0^1 N_{0,k-1}(x-u)du = \int N_{0,k-1}(x-u)\chi_{[0,1]}(u)du \end{aligned} \tag{II.1.9}$$

wobei $\chi_{[0,1]}(u)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,1]$ sei. Die letzte Operation bedeutet aber eine sogenannte **Faltungsoperation**. Dieser Begriff ist allgemein erklärt durch

Definition II.1.1 *Die Faltungsoperation für zwei rellwertige, $L_1(\mathbb{R}^m)$-integrierbare Funktionen f, g auf $(-\infty, \infty)$ ist definiert durch*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{II.1.10}$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini kann man zeigen, daß unter den gegebenen Vorausetzung die Faltungsoperation assoziativ ist, d.h.

$$((f * g) * h) = (f * (g * h))(x) \tag{II.1.11}$$

Die Eigenschaft (II.1.9) motiviert nun eine alternative Definition von B-Splines via Faltung :

Definition II.1.2 (Schoenberg 1946) *Es sei $N_{0,1}(x)$ definiert durch*

$$N_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \textit{für} \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad \textit{für} \quad x \notin [0,1] \end{cases} \tag{II.1.12}$$

und die "fundamentalen" Splinefunktionen $N_{0,k}(x)$ induktiv definiert durch

$$N_{0,k}(x) := (N_{0,k-1} * N_{0,1})(x) \tag{II.1.13}$$

Man sieht aus der Definition sofort, daß die Faltungsoperationen eine sukzessive Glättung von $N_{0,1}$ zu $N_{0,2}, N_{0,3}, \ldots$ usw. bewirken. Ein Vergleich von (II.1.13) mit (II.1.9) zeigt weiter die Äquivalenz dieser so definierten Funktionen mit dem 'normalisierten B-Spline $N_{0,k}$.
Aus Definition (II.1.1) folgen unmittelbar einige schon bekannte Eigenschaften für die B-Splines (s. Übungsaufgabe). Für die Berechnung des Skalarprodukts zweier B-Splines mit äquidistanten Knoten erhält man außerdem aus (II.1.13)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N_{0,k}(x) N_{0,k}(x+l)\, dx &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} N_{0,k}(x) N_{0,k}(-l-x)\, dx = (N_{0,k} * N_{0,k})(-l) \\ &= \underbrace{(N_{0,1} * \cdots * N_{0,1})}_{k\text{-mal}} * \underbrace{(N_{0,1} * \cdots * N_{0,1})}_{k\text{-mal}}(-l) \end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{0,k}(x) N_{0,k}(x+l)\, dx = N_{0,2k}(l) \tag{II.1.14}$$

Weitere schöne Eigenschaften lassen sich über die **Fourier -Transformation** herleiten.

Definition II.1.3 (Fouriertransformation) *Für L_1- integrierbare Funktionen f definieren wir ihre Fouriertransformierte*

$$f^{\wedge}(v) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ivx} dx \qquad v \in (-\infty, \infty) \tag{II.1.15}$$

Es ist dann bekannt, daß $f^{\wedge}$ eine stetige Funktion ist mit $\lim_{v \to \pm\infty} |f^{\wedge}(v)| = 0$. Weiter gilt folgender aus der Fourier-Analysis bekannte

Satz (siehe [SW]): *Sind f, g zwei L_1-integrierbare Funktionen auf $(-\infty, \infty)$, so existiert die Faltung $(f * g)(x)$ von f und von g als L_1-integrierbare Funktion. Die Fouriertransformierte berechnet sich durch*

$$(f * g)^{\wedge}(v) = f^{\wedge}(v) g^{\wedge}(v) \quad , \tag{II.1.16}$$

d.h. die Fourier-Transformation reduziert die Faltung zu einer Multiplikation.

Zur Anwendung der Fouriertransformation führen wir noch ein:

Definition II.1.4 (Zentralisierter B-Spline) *Der zentralisierte B-Spline der Ordnung k mit äquidistanten Knoten ist definiert durch*

$$N_k(x) := N_{0,k}\left(x + \frac{k}{2}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{II.1.17}$$

Offenbar ist N_k symmetrisch um 0 mit Träger auf $[-k/2, k/2]$ während $N_{0,k}$ seinen Träger auf $[0, k]$ hat. Weitere Eigenschaften liefert

Lemma II.1.1 *Es gilt:*

$$N_1(x) = \chi_{[-1/2,1/2]}, \tag{II.1.18}$$

$$N_k(x) = (N_{k-r} * N_r)(x), \qquad 1 \leq r < k, \tag{II.1.19}$$

$$N_k(x) = N_k(-x), \tag{II.1.20}$$

$$\hat{N}_k(v) = \left(\frac{\sin v/2}{v/2}\right)^k := (sinc\ v/2)^k. \tag{II.1.21}$$

Beweis: Zunächst folgt Eigenschaft (II.1.18) direkt aus Definition (II.1.12) in Verbindung mit (II.1.17).
In analoger Weise folgt $N_k = N_{k-1} * N_1$ aus (II.1.13) über (II.1.17), genauer aus

$$\begin{aligned}
N_k(x) \quad &= \frac{1}{(k-1)!}\Delta_1^k \int_x^\infty \left(-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2} dt \\
&= \frac{1}{(k-2)!}\Delta_1^{k-1} \int_x^\infty \left(\left(1-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2} \left(-t-\frac{k}{2}\right)_+^{k-2}\right) dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(t+x)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(x-t)\,dt = (N_1 * N_{k-1})(x)
\end{aligned}$$

Der Fall allgemeiner r in (II.1.19) läßt sich aber auf diesen zurückführen. Weil nämlich die Faltung assoziativ ist, folgt mittels Induktion

$$\begin{aligned}
N_k \quad &= \quad N_{0,k-1} * N_1 = (N_{0,k-2} * N_1 * N_1) = N_{0,k-2} * N_1 * N_1 \\
&= \quad \cdots = \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{k\text{-mal}} = \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{(k-r)\text{-mal}} * \underbrace{N_1 * \cdots * N_1}_{r\text{-mal}} = N_{0,k-r} * N_r
\end{aligned}$$

Damit folgt auch (II.1.20) induktiv, denn (II.1.19) liefert für $r = 1$ die Symmetrie

$$\begin{aligned}
N_k(-x) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} N_1(t) N_{0,k-1}(-x-t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N_1(t) N_{0,k-1}(x+t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} N_1(t) N_{0,k-1}(x-t)\,dt = N_k(x)
\end{aligned}$$

Schließlich beachtet man noch, daß die Faltungsformel

$$[f * g]^\wedge (v) = \hat{f}(v)\hat{g}(v), \qquad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

gilt. Dann ergibt sich mit (II.1.19), dass $\hat{N}_k(v) = \left(\hat{N}_1(v)\right)^k$ ist. Wegen

$$\hat{N}_1(v) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-ivx}\,dx = \frac{\sin v/2}{v/2} := sinc\ v/2$$

ist damit das Lemma bewiesen. □

Bemerkung: Formel (II.1.21) kann als weitere Definition des B-Splines für äquidistante Knoten dienen, denn es ist eine Darstellung mittels der Fouriertransformierten möglich, nämlich

$$N_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (sinc\ v/2)^k e^{ivx} dv \qquad , k \geq 2 \quad . \tag{II.1.22}$$

Dies ist eine Folgerung aus der allgemeinen Formel der Fourier-Umkehrtransformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} dv \tag{II.1.23}$$

die z.B. gültig ist, wenn beide $f(x)$ und $f^1(v)$ in $L^1(-\infty, \infty)$ sind oder wenn $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ ist (s. Stein-Weiss loc.cit. Bei der Behandlung von Interpolation und Approximation durch Splines mit äquidistanten Knoten wird die äquivalente Definiton von B-Splines durch (II.1.22) eine wichtige Rolle spielen.

II.1.2 Verfeinerungsalgorithmen

Als nächsten Punkt behandeln wir die Berechnung von Linearkombinationen von B-Splines. Dazu kann man die Rekursionsformel (II.1.8) für äquidistante Knoten in der gleichen Weise anwenden, wie dies durch Satz I.5.1 für allgemeine Knoten beschrieben worden ist.
Man kann aber auch die Idee der Verfeinerung aus Abschnitt I.5.3 benutzen, die dort ebenfalls für beliebige (zulässige) Knotengitter dargestellt ist. Im Falle von kardinalen Splines ergeben sich aber Vereinfachungen. Es seien dazu die B-Splines zur Schrittweite $h > 0$ mit Knoten $ih, \ldots, (i+k)h$ genauer mit $N_{i,k,h}(x)$ bezeichnet (der Einfachheit halber sei $a = 0$ in (II.1.2). Man möchte dann eine endliche Linearkombination

$$\mathbf{s}(x) = \sum_j \mathbf{c}_j N_{j,k,h}(x) = \sum_{j=-m}^{m} \mathbf{c}_j N_{0,k,h}(x - jh) \tag{II.1.24}$$

mit Kontrollpunkten $\mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^d$ mit B-Splines $N_{i,k,h/2}(x)$ zur halben Schrittweite $h/2$ darstellen, also als

$$\mathbf{s}(x) = \sum_j \mathbf{c}_j^1 N_{j,k,h/2}(x) \tag{II.1.25}$$

Wie in Abschnitt I.5.3 studiert man dies zuerst für einen einzelnen B-Spline $N_{0,k,h}(x)$. Weil er auch eine Splinefunktion mit äquidistanden Knoten der Schrittweite $h/2$ und Träger in $[0, kh]$ ist, gilt eine Darstellung

$$N_{0,k,h}(x) = \sum_{l=-k+1}^{k-1} \alpha_k(l) N_{0,k,h}(2x - lh) \tag{II.1.26}$$

Die Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Fall besteht darin, daß die Koeffizienten $\alpha_k(l)$ *unabhängig von der Schrittweite* h sind. Dies sieht man anhand der nach (II.1.4) geltenden Formeln

$$N_{0,k,h}(x) = h^k N_{0,k}(x/h), \quad N_{l,k,h/2}(x) = (h/2)^k N_{0,k}(2x/h - l)$$

Man erhält dann wegen

$$\mathbf{s}(x) = \sum_j \mathbf{c}_j \sum_l \alpha_k(l) N_{0,k,h}(2x - 2j - lh) = \sum_i \left(\sum_j \mathbf{c}_j \alpha_k(i - 2j) \right) N_{i,k,h}(x)$$

durch Vergleich mit (II.1.25) die Formel

$$\mathbf{c}_j^1 = \sum_j \mathbf{c}_j \alpha_k(i - 2j) \tag{II.1.27}$$

wobei sich die Summe über diejenigen Indizes erstreckt, für die die Summanden nicht verschwinden.
Es ergibt sich also eine analoge Formel für die neuen Kontrollpunkte wie in Abschnitt I.5.3. Jedoch kann man hier die Koeffizienten $\alpha_k(l)$ explizit berechnen und zwar braucht man nur den Fall $h = 1$ in (II.1.26) zu betrachten. Eine wesentliche Hilfe ist dabei die Formel für die Fourier-Transformierte von $N_{0,k}(x)$, die sich nach (II.1.21) als

$$\hat{N_{0,k}} = \hat{N}_k(\cdot - \frac{k}{2})(v) = e^{-ikv/2} \hat{N}_k(v) = \left(\frac{1 - e^{-iv}}{iv} \right)^k \tag{II.1.28}$$

ergibt. Damit folgt

Lemma II.1.2 *Für $N_{0,k}(x)$ gilt*

$$\hat{N_{0,k}}(v) = H_k(e^{-iv/2})\hat{N_{0,k}}(v/2) \qquad \textit{mit dem Symbol } H_k(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^k$$

sowie

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_k(j) N_{0,k}(2x-j) \qquad , \alpha_k(j) = \frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{j}. \tag{II.1.29}$$

Beweis: Wir setzen nach (II.1.26)

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j=-k+1}^{k-1} h_{j,k} N_{0,k}(2x-j) \qquad \{h_{j,k}\} = \text{endliche Folge}$$

an, transformieren dies nach Fourier und erhalten

$$\hat{N}_{0,k}(v) = \frac{1}{2}\hat{N}_{0,k}\left(\frac{v}{2}\right) \sum_{j=-k+1}^{k-1} h_{j,k} \mathrm{e}^{-ijv/2}.$$

und daher nach (II.1.28)

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-k+1}^{k-1} h_{j,k}\mathrm{e}^{-ijv/2} \quad = \left(\tfrac{1-\mathrm{e}^{-iv}}{iv}\right)^k \left(\tfrac{iv/2}{1-\mathrm{e}^{-iv/2}}\right)^k = \left(\tfrac{1+\mathrm{e}^{-iv/2}}{2}\right)^k = H_k(e^{-iv/2})$$

Aus der Entwicklung

$$(1+z)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{e}^{-ijv/2}$$

folgt hieraus durch Koeffizientenvergleich die Verfeinerungsgleichung (II.1.29) in der oben angegebenen Form. □

Wir nutzen nun die Verfeinerungsgleichung zur Berechnung eines kardinalen Splines der Form

$$s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l N_{0,k}\left(2^{j_0}x - l\right) \qquad \{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}).$$

Genauer gesagt geben wir einen Algorithmus an, der alle Funktionswerte auf einem höheren Diskretisierungsniveau berechnet, d. h. die Werte

$$s\left(\frac{l}{2^{j+j_0}}\right), \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{II.1.30}$$

Dies kann durch die Darstellung

$$s(x) = \sum_l c_l^{(j)} N_{0,k}\left(2^{j+j_0}x - l\right)$$

geschehen. Dann berechnet man die $c_l^{(j+1)}$ gemäß (II.1.27) rekursiv durch

$$c_i^{(j+1)} = \sum_l h_{i-2l,k} c_l^{(j)} \quad l \in \mathbb{Z} \tag{II.1.31}$$

mit $c_l^{(0)} := c_l$. Es folgt für die Werte in (II.1.30)

$$s\left(\frac{l}{2^{j+j_0}}\right) = \sum_i c_i^{(j)} N_{0,k}(l-i) = \sum_{\nu=1}^{k-1} c_{l-\nu}^{(j)} N_{0,k}(\nu). \qquad \text{(II.1.32)}$$

Der Aufwand dieses Algorithmus ist proportional zur Anzahl der zu berechnenden Werte, da in jeder Stufe j nur halb so viele Koeffizienten $c_l^{(j)}$ wie in Stufe $j+1$ berechnet werden. Er ist deshalb um so effizienter, je mehr Werte berechnet werden. Ein weiterer Vorteil dieses *interpolatory graphical display algorithm* ist die Tatsache, dass die Koeffizienten im Wesentlichen ganzzahlig sind. Dieser Algorithmus ist also sehr effizient für die Berechnung der Werte einer Linearkombination aus kardinalen B-Splines. Er stellt eine Variante des Unterteilungs-Algorithmus für B-Spline-Linearkombinationen dar, da man sich damit begnügt, (II.1.31) genügend oft auszuführen und den Schritt (II.1.32) wegzulassen.
Dies wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß man die Kurve $s(x)$ durch die diskrete Punktmenge $\left\{c_l^{(j)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}$ approximieren kann. Eine Begründung dafür liefert Korollar I.5.2, nach dem die Abschätzung

$$\left\|s(x) - a_l^{(j)}\right\| \leq \frac{C}{2^{j_0+j}} \left\|s'\right\|_\infty \quad \forall x \in \frac{1}{2^{j_0+j}}[l, l+k],$$

die mit einer (nur von k abhängigen) Konstante gilt. Die Approximation ist dabei umso besser, je größer j ist und der Grenzübergang $j \to \infty$ liefert Konvergenz .

