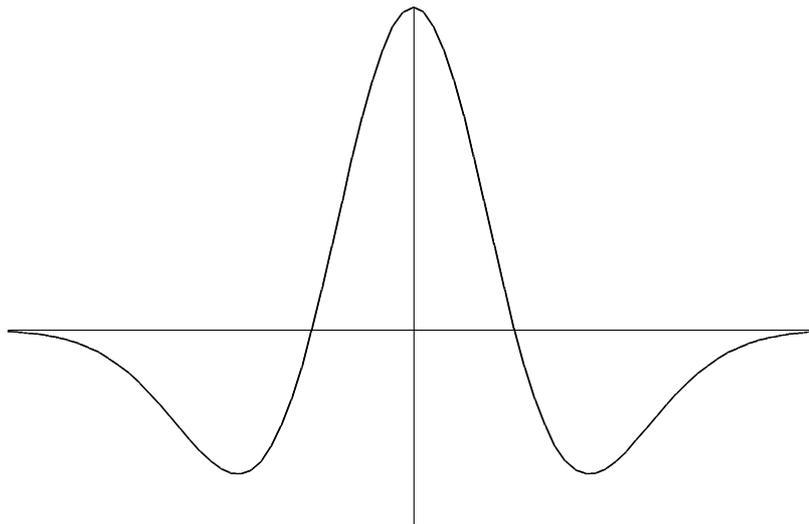

Splines und Wavelets

Karl Scherer



Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Abteilung für Funktionalanalysis und
Numerische Mathematik

Version vom 9. September 2002

Vorwort

Dieses Skript basiert auf einer zweisemestrigen Vorlesung, die ich im Wintersemester 1995/96 und im Sommersemester 1996 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität gehalten habe.

Es wurde zum größten Teil unter Verwendung von `fortex` geschrieben. Ferner wurden Makros des `AmSLaTeX`-Pakets und der Pakete `XYPic` von K.H. Rose, `fancyhdr` von P. van Oostrum, `path` von P. Taylor und `setspace` von G.D. Greenwade benützt.

Was Sie hier lesen ist eine Zwischenversion. Wenn sie Anmerkungen zum Skript machen wollen, können Sie diese an meine E-Mail Adresse schicken.

Danksagungen

Mein Dank gilt all denen, die zum Inhalt dieses Skripts beigetragen haben:

- den Hörern der Vorlesung für die vielen Bemerkungen, durch die Verständnisschwierigkeiten ausgeräumt und manche Probleme bei Beweisen aufgedeckt wurden,
- insbesondere Herrn stud.math.Josef Schugt, der mit viel Sachverstand eine erste TEX-Version dieses Skripts hergestellt und wertvolle Informationen zu Wavelets aus dem Internet beigesteuert hat.
- außerdem all denen, die durch die Entwicklung von Programmen, Makropaketen etc. die Erstellung dieses Skripts in der vorliegenden Form möglich gemacht haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1.1	Die Zeit vor 1930	2
1.1.2	Die dreißiger Jahre	3
1.1.3	Die Zeit von 1960 bis 1980	3
1.1.4	Die Zeit nach 1980	3
1.2	Literatur	4
1.2.1	Bücher	4
1.2.2	Zum Skript.	4
1.3	Weitere Informationen über Wavelets	4
1.3.1	Einige WWW-Seiten	4
1.3.2	Den Wavelet Digest abonnieren	5
1.3.3	Software zu Wavelets	5
1.4	Einige mathematische Grundlagen.	6
2	Fourier-Analysis und Approximation	9
2.1	Approximation in Sobolev-Räumen	9
2.1.1	Approximation mit Faltungsintegralen	9
2.1.2	Fehlerordnung der Approximation	11
2.1.3	Charakterisierung von Sobolev-Räumen	13
2.2	Grundlagen der Fourieranalysis	17
2.2.1	Fouriertransformation in L_1	17
2.2.2	Fouriertransformation in L_2	22
2.2.3	Poisson-Summationsformel	25
2.3	Approximation mit bandbegrenzten Funktionen	28
2.3.1	Grundlagen	28
2.3.2	Eigenschaften von bandbegrenzten Funktionen	30
2.3.3	Abtasttheorem für bandbegrenzte Funktionen	34
2.3.4	Approximation von nicht bandbegrenzten Funktionen	38
2.4	Fourieranalysis und Distributionen	44
2.4.1	Zur Distributionstheorie	44
2.4.2	Sobolev-Räume und Fouriertransformation	49
2.4.3	Besselpotentialräume	51
2.5	Anhang	54
2.5.1	Satz von Paley-Wiener	54
2.5.2	Approximationsgüte bandbegrenzter und trigonometrischer Funktionen	57
3	Translationsinvariante Räume	63
3.1	Allgemeine Theorie	63
3.1.1	Charakterisierung	63
3.1.2	Basen	66
3.1.3	Lineare Projektionsoperatoren	73
3.2	Approximationsgüte von translationsinvarianten Räumen	79
3.2.1	Approximation mit Quasiinterpolanten	79