Lane–Riesenfeld (1980) entwickelten eine Variante zur Berechnung der neuen Kontrollpunkte, die eine noch einfacher zu beschreibende Form besitzt. Im ersten Schritt "verdopple" man die Kontrollpunkte durch Definition von

$$\mathbf{d}_{2j}^{(1)} := \mathbf{c}_j \ , \qquad \mathbf{d}_{2j+1}^{(1)} := \mathbf{c}_j \qquad \text{(II.1.33)}$$

Anschließend führe man $k-2$ Mittelungsschritte aus, die durch

$$\mathbf{d}_i^{(j)} := \frac{1}{2}(\mathbf{d}_i^{(j-1)} + \mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)}) \ , \quad j = 2, \ldots, k \qquad \text{(II.1.34)}$$

definiert sind. Die Behauptung ist dann, daß gilt

$$\mathbf{c}_i^{(1)} = \mathbf{d}_i^{(k)}$$

Um dies zu beweisen, genügt es wieder, die Schrittweite $h = 1$ zu betrachten und den Fall $s(x) = N_{0,k,1}(x) = N_{0,k}(x)$, d.h. $c_i = \delta_{0i}$. Dann ist die Behauptung die, daß sich die $\alpha_k(j)$ in

$$N_{0,k}(x) = \sum_j \alpha_k(j)\, N_{0,k}(2x-j) \qquad \text{(II.1.35)}$$

durch

$$\delta_0^{(1)} = 1 = \delta_1^{(1)} \ , \quad \delta_i^{(1)} = 0 \ \text{ sonst}$$

berechnen lasen und iterativ für $l = 2, \ldots, k$

$$\delta_j^{(l)} = \frac{1}{2}\left(\delta_j^{(l-1)} + \delta_{j-1}^{(l-1)}\right) \qquad \text{(II.1.36)}$$

$$\alpha_k(j) := \delta_j^{(k)}$$

Wir beweisen dies induktiv in k, $k \geq 2$:
Für $k = 2$ liegen lineare B–Splines $N_{0,2}(x)$ vor und es ist zu zeigen

$$N_{0,2}(x) = \frac{1}{2}\Big[N_{0,2}(2x) + 2N_{0,2}(2x-1) + N_{0,2}(2x-2)\Big] \tag{II.1.37}$$

Dies stimmt mit dem obigen ersten Mittelungsschritt überein, da ja der “mittlere” B–Spline $N_{0,2}(2x-1)$ zweimal erscheint. Auch zeigt man leicht geometrisch, daß beide Seiten in (II.1.37) gleich sind.
Für die höheren k genügt es

$$\alpha_k(j) = \frac{1}{2}\Big[\alpha_{k-1}(j) + \alpha_{k-1}(j-1)\Big] \tag{II.1.38}$$

zu beweisen. Dieses Bildungsgesetz erfüllen aber gerade die durch die Verfeinerungsgleichung von Lemma II.1.2 gegebenen Koeffizienten $\alpha_k(j) = 2^{k-1}\binom{k}{j}$. Denn sie haben bis auf den Faktor 1/2 die gleiche Form wie die bekannte Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten.
Der allgemeine Fall des Lane–Riesenfeld Algorithmus ergibt sich durch Anwendung auf Linearkombinationen von Folgen $\{\delta_{0,i-l}\}$, die jeweils einer Folge bestehend aus einem einzigen Kontrollpunkt entsprechen.
Da die Folge $\{\alpha_k(i-2l)\}$ aus der Folge $\{\delta_{0,i-l}\}$ entsteht (beachte die Verdopplung von $\{\delta_{0,i-l}\}$ am Anfang), folgt durch Superposition von (II.1.36) das Bildungsgesetz (II.1.34) für die allgemeinen $d_i^{(k)} = c_i^{(1)}$. Da die Formel (II.1.27) ebenfalls durch Superposition mit den $\{\alpha_k(i-2l)\}$ entsteht, müßen die beiden Werte für die $c_i^{(1)}$ aber gleich sein.
In einer Pseudo-Programmiersprache läßt sich der Algorithmus folgendermaßen ausdrücken:

Gegeben sei $s(x) = \sum_l c_l N_k(2^j x - l)$. Dann werden folgende Schritte durchgeführt :

```
TYPE Vektor = ARRAY [−∞...∞] OF real ;
PROGRAM LaneRiesenfeld ( VAR c: Koeffizientenvektor ) ;
VAR l : integer ;
BEGIN
      FOR l := −∞ TO ∞
        DOBEGIN
           c_{2l}^{(1)} := c_l; c_{2l+1}^{(1)} := c_l;
        END ;
      FOR r := 2 TO k
        DOBEGIN
           FOR l := −∞ TO ∞
              DOBEGIN
                 c_l^{(r)} := 1/2 (d_l^{(r−1)} + d_{l−1}^{(r−1)})
              END
        END ;
      FOR l := −∞ TO ∞
        DOBEGIN
           c_l^{(1)} := d_l^{(k)}
        END
END .
```

II.1.3 Stabilität der kardinalen B-Splines

Die Stabilität einer Basis von B-Splines wurde schon im ersten Teil des Skripts in Abschnitt I.3 betrachtet. Im Falle von kardinalen Splines betrachten wir solche Basen in den translationsinvarianten Räumen $S_{k,h,a}$ von Abschnitt II.1.1. Die Elemente dieser Räume bestehen per Definition aus der Menge aller Linearkombinationen von B-Splines $N_{i,k,h,a}(x)$ unabhängig davon ob diese endlich oder unendlich sind. In der punktweisen Darstellung dieser Elemente treten jedoch keine Konvergenzprobleme auf, da die auftretenden B-Splines linear unabhängig sind und für festes x die Anzahl der nicht verschwindenden B-Splines gleich k ist.
Nach Abschnitt I.3 wird die Stabilität durch die Größe der Kondition ($1 \le p \le \infty$)

$$\sup_{\mathbf{a}\in l_p} \frac{\|\sum a_j N_{i,k,h,a}(\cdot - j)\|_{p,\mathbb{R}}}{\|\{a_j\}\|_p} \sup_{\mathbf{b}\in l_p} \frac{\|\{a_j\}\|_p}{\|\sum a_j N_{i,k,h,a}(\cdot - j)\|_{p,\mathbb{R}}}$$

beschrieben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir hier $a = 0$ annehmen, so daß es genügt, Linearkombinationen von $N_{i,k,h}(x)$ mit $h > 0$ wie in (II.1.24) zu betrachten. Für das Folgende ist es aber zweckmäßiger das Problem mit den zentralisierten B-Splines

$$B_{j,h}(x) := N_k\left(\frac{x}{h} - j\right) = N_{0,k}\left(\frac{x}{h} - j + \frac{k}{2}\right) \tag{II.1.39}$$

zu untersuchen, die aus den $N_{i,k,h}(x)$ durch eine feste Verschiebung hervorgehen. Der Träger von $B_{j,h}$ ist jetzt $(jh - kh/2, jh + k2/2)$ und die Knoten liegen auf dem Gitter $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, falls k gerade ist und auf $\{jh + 1/2\}_{j\in\mathbb{Z}}$, falls k ungerade ist, d. h. für Splines vom Grad $2, 3, \ldots$.
Gemäß obiger Definition der Kondition betrachten wir dann Räume $S_{k,p}^{(h)}$, $1 \le p \le \infty$, deren Elemente $s(x)$ die Darstellung

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j B_{j,h}(x), \qquad a_j \in \mathbb{R}, \tag{II.1.40}$$

mit Folgen $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ aus $l_p(\mathbb{Z})$ besitzen. Wir beachten dann, daß für $1 \le p < \infty$

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \ B_{j,h}(x)\right\|_2 = h^{k+1/p} \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_k(u - j)\right\|_2$$

gilt, sofern die Summe eine L_p-Funktion ist. Damit fällt die Skalierung mit $h > 0$ in der Konditionszahl heraus (Gleiches gilt auch im Falle $p = \infty$), so daß wir uns im Folgenden auf den Fall $h = 1$ beschränken können. Zunächst gilt für $p = 2$

Satz II.1.1 *Die B-Splines $\{B_{j,h}(x)\}$ bilden eine l_2-stabile Basis des Raums $S_{k,2}^{(h)}$. Insbesondere gilt für die Größe*

$$\kappa_{n,2}^* := \sup_{\mathbf{a}\in l_2} \frac{\|\sum a_j N_k(\cdot - j)\|_{2,\mathbb{R}}}{\|\{a_j\}\|_2} \sup_{\mathbf{b}\in l_2} \frac{\|\{a_j\}\|_2}{\|\sum a_j N_k(\cdot - j)\|_{2,\mathbb{R}}} = \sqrt{\frac{1}{d_{2k}(\pi)}}, \tag{II.1.41}$$

wobei die Zahl in (II.2.54) angegeben ist.

Beweis: Wie bereits bemerkt folgt die l_2-Stabilität für beliebiges h aus derjenigen für $h = 1$. Das weitere Vorgehen basiert nun auf zwei grundlegenden Aussagen der Fourier-Analysis.

Isometrie der Fourier-Transformation oder **Parsevalsche Formel**:
Ist $f \in L_1(\mathrm{R}) \cap L_2(\mathrm{R})$, so gilt
$$||\hat{f}||^2_{2,\mathbf{R}} = (2\pi)||f||^2_{2,\mathbf{R}}. \tag{II.1.42}$$
Satz von Riesz-Fischer:
Für $\{a_j\} \in l_2(\mathrm{Z})$ konvergiert die Reihe $\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j \mathrm{e}^{-ij\omega}$ im L_2-Sinn. Es gilt
$$A(\omega) = \sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j \mathrm{e}^{-ij\omega} \in L_2(-\pi,\pi), \qquad ||A(\omega)||^2_{2,[-\pi,\pi]} = \sum_{j\in\mathrm{Z}} |a_j|^2 \ . \tag{II.1.43}$$
Umgekehrt gilt für jede Funktion $A(\omega) \in L_2(-\pi,\pi)$ eine solche Darstellung.

Nach (II.1.21) hat die Fouriertransformierte die Form
$$\Big[\sum_{|j|\le N} a_j N_k(\cdot - j)\Big]^\wedge(v) = \sum_{|j|\le N} a_j \mathrm{e}^{-ijv}(sinc\ v/2)^k.$$
Dann benützt man die oben erwähnte Isometrie der Fourier-Transformation. Anschließend läßt man $N \to \infty$ streben und spaltet das Integral gemäß $\int_{-\infty}^{\infty} \ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi}$ auf. Dies ergibt
$$||\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j N_k(\cdot - j)||^2_{2,\mathbf{R}} = ||\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j \mathrm{e}^{-ijv} \sum_{l=-\infty}^{\infty} sinc\ (v/2 + \pi l)||^2_{2,\mathbf{R}} \tag{II.1.44}$$
Mit dem Satz von Riesz -Fischer folgt daraus direkt die obere Schranke
$$||\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j N_k(\cdot - j)||^2_{2,\mathbf{R}} \ \le \ \sum_{j\in\mathrm{Z}} |a_j|^2 \sup_{v\in[-\pi,\pi]} \sum_{-\infty}^{\infty} \Big|\hat{N}_k(v + 2\pi l)\Big|^2 .$$
Da $\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j \mathrm{e}^{-ijv}$ nach diesem Satz in (II.1.44) eine beliebige Funktion $A(\omega) \in L_2(-\pi,\pi)$ darstellen kann, gilt hier auch Gleichheit und erhält dadurch eine Charakterisierung des ersten Supremums in (II.1.41). Man kann aber einfach mit Hilfe der Eigenschaft der "Zerlegung der Eins" der B-Splines zeigen, dieser Wert gleich 1 ist. Dazu sei auf den Beweis zu Satz II.2.5 verwiesen, wo dies für die diskrete l_p-Norm statt der L_p-Norm durchgeführt ist.
Analog folgt in (II.1.44) direkt die untere Schranke
$$||\sum_{j\in\mathrm{Z}} a_j N_k(\cdot - j)||^2_{2,\mathbf{R}} \ \ge \ \sum_{j\in\mathrm{Z}} |a_j|^2 \inf_{v\in[-\pi,\pi]} \sum_{-\infty}^{\infty} \Big|\hat{N}_k(v + 2\pi l)\Big|^2 ,$$
wobei man ebenfalls Gleichheit zeigen kann (bzgl. einer genauen Darstellung dieses Arguments s. Skript "Splines und Wavelets ", Kapitel 3).
Die Berechnung des Wertes auf der rechten Seite geschieht mit den Methoden von Abschnitt II.2.4 , wo wir "Cardinal Interpolation " betrachten. Nach den Formeln (II.1.21), (II.1.16) für die Fouriertransformierten von $N_k(x)$ und (II.2.53) in Abschnitt II.2.4 gilt
$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Big|\hat{N}_k(v + 2\pi l)\Big|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{N}_{2k}(v + 2\pi l) = \frac{1}{d_{2k}(\pi)}.$$
Daraus erhält man direkt die Aussage des Lemmas. □

Bemerkung: Aus Formel (II.2.54) kann man eine genaue Abschätzung der Zahl $d_k(\pi)$ und damit der Konditionszahl entnehmen. Danach gilt asymptotisch $\kappa^*_{n,2} \approx \frac{1}{2}\big(\frac{\pi}{2}\big)^k$, wie bereits am Ende des Abschnitts I.3 angegeben.

Unter Anwendung der Ergebnisse in Abschnitt II.2.4 beweisen wir jetzt auch die Stabilität der B-Spline Basis $\{B_{j,h}(x)\}_{j\in Z}$ für die Sup-Norm und berechnen die Stabilitätskonstante, wobei wir uns auf den Fall $h = 1$ beschränken können.

Satz II.1.2 *Die Kondition $\kappa^*_{n,\infty}$ der " cardinalen " B-Spline-Basis $\{N_k(\cdot - j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ hat den Wert*

$$\kappa^*_{n,\infty} := \sup_{\mathbf{a}\in l_\infty} \frac{\|\sum a_j N_k(\cdot - j)\|_{\infty,\mathbf{R}}}{\|\{a_j\}\|_\infty} \sup_{\mathbf{b}\in l_\infty} \frac{\|\{a_j\}\|_\infty}{\|\sum a_j N_k(\cdot - j)\|_{\infty,\mathbf{R}}} = \frac{1}{d_k(\pi)}. \tag{II.1.45}$$

Beweis: Zunächst erhält man wegen der Eigenschaft der "Zerlegung der Eins " der B-Splines

$$\sup_{\mathbf{a}\in l_\infty} \frac{\|\sum a_j N_k(\cdot - j)\|_{\infty,\mathbf{R}}}{\|\{a_j\}\|_\infty} \le 1.$$

Gleichheit wird hierin durch die konstante Folge mit $\{a_l\}_{\{l\in\mathbb{Z}\}}$ mit $a_l = 1,\ l \in Z$ erreicht.

Für das zweite Supremum liefert der spätere Satz II.2.5 bereits die Abschätzung

$$\sup_{\mathbf{b}\in l_\infty} \frac{\|\{b_j\}\|_\infty}{\|\sum b_j N_k(\cdot - j)\|_{\infty,\mathbf{R}}} \le \sup_{\mathbf{b}\in l_\infty} \frac{\|\{b_j\}\|_\infty}{\sup_\nu |\sum b_j N_k(\nu - j)|} = ||\mathbf{C}_k^{-1}||_\infty. \tag{II.1.46}$$

Außerdem wissen wir nach (II.2.51), daß die Norm $||\mathbf{C}_k^{-1}||_\infty$ durch den Spline mit Koeffizienten b^*_j derart, daß $\sum b^*_j N_k(\nu - j) = (-1)^\nu \in l_\infty$ gilt, erreicht wird. Gleichheit in beiden Ungleichungen von (II.1.46) würde also gelten, wenn in diesem Falle die "diskrete "Norm $\sup_\nu |\sum b^*_j N_k(\nu - j)|$ mit der "kontinuierlichen " $||\sum b^*_j N_k(\nu - j)||_{\infty,\mathbf{R}}$ übereinstimmen würde. Dies ist in der Tat der Fall. Bezeichnet man mit $E_k(x)$ die besagte Splinefunktion mit der Interpolationseigenschaft $E_k(\nu) = (-1)^\nu = f^*_\nu$, so gilt nämlich

$$\|E_k(x)\|_{\infty,\mathbf{R}} = \sup_\nu |E(\nu)| = 1. \tag{II.1.47}$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes aus (II.1.46), denn dann wird das Supremum dort durch $\sum b^*_j N_k(x - j) = E_k(x)$ angenommen, sowie aus Satz II.2.5. □

Bemerkung: Die Splinefunktion $E_k(x + k/2)$ mit ganzzahligen Knoten heißt nach Schoenberg **Euler-Spline**.

Der Beweis von (II.1.47) ergibt sich nun direkt aus folgendem Lemma :

Lemma II.1.3 *Der Euler-Spline $E_k(x)$ wechselt sein Vorzeichen zwischen je zwei Knoten genau einmal und nimmt seine Extrema genau an den Stellen $x = \nu, \nu \in \mathbb{Z}$ an.*

Beweis: Wir berechnen zunächst $E_k(x)$ als Linearkombination der B-Splines $N_k(x - j)$. Nach (**??**) gilt für seine Koeffizienten b^*_j die Darstellung

$$b^*_j = \sum_\nu f^*_\nu\ \omega_k(j - \nu) = (-1)^j \sum_\nu (-1)^\nu \omega_k(\nu) = (-1)^j \frac{1}{c_k(-1)} = \frac{(-1)^j}{d_k(\pi)}$$

und daher

$$E_k(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j N_k(x - j)/d_k(\pi)$$

Hieraus folgt die Symmetrie – Eigenschaft

$$\begin{aligned} E_k(-x) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j N_k(-x-j)/d_k(\pi) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j N_k(x+j)/d_k(\pi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j N_k(x-j)/d_k(\pi) = E_k(x) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $E_k(x)$ eine gerade Funktion ist und somit $E_k'(x)$ eine ungerade Funktion, speziell folgt $E_k'(x) = 0$. Die Ableitung erfüllt aber nach (II.1.7)

$$\begin{aligned} E_k'(x) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j[N_{0,k-1}(x-j+k/2) - N_{0,k-1}(x-j-1+k/2)]/d_k(\pi) \\ &= 2\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j N_k(-x-j+1/2)/d_k(\pi) = 2E_{k-1}(x+1/2) \end{aligned} \tag{II.1.48}$$

Zusammen mit dem Vorigen folgt hieraus, daß $E_{k-1}(1/2) = 0$ ist und somit auf Grund der Funktionalgleichung (II.2.19)

$$E_{k-1}(\nu+1/2)) = (-1)^\nu E_{k-1}(1/2) = 0, \qquad \nu\in\mathbb{Z}.$$

für alle $k = 3, 4, \ldots$ Per Definition gilt außerdem $E(\nu) = (-1)^\nu$.Nach (II.1.48) sind dies Extrema von $E(x)$.
Wir sind fertig, wenn wir uns überlegen, daß dadurch genau alle Nullstellen und Extrema beschrieben sind. Dies sieht man induktiv ein. Zunächst gilt dies offensichtlich für den stückweise linearen Euler-Spline $E_2(x)$ mit den Extrema an den Knoten $x = \nu, \nu \in \mathbb{Z}$ und Nullstellen $x = \nu + 1/2, \nu \in \mathbb{Z}$. Dann betrachtet man für $k = 3$ die Gleichung (II.1.48) und schLießt daraus, daß $E_3(x)$ Extrema genau an den Stellen $x = \nu, \nu \in \mathbb{Z}$ hat und daher Nullstellen nur bei $x = \nu + 1/2, \nu \in \mathbb{Z}$. Mit diesem Argument weitergehend für $k = 4, 5, \cdots$ erhält man die Behauptung. $\square$

II.2 Cardinal-Spline-Interpolation

II.2.1 Lösbarkeit und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir folgendes Interpolationsproblem:
Gegeben sei eine Datenfolge $\{j_l\}_{\{l\in\mathbb{Z}\}}$ und ein $\alpha \in [0,1)$. Bestimme ein $s \in S_k$ mit der Interpolationseigenschaft

$$s(l+\alpha) = f(l),\; l \in \mathbb{Z} \tag{II.2.1}$$

bzw. eine Koeffizientenfolge $\{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$, so daß das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j) = f_l,\; l \in \mathbb{Z} \tag{II.2.2}$$

erfüllt ist. Führen wir mit $\mathbf{a} := \{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ den Operator $\mathbf{C}_{k,\alpha}$

$$\mathbf{C}_{k,\alpha}: \quad \mathbf{a} \to \mathbf{C}_{k,\alpha}\mathbf{a}: \qquad (\mathbf{C}_{k,\alpha}\mathbf{a})_l := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j) \tag{II.2.3}$$

ein, so läßt sich (II.2.2) mit $\mathbf{f} := \{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ als

$$\mathbf{C}_{k,\alpha}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

schreiben und das Problem besteht offenbar darin, eine Aussage über die Inverse $\mathbf{C}_{k,\alpha}^{-1}$ zu machen, d.h. ihre Existenz und explizite Form zu untersuchen.Im Folgenden nehmen wir dazu immer $k \geq 2$ an, also mindestens stückweise lineare Splines, um Trivialitäten zu vermeiden.