3.2.2	Bramble-Hilbert-Lemma und lokale Fehlerabschätzungen	81
3.2.3	Strang-Fix-Theorie	85
3.3	Approximation mit Splines	92
3.3.1	Univariate Splines	92
3.3.2	Kardinale Splines	99
3.3.3	Euler-Frobenius-Polynome und Anwendungen	105
4	Multi-Resolution-Analysis und Wavelets	111
4.1	Kontinuierliche Wavelet-Transformationen	111
4.1.1	Gefensterter Fouriertransformation (WFT)	111
4.1.2	Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT)	114
4.1.3	Mehr zur kontinuierlichen WT	119
4.2	Multi-Resolution-Analysis (MRA)	122
4.2.1	Axiome einer MRA	122
4.2.2	Beziehung zwischen MRA und Wavelets	125
4.2.3	Charakterisierung von Wavelets	129
4.2.4	Existenz von Wavelets	133
4.3	Konstruktion spezieller Wavelets	140
4.3.1	Spline-Wavelets und Wavelets vom Paley-Littlewood-Typ	140
4.3.2	Konstruktionsprinzipien für Wavelets	144
4.3.3	Konstruktion der Daubechies-Wavelets mit kompaktem Träger	149
4.3.4	Glattheit der Daubechies-Wavelets	152
4.4	Praktische Aspekte einer MRA	157
4.4.1	Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmen	157
4.4.2	Zum Problem der Ausgangs-Approximation.	160
4.4.3	Unterteilungsalgorithmen	162
4.4.4	MRA und diskrete Filterungsverfahren	166

Kapitel 1

Einleitung

sectionEine kurze Geschichte der Wavelets

1.1.1 Die Zeit vor 1930

Es gibt in der Geschichte der Mathematik eine ganze Reihe von Ursprüngen der Wavelet-Analyse (s.[Meyer93]). Ein wichtiger Teil dieser Arbeiten ist in den dreißiger Jahren publiziert worden. Ihre Ergebnisse waren damals allerdings noch nicht als Teile einer einheitlichen Theorie zu erkennen.

Schon lange vor 1930 wurde der für die Entwicklung der Wavelets wichtigste Zweig der Mathematik durch Joseph Fourier (1807) mit seiner Theorie der Frequenzanalyse – die heute unter dem Namen *Fourieranalysis* bekannt ist – begründet. Er behauptete, dass jede 2π -periodische Funktion $f(x)$ die Summe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ihrer Fourierreihe ist. Die Koeffizienten a_0 , a_k und b_k werden berechnet als

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fouriers Behauptung spielte eine wesentliche Rolle dafür, wie sich die Vorstellungen der Mathematiker über die Funktionen weiter entwickelten. Während des ganzen 19. Jahrhunderts vertieften sie die Untersuchungen von Fourierreihen erheblich : Es wurden viele neue orthogonale Systeme entwickelt und der Konvergenzbegriff verallgemeinert und vertieft. In letzterer Hinsicht ist vor allem K. Weierstraß zu nennen, der 1885 seinen berühmten Approximationssatz bewies. Einen Einblick in die damals übliche *Praxis der Reihen* bietet das Buch von [Runge]. In ihm wird die Idee der Spline-Funktionen zur praktischen Berechnung von Fourierreihen bereits vorweggenommen.

Ein weiterer bedeutender Beitrag ist die Arbeit [Whitt]. In ihr wird von E. T. Whittaker zum ersten Mal der Begriff der “cardinal series”, d.h. der kardinalen Reihen verwendet. Diese regten I.J.Schoenberg zu seinen Pionierarbeiten auf dem Gebiet der Splinetheorie an, die später zur Theorie der translationsinvarianten Räume führten. In [Whitt] ist auch bereits der später nach Shannon benannte Abtastatz bewiesen und dabei die Rolle der Sinc-Funktion herausgestellt. Die Translate dieser Funktion bilden ein Orthonormalsystem. Dies ist eine Eigenschaft, die sie bereits zu einem Vorläufer der Wavelets macht.

Die ersten Wavelets im heutigen Sinne erschienen in einem Anhang der Dissertation von A. Haar (Göttingen 1909, zitiert als [Haar]). Dort wurde zum ersten Mal das Prinzip der Skalierung zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwendet. Eine charakteristische Eigenschaft des Haar-Wavelets ist, daß es *kompakten Träger* hat, daß es also außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet. Leider sind Haar-Wavelets nicht stetig differenzierbar, was ihre Anwendbarkeit einschränkt.

Durch die Arbeit [Haar] veränderte sich jedoch der Blickwinkel von der Frequenzanalyse hin zur *Skalenanalyse*. Dies bedeutet, daß $f(x)$ durch Funktionen untersucht wird, die in ihrer Größe variieren und zwar

indem man von einer Funktion ausgeht, diese um einen gewissen Betrag verschiebt und ihre Skala ändert. Linearkombinationen dieser Funktion werden dann zur Approximation eines Signals verwendet. Dieser Vorgang kann wiederholt werden, indem von einer neuen Funktion ausgehend diese wieder verschoben und skaliert wird und Linearkombinationen davon für eine neue Näherung benutzt werden. Es stellt sich heraus, dass diese Art der Skalen-Analyse weniger empfindlich gegenüber Rauschen ist, weil sie die mittleren Fluktuationen des Signals auf verschiedenen Skalen beschreibt.

1.1.2 Die dreißiger Jahre

Das eben eingeführte Konzept der *verschiedenskaligen Basisfunktionen*¹ stellt den Schlüssel für die Entwicklung der Wavelets dar. Diese Idee wurde in den dreißiger Jahren von mehreren Gruppen unabhängig voneinander wieder aufgegriffen.

Unter Benutzung von Haarschen Basisfunktionen untersuchte der Physiker Paul Levy die Brownsche Bewegung mathematisch als ein zufälliges Signal. Er stellte fest, daß sie den Fourierschen Basisfunktionen bei der Untersuchung kleiner komplizierter Details der Brownschen Bewegung überlegen waren.

Ein weiterer Forschungsbeitrag von Littlewood, Paley und Stein betraf die Berechnung der Energie einer Funktion $f(x)$:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Sie ergab verschiedene Ergebnisse, je nach dem, ob die Energie um einige wenige Punkte konzentriert war oder ob sie über ein größeres Intervall verteilt war. Dieses Resultat war verwunderlich, weil es darauf hinwies, daß die Energie möglicherweise nicht erhalten bleiben könnte. Diese Mathematiker entdeckten dann eine Funktion, die in der Größe variieren kann *und* die aus dem Energiefunktional berechnete Energie erhält. Ihre Arbeit lieferte David Marr in den frühen achziger Jahren die Grundlage für ein effektives Verfahren in der numerischen Bildverarbeitung.

1.1.3 Die Zeit von 1960 bis 1980

Zwischen 1960 und 1980 untersuchten die Mathematiker Guido Weiss und Ronald R. Coifman die einfachsten Elemente eines Funktionenraums, die sogenannten *Atome*, mit dem Ziel aus diesen Atomen alle Elemente des Funktionenraums zu (re-)konstruieren. Im Jahr 1980 definierten Grossman und Morlet (ein Physiker und ein Ingenieur) Wavelets im Rahmen der Quantenphysik. Sie fanden eine auf physikalischer Intuition basierende Möglichkeit sich Wavelets vorzustellen.

1.1.4 Die Zeit nach 1980

Im Jahr 1985 wurde die Untersuchung der Wavelets durch eine Arbeit von Stephane Nallat über digitale Signalverarbeitung weiter voran getrieben. Teilweise durch seine Ergebnisse angeregt konstruierte Yves Meyer die ersten nicht-trivialen Wavelets. Anders als die Haar-Wavelets sind die Meyer-Wavelets stetig differenzierbar, haben allerdings keinen kompakten Träger. Ebenfalls auf der Arbeit von Mallat aufbauend konstruierte einige Jahre später Ingrid Daubechies die ersten orthonormalen Wavelet-Basisfunktionen mit kompaktem Träger und beliebiger Glattheit, die heute einen Eckpfeiler der Wavelet-Anwendungen bilden. Ausführlichere Betrachtungen zur Geschichte der Wavelets findet der Leser in in dem Buch [Meyer93], dem die obigen Ausführungen im Wesentlichen entnommen sind.

¹ **Was sind verschiedenskalige Funktionen?** Dies soll an dem Beispiel eines Signals mit konstantem Wert c auf $[0, 1]$ erläutert werden. Es kann mit Hilfe der beiden Stufenfunktionen $c_1^0 \chi_{[0,1/2]}$ und $c_1^1 \chi_{[1/2,1]}$ zerlegt werden. Anschliessend können wir es mit Hilfe der vier Stufenfunktionen $c_2^0 \chi_{[0,1/4]}$, $c_2^1 \chi_{[1/4,1/2]}$, $c_2^2 \chi_{[1/2,3/4]}$ und $c_2^3 \chi_{[3/4,1]}$ zerlegen und so weiter. All diese Zerlegungen (und damit natürlich ihre Koeffizienten) repräsentieren das ursprüngliche Signal mit einer bestimmten Auflösung oder auf einer bestimmten Skala.

1.2 Literatur

1.2.1 Bücher

Wavelets. Von den folgenden Büchern seien [Chui92a] und [Daubechies92] besonders empfohlen, weil die Teile der Vorlesung über Wavelets im Wesentlichen darauf aufbauen: [Meyer90a], [Meyer90b], [Chui92a], [Daubechies92], [Louis94], [Kaiser94], [Wickerhauser], [Mallat98], [Bla98]. Als weitere Bücher mit Übersichtscharakter sind [Chui92b], [Benedetto93] sowie [Jawerth94] als Übersichtsartikel zu empfehlen. Über das verwandte Gebiet der *Subdivision* existiert das Buch [Cava91].

Wavelet-Anwendungen. Algorithmen für Anwendungen im Sinne der Signal- oder Bildverarbeitung findet man speziell in [Wickerhauser]. Dort liegt die Betonung auf dem Filter-Aspekt der Wavelets, ebenso wie in [SN96].