Bevor wir auf konkrete Lösungsmethoden eingehen, sind einige allgemeine Betrachtungen angebracht. Da $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ linear ist, interessiert besonders der „Kern von $\mathbf{C}_{k,\alpha}$“.

Definition II.2.1 *Der Kern von $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ ist die Menge*

$$Ker(\mathbf{C}_{k,\alpha}) := \{\mathbf{a} = \{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}} :\; \mathbf{C}_{k,\alpha}\mathbf{a} = 0\} \tag{II.2.4}$$

d.h. die Menge aller reellen Zahlenfolgen, die durch $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ in Nullfolgen abgebildet werden. Eine Splinefunktion $s(x) = \sum_j a_j N_{0,k}(x-j)$ aus S_k heißt **Nullspline** *(zum Verschiebungsparameter α), wenn ihre Koeffizientenfolge $\{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ in Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) liegt.*

Damit können wir in dem folgenden Satz bereits einige Aussagen bezüglich der Lösbarkeit des Interpolationproblems treffen.

Satz II.2.1 *Zu jeder Folge $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ gibt es immer eine Lösung des Gleichungssystems (II.2.2). Je zwei Lösungen unterscheiden sich um einen Nullspline, bzw. ihre Differenz liegt in Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$). Es gilt dim Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) $= k-1$ im Falle $\alpha > 0$ und dim Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) $= k-2$ im Falle $\alpha = 0$.*
Ist $\mathcal{L}$ ein linearer Raum von rellen Zahlenfolgen $\{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$, der Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) nicht enthält, so besitzt $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ eine Inverse auf dem Bildraum $\mathbf{C}_{k,\alpha}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$. Ist $\mathcal{L}$ außerdem ein Banachraum und $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ eine beschränkte Abbildung von $\mathcal{L}$ auf sich, d.h. die Norm von $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ definiert durch

$$\|\mathbf{C}_{k,\alpha}\| := \sup_{\mathbf{a}} \frac{\|\mathbf{C}_{k,\alpha}\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{II.2.5}$$

ist beschränkt, so gilt dies auch für $\mathbf{C}_{k,\alpha}^{-1}$.

Beweis: Da $N_{0,k}(\nu) = 0$ für $0 < \nu < k-1$ ist, können wir (II.2.2) als ein lineares Differenzengleichungssystem schreiben, dessen Matrix im Falle $\alpha > 0$ auf $k-1$ Diagonalen und im Falle $\alpha = 0$ auf $k-2$ Diagonalen besetzt ist, genauer als

$$\sum_{j=l-k+1}^{l} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j) = f_l,\ l \in \mathbb{Z}, \qquad \text{falls} \qquad 1 > \alpha > 0$$

$$\sum_{j=l-k+1}^{l-1} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j) = f_l,\ l \in \mathbb{Z}, \qquad \text{falls} \qquad \alpha = 0$$

Solche Gleichungssysteme haben bekanntlich eine Lösungsmannigfaltigkeit der Dimension $k-1$ bzw. $k-2$. Wir rechnen dies explizit für $\alpha > 0$ nach :
Zu beliebig vorgebener rechter Seite $\mathbf{f} = \{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ wähle man $k-1$ beliebige Zahlen

$$a_{-k+1}, \ldots, a_{-1} \tag{II.2.6}$$

und löse dann sukzessive für $l = 0, 1, 2, \ldots$ auf nach

$$a_l = \frac{1}{N_{0,k}(\alpha)}\left[f_l - \sum_{j=l-k+1}^{l} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j)\right]$$

und für $l = -k, -k-1, \ldots$ nach

$$a_{l-k+1} = \frac{1}{N_{0,k}(\alpha+k-1)}\left[f_{l-k+1} - \sum_{l-k+2}^{l} a_j N_{0,k}(l+\alpha-j)\right]$$

Dann erfüllen die so berechneten a_l das System (II.2.2). Speziell für $f_l = 0,\ l \in \mathbb{Z}$ sehen wir, daß die a_j in den Anfangsbedingungen (II.2.6) einen $k-1$ dimensionalen Raum aufspannen und andererseits dann alle weiteren a_j eindeutig festlegen. Dies zeigt dim Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$)=$k-1$. Da die Differenz je zweier Lösungen von (II.2.2) offensichtlich einen Nullspline darstellt, ist eine Lösung in L eindeutig bestimmt, falls Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) leeren Durchschnitt mit L hat. Die Abbildung $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ ist dann bijektiv von L auf $\mathbf{C}_{k,\alpha}L$.
Der Rest der Behauptung ist eine Folge des tiefliegenden „ Open mapping Theorem“ aus der Funktionalanalysis, das besagt, daß jede lineare beschränkte Abbildung eines Banachraums auf sich, die bijektiv ist, auch eine bschränkte Inverse besitzt. □

Diese Aussagen werden wir nun erheblich verschärfen und präszisieren, ohne das „ Open mapping Theorem“zu benutzen. Zur Behandlung dieser Fragen stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Z.B. treten Gleichungssysteme des Typs (II.2.2) als Differenzengleichungen bei der Diskretisierung gewöhnlicher Differentialgleichungen auf, da daß man hier entsprechend vorgehen könnte. Ein sehr wichtiger Aspekt ist, daß die Matrizen in (II.2.2) auf den Diagonalen konstante Werte haben. Solche Matrizen heißen *Toeplitz-Matrizen* und werden z.B. ausführlich in Grenander-Szegö „ Toeplitz Forms and their Applications“(1958) behandelt.
In der Elektrotechnik sind zeitinvariante Input-Output Systeme durch Gleichungen des Typs (II.2.2) modelliert. Eine Standard-Lösungsmethode ist die sogenannte **z-Transformation** , deren formale Anwendung auf (II.2.2) wir nun beschreiben. Unter der Annahme, daß alle nachfolgenden Operationen erlaubt sind, multiplizieren wir beide Seiten von (II.2.2) mit z^ν, z komplex,

und summieren über alle $\nu \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu z^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z^{\nu - j} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j a_j N_{0,k}(\nu + \alpha - j) \tag{II.2.7}$$

und anschließende Vertauschung der Summen mit Umindizierung ergibt

$$\mathbf{F}(z) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu z^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z^\nu N_{0,k}(\nu + \alpha) \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j a_j \equiv \mathbf{a}(z) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z^\nu N_{0,k}(\nu + \alpha) \tag{II.2.8}$$

wobei $\mathbf{F}(z), \mathbf{a}(z)$ in offensichtlicher Weise die z-Transformation der Folgen bezeichnen. Sie heißen auch **Symbole** dieser Folgen $\{f_\nu\}_{\{\nu \in \mathbb{Z}\}}$, $\{a_j\}_{\{j \in \mathbb{Z}\}}$. Die Funktion

$$c_{k,\alpha}(z) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z^\nu N_{0,k}(\nu + \alpha) = \sum_{\nu=0}^{k-1} z^\nu N_{0,k}(\nu + \alpha) \tag{II.2.9}$$

heißt **Transfer-Funktion** des Systems (II.2.2) , das sich transformiert zu

$$\mathbf{F}(z) = c_{k,\alpha}(z)\mathbf{a}(z) \tag{II.2.10}$$

Diese Gleichung können wir formal sofort nach $\mathbf{a}(z)$ auflösen, indem wir durch $c_{k,\alpha}(z)$ dividieren und so die Funktion $1/c_{k,\alpha}(z)$ als Transfer- Funktion des inversen Systems erhalten. Die Funktion $c_{k,\alpha}(z)$ selbst ist nach (II.2.9) auf Grund der Trägereigenschaften des B-Splines $N_{0,k}(x)$ ein Polynom $k-1$-ten Grades mit genau $k-1$ Nullstellen. Über die Lage dieser Nullstellen werden wir weiter unten noch detaillierte Aussagen machen, im Augenblick ist es nur wichtig festzuhalten, daß $c_{k,\alpha}(z)^{-1}$ außerhalb dieser Nullstellen holomorph ist und daher eine Laurent- Entwicklung

$$\frac{1}{c_{k,\alpha}(z)} = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \omega_{k,\alpha}(\mu) z^\mu \tag{II.2.11}$$

in jedem Ringgebiet $\rho_1 < |z| < \rho_2$ besitzt, das keine Nullstellen von $c_{k,\alpha}(z)$ enthält.
Nun können wir in derselben Weise wie oben der Gleichung

$$\mathbf{a}(z) = \frac{1}{c_{k,\alpha}(z)} \mathbf{F}(z)$$

das Gleichungssystem

$$a_j = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \omega_{k,\alpha}(j - \nu) \tag{II.2.12}$$

zuordnen. Wenn wie angenommen alle Operationen erlaubt sind, muß dies eine Lösung von (II.2.2) liefern. Wenn darüber hinaus diese Zuordnung eindeutig ist, gibt es genau eine Lösung.

Unter welchen Voraussetzungen stellen nun die in (II.2.12) angebenen a_j eine Lösung im strengen Sinne von (II.2.2) dar ? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst das spezielle Problem

$$L_{k,\alpha}(l + \alpha) = \delta_{0,l} := f_l^*, \; l \in \mathbb{Z}, \tag{II.2.13}$$

mit der Splinefunktion

$$L_{k,\alpha}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a^*(j) N_{0,k}(x - j)$$

als Lösung. Es heißt $L_{k,\alpha}(x)$ der **Fundamental-Interpolant** des Interpolationsproblems (II.2.13). Die z-Transformation ergibt dann wegen $\mathbf{F}^*(z) = 1$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a^*(j) z^j = \frac{1}{c_{k,\alpha}(z)}, \tag{II.2.14}$$

und daher $a^*(j) = \omega_{k,\alpha}(j)$ durch Koeffizientenvergleich mit der Laurent- Entwicklung (II.2.11). Der Fundamental-Interpolant besitzt also die inverse Transfer-Funktion $c_{k,\alpha}(z)^{-1}$ als Symbol. Damit läßt sich nun zeigen

Lemma II.2.1 *Es konvergiere die Laurent-Entwicklung (II.2.11) in einem Ringgebiet $\rho_1 < |z| < \rho_2$ der komplexen Zahlenebene mit $\rho_1 < 1, \rho_2 > 1$. Dann ist*

$$L_{k,\alpha}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_{k,\alpha}(j) N_{0,k}(x-j) \qquad \in L_1(\infty, \infty) \tag{II.2.15}$$

Lösung des Interpolationsproblems (II.2.13). Sie fällt exponentiell ab in dem Sinne, daß $|L_{k,\alpha}(x)| \leq K \cdot \rho^{|x|}$ mit einer Konstanten K und $\rho := max\ (\rho_1, 1/\rho_2)$ gilt.
Ist eine Folge$\{f_\nu\}_{\{\nu \in \mathbb{Z}\}}$ derart vorgegeben, daß die Reihe $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \omega_{k,\alpha}(j-\nu)$ absolut konvergiert, ist die in (II.2.12) angegebene Folge $\{\alpha_j\}_{\{j \in \mathbb{Z}\}}$ Lösung von (II.2.2).

Beweis: Zunächst folgt wegen der Konvergenz der Laurent- Entwicklung (II.2.11) in dem angebenen Kreisring sofort, daß

$$|\omega_{k,\alpha}(j)| \leq C\ \rho^{|j|} \qquad , j \in \mathbb{Z} \tag{II.2.16}$$

mit $\rho := max\ (\rho_1, 1/\rho_2)$ gilt. Daher konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_{k,\alpha}(j) N_{0,k}(x-j)$$

absolut für alle $x \in (\infty, \infty)$.
Um die Interpolationseigenschaft (II.2.13) nachzuweisen, multiplizieren wir ihren Wert für $x = l+\alpha$ mit z^l und summieren über l. Wenn $|z| \leq 1$ betrachtet wird, gilt wieder absolute Konvergenz und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{N}_{0,k}(l+\alpha-j)\omega_{k,\alpha}(j) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{l-j} N_{0,k}(l+\alpha-j) z^j \omega_{k,\alpha}(j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j N_{0,k}(j+\alpha)/c_{k,\alpha}(z) = c_{k,\alpha}(z)/c_{k,\alpha}(z) = 1 \end{aligned}$$

da auch die Vertauschung wegen der absoluten Konvergenz der verwendeten Reihen erlaubt ist. Durch Koeffizientenvergleich sieht man dann, daß

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} N_{0,k}(\nu - j)\omega_{k,\alpha}(j) = \delta_{\nu,0}$$

gelten muß. Ferner beweist man mit Hilfe von (II.2.16) leicht, daß die in (II.2.15) definierte Funktion $L_{k,\alpha}(x)$ in $L_1(\infty, \infty)$ liegt und wie angegeben exponentiell abfällt (Übungsaufgabe). Also ist sie der gesuchte Fundamental- Interpolant.

Zum Beweis des zweiten Teils betrachte

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_{0,k}(x-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f_\nu \omega_{k,\alpha}(j-\nu) N_{0,k}(x-j)$$

mit den in (II.2.12) angebenen Koeffizienten. Wegen der gemachten Voraussetzung an die Datenfolge $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ ist diese Splinefunktion wohldefiniert und stetig. Ebenso ist die Vertauschung der Summen erlaubt und es folgt weiter

$$\begin{aligned} s(l+\alpha) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f_\nu \omega_{k,\alpha}(j-\nu) N_{0,k}(l+\alpha-j) \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f_\nu \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} N_{0,k}(l+\alpha-\mu-\nu)\omega_{k,\alpha}(\mu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f_\nu \delta_{l-\nu,0} = f_l. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Nun behandeln wir die Frage der Eindeutigkeit. Nach Satz (II.2.1) müssen wir dazu den Kern Ker($\mathbf{C}_{k,\alpha}$) untersuchen. Seine Struktur läßt sich besonders gut darstellen, wenn man spezielle Lösungen von (II.2.2) durch die Wahl $a_j = z^j$, z fest, betrachtet. Dies entspricht dem Ansatz

$$\phi_{k,z}(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^j N_{0,k}(x-j) \tag{II.2.17}$$

als interpolierende Splinefunktion in (II.2.1). Man rechnet sofort nach, daß

$$\phi_{k,z}(\nu+\alpha) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^{j-\nu} z^\nu N_{0,k}(\nu-j+\alpha) = z^\nu \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^j N_{0,k}(j+\alpha) = z^\nu c_{k,\alpha}(z) \tag{II.2.18}$$

gilt. Die (komplexwertigen) Splinefunktionen $\phi_{k,z}(x)$ interpolieren also die Werte $f_\nu = z^\nu c_{k,\alpha}(z)$ und erfüllen die Funktionalgleichung

$$\phi_{k,z}(x+j+\alpha) = z^j \phi_{k,z}(x) \qquad , j\in\mathbb{Z} \tag{II.2.19}$$

Nach Schoenberg führen wir nun ein

Definition II.2.2 *Die Splinefunktionen $\phi_{k,z}(x) \in S_k$, die die Funktionalgleichung (II.2.19) mit einer komplexen Zahl z erfüllen, heißen* **exponentielle Euler-Splines zur Basis** z .

Aus (II.2.18) folgt ferner, daß die exponentiellen Euler- Splines zur Basis z durch ihre Koeffizienten Eigenlösungen des Differenzengleichungssystems (II.2.2) zum Eigenwert $c_{k,\alpha}(z)$ liefern. Sie heißen deshalb auch **Eigensplines**. Zur Untersuchung der Eindeutigkeit sind solche Eigensplines wichtig, die gleichzeitig Nullsplines sind. Dies sind nach (II.2.18) diejenigen exponentiellen Euler-Splines, deren Basis gerade eine Nullstelle von $c_{k,\alpha}(z)$ ist (dort bricht auch die z-Transformationsmethode zusammen, weil die Laurent-Entwicklung (II.2.11) divergiert).