Anwendungen der Wavelets zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen findet man in [Benedetto93] und wesentlich ausführlicher in [DKO97], [Dah97].

Splines. Aus der Fülle an Literatur zu Splines seien hier [Boor78], [Boor90], [Schoenberg73] und [Schumaker81] empfohlen.

Signalverarbeitung. Standardbücher sind [Marr], [Papoulis].

Anwendungen der Splines werden in [Achilles], [Krabs] beschrieben.

Bücher mit Programmcode. Zum Buch von Wickerhauser [Wickerhauser] gibt es eine Diskette mit C-Code erhältlich. Das Buch von Crandal [Crandal] enthält C- und Mathematica-Code. Die bekannten "Numerical Recipes" in C [NRC] und in FORTRAN [NRC] enthalten jeweils einen kurzen Abschnitt über Wavelets (jedoch nur in der zweiten Auflage).

1.2.2 Zum Skript.

Dieses Skript hat einen einführenden Charakter und behandelt in erster Linie den mathematischen Aspekt der angesprochenen Themen. Demgemäß beginnt es mit einem Kapitel über Fourieranalysis und Approximation. Wer mit Fourieranalysis vertraut ist, kann hier die Abschnitte 2.1, 2.2 und 2.4 überschlagen. Weniger bekannt und dargestellt dürfte das Material der Abschnitte 2.3 und 2.5 über die Approximation mit bandbegrenzten Funktionen sein.

In Kapitel 3 sollte ursprünglich die Theorie der Splinefunktionen umfassender dargestellt sein. So fehlt die Theorie der Box-Splines, die als multivariate Weiterentwicklung der Splines mit uniformen Knoten in den vorliegenden Rahmen passt. Der Leser sei auf das Buch [BHR93] von de Boor - Höllig - Riemenschneider verwiesen, wo diese Theorie kompetent dargestellt ist.

In der jetzigen Version ist Kapitel 3 um einen Abschnitt über die Strang-Fix-Theorie ergänzt, die die zentralen Ergebnisse über die Approximationsgüte der translationsinvarianten Räume liefert.

In Kapitel 4 sind nur die Grundlagen der Wavelet-Theorie dargestellt. Es gibt eine Reihe von wichtigen weiterführenden Aspekten wie z.B. biorthogonale Wavelets, multivariate Wavelets und Wavelets auf kompakten Gebieten, die aus Zeitmangel nicht behandelt werden konnten. Hierzu sei auf die Bücher [Chui92a], [CMP94], [Daubechies92], [Mallat98] verwiesen.

1.3 Weitere Informationen über Wavelets

Zur Ergänzung des Skripts sollen auch Quellen für anwendungsbezogene Informationen über Wavelets angegeben werden. Diese Liste ist naturgemäß nicht besonders aktuell.

1.3.1 Einige WWW-Seiten

Es gibt mittlerweile Unmengen von WWW-Seiten die sich mit Wavelets beschäftigen. Es folgt nur ein kleiner Auszug, mit einer der gängigen Suchmaschinen kann man weitere Seiten finden:

<http://www.c3.lanl.gov/~brislawn> gibt Informationen über die Fingerabdrucks-Kompression WSQ, die vom FBI (Federal Bureau of Investigation, dem Bundeskriminalamt der Vereinigten Staaten von Amerika) benutzt wird (Chris Brislawns).

<http://www.cosy.sbg.ac.at/~uhl/wav.html> (Abteilung für Mathematik der Universität Salzburg)
<http://www.playfair.stanford.edu/~wavelab> 'WaveLab' ist ein auf Matlab basierendes Software-Paket.
<http://www.mathsoft.com/wavelets.html> (Literatur zu Theorie und Anwendungen der Wavelets).
<http://www.amara.com/current/wavelet.html> Sites über Wavelets von Amara Graps.

1.3.2 Den Wavelet Digest abonnieren

Im Wavelet Digest stehen Informationen über neueste Wavelet-Preprints, Software und Konferenzen über Wavelets. Ausserdem erfährt man von Fehlern in einigen Wavelet-Texten und kann Fragen über eigene Probleme mit Wavelets stellen. Experten, die den Wavelet Digest ebenfalls lesen, können vielleicht Antworten geben.

Die Bestellung des Wavelet Digest ist kostenlos. Informationen über ihn bekommt man mit

<http://www.wavelet.org>

Preprints, Verzeichnisse und zurückliegende Ausgaben des Wavelet Digest erhält man von einem der Server. Man kann einmal FTP benutzen, die URL ist dann <ftp://ftp.math.sc Carolina.edu/pub/wavelets>. Zum anderen kann man auch den Gopher-Server mit der URL <gopher://gopher.math.sc Carolina.edu> benutzen. Schließlich kann man auch die oben angegebene WWW-Adresse des Wavelet Digest nutzen.

1.3.3 Software zu Wavelets

In der Folge sind einige Anonymous-FTP-Adressen im Internet angegeben; Artikel finden sich dort üblicherweise in Unterverzeichnissen, die `/reports` oder `/papers` heißen.

Stanford University. WaveLab ist eine Wavelet Bibliothek für Matlab und ist bei den Statistikprofessoren David Donoho und Iain Johnstone, den Studenten Jonathan Buckheti und Shaobing Chen (ebenfalls Stanford) sowie Jeffrey Scargle vom NASA-Ames Research Center erhältlich. (Für Matlab-Kenner: Die Software besteht aus etwa 600 Skripts, M-Dateien, MEX-Dateien, Datensätzen, automatisch ablaufenden Demos und on-line Dokumentationen). Die URL lautet

<ftp://playfair.stanford.edu/pub/wavelab>

WavBox ist eine weitere Matlab-Wavelet-Toolbox die ebenfalls aus Stanford stammt. Informationen dazu kann man ebenfalls via anonymous FTP erhalten. Die URL lautet

<ftp://simplicity.stanford.edu/pub/taswell>

IRISA. Das Institut de recherche en informatique et systèmes aléatoires (kurz: IRISA) hat eine C-Bibliothek, WaveLib genannt, mit Wavelet-Funktionen entwickelt. Sie erzeugt Wavelets und Filter, führt Wavelet-Transformationen von ein- und zweidimensionalen Signalen durch, berechnet die Entropie, unterstützt Schwellwertverfahren und so weiter. Weiterhin enthält das Paket ein Interface zu Matlab um die Zerlegung eines Signals in der Zeit-Frequenz-Ebene darzustellen sowie weitere nützliche Wavelet-Darstellungen. WaveLib wird in einem technischen Report beschrieben, den man mit anonymous FTP erhalten kann. Die URL hierzu lautet <ftp://ftp.irisa.fr/techreports/1994/PI-864.ps.Z>

Rice University. Das Computational Mathematics Laboratory hat Wavelet-Software zugänglich gemacht, die man per anonymous FTP erhält. Die URL lautet

<ftp://cml.rice.edu/pub/software> bzw. <ftp://128.42.62.23/pub/software>

Yale University. Das Mathematics Department der Yale University hat ebenfalls Wavelet-Software über FTP zugänglich gemacht und zwar unter

<ftp://pascal.math.yale.edu/pub/wavelets>, alternativ auch <ftp://128.36.23.1/pub/wavelets>

University of Missouri. Einiges an Ausbildungssoftware zum Thema Wavelets kann man von der University of Missouri erhalten, die URL lautet

<ftp://pandemonium.physics.missouri.edu/pub/wavelets>.

1.4 Einige mathematische Grundlagen.

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende mathematische Sätze aufgelistet. Dies geschieht einmal um klarzustellen, welche Aussagen als bekannt vorausgesetzt werden, zum anderen um die Bedeutungen der verwendeten Symbole zu definieren.

Mit $L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, seien im Folgenden die Räume der auf \mathbb{R}^m zur p -ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnet. Jeder dieser Räume ist ein Banachraum mit Norm $\|f\|_p$, die wie folgt definiert ist: für $p < \infty$ durch

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.4. 1a)$$

und für $p = \infty$ als

$$\|f\|_\infty = \text{wessup}_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)|. \quad (1.4. 1b)$$

Zur Erinnerung: Das wesentliche Supremum "wessup" einer Funktion f ist definiert als

$$\text{wessup}_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)| = \inf \{r \in \mathbb{R}_+ : d_f(r) = 0\},$$

wobei d_f die für alle $r \geq 0$ durch

$$d_f(r) := |\{x \in \mathbb{R} : f(x) > r\}| \geq 0$$

definierte Verteilungsfunktion von f ist. ◇

Gelegentlich werden wir Lebesgue-Räume auch auf Teilgebieten des \mathbb{R}^m , z. B. im eindimensionalen Fall ($m = 1$) auf Intervallen, betrachten und dies dann explizit in der Norm kennzeichnen. Das gleiche gilt, wenn wir gelegentlich andere Maße als das übliche Lebesgue-Maß verwenden.

Ferner betrachten wir Räume von stetigen Funktionen auf Gebieten $\Omega \in \mathbb{R}^m$ und bezeichnen sie mit $C(\Omega)$. Die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_0(\Omega)$ bezeichnet, die Menge aller k -fach differenzierbaren Funktionen mit $C^k(\Omega)$ und die Menge aller Funktionen in $C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger als $C_0^k(\Omega)$, wobei auch $k = \infty$ zugelassen ist. Falls Ω kompakt ist, definieren wir die Norm auf Ω wie üblich als die Supremumsnorm und bezeichnen sie mit $\|\cdot\|_{\infty, \Omega}$.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir den Raum $C(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty$ aller gleichmäßig auf ganz \mathbb{R}^m beschränkten Funktionen mit $CB(\mathbb{R}^m)$.

Wichtige Ungleichungen für L_p -Räume sind die *Hölder-Ungleichung*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \quad (1.4. 2)$$

wobei an p und p' die Bedingung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

zu stellen ist, und die *Minkowski-Ungleichung*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} |F(x, \cdot)| dx \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|F(x, \cdot)\|_p dx, \quad (1.4. 3)$$

die gilt, wenn die rechte Seite endlich ist, ubd im Extremfall in die übliche Dreiecksungleichung für L_p -Normen übergeht. Ein Spezialfall der Hölder-Ungleichung ist die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* für $p = p' = 2$. Sie gilt allgemeiner für Skalarprodukte in einem Hilbert-Raum.