Lemma II.2.2 *Es besitze $c_{k,\alpha}(z)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen $t_1, \ldots, t_{k-1}$ (eine Annahme, die wir im folgenden Abschnitt rechfertigen werden). Dann sind die zugehörigen exponentiellen Euler-Splines $\phi_{k,t_\nu}(x), \nu = 1, \cdots k-1$ Nullsplines, d.h. sie interpolieren die " Nulldaten " $f_l = 0$ an den Stellen $l+\alpha, l\in\mathbb{Z}$, und liefern eine Basis für den Kern ker$\mathbf{C}_{k,\alpha}$ der Abbildung $\mathbf{C}_{k,\alpha}$.*

Beweis: Es gilt $c_k(t_\nu) = 0, \quad 1 \le \nu \le k-1$. Daraus folgt

$$\phi_{k,t_\nu}(l+\alpha) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t_\nu^j N_{0,k}(l+\alpha-j) = t_\nu^l \sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j^l N_{0,k}(j+\alpha) = t_\nu^l c_{k,\alpha}(t_\nu) = 0$$

d.h. $\phi_{k,t_\nu}(x)$ ist ein Nullspline. Wir zeigen, daß die ϕ_{k,t_ν} linear unabhängig sind. Ist nämlich $0 = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu \phi_{k,t_\nu}(x)$ für Koeffizienten b_ν und alle $x \in (-\infty, \infty)$, so folgt

$$0 = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu \sum_j t_\nu^j N_{0,k}(x-j) = \sum_j N_{0,k}(x-j) \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu t_\nu^j$$

Da die $N_{0,k}(\cdot - j)$ linear unabhängig sind (als verschobene B-Splines), folgt

$$0 = \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu t_\nu^j, \qquad 0 \le j \le k-1$$

und daher $b_\nu = 0, \quad 1 \le \nu \le k-1$, weil die Determinante dieses Systems die Vandermonde-Determinante ist. □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir die Eindeutigkeit des Interpolationsproblems (II.2.1) bzw. (II.2.2) untersuchen. Als Präzisierung und Verschärfung von Satz II.2.1 ergibt sich

Satz II.2.2 *Es sei für $\gamma > 0$ der lineare Folgenraum*

$$\mathcal{L}_\gamma; = \{\{\alpha_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}} : |\alpha_j| = o(\gamma^{|j|}), j \to \infty \qquad \}. \tag{II.2.20}$$

definiert. Die Voraussetzungen des vorigen Lemmas seien erfüllt und es gelte schärfer $\rho_1 := max\{|t_\nu| : |t_\nu| < 1\} < 1$ sowie $\rho_2 := min\{|t_\nu| : |t_\nu| > 1\} > 1$, d.h. das Symbol $c_{k,\alpha}(z)$ besitze keine Nullstelle auf dem Einheitskreis. Dann ist $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ auf $\mathcal{L}_\gamma$ injektiv , wobei $\gamma := min(\rho_2, 1/\rho_1)$. Ist ferner $\mathbf{C}_{k,\alpha}$ eine beschränkte Abbildung von $\mathcal{L}_\gamma$ auf *einen weiteren linearen normierten vollständigen Folgenraum $\mathcal{L}$, so ist $\mathbf{C}_{k,\alpha}^{-1}$ eine beschränkte Abbildung von $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{L}_\gamma$.*

Beweis: Es gebe zu einer Folge $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ aus $\mathbf{C}_{k,\alpha}(\mathcal{L})$ zwei Folgen $\{\alpha_j^{(1)}\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ und $\{\alpha_j^{(2)}\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$, die (II.2.2) erfüllen. Dann gilt nach Lemma II.2.2

$$s(x) \equiv \sum_j (\alpha_j^{(1)} - \alpha_j^{(2)}) \mathrm{N}_{0,k}(x-j) = \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu \phi_{k,t_l}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu t_\nu^j) N_{0,k}(x-j)$$

Aus dieser Darstellung folgt, daß die Koeffizienten $c_\nu, 1 \le \nu \le k-1$ gleich null sein müssen bzw. $\alpha_j^1 = \alpha_j^2$. Andernfalls würde $\sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu t_\nu^j$ für $j \to -\infty$ mindestens wie $O(1/\rho_1)^{|j|}$ anwachsen und für $j \to \infty$ mindestens wie $O(\rho_2)^{|j|}$, da ja alle Nullstellen paarweise verschieden sein sollen. Damit würde aber $\alpha_j^{(1)} - \alpha_j^{(2)}$ mindestens wie $O(\gamma^{|j|}$ anwachsen im Widerspruch zur Voraussetzung an $\mathcal{L}$.
Die zweite Aussage des Satzes ergibt sich wie in Satz II.2.1 aus dem „ Open mapping Theorem“.
□

Eine Variante ist

Korollar II.2.1 *Ist das Symbol $c_{k,\alpha}(z)$ auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ frei von Nullstellen, so besitzt das Gleichungssytem (II.2.2) höchstens eine Lösung im Folgenraum l_∞ .*

Beweis: Liegt eine Nullstelle der Form $z = e^{i\varphi}$ von $c_{k,\alpha}(z)$ vor, so ist

$$s_\varphi(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{ij\varphi} N_{0,k}(x - j)$$

ein Nullspline. Der Übergang zu Real- und Imaginärteil liefert die Existenz eines nichttrivialen reellen Nullsplines, der offenbar im Folgenraum l_∞ liegt. Dann kann aber das Gleichungssystem (II.2.2) keine eindeutige Lösung in l_∞ besitzen.
Existieren keine Nullstellen von $c_{k,\alpha}(z)$ auf dem Einheitskreis, so gibt es auch einen Ring $\rho_1 < |z| < \rho_2$, in dem keine Nullstellen von $c_{k,\alpha}(z)$ existieren. Nach dem vorigen Korollar kann dann l_∞ keinen nichttrivialen Nullspline enthalten und daher (II.2.2) höchstens eine Lösung im Folgenraum l_∞ besitzen . □

Der letzte Satz und sein Korollar zeigen, daß die entscheidende Voraussetzung sowohl für die Eindeutigkeit als auch für die Konstruktion einer Lösung über den Fundamentalinterpolanten diejenige ist, daß der Einheitskreis frei von Nullstellen des Symbols $c_{k,\alpha}(z)$ ist. Diese wird Bedingung im nächsten Unterabschnitt untersucht.
In Unterabschnitt II.2.4 wird dann die Beschränktheit der Normen von Abbildungen $\mathbf{C}_k$ und $\mathbf{C}_k^{-1}$, die den "symmetrischen Fall "betreffen, genau untersucht und ihre Größe bezüglich spezieller Normen bestimmt, wobei das „ Open mapping Theorem"nicht benötigt wird.

II.2.2 Euler-Frobenius Polynome

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir die Nullstellen des Symbols $c_{k,\alpha}(z)$ des Differenzengleichungssystems (II.2.2). Dazu führen wir ein

Definition II.2.3 *Die* **Euler-Frobenius Polynome** *vom Grad k zum Parameter $\alpha \in [0,1]$) sind für $\alpha \in [0,1)$ und $k = 0,1,...$ durch*

$$E_{k,\alpha}(z) := k! \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_{0,k+1}(j+\alpha) z^j \equiv k! c_{k+1,\alpha}(z). \tag{II.2.21}$$

definiert.

Die *Euler-Frobenius Polynome* $E_{k,\alpha}(z)$ sind also mit den Polynomen $c_{k+1,\alpha}(z)$ bis auf den konstanten Faktor $k!$ identisch und daher vom Grad k. Insbesondere gilt

$$E_{0,\alpha}(z) = 1 \qquad , \qquad E_{1,\alpha}(z) = (1-\alpha)z + \alpha. \tag{II.2.22}$$

Bemerkung: Die Euler-Frobenius-Polynome sind von Schoenberg (1967) für die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 1/2$ eingeführt worden. Seine Motivation war, daß er eine symmetrische Variante des Systems (II.2.2) betrachtete. Dazu führte er die Splineräume

$$\breve{S}_k = span\{N_k(\cdot - j)\}_{j \in \mathbb{Z}}, \tag{II.2.23}$$

mit den symmetrischen B-Splines

$$N_k(x) := N_{0,k}(x + k/2)$$

aus Abscnitt II.1 ein. Es besteht also $\breve{S}_k$ aus den Splinefunktionen der Ordnung k mit den Knoten an den Stellen $j + k/2$, $j \in \mathbb{Z}$. Dann betrachtete er als Interpolationsproblem

$$s(l+\alpha) = f(l), \qquad , l \in \mathbb{Z} \qquad , s \in \breve{S}$$

bzw. als Spezialfall von (II.2.2) das "symmetrische" Interpolationsproblem

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j N_k(l-j) = g_l, \ l \in \mathbb{Z} \tag{II.2.24}$$

mit der Koeffizientenfolge $\{b_j\}_{\{j \in \mathbb{Z}\}}$ als Lösung zu den Daten $\{g_l\}_{\{l \in \mathbb{Z}\}}$. Analog zu (II.2.3) führt man auch einen Operator $\mathbf{C}_k$ mit dem Umkehroperator $\mathbf{C}_k^{-1}$ als Lösungsoperator von (II.2.24) ein, der im nächsten Abschnitt noch genauer betrachtet wird. Wendet man die z-Transformation an, so erhält man analog zu (II.2.10) die Gleichung

$$\mathbf{G}(z) = c_k(z)\}\mathbf{b}(z) \tag{II.2.25}$$

für die Symbole der Folgen $\{b_j\}_{\{j \in \mathbb{Z}\}}$ und $\{g_l\}_{\{l \in \mathbb{Z}\}}$. Die zu (II.2.9) analoge Transferfunktion ist dann

$$c_k(z) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_k(j) z^j \tag{II.2.26}$$

Wir unterscheiden dann zwei Fälle:

1. $k = 2k'$, d.h. k gerade. Dann gilt

$$c_k(z) = \sum_{j=-k'+1}^{k'-1} N_{0,k}(j+k')z^j = z^{-k'+1}\sum_{l=0}^{k-2} N_{0,k}(l+1)z^l = z^{-k'}E_{k-1,0}(z)/(k-1)! \quad \text{(II.2.27)}$$

2. $k = 2k' - 1$, d.h. k ist ungerade. Dann gilt

$$c_k(z) = \sum_{j=-k'+1}^{k'-1} N_{0,k}(j+k'-\frac{1}{2})z^j = z^{-k'+1}\sum_{j=0}^{k-1} N_{0,k}(j+\frac{1}{2})z^j = z^{-k'+1}E_{k-1,1/2}(z)/(k-1)!. \quad \text{(II.2.28)}$$

Aus diesen Beziehungen sieht man, daß für das symmetrische Problem (II.2.24) gerade die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = 1/2$ der Euler-Frobenius Polynome relevant sind.

Nach Schoenberg kann man für die Euler-Frobenius-Polynome weitere Darstellungen herleiten. Zunächst beachte man, daß nach (II.1.6) für $k \geq 1$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{0,k+1}(j+\alpha)z^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}(-1)^{k+1-r}(r-j+\alpha)_+^k z^j$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} E_{k,\alpha}(z) &= \sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}(-1)^{k+1-r}z^r\sum_{l\in\mathbb{Z}}(r-l+\alpha)_+^k z^{l-r} \qquad \text{(II.2.29)} \\ &= (z-1)^{k+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(j-\alpha)_+^k z^j = (z-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{\infty}(j-\alpha)^k z^j \end{aligned}$$

Davon ausgehend erhält man bei formaler Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{E_k(z)}{(z-1)^k}\frac{t^k}{k!} &= (z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}(j-\alpha)^k z^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty}z^{-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(j-\alpha)^k}{k!} \\ &= (z-1)\sum_{j=1}^{\infty}z^{-j}e^{(j-\alpha)t} = e^{-\alpha t}\frac{e^t}{z}\frac{1-z}{1-e^t/z} = \frac{e^{(1-\alpha)t}(1-z)}{z-e^t}\ . \qquad \text{(II.2.30)} \end{aligned}$$

Diese Beziehung wurde schon von Euler entdeckt. Die Funktion $\frac{(1-z)e^{(1-\alpha)t}}{z-e^t}$ heißt die *Erzeugende* der Euler-Frobenius Polynome weil die Koeffizienten ihrer Potenzreihe gerade diese Polynome sind. Wichtig ist im folgenden aber nur Formel (II.2.30). Daraus kann man nämlich eine Rekursionsformel für diese ableiten:
Dividieren wir (II.2.30) $(1+z)^{k+1}$, multiplizieren mit z und differenzieren beide Seiten nach z, so ergibt sich

$$\frac{E_{k,\alpha}(z)}{(z-1)^{k+1}} - \frac{(k+1)zE_{k,\alpha}(z)}{(z-1)^{k+2}} + \frac{zE'_{k,1}(z)}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{l=1}^{\infty}(1-l)(l-\alpha)^k z^l$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(1-z)^{k+2}$, so erhält man die Formel

$$-E_{k,\alpha}(z)(1+kz) + z(z-1)E'_{k,\alpha}(z) = (z-1)^{k+2}\sum_{l=1}^{\infty}z^{-l}[(1-\alpha)(l-\alpha)^k - (l-\alpha)^{k+1}]$$

und somit die Rekursionsformel

$$E_{k+1,\alpha}(z) = z(1-z)E'_{k,\alpha}(z) + (\alpha + (k+1-\alpha)z)E_k(z) \qquad \text{(II.2.31)}$$

Damit kann man beweisen

Lemma II.2.3 *Für $k \geq 2$ sind die Nullstellen von $E_{k,\alpha}(z)$ sind alle einfach und negativ.*

BEWEIS: Dies wird durch Induktion über k gezeigt. Der Induktionsanfang $k = 2$ ist trivial nach (II.2.22). Gilt die Aussage für k, so seien die Nullstellen λ_i geschrieben als

$$\lambda_k <, \ldots < \lambda_1 < 0.$$

Dann folgt aus (II.2.31) sofort $E_{k+1,\alpha}(\lambda_j) = \lambda_j(1-\lambda_j)E'_{k,\alpha}(\lambda_j)$. Nach Induktion muß $(-1)^j E'_{k,\alpha}(\lambda_j) < 0$ gelten, da alle λ_j einfach und $E'_{k,\alpha}(z)$ rechts von λ_1 wächst. Also muß gelten

$$(-1)^j E_{k+1}(\lambda_j) > 0, \qquad 1, \ldots, k.$$

Dies bedeutet, daß $E_{k+1,\alpha}$ Nullstellen in $(\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ für $k-1, \ldots, 1$ besitzt. Wegen $E_{k+1,\alpha}(\lambda_1) < 0$ und $E_{k+1,\alpha}(0) = N_{0,k+2}(\alpha) > 0$ besitzt es noch eine weitere Nullstelle in $(\lambda_1, 0)$. Ferner gilt sign $E_{k+1,\alpha}(-\infty) =(-1)^k$, so daß noch in $(-\infty, \lambda_k)$ eine Nullstelle liegen muß. □

Im Falle des „Laurent-Polynoms“ $c_k(z)$ modifiziert sich diese Aussage. Insbesondere schliesst man aus der zweiten Identität in (II.2.27), daß $c_k(z)$ für gerade k nur $k-2$ Nullstellen besitzt, während aus (II.2.28) folgt, daß $k-1$ Nullstellen im Falle ungerader k vorliegen. Nach (II.2.26) gilt aber

$$c_k(z) = \sum N_k(j)z^j = \sum N_k(-j)z^j = c_k(\frac{1}{z})$$

Dies bedeutet also, daß die Anzahl der Nullstellen von $c_k(z)$ immer gerade ist und daß sie paarweise in der Form $\mu_j, \frac{1}{\mu_j}$ auftreten. Aus Lemma II.2.3 folgt dann , daß sie alle einfach sind und daß $-1 \leq \mu_j \leq 0$ gelten muß. Die Fälle $\mu_j = -1$ oder $\mu_j = 0$ können daher nicht auftreten und man erhält

Lemma II.2.4 *Es hat $c_k(z)$ $k-1$ Nullstellen für ungerade k und $k-2$ Nullstellen für gerade k , die alle einfach und negativ sind , in Paaren $\mu_j, \frac{1}{\mu_j}$ auftreten und in (0,1) liegen. Insbesondere beitzt $c_k(z)$ keine Nullstellen auf dem Einheitskreis.*

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata können wir nun konkrete Aussagen über die Lösungen der zu (II.2.2) und (II.2.24) zugehörigen Interpolationsprobleme zu treffen.

Zunächst folgt für das symmetrische Problem (II.2.24) direkt aus Lemma II.2.4 und Satz II.2.2

Satz II.2.3 *Das Interpolationsproblem (II.2.24) ist eindeutig lösbar, wenn die Daten $\{g_l\}_{\{l\in\mathbb{Z}\}}$ im Folgenraum $_{\mu_1}$ liegen, wobei $\mu_1 \in (0,1)$ die kleinste negative Nullstelle der Transferfunktion $c_k(z)$ ist. Der entsprechende Fundamentalspline*

$$L_k(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega_j^* N_k(x-j), \qquad L_k(j) = \delta_{0,j}, j \in \mathbb{Z} \qquad \text{(II.2.32)}$$

besitzt das Symbol $1/c_k(z) = \sum_{j\in ZZ} \omega_j^* z^j$, das in dem Kreisring um $\mu_1 < |z| = 1 < 1/\mu_1$ holomorph ist. Die Koeffizienten ω_j^* fallen exponentiell wie j ab wie $O((|\mu_1|)^l)$ ab und die Lösung von (II.2.24) besitzt die Koeffizienten

$$b_j = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g_l \omega_{j-l}$$

der Entwicklung nach den B-Splines $N_k(x-j)$.

Nach Lemma II.2.3 und Korollar II.2.1 gilt weiter

Korollar II.2.2 *Das Problem (II.2.2) hat genau dann eine eindeutige Lösung im Folgenraum l_∞, wenn die negativen, einfachen Nullstellen von $c_{k+1,\alpha}(z)$ nicht auf dem Einheitskreis liegen, d.h. α erfüllt die Bedingung*

$$F_k(\alpha) := E_{k,\alpha}(-1) \neq 0 \tag{II.2.33}$$

Zur genaueren Untersuchung dieses Kriteriums benützen wir die Identität

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} E_{k,\alpha}(z) = -k(z-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} (j-\alpha)^{k-1} z^j = k(1-z)E_{k-1,\alpha}(z), \tag{II.2.34}$$

die durch Differentiation von $E_{k,\alpha}(z)$ nach α für $k \geq 1$ aus der Formel (II.2.31) folgt.

Lemma II.2.5 *Es gelten die Aussagen*

1. *Die Funktionen $F_k(\alpha)$ sind Polynome vom Grad k in α und rekursiv definiert durch $F_0 \equiv 1$, $F_k'(\alpha) = 2kF_{k-1}(\alpha)$, und $F_k(0) + F_k(1) = 0,\ k \geq 1$.*

2. *Die Polynome F_k genügen der Funktionalgleichung*

$$F_k(1-\alpha) = (-1)^k F_k(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$$

3. *Es ist $(-1)^k F_{2k-1}(\alpha)$ monoton fallend in $[0,1]$ und $F_{2k-1}(\frac{1}{2}) = 0$. Dagegen ist $(-1)^k F_{2k}(\alpha)$ monoton wachsend auf $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ und monoton fallend auf $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ und erfüllt $F_{2k}(0) = F_{2k}(1) = 0$ sowie $F_{2k}(x) > 0,\ x \in (0,1)$.*

Beweis: Zu 1.: Formel (II.2.34) liefert diese Aussage. Es ist insbesondere nach der Darstellung (II.2.30)

$$F_k(0) + F_k(1) = k! \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{0,k}(j-\alpha)(-1)^j + \sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{0,k}(j+1-\alpha)(-1)^j \right] = 0$$

Zu 2. : Die Aussage it trivialerweise für $k = 1$ gültig. Man bilde dann $\phi_{j+1}(t) := F_{j+1}(1-t) - (-1)^{j+1}F_{j+1}(t)$ und per Induktion wissen wir, daß $\phi_j(t) = 0$ gilt. Differentiation liefert dann $\phi_{j+1}'(t) = -2(j+1)\big[F_j(1-t) - (-1)^j F_j(t)\big] = -2(j+1)\phi_j(t) = 0$. Falls j ungerade ist, sieht man sofort, daß weiter $\phi_{j+1}(\frac{1}{2}) = 0$ gilt. Falls j gerade ist, folgt nach $\phi(0) = F_{j=1}(1) + F_{j+1}(0) = 0$ nach Aussage 1. Also muß $\phi(t) \equiv 0$ sein.

Zu 3.: Die Behauptung gelte bis $2k-1$. Dann ist $(-1)^k F_{2k}'(t) = (-1)^k 4kF_{2k-1}(t)$ positiv für $t < \frac{1}{2}$, negativ für $t > \frac{1}{2}$ nach Aussge 1. Dementsprechend ist $(-1)^k F_{2k}$ monoton wachsend auf $[0, \frac{1}{2})$ und fallend für $t > \frac{1}{2}$. Ferner ist $F_{2k}(1) = F_{2k}(0) = 0$. Insbesondere ist $(-1)^k F_{2k}(t) > 0$ auf $(0,1)$.
Gilt dies nun, so schließe weiter daraus $(-1)^{k+1}F_{2k+1}'(t) < 0$ in $(0,1)$, d.h. $(-1)^{k+1}F_{2k+1}(t)$ ist monoton fallend in $[0,1]$. Aus 2. folgt zusätzlich $F_{2k+1}(1/2) = 0$.

□

Zusammen erhalten wir nun in Ergänzung des vorigen Satzes für das allgemeinere Interpolationsproblem (II.2.2)

Satz II.2.4 *Das Interpolationsproblem (II.2.2) ist eindeutig lösbar für $\alpha \in (0,1)$. Das Symbol $1/c_{k,\alpha}(z)$ des Fundamentalsplines $L_{k,\alpha}(x)$ ist in einem Kreisring um $|z| = 1$ holomorph und die Koeffizienten $\omega_{k,\alpha}(j)$ fallen exponentiell in j ab wie $O(\gamma^{|}j|)$ für $|j| \to \infty$.*

Unter den Vorausetzungen dieses Satzes kann man die eindeutige Lösbarkeit auch für allgemeinere Daten $\{f_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ zeigen. Die Lösung ist dann immer durch die Formel (II.2.12) mit dem Fundamentalspline gegeben.
Bemerkung Die Polynome $F_k(\alpha)$ heißen Euler-Polynome, was über den Zusammenhang mit den Euler-Frobenius Polnomen nochmals die letztere Namensgebung motiviert.

II.2.3 Periodische Cardinal-Interpolation

Gegeben seien N-periodische Daten $\{f_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$, d.h. $f_{j+N} = f_j$, die man mit Cardinal-Splines der Periode N interpolieren möchte. Also betrachte den Raum

$$S_k^N = [s \in S_k \equiv S_{k,1} : s(x+N) = s(x)]$$

Dazu kann man periodisierte B-Splines mit Periode N definieren:

$$P_k(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} N_{0,k}(x + jN) \tag{II.2.35}$$

Gesucht ist ein N-periodischer Fundamentalspline

$$L_k^N(x) := \sum_{j=0}^{N=1} l_j^N P_k(x-j) \tag{II.2.36}$$

wobei die Koeffizienten l_j^N derart zu bestimmen sind, daß für $\alpha \in [0,1)$

$$L_k^N(j+\alpha) = \delta_{0,j}^N \tag{II.2.37}$$

gilt. Dabei ist $\delta_{0,j}^N$ erklärt durch

$$\delta_{0,j}^N := \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0 \, mod \, N \\ 0 & \text{für } j = 1 \, mod \, N \end{cases}$$

Beachte zunächst, daß die $P_k(x)$ ebenfalls Euler-Frobenius Polynome liefern, die dann auf dem Einheitskreis definiert sind. Mit $v = 2\pi\nu/N$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{N-1} P_k(x+\mu)e^{-iv\mu} &= \sum_{\mu=0}^{N-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} N_{0,k}(x+\mu+jN)e^{-v(\mu+jN)} \\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} N_{0,k}(x+\mu)e^{-iv\mu} = (k-1)!E_{k-1,\alpha}(e^{-iv}) \end{aligned}$$

Wie bei der biinfiniten Cardinal Interpolation benütze die z-Transformation

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\nu=0}^{N-1} L_k^N(\nu+\alpha)z^\nu = \sum_{\nu=0}^{N=1}\sum_{j=0}^{N-1} l6N_j z^j P_k(\nu - j + \alpha)z^{\nu-j} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{N-1} l_j^N z^j\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} P_k(\alpha+l)z^l\right) \end{aligned}$$

Zusammen gilt dann für die l_j^N die folgende Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N-1} l_j^N z_\nu^j = \frac{1}{(k-1)!E_{k-1,\alpha}(z_\nu)} \tag{II.2.38}$$

mit $z_\nu = e^{-iv} = e^{-i2\pi\nu/N}, \ \nu = 0, \dots, N-1$. Dies ist kein unendliches Gleichungssystem meh , sondern nur von der Größe $N \times N$. Man kann es mit der diskreten Fouriertransformation lösen bzw. invertieren, d.h. man benützt die diskrete Orthogonalität

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} z_\nu^j z_\nu^{-r} \delta_{j,r} \tag{II.2.39}$$

Multipliziert man (II.2.38) mit z_ν^{-r}, summiert über ν und dividiert durch N, so erhält man

$$\frac{1}{N}\left(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{e^{i2\pi\nu r/N}}{E_{k-1,\alpha}(z_\nu)}\right) = l_r^N \tag{II.2.40}$$

Bemerkung: Diese Operation kann man auch numerisch günstig durchführen (diskrete schnelle Fouriertransformation)

Man kan auch den periodischen B-Spline mit diskreter Fourier-Transfomation in gleicher Weise ausdrücken. Es war nämlich

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_k(x+j) z_\nu^j = (k-1)! E_{k-1,\alpha}(z_\nu)$$

so daß

$$P_k(x+r) \frac{1}{N}\left((k-1)! \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{i1\pi\nu r/N} E_{k-1,\alpha}(z_\nu)\right)$$

Man beachte, daß die Variable x nun der Parameter des verallgemeinerten Euler-Frobenius Polynoms ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} L_k^N(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N^2}\left(\sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{z_\nu^j}{E_{k-1,\alpha}(z_\nu)}\right) \sum_{\mu=0}^{N-1} z_\mu^{-j} E_{k-1,x}(z_\mu) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{E_{k-1,x}(z_\mu)}{E_{k-1,\alpha}(z_\nu)} \sum_{j=0}^{N-1} z_j^{\nu-\mu} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{E_{k-1,x}(z_\nu)}{E_{k-1,\alpha}(z_\nu)} \end{aligned}$$

eine Formel, aus der man nochmals die Interplationseigenschaft abliest. Die Lösung des allgemeinen Interpolationsproblems folgt daher als

$$s(f; j+\alpha) = f_j \ (mod\, N) \quad \Longrightarrow \quad s(f;x) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j L_k^N(x-j) \tag{II.2.41}$$

Bis jetzt habem wir nur formal gerechnet. Um diese Formel streng zu rechtfertigen, ist es hinreichend und notwendig, die Lösbarkeit des $N \times N$ Gleichungssystems in (II.2.38) zu fordern bzw. eine hinreichende und zugleich notwendige Bedingung dafür zu finden. Eine solche ist

$$E_{k-1,\alpha}(z_\nu) \neq 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, N-1 \tag{II.2.42}$$

Ganz offenbar ist dies notwendig, da sonst die rechte Seite in (II.2.38) nicht definiert und die Hinlänglichkeit ist gerade mit der diskreten Orthogonalität in (II.2.39) gezeigt worden.
Es bleibt also zu überlegen, wann (II.2.42) gilt. Hier hilft die über die $E_{k-1,\alpha}(z)$ bewiesene Tatsache, daß die einzige Nullstelle von $E_{k-1,\alpha}(z)$ auf dem Einheitskreis nur der Wert $z=-1$ ist. Es gilt also (II.2.42) genau dann, wenn

$$e^{-i2\pi\nu/N} \neq -1 = e^{-i\pi} \tag{II.2.43}$$

Damit erhält man das

Korollar II.2.3 *Periodische Splineinterpolation an den Stützstellen $j+\alpha,\ 0\leq j\leq N-1$ ist eindeutig lösbar genau dann, wenn eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:*

1. *N ist ungerade*
2. *N ist gerade, k ist gerade und $\alpha\neq 1$*
3. *N ist gerade, k ist ungerade und $\alpha\neq \frac{1}{2}$*

Man kann den periodischen Fall auch einfach auf den biinfiniten Fall zurückführen, nämlich für periodische Daten der Form $f_{\nu+jN}=f_\nu,\ 0\leq\nu\leq N-1$ bilde

$$s(\mathbf{f};x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j L_{k,\alpha}(x-j)$$

mit dem Fundamentalspline $L_{k,\alpha}$ wie oben. Dann folgt

$$s(\mathbf{f};x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{N-1} f_{l+jN}L_{k,\alpha}(x-l-jN)=\sum_{l=0}^{N-1} f_l\sum_{j=-\infty}^{\infty}L_{k,\alpha}(x-l-jN)$$

Wegen der Eindeutigkeit des Fundamentalinterpolanten (im periodischen Fall) gilt dann

$$\begin{aligned}
L_k^N(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_{k,\alpha}(x-jN)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\omega_{k,\alpha}(i)N_{0,k}(x-i-jN)\\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\omega_{k,\alpha}(i)P_k(x-i)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\omega_{k,\alpha}(\nu+jN)P_k(x-\nu)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt in (II.2.36) auch $l_\nu^N=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\omega_{k,\alpha}(\nu+jN)$.

II.2.4 Stabilität der Cardinal Interpolation

Unser Ziel in diesem Unterabschnitt ist die Bestimmung der Norm des Umkehroperators $\mathbf{C}_{k,\alpha}^{-1}$ auf verschiedenen Folgenräumen . In Satz II.2.4 haben wir gesehen, daß dies nur möglich ist , wenn $0 < \alpha < 1$ oder $\alpha \neq 1/2$ für den Verschiebungsparameter α im Interpolationsproblem (II.2.2) gilt, je nachdem ob k gerade oder ungerade ist. In den Ausnahmefällen $\alpha = 0$, k ungerade, und $\alpha = 1/2$, k gerade muß die Norm dieses Operators "explodieren ". Umgekehrt sollten in den entgegengesetzten Fällen $\alpha = 0, k$ gerade bzw. $\alpha = 1/2, k$ ungerade, also gerade im symmetrischen Fall von (II.2.24) die Verhältnisse besonders günstig sein. Diese Vermutung ist korrekt, wie sich herausstellen wird.

Wir führen nun wie bereits im vorigen Unterabschnitt bemerkt für Folgen $\mathbf{a} := \{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ den Operator $\mathbf{C}_k$

$$\mathbf{C}_k : \quad \mathbf{a} \to \mathbf{C}_k\mathbf{a} : \qquad (\mathbf{C}_k\mathbf{a})_l := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_k(j) \tag{II.2.44}$$

ein. Dann läßt sich das symmetrische Interpolationsproblem (II.2.24) durch (II.2.25) mit zugehörigem Symbol $c_k(z)$ beschreiben.

Dieses Polynom kann man nun noch genauer mittels der Nullstellen des Euler-Frobenius Polynoms beschreiben. Das ist der Inhalt von

Lemma II.2.6 *Mit $m = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ seien $-\mu_1, \ldots, -\mu_m, \frac{1}{\mu_1}, \ldots, \frac{1}{\mu_m}$ die Nullstellen des Symbols $c_k(z)$ bezeichnet. Dann hat dieses die Form*

$$c_k(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{(1+\mu_j z)(1+\mu_j z^{-1})}{(1+\mu_j)^2} \tag{II.2.45}$$

Die Funktion $d_k(\Theta) := c_k(e^{i\Theta})$ ist gerade, positiv und 2π periodisch in Θ und fällt monoton von $\Theta = 0$ bis $\Theta = \pi$, wo der minimale Wert $d_k(\pi) = \prod_{j=1}^{m} \frac{(1-\mu_j)}{(1+\mu_j)^2}$ angenommen wird.

Beweis: Wegen $1 = c_k(1)$ und

$$c_k(z) = \sum_{j=-m}^{m} N_k(j) z^j = z^{-m} N_k(m) \prod_{j=1}^{m} (z+\mu_j)(z+\frac{1}{\mu_j})$$

folgt

$$\begin{aligned} c_k(z) = \frac{c_k(z)}{c_k(1)} &= z^{-m} \prod_{j=1}^{m} \frac{(z+\mu_j)(z+\frac{1}{\mu_j})}{(1+\mu_j)(1+\frac{1}{\mu_j})} \\ &= \frac{(1+\mu_j z^{-1})(z+\frac{1}{\mu_j})}{(1+\mu_j)(1+\frac{1}{\mu_j})} = \frac{(1+\mu_j z^{-1})(\mu_j z+1)}{(1+\mu_j)^2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$d_k(\Theta) = \prod_{j=1}^{m} \frac{(1+\mu_j e^{i\Theta})(1+\mu_j e^{-i\Theta})}{(1+\mu_j)^2} = \prod_{j=1}^{m} \frac{f_{\mu_j}(\Theta)}{(1+\mu_j)^2}$$

wobei $f_\mu(\Theta) \equiv (1+\mu e^{i\Theta})(1+\mu e^{-i\Theta}) = 1 + 2\mu\cos\Theta + 2\mu^2$ eine positive, gerade Funktion in Θ ist, und monoton fallend von $f_\mu(0) = (1+\mu)^2$ bis $f_\mu(\pi) = (1-\mu)^2$. □

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Untersuchung des Umkehroperators $\mathbf{C}_k^{-1}$ mit Hilfe der expliziten Umkehrformel (II.2.12), wobei wir die in Lemma II.2.1 und der anschließenden Bemerkung gemachten Annahmen zur Existenz rechtfertigen müssen. Dazu fehlt noch eine Untersuchung des Verhaltens der Koeffizienten der Laurent-Entwicklung (II.2.11).

Lemma II.2.7 *Es sei $\mu = \max_{1\leq j\leq m}\mu_j$ der Zahlen μ_j aus Lemma II.2.6. Dann konvergiert die Laurent-Entwicklung (II.2.11) in dem Kreisring $\mu < |z| < 1/\mu$ und für die Koeffizienten $\omega_k(j)$ gilt die Abschätzung*

$$|\omega_k(j)| \leq M(\delta)\delta^{|j|}, \quad \mu < \delta < 1 \tag{II.2.46}$$

Die $\omega_k(j)$ sind ferner symmetrisch um 0, d.h. $\omega_k(j) = \omega_k(-j)$ und es gilt

$$(-1)^j\omega_k(j) > 0 \tag{II.2.47}$$

Beweis: Da $1/c_k(z)$ in dem angegebenen Kreisring keine Pole hat, gilt (vergl. Hille: Analutic Function Theory Vol. I, 1959)

$$\frac{1}{c_k(z)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\omega_k(j)z^j, \quad \omega_k(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{K_r}\frac{dt}{c_k(t)t^{j+1}}$$

wobei K_r irgendein Kreis um 0 mit Radius r, $\mu < r < 1/\mu$ ist. Hieraus ergibt sich (II.2.46), wenn wir in Abhängigkeit des Vorzeichens von j den Radius $r = \delta^{sign(j)}$ wählen, wobei $M(\delta) = \sup_{t\in K_r} 1/|c_k(t)|$ ist.
Die Eigenschaft der $\omega_k(j) = \omega_k(-j)$ folgt aus der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung.
Schließlich folgt aus dem Satz über die Eindeutigkeit der Fourierreihe, daß

$$\frac{1}{c_k(e^{i\Theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{i\Theta n}$$

wobei nach (II.2.11) gilt

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \omega_k(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\Theta}/d_k(\Theta)d\Theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\Theta)/d_k(\Theta)d\Theta\end{aligned}$$

da $d_k(\Theta)$ eine gerade Funktion ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\pi\omega_k(n) &= \sum_{j=1}^{n}\int_{(j-1)\pi}^{j\pi}[cos(\Theta)/d_k(\Theta/n)]d\Theta \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\int_o^{\pi}\frac{\cos(\Theta)}{d_k(\Theta+\frac{(j-1)\pi}{n})} \equiv \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\beta_j\end{aligned}$$

und somit die Behauptung, da $d_k(\Theta)$ monoton fallen auf $(0,\pi)$ somit die β_j negativ und dem Betrage noch steigend in j sind. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptergebnis dieses Abschnittes formulieren.

Satz II.2.5 *Die Abbildung*

$$\mathbf{a} = \{a_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}} \to \mathbf{C}_k\mathbf{a} = \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j N_k(\nu - j)\}_{\nu\in\mathbb{Z}} \equiv \mathbf{f}$$

hat für $1 \leq p \leq \infty$ die Norm $\|\mathbf{C}_k\|_p = 1$ als Operator von $l_p \to l_p$ und eine beschränkte Inverse $\mathbf{C}_k^{-1}$ mit

$$\left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\|_p = \frac{1}{d_k(\pi)} = \prod_{j=1}^{m}\frac{(1+\mu_j)^2}{(1-\mu_j)^2}, \qquad \mu_j \in (0,1) \tag{II.2.48}$$

Die Kondition der Abbildung hat die Größe $\|\mathbf{C}_k\|_p\left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\| = 1/d_k(\pi)$.