Wichtig ist ferner der Begriff der Faltung zweier Funktionen auf dem \mathbb{R}^m .

Definition 1.4.1 Seien f und g zwei meßbare Funktionen. Dann ist ihre Faltung $f * g$ punktweise definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x - u)g(u) du. \quad (1.4. 4)$$

Die Existenz dieses Integrals fast überall und der Beweis dafür, dass $f * g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ folgt im Fall $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ aus der verallgemeinerten Minkowskiungleichung. Ganz allgemein gilt die **Young-Ungleichung** ([Stein71], Seite 178)

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r, \quad (1.4. 5)$$

wobei jetzt

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$$

zu fordern ist.

Die Grundlage für den Beweis von (1.4. 3) und (1.4. 5) bildet der

Satz 1.4.1 (Fubini) Sei $f(x, y)$ eine meßbare Funktion auf dem \mathbb{R}^{n+m} und wenigstens eines der drei Integrale

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)| dx dy \quad (1.4. 6a)$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy \quad (1.4. 6b)$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right) dx \quad (1.4. 6c)$$

sei endlich. Dann gelten

1. $f(\cdot, y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$,
2. $f(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$,
4. $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und
5. $I_1 = I_2 = I_3$.

Wichtige Sätze über die Vertauschung von Grenzwert und Integral, die im Folgenden immer wieder benutzt werden, sind

Satz 1.4.2 (Lemma von Fatou) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen auf $E \in \mathcal{A}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n d\mu < \infty$. Dann gilt

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

und

Satz 1.4.3 (Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz) . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^m)$, die punktweise gegen eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{K}$ konvergiert. Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$, insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n d\mu.$$

Schließlich sei noch an den grundlegenden approximationstheoretischen

Satz 1.4.4 *Der Raum der einfachen Funktionen in $L_p(\Omega)$ und der Raum $C_0(\Omega)$ sind dicht in allen Räumen $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

erinnert. Eine ausführliche Darstellung der vorangegangenen Ergebnisse enthält [Adams], der vorangegangene Satz beispielsweise findet sich dort in Theorem 2.13 und Bemerkung 2.14. Bezüglich der klassischen Ungleichungen sei auf [Hardy34] verwiesen.

Da wir im Weiteren Approximation vor allem in Hilbert-Räumen betrachten werden, seien auch einige grundlegende Tatsachen aus diesem Gebiet aufgelistet.

Satz 1.4.5 (Beste Approximation im Hilbert-Raum)

1. Sei X ein (komplexer) Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und M ein Unterraum von X . Existiert zu $f \in X$ eine beste Approximation $g^* \in M$, d. h.

$$\|f - g^*\| = \text{dist}(f; M)_X := \inf_{g \in M} \|f - g\|,$$

so gilt notwendig

$$f - g^* \perp M, \text{ d. h. } (f - g^*, g) = 0 \quad \forall g \in M.$$

Es existiert höchstens ein solches Element $g^* \in M$. Ist M zusätzlich abgeschlossen, so existiert genau eine beste Approximation g^* zu f .

2. Ist M endlichdimensional mit $M = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^n$ und linear unabhängigen ϕ_i , so existiert zu jedem $f \in X$ immer genau eine beste Approximation ϕ^* mit

$$\phi^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \phi_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^* (\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sind die $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ orthonormiert, so gilt für den i -ten Fourierkoeffizienten $\alpha_i = (f, \phi_i)$.

3. Ist M ∞ -dimensional und $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- Auf M gilt die Parseval-Identität, d. h. für alle $f \in M$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \phi_i)|^2 = \|f\|^2.$$

- $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ ist ein Orthonormalsystem in M , d. h. für jedes $f \in M$ gilt

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i) \phi_i.$$

- $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ ist vollständig bzw. total in M , d. h. aus $(f, \phi) = 0$ für alle $\phi \in M$ und $f \in M$ folgt $f = 0$.

Der für das Folgende interessanteste Punkt ist Punkt 3), worin die Approximation mit unendlichdimensionalen Unterräumen behandelt wird. Wir werden insbesondere sehen, dass ein solches M ein echter abgeschlossener Unterraum von X sein kann.

Kapitel 2

Fourier-Analyse und Approximation

2.1 Approximation in Sobolev-Räumen

2.1.1 Approximation mit Faltungsintegralen

An den Anfang stellen wir ein fundamentales Hilfsmittel der Approximationstheorie, das schon von Weierstraß eingeführt wurde, nämlich die Approximation von Funktionen durch Integraloperatoren mit geeigneten Kernen. Allgemein haben solche Operatoren die Form

$$I(f; x) = \int_{\mathbf{R}} f(u)K(x, u) du, \quad f \in L^p(\mathbf{R}), \quad (2.1. 1)$$

mit geeignetem Kern $K(x, u)$. Hier betrachten wir die speziellere Form der **Dirac-Folgen**. Dazu definieren wir zu gegebenem $\phi(u) \in L^1(\mathbf{R})$ die Familie von Kernen

$$\phi_\rho(u) := \frac{1}{\rho^m} \phi\left(\frac{u}{\rho}\right)$$

und setzen

$$I_\rho(f; x) := \int_{\mathbf{R}} f(x - u) \frac{1}{\rho^m} \phi\left(\frac{u}{\rho}\right) du = (f * \phi_\rho)(x). \quad (2.1. 2)$$

Im Fall gerader Kerne ϕ , d. h. $\phi(u) = \phi(-u)$, kann man $f(x - u)$ durch $f(x + u)$ ersetzen.

Satz 2.1.1 (Konvergenz von Diracfolgen) Sei $f \in L^p(\mathbf{R})$, $\delta > 0$. Dann definiere

$$\kappa(t) := \int_{|u|>t} |\phi(u)| du, \quad \omega(f; \delta)_p := \sup_{|h|\leq\delta} \|f(x+h) - f(x)\|_p; \quad (2.1. 3)$$

Es heißt $\omega(f; \delta)_p$ *Stetigkeitsmodul erster Ordnung*. Dann gelten

$$\|I_\rho(f) - \left(\int_{\mathbf{R}} \phi(u) du\right)f\|_p \leq \|\phi\|_1 \omega(f; \delta)_p + 2\|f\|_p \kappa\left(\frac{\delta}{\rho}\right). \quad (2.1. 4)$$

Falls $\int_{\mathbf{R}} \phi(u) du = \alpha$, dann folgt wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t) = 0$, daß

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|I_\rho(f) - \alpha f\|_p = 0. \quad (2.1. 5)$$

BEWEIS: Es gilt

$$I_\rho(f; x) - \alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi(v) f(x - v\rho) dv - \alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi(v) [f(x - v\rho) - f(x)] dv \quad (2.1. 6)$$

Mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung, siehe (1.4. 3), ergibt sich

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f) - \alpha f\|_p &\leq \int_{\mathbf{R}^m} |\phi(v)| \|f(\cdot - v\rho) - f(\cdot)\|_p dv \\ &\leq \int_{|v| \leq \delta/\rho} |\phi(v)| \|f(\cdot - v\rho) - f(\cdot)\|_p dv + \int_{|v| > \delta/\rho} |\phi(v)| \|f(\cdot - v\rho) - f(\cdot)\|_p dv \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} |\phi(v)| \omega(f; \delta)_p dv + 2\kappa \left| \frac{\delta}{\rho} \right| \|f\|_p. \end{aligned}$$

Damit ist (2.1. 4) bewiesen.

Dann wähle δ so klein, daß $\omega(f; \delta)_p \leq \epsilon$ und anschließend ρ so klein, daß $\kappa(\delta/\rho) \leq \epsilon$ folgt. Dazu benötigt man, daß $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta)_p = 0$. Wäre dies aber nicht der Fall, so gäbe es ein festes $\epsilon > 0$ und eine Folge von $h_n \in \mathbf{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, so daß $\|f(\cdot + h_n) - f(\cdot)\|_p \geq \epsilon$ für alle n gelten würde. Nun gilt $\lim_{h_n \rightarrow 0} [f(x + h_n) - f(x)] = 0$ in jedem Stetigkeitspunkt x von f und ferner, daß f fast überall stetig ist. Ferner gilt $\|f(\cdot + h_n) - f(\cdot)\|_p \leq 2\|f\|_p$, d. h. majorisierte Konvergenz nach Lebesgue ist möglich, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot + h_n) - f(\cdot)\|_p = 0$ gelten würde; Widerspruch. \square

Bemerkung 2.1.1 Ein anderer Beweis für $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta)_p = 0$ verläuft über die Approximation von f mit stetigen Funktionen f_n mit kompaktem Träger; solche Funktionen existieren nach Satz (1.4.4). Dann schätzt man ab:

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_p &\leq 2\|f - f_n\|_p + \|f_n(\cdot + h) - f_n(\cdot)\|_p, \\ \omega(f; \delta)_p &\leq 2\|f_n - f\|_p + \omega(f_n; \delta) < 2\epsilon \end{aligned}$$

wobei man zunächst für $\|f - f_n\|_p < \epsilon$ sorgt und dann δ (in Abhängigkeit von f_n) klein genug wählt.

Bemerkung 2.1.2 Die Existenz der Stetigkeitspunkte fast überall ist für $1 \leq p < \infty$ nicht einfach nachzuweisen. Es sei dazu auf [Stein71], Seite 12f, verwiesen. Für $p = \infty$ hingegen betrachtet man nicht $L_\infty(\mathbf{R}^m)$, sondern stattdessen $CB(\mathbf{R}^m)$ und diese Schwierigkeit entfällt.