BEWEIS: Nach Korollar II.2.1 ist die Abbildung $\mathbf{C}_k$ injektiv auf l_p, denn das dort angegebene $1/\mu$ kann wegen $t_l = -\mu_l$ und $t_{l+m} = \frac{-1}{\mu_l}$, $1 \leq m$, als

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\max_{1\leq j\leq m} \mu_j} > 1 \tag{II.2.49}$$

gewählt werden, während Folgen aus l_p, $1 \leq p \leq \infty$ beschränkt sein müssen. Da weiterhin nach (II.2.46) für $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}} \in l_p$ folgt (es ist $1/p + 1/q = 1$)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |f_\nu\ \omega_k(j-\nu)| &\leq \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |f_\nu|^p\right)^{1/p} \{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\omega_k(j)|^q\}^{1/q} \\ &\leq M(\delta)\frac{2}{1-\delta q}\,\|\mathbf{f}\|_{l_p} < \infty\end{aligned}$$

ist nach Lemma II.2.1

$$a_j = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} f_\nu\ \omega_k(j-\nu),\ j \in \mathbb{Z}$$

Lösung von $\mathbf{C}_k\mathbf{a} = \mathbf{f}$. Damit sie vom gewünschten Typ ist, muß noch $\mathbf{a} \in l_p$ gezeigt werden. Dazu beachten wir, daß nach der Minkowski-Ungleichung

$$\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|^p\}1/p \leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\omega_k(\nu)|\,\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^p\}1/p$$

gilt. Dies liefert $\mathbf{a} \in l_p$ und

$$\left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\|_p \leq \sum_\nu |\omega_k(\nu)|\,, \tag{II.2.50}$$

d.h. bereits die Beschränktheit von $\mathbf{C}_k^{-1}$. Es bleibt die Gleichheit (II.2.48) zu zeigen. Zunächst beachte, daß nach (II.2.47), (II.2.9) und Lemma II.2.6

$$\sum_\nu |\omega_k(\nu)| = \sum_\nu (-1)^\nu \omega_k(\nu) = \frac{1}{c_k(-1)} = \frac{1}{d_k(\pi)} = \prod_{j=1}^m \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu_j)^2}.$$

Im Falle $p = \infty$ wählen wir die spezielle Folge $f_\nu^* = (-1)^\nu \in l_\infty$ mit Lösung $\{a_j^*\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}} = \mathbf{C}_k^{-1}\{f_j^*\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}$ nach (II.2.12). Dann folgt weiter mit (II.2.50)

$$\left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\|_\infty \geq \frac{||\mathbf{C}_k^{-1}\{f_j^*\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}||_\infty}{||\{f_j^*\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}}||_\infty} = \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^\nu \omega_k(j-\nu)\right| = \sum_\nu |\omega_k(\nu)| \geq \left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\|_\infty, \tag{II.2.51}$$

d.h. Gleichheit mit der Norm wird für die Daten $f_\nu^* = (-1)^\nu$ erreicht.
Im Falle $p = 2$ wenden wir den Satz von Riesz-Fischer an, nach welchem

$$\begin{aligned}\left\|C_k^{-1}\right\|_2 &= \sup_{\mathbf{f}\in l_2} \frac{\|\alpha\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2} = \sup_{\mathbf{f}\in l_2} \frac{\left\|\sum \alpha_j e^{i\Theta j}\right\|_2}{\|\sum f_j e^{i\Theta j}\|_2} \\ &= \sum_{\mathbf{f}\in l_2} \frac{\left\|\sum f_j e^{i\Theta j} \sum \omega_k(\nu) e^{i\Theta\nu}\right\|_2}{\|\sum f_j e^{i\Theta j}\|_2} \\ &= \sup_{F\in L_2(-\pi,\pi)} \frac{\{\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(\Theta) d_k^{-1}(\Theta)\right|^2 d\Theta\}^{1/2}}{\{\int_{-\pi}^{\pi} |F(\Theta)|^2 d\Theta\}^{1/2}}\end{aligned}$$

wobei $F(\Theta) = \sum f_j e^{i\Theta j}$ gesetzt wurde. Wählt man eine Folge von speziellen $F_n \in L_2(-\pi, \pi)$, z.B. $F_n(t) = (t - \pi + \frac{1}{n})_+$, so schließt man daraus

$$\left\| \mathbf{C}_k^{-1} \right\| \geq \frac{1}{d_k(\pi)} = \sum_\nu |\omega_k(\nu)| \tag{II.2.52}$$

Die Ungleichungen (II.2.50)-(II.2.52) zeigen die Identität (II.2.48) schon für die drei Fälle $p = 1, 2, \infty$. Die restlichen Fälle erledigen wir mit dem Konvexitätssatz von M.Riesz(vergl. Dunford-Schwartz: Linear Oerators, Kap. VI.10), nach dem für Matrizennormen $\|A\|_p$ für Operatoren $l_p \overset{A}{\to} l_p$ gilt

$$||A||_p \leq ||A||_{p1}^{1-\lambda} ||A||_{p2}^{\lambda}; \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}; \quad 0 < \lambda < 1,\ 1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$$

Hiermit folgt

$$\left\| \mathbf{C}_k^{-1} \right\|_{p_1}^{1-\lambda} \geq \left\| \mathbf{C}_k^{-1} \right\|_p / \left\| \mathbf{C}_k^{-1} \right\|_{p_2}^{\lambda} = [1/d_k(\pi)]^{1-\lambda}$$

falls p, p_2 aus den Zahlen $1, 2, \infty$ gewählt werden und $\lambda \in (0,1)$ dann so gewählt ist, daß p_1 ganz $[1, \infty]$ überdeckt. Man verifiziert leicht, daß dies erreicht wird durch die Fälle

$$\begin{array}{llllll} p = 2, & p_2 = \infty, & 0 < \lambda < 1/2 & \Longrightarrow & p_1 = (1-\lambda)/(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{p_2} = 2(1-\lambda) & \in (1,2) \\ p = 2, & p_2 = 1, & 0 < \lambda < 1/2 & \Longrightarrow & p_1 = 2(1-\lambda)/(1-2\lambda) & \in (2, \infty) \end{array}$$

Zum Abschluß bleibt noch die Kondition $||\mathbf{C}_k||_p \cdot ||\mathbf{C}_k^{-1}||_p$ zu berechnen. Dazu bemerke

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}_k \mathbf{a}\|_p^p &= \sum_\nu \left| \sum_j a_j N_k(\nu - j)^{1/p + 1/q} \right|^p \\ &\leq \sum_\nu \sum_j |a_j|^p N_k(\nu - j) \{ \sum_j N_k(\nu - j) \}^{p/q} \\ &\leq \sum_j |a_j|^p \sum_\nu N_k(\nu - j) = \|\mathbf{a}\|_p^p \end{aligned}$$

wobei die Hölder-Ungleichung und $\sum_\nu N_k(x) = 1$ benützt wurde. Um Gleichheit in dieser Ungleichungskette zu erhalten wählt man als Folge $a_j^* = 1$, falls $|j| \leq M$ und $a_j^* = 0$ sonst. Es gilt dann

$$\frac{\sum_\nu \left| \sum_{|j| \leq M} a_j^* N_k(\nu - j) \right|^p}{\|\mathbf{a}\|_p^p} \geq \frac{(2M-k)^p}{(2M)^p}$$

Läßt man $M \to \infty$ streben, so erhält man $\|\mathbf{C}_k\|_p = 1$ wie behauptet. □

Die Größe $1/d_k(\pi)$ läßt sich noch etwas genauer angeben. Es war $d_k(\Theta) = \sum_j N_k e^{ij\Theta}$. Da die Fouriertransformierte $\hat{N}_k(v) = [\sin(v/2)/(v/2)]^k$ (vergl. II.1.21) für $k \geq 2$ in $L_1(-\infty, \infty)$ ist, können wir die Fourier-Umkehrtransformation anwenden (s.(II.1.23)) und erhalten (Vertauschung von Integral und $\sum$ wegen gleichmäßiger Konvergenz erlaubt)

$$\begin{aligned} N_k(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{N}_k(v) e^{ivj} dv = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{N}_k(v + 2\pi\nu) e^{ivj} dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \hat{N}_k(\Theta + 2\pi\nu) \right] e^{i\Theta j} d\Theta \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die Fourierkoeffizienten von $d_k(\Theta)$ und der Summe $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \hat{N}_k(\Theta+2\pi\nu)$ gleich sind, so daß wir nach dem Eindeutigkeitssatz über Fourierreihen die folgende Formel (Poissonsche Summationsformel) erhalten:

$$d_k(\Theta) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \hat{N}_k(\Theta + 2\pi\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} [sinc\ (\Theta + 2\pi\nu)/2)]^k \tag{II.2.53}$$

und hieraus

$$\frac{1}{d_k(\pi)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k / \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{nk}(2n+1)^{-k}. \tag{II.2.54}$$

Die folgende Tabelle gibt einige konkrete Zahlen an, die zeigen daß "Cardinal Interpolation" für nicht zu große Ordnung der B-Splines sehr gut konditioniert ist:

k	1	2	3	4	5	6
$1/d_k(\pi)$	1	1	2	3	4.8	7.5

Asymptotisch gilt $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k d_k(\pi) \to 1,\ k \to \infty$ (denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \le \frac{1}{3^k} + \int_{1.5}^{\infty} \frac{du}{(2u)^k}$).

Wir können Satz II.2.5 noch auf etwas allgemeinere Folgenräume ausdehnen indem wir die Eigenschaften von $\omega_k(\nu)$ und $c_k(z)$ noch weiter ausgeschöpfen.

Satz II.2.6 *Es sei X ein Folgenraum von (komplexen) Zahlen $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ mit einer stärkeren Norm $\|\cdot\|_X$ als die l_∞-Norm, d.h., es gilt $\|\{f_\nu\}\|_\infty \le \|\{f_\nu\}\|_X$ für $\{f_\nu\} \in X$. Weiter sei X invariant gegenüber dem Shifts, d.h.*

$$\{f_{\nu+1}\} := E\{f_\nu\} \in X, \quad \textit{wenn } \{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}} \in X$$

und dasselbe gelte für die Operation E^{-1}. Es sei $\|E\|$ die Norm von E bezüglich X und es gelte $\|E^\nu\| \le K\eta^{|\nu|}$ für ein $0 < \eta < 1/\mu$ (vergl. (II.2.49)) und $K > 0$. Dann sind $\mathbf{C}_k, \mathbf{C}_k^{-1}$ beschränkt, lineare Operatoren von X auf X und es gilt

$$\|\mathbf{C}_k\| \le \sup_{|j|<k/2} \left\|E^j\right\|, \quad \left\|\mathbf{C}_k^{-1}\right\| \le \sum_\nu |\omega_k(\nu)|\,\|E^\nu\| < \infty \tag{II.2.55}$$

Beweis: Wegen $\|E^\nu\| \le \eta^{|\nu|}$, $\eta < 1/\alpha$ kann X keine Folge $\{f_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}}$ enthalten, die schneller oder gleich schnell wie $(1/\alpha)^\nu$, $|\nu| \to \infty$ wächst. Nach Satz II.2.2 ist dann $\mathbf{C}_k$ injektiv. Außerdem ist $\mathbf{C}_k$ bschränkt auf X, denn

$$\begin{aligned} ||\mathbf{C}_k\mathbf{a}||_X &= \left\|\sum_{|\nu|<k/2} a_\nu N_k(\nu-\cdot)\right\|_X = \left\|\sum_{|\mu|<k/2} a_{\mu+\cdot}\ N_k(\mu)\right\|_X \\ &\le \sum_{|\mu|<k/2} N_k(\mu)\,\|a_{\mu+\cdot}\ \|_X \le \sum_{|\mu|<k/2} N_k(\mu)||E^\mu||\,\|\mathbf{a}\|_X \le \sup_{|\mu|<k/2} \|E^\mu\|\,\|\mathbf{a}\|_X \end{aligned}$$

Weiter gilt nach II.2.46

$$\begin{aligned} \left\|\{\sum_\nu \omega_k(\cdot-\nu)f_\nu\}\right\|_X &= \left\|\{\sum_\nu \omega_k(-\nu)f_{\nu+\cdot}\}\right\|_X \le \sum_\nu |\omega_k(\nu)|\,\|\{f_{\nu+\cdot}\}\|_X \\ &\le \left(\sum_\nu |\omega_k(\nu)|\,\|E^\nu\|\right)\|\{f\}\|_X < \infty \end{aligned}$$

falls $\delta > \alpha$ so gewählt wird, daß $\eta < 1/\delta$ gilt. Dann ist auch lt. Voraussetzung die Folge $\{a_j\}_{\{j\in\mathbb{Z}\}} = \{\sum_\nu \omega_k(j-\nu)f_\nu\}_{j\in\mathbb{Z}}$ in l_∞ und nach Lemma II.2.1 ist $\mathbf{C}_k\mathbf{a} = \mathbf{f}$ bzw. $\mathbf{a} = \mathbf{C}_k^{-1}\mathbf{f}$. Aus der letzten Abschätzung folgt dann die obige für $\mathbf{C}_k^{-1}$. □

Beispiele für die Folgenräume X von Satz II.2.6 sind die Räume l_p, $1 \le p \le \infty$, wo evidentermaßen $\|E\| = 1$. Schoenberg betrachtete auch Folgenräume mit Wachstumverhalten :

$$X = l_{\infty,r} = \{\{a_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}} : \sum_{\nu\neq 0} |a_\nu||\nu|^{-r} < \infty\}, \quad r > 0$$

Dann gilt für die Norm

$$\left\|E^j\right\|_{l_{\infty,r}} = \sup_{\mathbf{a}} \frac{\sum_{\nu\neq 0} |a_{\nu+j}||\nu|^{-r}}{\sup_{\nu\neq 0} |a_\nu||\nu|^{-r}} \le \sup_{\nu\neq 0} \left(\frac{|\nu+j|}{\nu}\right)^r \le |j+1|^r$$

d.h. sie wächst weniger stark als jedes exponentielles Wachstum $\le K\eta^\nu$ mit $\eta > 1$. Also bleibt Satz II.2.6 auch hier gültig. Sogar exponentielles Wachstum eines Folgenraums X ist erlaubt, wenn es nicht zu stark ist. Man verifiziert nämlich sofort

$$X = l^{(\eta)} = \{\{a_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{Z}\}} : \|\{a_\nu\}\|^{(\eta)} \equiv: \sup_\nu |a_\nu|\eta^{-|\nu|} < \infty,\, \eta > 1\}$$

und ebenso die Bedingungen von Satz II.2.6, falls $\eta < 1/\alpha$ ist.

II.3 Approximation mit Quasiinterpolanten

Um das Grundprinzip der Approximation mit Quasiinterpolanten zu erläutern, gehe aus von einem LNR X und einem abgeschlossenen echten Unterraum S und betrachte beste Approximation

$$E(f;S) \equiv E(f;S); = \inf_{y \in S} \|f - g\|_X \tag{II.3.56}$$

Ist X ein Hilbertraum mit Norm $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ mit $(\cdot,\cdot)$ einem Skalarprodukt, und gilt

$$S = \overline{span\{\phi_i\}}, \{\phi_i\} \text{ linear unabhängig in } X$$

(d.h. die ϕ_i bilden eine Schauder Basis für S), so gilt bekanntlich

$$E(f;S) = \|f - P_S f\|_X \ : (f - P_S f, \phi_i) = 0 \; \forall \, \phi_i$$

Insbesondere kann der Orthogonalprojektor $P_S f$ aus dem Gramschen System

$$P_S f = \sum c_i \phi_i, \; \sum c_i(\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_j) \tag{II.3.57}$$

für die Koeffizienten c_i ermittelt werden. Wenn die ϕ_i eine ONB bilden, ist die Gramsche Matrix die Identität.
Es sei nun spezieller X einer der Räume $L_p\,(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$ oder (im Falle $p = \infty$) $X = C(\mathbb{R}^m)$ und es mögen

$$\tau_\alpha f(x) \; := \; f(x + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{II.3.58}$$

$$\delta_h f(x) \; := \; f(h \cdot x), \quad h \in \mathbb{R} \tag{II.3.59}$$

die Operation der Translation und Dilation bezeichnen. Ferner sei S ein translationsinvarianter Raum unter ganzzahliger Translation, d.h.

$$f \in X \to \tau_\alpha f \in S, \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{Z}^m$$

Noch spezieller gelte

$$S \equiv S(\phi) := \overline{span\{\tau_\alpha \phi\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}} \tag{II.3.60}$$

für $\phi \in S$, die Erzeugende von S heißt. (Beispiele sind die in Abschnitt II.1 eingeführten Räume von ganzzahligen Translaten von Splines).
Bezeichnen wir mit $\phi_\alpha := \tau_{-\alpha}\phi$ so geht das Gramsche System von oben über in

$$P_S f = \sum_\alpha c_\alpha \phi_\alpha, \quad \sum_\alpha c_\alpha(\phi_\alpha, \phi_\beta) = (f, \phi_\beta) \tag{II.3.61}$$

wegen $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = (\phi_{\alpha-\beta}, \phi)$ ist die Matrix eine sogenannte Matrix mit Toeplitz-Struktur, was von Vorteil für die theoretische und praktische Zwecke (eventl. Einsatz der diskreten schnellen Fouriertransformation) ist. Entscheidend dafür ist auch die *Stabilität der Basis* der $\{\phi_\alpha\}$, d.h. es soll gelten

$$\left\|\sum c_\alpha \phi_\alpha\right\|_p \approx \left\|\{c_\alpha\}_{\{\alpha \in \mathbb{Z}\}}\right\|_{l_p} \tag{II.3.62}$$

wobei $\approx$ eine Äquivalenz bis auf eine Konstante, die von den $\{c_\alpha\}$ unabhängig ist, bedeutet. Dies garantiert die gleichmäßige Invertierbarkeit der Gramschen Matrix $(\phi_\alpha, \phi_\beta)_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}^m}$. Trotzdem ist die Invertierung des Gramschen Systems (mit einer abgeschnittenen Teilmatrix oder einer aus einer endlichen Teilbasis) noch zu aufwendig. Daher die Idee der Quasinterpolanten, die

Projektionsoperatoren mit geringeren Anforderungen verwendet, die deren Konstruktion explizit ermöglicht und trotzdem fast optimale Approximationsgüte besitzen (s. auch Abschnitt I.4 über univariate Splines). Dazu setze die Operatoren

$$Af := \sum_\alpha \lambda(\tau_\alpha f)\phi_\alpha, \text{ bzw. } (Af)(x) = \sum_\alpha \lambda(f(\cdot + \alpha))\phi(x-\alpha) \tag{II.3.63}$$

Das Funktional λ soll linear, lokal und stetig, d.h. es soll eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ geben mit $0 \in K$ (üblicherweise $K =$ Kreis um 0 mit festem Radius r), so daß gilt

$$|\lambda(f) \leq \|\lambda\| \, \|f\|_{p,K} \tag{II.3.64}$$

(Allgemein können statt $\lambda(\tau_\alpha f)$ Funktionale $\lambda_\alpha f$ mit Mengen K_α stat K genommen werden).
Bemerkung: Die Wahl $\lambda_\alpha(f) := \lambda(\tau_\alpha f)$ garantiert die Translationsinvarianz des Operators A, d.h. $A(\tau_\gamma f) = \tau_\gamma Af$, was sinnvoll für den translationsinvarianten Raum S ist. Es gilt übrigens auch in (II.3.57) $P_S(\tau_\gamma f) = \tau_\gamma P_S f$ bzw. $c^\gamma_\alpha = c_{\alpha-\gamma}$ für die Koeffizienten.
Eine zweite wichtige Forderung betrifft die erzeugende Funktion ϕ. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß

$$supp(\phi) \subset J \subset \mathbb{R}^m, \; J = \text{ kompakt und } 0 \in J \tag{II.3.65}$$

gilt. In diesem Fall ist die Größe

$$C_\phi := \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} |\phi(x-\alpha)| = \sup_{x\in[0,1]^m} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} |\phi(x-\alpha)| \tag{II.3.66}$$

endlich. Es gilt nämlich $C_\phi \leq \#\phi||\phi||_\infty$, wobei $\#\phi$ die Anzahl der $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ ist, die in der Menge

$$[0,1]^m - J := \{u \in \mathbb{R}^m : u = x - y \text{ mit } x \in [0,1]^m, y \in J\}$$

liegen. (Für Anwendungen auf „ radial basis functions“ kann die Voraussetzung (II.3.65) fallengelassen werden und stattdessen (II.3.66) durch ein stärkeres Abklingverhalten ersetzt werden.)

Definition II.3.1 *Quasiinterpolanten sind Operatoren der Form*

$$a) \quad Q_h(f;x) \; := \; (\delta_{1/h} Q \delta_h)(f;x) \quad f \in X, \; h > 0 \tag{II.3.67}$$

$$b) \quad (Qf;x) \; := \; \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} \lambda f(\cdot + \alpha)\phi(x-\alpha) \tag{II.3.68}$$

Hierbei ist X einer der Räume $C(\mathbb{R}^m)$ oder $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$. Hierunter können wir auch die Fälle $X = C(\Omega)$ oder $X = L_p(\Omega)$, wo Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^m$ ist, packen, indem wir f geeignet von Ω auf $\mathbb{R}^m$ fortsetzen. (s. Bemerkung)

Satz II.3.1 *Unter obiger Voraussetzungen an X, ϕ, λ gelte noch*

$$Q(g) = g, \; g \in F \tag{II.3.69}$$

d.h. der Operator Q reproduziere die Elemente eines Unterraums $F = S = S(\phi)$, der translationsinvariant sei, d.h. $\delta_h g \in F$ für jedes $g \in F$. Dann gilt für jedes kompakte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ die Abschätzung

$$\|Q_h f - f\|_{p,\Omega} \leq [1 + ||\lambda|| C_\phi (vol \; \Omega)^{1/p}] dist(f;F)_{p,\Omega+h(K-J)} \tag{II.3.70}$$

wobei vol Ω das m-dimensinale Volumen von Ω bezeichnet.

Beweis: Da F dilationsinvariant ist, folgt $Q_g \equiv \delta_{1/h} Q \delta_h g = \delta_{1/h}\delta_h g = g$, d.h. Q_h hat ebenfalls die Eigenschaft (II.3.69). Gemäß dieser spalten wir auf

$$\|Q_h f - f\|_{p,\Omega} \leq \|f-g\|_{p,\Omega} + \|Q_h(f-g)\|_{p,\Omega}$$

Können wir nun zeigen

$$\|Q_h f\|_{p,\Omega} \leq ||\lambda|| C_\phi (vol\ \Omega)^{1/p} \|f\|_{p,\Omega+h(K-J)} \tag{II.3.71}$$

so folgt wegen $\Omega \subset \Omega + h(K-J)$

$$\|Q_h f - f\|_{p,\Omega} \leq [1 + ||\lambda|| C_\phi h^{-1} (vol\ \Omega)^{1/p}] \, \|f-g\|_{p,\Omega+h(K-J)}$$

für jedes $g \in F$ und somit (II.3.71).
Wir beachten zum Beweis von (II.3.71), daß noch (II.3.64)

$$\begin{aligned}
||\delta_{1/h} Q \delta_h f||_{p,\Omega} &= \left(\int_\Omega |\sum_\alpha \lambda(f(h(\cdot+\alpha)))\phi(\frac{x}{a}-\alpha)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq ||\lambda|| \left(\int_{h^{-1}\Omega} | \sum_{y-\alpha\in J} ||f(h(\cdot+\alpha))||_{p,K} (\phi(y-\alpha)|^p dz\right)^{1/p} h^{m/p} \\
&\leq h^{m/p} ||\lambda|| (vol\ h^{-1}\Omega)^{1/p} \sup_{y\in h^{-1}\Omega} (\sum_\alpha |\phi(z-\alpha)|) \sup_{\alpha\in y-J} ||f(h(\cdot+\alpha))||_{p,K} \\
&\leq ||\lambda|| (vol\ h^{-m}\Omega)^{1/p} C_\phi \sup_{\alpha\in h^{-1}\Omega - J} ||f||_{p,h\alpha+hK} \\
&= ||\lambda|| (h^{-1} vol\ \Omega)^{1/p} C_\phi ||f||_{p,\Omega+h(K-J)}
\end{aligned}$$

□

Dieser Satz bringt eine lokale Fehlerabschätzung. Eine globale Abschätzung folgt durch Abschätzungen für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (C ist unabhängig von diam(Ω) und f)

$$dist(f;F)_{p,\Omega} \leq C(diam\ \Omega)^{-k} \sum_{|\beta|\leq k} \left\| D^\beta f \right\|_{p,\Omega} \tag{II.3.72}$$

wobei $diam(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|$ ist (die Summe $\sum_{|\beta|\leq k}$ kann schärfer durch die Summe $\sum_{|\beta|=k}$ ersetzt werden). Dann wählt man typischerweise $\Omega = h(G+j)$ mit festem G (z.B. Einheitswürfel) und $f \in \mathbb{Z}^m$ und erhält

$$\|Q_h f - f\|_{p,h(G+j)} \leq C[1 + ||\lambda|| (vol\ G)^{1/p} C\phi] \sum_{|\beta|=k} ||D^\beta f||_{p,h(G+j)}$$

Durch Summation über j (der p-fachen Potenz) folgt dann

Korollar II.3.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz II.3.1 und der lokalen Fehlerabschätzung (II.3.72) gilt für genügend glatte f auf $\mathbb{R}^m$*

$$\|Q_h f - f\|_{p,\mathbb{R}^m} \leq const h^{-k} \sum_{|\beta|=k} ||D^\beta f||_{p,\mathbb{R}^m} \tag{II.3.73}$$

wobei $D^\beta f$ wie üblich die partiellen Ableitungen von f bezeichnen.

Der nächste Schritt besteht nun in der Herleitung von Bedingungen, die die Eigenschaft (II.3.69) garantieren. Wir verwenden dazu den Zugang von Strang-Fix (1969,1973), der an einer älteren Arbeit von Schoenberg (1946) aufbaut und seither von vielen Autoren (z.B. Dahmen, Michelli, Chui-Jetter-Ward, de Boer-deVore-Ron, Jetter-Zhou) verallgemeinert worden ist. Wir führen dazu die semidiskrete Faltung ein:

Definition II.3.2 *Für eine beliebige Folge $\{c_\alpha\}_{\{\alpha\in\mathbb{Z}^m\}}$ sei*

$$(\phi * c)(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} c_\alpha \phi(x-\alpha) \tag{II.3.74}$$

die semidiskrete Faltung von $\mathbf{c}$ *und* ϕ. *Speziell bezeichne* $f|$ *die Folge* $\{f(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}$ *für ein* $f \in C(\mathbb{R}^m)$.

Eine zentrale Rolle spielt nun der Operator T_ϕ definiert auf $C(\mathbb{R}^m)$ durch

$$(T_\phi f)(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} f(\alpha)\phi(x-\alpha) := (\phi * f|)(x) \tag{II.3.75}$$

Lemma II.3.1 *Der Operator* T_ϕ *bildet* $C(\mathbb{R}^m)$ *auf* $S(\phi)$ *ab und kommutiert mit der Translation* $\tau_\beta, \beta \in \mathbb{Z}^m$. *Weiter gilt für alle* $f \in S(\phi)$ *die* Vertauschungsrelation

$$\phi * f| = f| * \phi \tag{II.3.76}$$

Speziell gilt $T_\phi(F) \subset F$ *für translationsinvariante Unterräume* F *von* $S(\phi)$.

Beweis: Die Summe in (II.3.74) ist für jedes feste x endlich und daher wohldefiniert. Es gilt

$$(\tau_\beta T_\phi f)(x) = \sum_\alpha f(\alpha)\phi(x+\beta-\alpha) = \sum_\alpha f(\alpha+\beta)\phi(x-\alpha) = T_\phi(\tau_\beta f)(x),\ \beta \in \mathbb{Z}^m$$

Jedes $f \in S(\phi)$ hat die Darstellung

$$f(x) = (\phi * c_f)(x)$$

mit einer Folge $\{c_f(\beta)\}_{\beta\in\mathbb{Z}^m} = \{g_\beta\}_{\{\beta\in\mathbb{Z}^m\}}$ für ein $g \in C(\mathbb{R}^m)$. Für ein solches f folgt dann

$$\begin{aligned}(\phi * f|)9x) &= \sum_\alpha(\sum_\alpha \phi(\alpha-\beta)g_\beta)\phi(x-\alpha)\\ &= \sum_\beta g_\beta \sum_\gamma \phi(x-\beta-\gamma)\phi(\gamma) = \sum_\gamma \phi(\gamma)[\sum_\beta g_\beta\phi(x-\beta-\gamma)]\\ &= \sum_\gamma f(x-\gamma)\phi(\gamma) = (f * \phi|)(x)\end{aligned}$$

Nun ist $T_\phi f = \phi * f|$ und $f * \phi|$ eine endliche Summe von Translaten $\tau_{-\gamma}$ von f, so daß die Translationinvarianz von $F \subset S(\phi)$ liefert $T_\phi f \in F$ für $f \in F$, d.h. $T_\phi(F) \subset F$. □

Bemerkung In diesem Beweis wurde benötigt, daß ϕ kompakten Träger hat. Durch Modifikation von $S(\phi)$, z.B. durch Einschränkungen an die Koeffizienten von $s(x) \in S(\phi)$ im Sinne von $\{c_\alpha\}_{\{\alpha\in\mathbb{Z}^m\}} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ können auch allgemeinere $\phi \in C(\mathbb{R}^m)$ zugelassen werden.
Wir geben nun ein Kriterium für die gewünschte Einbettung $F \subset S(\phi)$ an. Dazu fordern wir die Gültigkeit der Vertauschungsrelation (II.3.76) auch auf F, was dann stärker $F \subset T_\phi(F)$ ergibt.

Lemma II.3.2 *Es sei* $c_\phi := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}\phi(\alpha) \neq 0$ *und* F *ein endlich-dimensionaler, translations-invarianter Unterraum in der Menge* Π *aller Polynome.*
a) Ist die Vertauschungsrelation (II.3.76) für alle $f \in F$ *erfüllt, so bildet der Operator* $c_\phi I - T_\phi$ *die Menge* F *in sich ab und reduziert dort den totalen Grad eines Elementes* $f \in F$*.*
b) Bildet der Operator $c_\phi I - T_\phi$ *die Menge* F *in sich ab und ist dort grad-reduzierend, so ist* T_ϕ *injektiv auf* F *und erfült* $F \subset T_\phi(F)$*.*

Beweis: a) Aus dem Beweis von Lemma II.3.1 folgt bereits die Einbettung $T_\phi(F) \subset F$ und daher $(c_\phi - T_\phi)(F) \subset F$. Die Vertauschungrelation (II.3.76) für F gibt für $p \in F$ dann

$$\begin{aligned}(T_\phi p)(x) &= (\phi * p|)(x) = (p * \phi|)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} p(x-\alpha)\phi(\alpha)\\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} p(x)\phi(\alpha) + \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}[p(x-\alpha)-p(x)]\phi(\alpha) \equiv c_\phi p(x) + q(x)\end{aligned}$$

wobei der Grad von $q(x)$ kleiner als der von $p(x)$ ist, denn dies ist der Fall für die Polynome $q_\alpha(x) = p(x-\alpha) - p(x)$.
b) Die Injektivität von T_ϕ auf F folgt durch Induktion nach dem Grad:
Gilt $(T_\phi p)(x) \equiv x$, so folgt $p = c_\phi^{-1}(c_\phi I - T_\phi)p$, so daß $p(x)$ einen reduzierten Grad hat. Daher ist die Induktionshypothese für $p(x)$ anwendbar und $T_\phi p = 0$ impliziert $p = 0$. Die zweite Aussage folgt ebenfalls induktiv nach dem Grad: Es gilt $c_\phi p(x) - (T_\phi)p(x) \in T(F)$, weil $c_\phi I - T_\phi$ gradreduzierend ist und daher

$$p = c_\phi^{-1}T_\phi p + c_\phi^{-1}(c_\phi I - T_\phi)p \in T_\phi(F)$$

□

Wir kombinieren nun die obigen Aussagen zu einem Äquivalenzsatz:

Satz II.3.2 *Es seine* F *ein linearer, endlich-dimensionaler und translationsinvarianter Unterraum von* Π *und* ϕ *eine Funktion aus* $C_0(\mathbb{R}^m)$ *derart, daß* $c_\phi \equiv \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m}\phi(\alpha) = 1$ *ist. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Operator vom Typ (II.3.68), der auf* F *exakt ist*
2. *Es gilt* $F = T_\phi(F) \subset S(\phi)$
3. *Es gilt auf* F *die Vertauschungsrelation (II.3.76)*
4. *Der Operator* $I - T_\phi$ *bildet* F *auf sich ab und ist dort grad-reduzierend*
5. *Der Operator* T_ϕ *ist injektiv auf* F *und erfüllt* $F \subset T_\phi(F)$*.*

Beweis: Der Beweis besteht aus einem Ringschluß. Die Richtung 1) $\implies$ 2) ist trivial und die Richtungen 2) $\implies$ 3), 3) $\implies$ 4), 4) $\implies$ 5) folgen direkt aus Lemma II.3.1, Lemma II.3.2. Der letzte Schluß 5) $\implies$ 1) ergibt sich aus dem nachfolgenden Lemma, daß eine Konstruktionsmöglichkeit für einen Quasiinterpolanten Q angibt. □

Lemma II.3.3 *Sei* $F \subset \Pi$ *ein translationsinvarianter Unterraum von* $C(\mathbb{R}^m)$ *derart, daß* T_ϕ *aus (II.3.75) eine injektive Abbildung auf* F *ist mit* $F \subset T_\phi(F)$*. Ist dann eine* Rechtsinverse T^{-1} von T auf einem Unterraum $F_0 \subset F$ definiert*, so ist der folgende Operator exakt auf* F_0*:*

$$Q_F(f;x) := \sum_\alpha (T^{-1}f)(\alpha)\phi(x-\alpha) \tag{II.3.77}$$

Eine spezielle Rechtsinverse von T auf $F_0 := F \cap \Pi_r$ (Π_r ist die Menge der Polynome vom totalen Grad r) ist

$$(\Lambda_r f)(x) := \sum_{j=0}^{r} (I - T_\phi)^j f(x) \tag{II.3.78}$$

mit entsprechenden Quasiinterpolanten der Form (II.3.68) gegeben durch

$$Q_r(f;x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} (\Lambda_r f)(\alpha)\phi(x-\alpha) \tag{II.3.79}$$

Beweis: Bilde $q_2 = T^{-1}p$, so daß $T_\phi q_2 = T_\phi T^{-1} p = p$. Es folgt

$$Q_F(p)(x) = \sum_\alpha q_2(\alpha)\phi(x-\alpha) \equiv (T_\phi q_2)(x) = p(x)$$

Die zweite Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} T\Lambda_r &= \Lambda_r + (T_\phi - I)\Lambda_r = \sum_{j=0}^{r} (I - T_\phi)^{j+1} \\ &= I - (I - T_\phi)^{r+1} \end{aligned}$$

und der Tatsache, daß $(I - T_\phi)^{r+1} = 0$ auf Π_r ist, da $(I - T_\phi)$ grad-reduzierend ist. $\square$

Wir zeigen noch, daß das Funktional Λ_r die entscheidende Voraussetzung (II.3.64) im Falle $p = \infty$ erfüllt. Dazu schätzen wir nach (II.3.65) und (II.3.75) ab

$$|(Tf)(x)| \le \left(\sup_z \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\phi(z-\alpha)| \right) \sup_{\alpha : x-\alpha \in J} |f(\alpha)| \le C_\phi \|f\|_{\infty, x-J}$$

mit C_ϕ wie in (II.3.66). Hieraus folgt für $j = 1, 2, \ldots$

$$|(I-T)^j f(0)| \le (1 + C_\phi)^j \|f\|_{\infty, -j-J}$$

so daß nach der Definition von Λ_r

$$|(\Lambda_r f)(0)| \le \sum_{j=0}^{r} (1 + C_\phi)^j \|f\|_{\infty, -r-J}$$

und somit

$$|(\Lambda_r f)(0)| \le (1 + C_\phi)^{r+1} \|f\|_{\infty, U}, \qquad U = -r - supp\,\phi.$$

Bemerkung:) Für $1 \le p < \infty$ ist Λ_r nicht definiert, weil T_ϕ dies nur für stetige f ist; es gibt aber andere Möglichkeiten eine Rechtsinverse von T_ϕ zu finden. Ein spezieller Zugang ist z.B. in $L_2(\mathbb{R}^m)$ möglich, wo noch allgemeinere ϕ zugelassen sind (de Boer-DeVore-Ron 1993)).

Ist F in Lemma II.3.3 noch invariant gegenüber Dilationen, so folgt daraus mit Satz II.3.1

$$\left\| f - \delta_{1/h} Q_r \delta_h f \right\|_{\infty, \Omega} \le [1 + (1 + C_\phi)] dist(f; F)_{\infty, \Omega - h(r+1)J} \tag{II.3.80}$$

Die Aussage über die Approximationkraft der Räume $S_h(\phi)$ entnimmt man dem

Korollar II.3.2 *Es sei ϕ wie in Lemma II.3.3 gegeben und $\Pi \cap S(\phi)$ sei dilatationsinvariant und endlich dimensional. dann gilt für $f \in C(\mathbb{R}^m)$ und Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$*

$$dist(f; S_h(\phi))_{\infty,\Omega} \leq [1 + (1 + c_\phi)^{r+1}] \sup_{y \in \Omega} dist(f; \Pi \cap S(\phi))_{\infty, y-(r+1)hsupp\,\phi} \tag{II.3.81}$$

BEWEIS: Weil $\Pi \cap S(\phi)$ als endlich dimensional vorausgesetzt ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\Pi \cap S(\phi) \subset \Pi_r$, also gilt $\Pi \cap S(\phi) = \Pi_r \cap S(\phi)$ und $\delta_{1/h} Q_r \delta_h f \in S_h(\phi)$. Nun wende die Ungleichung (II.3.2) an. □

Es läßt sich hierin auch noch eine Abschätzung des lokalen Fehlers mittels (II.3.72) wie in Korollar II.3.1 einbauen. Der Fortschritt gegenüber diesem Korollar und Satz II.3.1 ist der, daß sie nur noch Voraussetzungen an ϕ enthalten, da ein Quasiinterpolant mit den Voraussetzungen (II.3.65)- (II.3.70) konstruiert worden ist. Um zu konkreten Aussagen zu kommen, ist für ein gegebenes $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ nur noch der Raum $F = \Pi \cap S(\phi)$ zu bestimmen, und der lokale Approximationfehler mit diesem F abzuschätzen. Zuvor wollen wir noch einen ergänzenden Weg zur Konstruktion von Quasiinterpolanten betrachten, der etwas konkreter nachprüfbare Bedingungen dafür liefert. Er beruht auf dem den erwähnten Zugang von Strang-Fix, der an entscheidender Stelle die Poisson- Summationsformel benützt.

Definition II.3.3 *Es sei P eine Teilmenge von Π und $p(D) = \sum_\alpha a^\alpha D^\alpha$ der zu einem Polynom $p(x) = \sum_{\alpha \in I} a^\alpha x^\alpha \in P$ mit endlicher Indexmenge $I \subset \mathbb{Z}^m$ definierte Differentialoperator. Dann erfüllt eine stetige Funktion ϕ mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^m$ und $\{\hat{\phi}(j)\} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ die Strang-Fix Bedingung relativ zu P, falls für alle $p \in P$ gilt:*

1. *$\hat{\phi}(k) = \delta_{k,0}$ für $k \in \mathbb{Z}^m$*
2. *$(\tilde{p}(D)\hat{\phi})(k) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$*

wobei

$$\hat{\phi} := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i2\pi(x,v)} \phi(x) dx, \quad \tilde{p}(D) := p(D/2\pi i)$$

gesetzt ist.

Für das Folgende benötigen wir außerdem noch folgende Definitionen:

Definition II.3.4 *Eine Menge $P \subset \Pi$ heißt* D-invariant, *falls $D^\beta p \in P$ für jede partielle Ableitung D^β gilt, wenn p ein Element aus P ist.*

Satz II.3.3 *Es sei P ein linearer, endlich-dimensionaler und D-invarianter Teilraum von Π und es sei $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ mit $C_\phi \equiv \sum_l \phi(l) = 1$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gelten die Strang-Fix Bedingungen relativ zu P*
2. *Es gilt auf P die Verauschungsrelation (II.3.76), und $\sum_l p(l)\phi(x-l) = \sum_l p(x-l)\phi(l)$*
3. *für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gelten die Identitäten*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l) = 1, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(x-l)\phi(x-l) = \sum_l p(l)\phi(-l), \; p \in P \tag{II.3.82}$$

BEWEIS: 1) $\Longrightarrow$ 2): Wir wenden die Poisson-Summationsformel

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\psi(t+l)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\hat{\psi}(k)e^{i2\pi(k,t)},\ t\in\mathbb{R}^m \tag{II.3.83}$$

an, die für $\psi\in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\{\hat{\psi}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^m}\in l_1(\mathbb{Z}^m)$ gilt. Für *festes* $y\in\mathbb{R}^m$ wählen wir dann $\psi(x)=\phi(y-x)p(x)$ für $p\in P$. Die Fouriertransformierte von ψ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(v) &= \int_{\mathbb{R}^m}\phi(y-x)p(x)e^{2\pi i(x,v)}dx\\ &= e^{-2\pi i(y,v)}\int_{\mathbb{R}^m}\phi(u)p(y-u)e^{2\pi i(u,v)}du\\ &= e^{-2\pi i(y,v)}p(yId+D/2\pi i)\hat{\phi}(v)=e^{-2\pi i(y,v)}\tilde{p}(-\frac{D}{2\pi i})\hat{\phi}(v)\end{aligned}$$

wobei die bekannte Formel für Ableitungen der Fouriertransformirten auf $\tilde{p}(u)\equiv p(y-u)$ angewendet wurde. Nun benützen wir die Taylorentwicklung, die für jedes $p\in\Pi$ gilt ($\alpha!$ in Multiindex-Schreibweise)

$$p(y+t)=\sum_\alpha y^\alpha D^\alpha p(t)/\alpha! \tag{II.3.84}$$

$\Bigg($ Beweis durch Verifikation für jedes spezielle Polynom $m_\beta(x)=x^\beta/\beta!$ für jedes $\beta\in\mathbb{Z}^m{}_+$:

$$m_\beta(z+t)=\sum_\alpha m_\alpha m_{\beta-\alpha}(t)=\sum_\alpha y^\alpha D^\alpha m_\beta(t)/\alpha! \quad \Bigg)$$

Wegen der vorausgesetzten D-Invarianz von P folgt $D^\alpha p\in P$ und so aus 2) aus Definition II.3.3

$$\hat{\psi}(k)=e^{-i2\pi(y,k)}\sum_\alpha(y^\alpha/\alpha!)((D^\alpha p)(D/2\pi i)\hat{\phi})(k)=0,\ k\in\mathbb{Z}^m\backslash\{0\}$$

Nun ist die obige Poisson-Formel für $t=0$ anwendbar. Dies liefert für $y\in\mathbb{R}^m$ zusammen mit (II.3.84)

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\phi(z-l)p(l) &\equiv \sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\psi(l)=\hat{\psi}(0)\\ &= p(z+D/2\pi i)\hat{\phi}(0)=\sum_\alpha(D^\alpha p(y)/\alpha!)(2\pi i)^{-\alpha}D^\alpha\hat{\phi}(0)\end{aligned} \tag{II.3.85}$$

Aus dieser Darstellung sieht man, daß $\phi * p|$ ein Polynom in y ist. Es sein nun $q(y)$ das Polynom $q(y):=\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\phi(l)p(y-l)$. Für $y=k\in\mathbb{Z}^m$ folgt sofort durch Umindizierung, daß$(\phi*p|)(k)=q(k)$ gilt. das Differenzenpolynom verschwindet dann auf dem Gitter $\mathbb{Z}^m$. Daraus folgt die Vertauschungsrelation (II.3.76) für $p\in P$, d.h. die Aussage 2) gilt, falls gezeigt wird:

verschwindet ein Polynom p in m Variablen auf $\mathbb{Z}^m$, so verschwindet es identisch.

Dazu sei angenommen, daß p in jeder Variablen höchstens vom Grad $< M$ und auf dem Gitter $\{\alpha\in\mathbb{Z}^m{}_+ : 1\le\alpha_i\le M$ für alle $1\le i\le m\}$ verschwinde. Betrachte nun die Entwicklung von p in der m-ten Variablen nach Monomen, so sieht man mittels univariater Lagrange-Interpolation, daß alle Koeffizienten Polynome vom Grad $< M$ in den restlichen Variablen sind, die auf dem Gitter $\{\alpha\in\mathbb{Z}^m{}_+ : 1\le\alpha_i\le M$ für alle $1\le i\le m\}$ verschwinden. Durch Induktion folgt dann die Behauptung.

Beweis 2) $\Longrightarrow$ 3): Gilt die Vertauschungsrelation (II.3.76) für alle $p \in P$, so folgt wegen der D-Invarianz von P, daß auch

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \phi(z-l)D^\alpha p(l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} (D^\alpha p)(z-l)\phi(l),\ \forall\, z \in \mathbb{R}^m$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^m{}_+$ gelten muß. Für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}^m$ folgt dann mittels (II.3.85)

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} p(y+l)\phi(-l) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} ((y-x)^\alpha/\alpha!)D^\alpha p(x-l)\phi(l) \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m} ((y-x)^\alpha/\alpha!) \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \phi(x-l)D^\alpha p(l) \\
&= \sum_{l} \phi(x-l)p(y-x+l)
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $z = 0$ ergibt sich die zweite Identität von 3).
Die erste Identität folgt sofort, wenn wir zeigen können, daß $p(x) \equiv c$ mit einer Konstanten $c \neq$ in P enthalten sein muß. Dann gilt nämlich

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \phi(x-l) = c^{-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} c\phi(l) = c_\phi = 1$$

Daß $p(x) \equiv 1$ in P enthalten ist, sieht man so :
Sei $p(x) = \sum a_{i_1,\ldots i_m} x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m}$ koordinatenweise ausgeschrieben, $x \equiv (x_1,\ldots,x_m)$. Dann bildet man die partiellen Ableitung der $i_m^* \equiv \max\, i_m$ in den Variablen x_m und erh'alt ein Polynom $p \in P$, daß konstant bezüglich der Variablen x_m ist. Nun wendet man die gleiche Prozedur sukzessive in den Variablen $x_{m-1},\ldots,x_1$ an und erhält schließlich ein konstantes Polynom $\not\equiv 0$ in P.
Beweis 3) $\Longrightarrow$ 1): Die Funktion $f^*(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}^m} p(l-x)\phi(x-l)$ ist die bezüglich $\mathbb{Z}^m$ periodisierte Form der Funktion $f(x) = p(-x)\phi(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Die Fourierkoeffizienten $\hat{f}^*(k)$ von f^* verschwinden für $k \neq 0$, da nach Voraussetzung 3) die Funktion f^* konstant sein muß. Anwendung der Poisson-Summationsformel (II.3.83)) liefert dann für die Fouriertransformation $F[f](k) = 0,\ k \neq 0$. Es gilt aber $p(D/2\pi i)\hat{\phi}(v) = F[f](v)$ nach der schon bekannten Formel aus Schritt 1) $\Longrightarrow$ 2), so daß Teil 2) der Strang-Fix Bedingungen erfüllt ist.
Teil 1) folgt mit der Wahl $p(-x) = 1$ genauso aus der Bedinung $\sum_{l\in\mathbb{Z}^m} \phi(x-l) = 1$. □

Bemerkung: Ein endlich dimensionaler, translationsinvarianter Teilruam F von Π ist auch D-invariant. Ist nämlich $p(x) \in F$, so ist auch $\tau_{hz}p$ für jedes feste $z \in \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}$ in F und somit der Differenzenquotient $[\tau_{hz}p(x) - p(x)]/h \equiv [p(x+hz) - p(x)]/h$. Der Grenzübergang $h \to 0$ zeigt, daß jede Richtungsableitung $D_Z p$ wieder in F liegt, dann F ist endlich dimensionl. Wiederholte Anwendung des Arguments zeigt die $D-$Invarianz von F. Damit ist jede der Bedingungen von Satz II.3.2 mit denen von Satz II.3.1 äquivalent.
Nun diskutieren wir noch einige weitere Konstruktionsmöglichkeiten von Quasiinterpolanten (eine Möglichkeit wurde bereits in Lemma II.3.3 vorgestellt). Der Ansatz von Strang-Fix bzw. Schoenberg für Qf ist

$$\begin{aligned}
(Qf)(x) &= \sum_{l} \phi(x-l)L(f;l),\ L(f;x) := \sum_{|\beta|\le r} a_\beta D^\beta f(x) \qquad \text{(II.3.86)} \\
a_\beta &:= (2\pi i)^{-\beta} D^\beta(1/\hat{\phi}(0))/\beta!
\end{aligned}$$

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die a_β wegen $\hat{\phi}(0) = 1$ und $\hat{\phi} \in C_\infty(\mathbb{R}^m)$ wohl definiert sind. Dann beachten wir, daß der Operator L den Raum P wieder in sich abbildet, da $D^\beta p \in P$

wegen der D-Invarianz von P gilt. Daher ist die Formel (II.3.85), die unter der Voraussezung der Strang-Fix Bedingungen abgeleitet wurde, auf L_P anwendbar. Dies liefert

$$\begin{aligned}(Qp)(x) &= \sum_{\alpha} ((D^\alpha Lp)(x)/\alpha!)\,(2\pi i)^{-\alpha} D^\alpha \hat{\phi}(0) \\ &= \sum_{\alpha} (2\pi i)^{-\alpha} D^\alpha \hat{\phi}(0)/\alpha! \sum_{|\beta|\leq r} a_\beta D^{\alpha+\beta} p(x) \\ &= \sum_{|\gamma|\leq r} (2\pi i)^{-\gamma} D^\gamma p(x) \sum_{\alpha+\beta=\gamma} D^\beta (1/\hat{\phi}(0)) D^\alpha \hat{\phi}(0)/\alpha!\beta! \\ &= \sum_{|\gamma|\leq r} (2\pi i)^{-\gamma} D^\gamma p(x) \delta_{0,\gamma}/\gamma! = p(x)\end{aligned}$$

wobei außer $p \in P$ noch $\pi \in \Pi_r$ angenommen wurde. Damit erhalten wir

Korollar II.3.3 *Ist eine der Voraussetzungen von Satz II.3.3 erfüllt, so liefert ein Ansatz der Form (II.3.86) derart, daß $P \subset \Pi_r$ für r gilt, einen Quasiinterpolanten, der auf P exakt ist.*

Literatur

Bücher

[AS] M. Abramovitz - I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* 9. Auflage, Dover Publ.

[Ch] E.E. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, 1966

[Da] P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York 1965.

[Fa] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical guide*, Academic Press, 3.ed. 1992.

[Boo] C. de Boor,*A practical guide to splines*, Springer, New York 1978.

[Brae] D. Braess:*Nonlinear Approximation Theory*, Springer, Berlin 1986.

[HL] J. Hoschek-D. Lasser, *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A.K.Peters, Boston 1993.

[IK] E. Issacson - H.B. Keller *Analyse numerischer Methoden*, Leipzig 1972.

[Lo] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press 1953.

[Ri] J.R. Rice,*The approximation of functions. Vol.I: Linear Theory, Vol. II: Nonlinear and Multivariate Theory.* Addison-Wesley 1964/1969,

[Riv] T. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, Wiley, New York 1974.

[Run] C. Runge 1904, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig, Göschen 1904.

[Scha] R. Schaback-H .Werner, *Numerische Mathematik*, 4.te Auflage,Springer, Berlin 1993.

[Schoe] I.J.Schoenberg,*Cardinal Interpolation*, CBMS, SIAM, Philadelphia 1973.

[Schu] L.L. Schumaker *Spline Functions*, Basic Theory, Wiley, New York 1981.

[Schw] H.R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, Teubner, Stuttgart 1988.

[SW] E.M. Stein - G.Weiss "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton University Press 1971.

[Stoer] J.Stoer, *Numerische Mathematik I*, Springer 1989.

[Wal] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1976.

[WA] H.Werner - H.Arndt, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer1986.

Zeitschriftenartikel

[Boe] W. Böhm, Generating the Bézier points of B–Spline curves and surfaces. Computer Aided Design **13** (1981)

[Boo3] C. de Boor, On bounding spline interpolation. J. Approx.Theory **14** (1975), 191-203.

[Boo4] C. de Boor, Quadratic spline interpolation and the sharpness of Lebegue's inequality. J. Approx.Theory **17** (1976), 348-358.

[BoVo] C. deBoor- R. DeVore, A geometric proof of total positivity for spline interpolation. Math. Comp. **45** (1985), 497-504.

[BP] C. deBoor- A. Pinkus, Backward error analysis for totally positive linear systems. Numer.Math. **27** (1977), 485-490.

[CQ] W. Quade - L.Collatz, Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. Sitzungsber. der Preuss.Akad.Wiss., Phys.Math. **30**(1938), 383-429.

[Dem] S. Demko, Interpolation by quadratic splines. J. Approx.Theory **23** (1978), 392-400.

[Ea] A. Eagle, On the relations between Fourier constants of a periodic function and the coefficients determined by harmonic analysis. Philos.Mag. **5**(1928), 113-132.

[Goo] T.N.T. Goodman, New bounds on the zeros of spline functions. J.Approx.Theory **76**(1994), 123-130.

[HM] C.A. Hall-W.W. Meyer, Optimal error bounds for cubic spline interpolation. J. Approx.Theory **16** (1976), 105-122.

[JK] Jones-Karlovitz, Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions. J.Approx.Theory **3**(1970), 138-145.

[KZ] S. Karlin- Z. Ziegler, Chebychevian spline functions, SIAM J. Numer. Anal. **3**(1966), 514 - 543.

[Ma] M. Marsden, Quadratic spline interpolation. Bull. Amer. Soc. **80** (1974), 903-906.

[Mic] C.A.Micchelli, Best L_1-approximation by weak Chebychev-systems and the uniqueness of interpolating perfect splines. J. Approx. Theory *19*, (1977),1-15.

[MP] C.A. Micchelli - A. Pinkus, Moment theory for weak Chebychev systems with applications to monosplines, quadrature formulas and best one-sided L_1-approximation by spline functions with fixed knots. SIAM J. Math. Anal. *8* (1977), 206-230.

[SS] K. Scherer-A.Yu. Shadrin, New upper bounds for the B-spline basis condition number: A proof of deBoor's 2^k-conjecture. J.Approx.Theory 99(1999), 217-229.

[Schoe1] I.J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of eqidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing or graduation, a first class of analytic approximation formulas, Quart.Appl. Math. **4** (1946),45-99.

[Sh] A.Yu. Shadrin, The L^∞ norm of the L^2 spline projection is bounded independently of the knot sequence. A proof of de Boor's conjecture. Habilitationsschrift, TH Aachen 2000.