Die Abschätzungen (2.1. 4) und (2.1. 5) können für die Stetigkeitspunkte von f zu punktweisen Aussagen verschärft werden (siehe oben). Damit ist die gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz der $I_\rho(f)$ ist für stetige f leicht zu zeigen. Im Stetigkeitspunkt x mit $|f(x - u) - f(x)| \leq \epsilon$ für $|u| \leq \delta$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} |I_\rho(f; x) - \alpha f(x)| &\leq \int_{|v| \leq \delta/\rho} |\phi(v)| |f(x - v\rho) - f(x)| dv \\ &\quad + |f(x)| \int_{|v| > \delta/\rho} |\phi(v)| dv + \int_{|v| > \delta/\rho} |\phi(v)| |f(x + v\rho)| dv \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbf{R}^m} |\phi(v)| dv + |f(x)| \kappa\left(\frac{\rho}{\delta}\right) + \sup_{|v| \geq \delta/\rho} |\phi(v)| \int_{\mathbf{R}^m} |f(u)| du \end{aligned}$$

Falls nun zusätzlich noch $\lim_{|u| \rightarrow \infty} |\phi(u)| = 0$, dann argumentiere zunächst mit von ϵ und x abhängigem δ und wähle anschließend $|\rho|$ so klein, daß

$$|f(v)| \kappa_\rho(\delta) \leq \epsilon, \quad \|f\|_1 \leq \epsilon \sup_{|v| \geq \delta/\rho} |\phi(v)|.$$

Satz 2.1.2 Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.1 gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_\rho(f; x) = \alpha f(x)$$

in jedem Stetigkeitspunkt x von f .

2.1.2 Fehlerordnung der Approximation

Man kann nun die Frage stellen, wie gut $I_\rho(f; x)$ für $\rho \rightarrow 0$ die Funktion $f(x)$ approximiert. Dazu dient folgender Satz, der als grundsätzliche Idee die Einführung von Momenten des Kerns verwendet.

Satz 2.1.3 (Approximationsordnung) Sei $\phi_\rho(u) = \rho^{-m}\phi(u/\rho)$ und $I_\rho(f; x)$ wie oben mit $\phi(u) \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Weiter gelte die Momentenbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(u) du = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^m} u^\alpha \phi(u) du = 0 \quad (2.1.7)$$

für alle α mit $0 < |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq r$. Ferner sei das absolute Moment der Ordnung $r+1$ endlich, d.h.

$$\mu_{r+1} := \int_{\mathbb{R}^m} |u|^{r+1} |\phi(u)| du < \infty. \quad (2.1.8)$$

Dann gilt für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (und $\rho > 0$ klein) die Abschätzung

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq (\mu_r + \mu_{r+1})\rho^r \left(\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega(f^{(\alpha)}; \rho) \right).$$

BEWEIS: Zunächst sei bemerkt, daß aus $\mu_{r+1} < \infty$ auch für $1 \leq l \leq r$

$$\mu_l = \int_{\mathbb{R}^m} |u|^l |\phi(u)| du < \infty$$

folgt, denn es gilt

$$\mu_l \leq \int_{|u| \leq 1} |\phi(u)| du + \int_{|u| \geq 1} |u|^{r+1} |\phi(u)| du \leq \mu_0 + \mu_{r+1}. \quad (2.1.9)$$

Weiterhin gilt $\int_{\mathbb{R}^m} \rho^{-m} \phi(u/\rho) du = 1$ und somit folgt

$$I_\rho(f; x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(u) [f(x-u) - f(x)] du$$

Wende dann auf $\Phi(t) := f(x-ut) - f(x)$, $0 \leq t \leq 1$, die Taylor-Formel an. Die Kettenregel liefert ($r \geq 1$)

$$\begin{aligned} f(x-u) - f(x) &= \Phi(1) - \Phi(0) = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(l)}(0)}{l!} + \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} \Phi^{(r)}(s) ds \\ &= \sum_{0 < |\alpha| < r} (-u)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=r} r \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1} f^{(\alpha)}(x-u+su) ds \\ &= \sum_{0 < |\alpha| \leq r} (-u)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} + r \sum_{|\alpha|=r} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1} [f^{(\alpha)}(x-u+su) - f^{(\alpha)}(x)] ds \\ &\equiv P_r(x, u) + R(x, u). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt nun (die Integrale sind wohldefiniert im L_1 -Sinn)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(u) P_r(x, u) du = \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} (-u)^\alpha \phi\left(\frac{u}{\rho}\right) \frac{du}{\rho^m} = 0,$$

so daß

$$I_\rho(f; x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(u) R(x, u) du.$$

Mit (1.4. 3), der Minkowski-Ungleichung für Normen, folgt

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} |\phi_\rho(u)| \|R(\cdot, u)\|_p du.$$

Die innere Norm schätzen wir wieder mit der Minkowski-Ungleichung ab, wobei u fest, $u^\alpha \leq \max |u_i|^{\alpha_i}$:

$$\begin{aligned} \|R(\cdot, u)\|_p &\leq r \sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^\alpha}{\alpha!} \left\| \int_0^1 s^{r-1} \left| f^{(\alpha)}(\cdot + (s-1)u) - f^{(\alpha)}(\cdot) \right| ds \right\|_p \\ &\leq r \sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-1} \left\| f^{(\alpha)}(\cdot + (s-1)u) - f^{(\alpha)}(\cdot) \right\|_p ds \\ &\leq r \sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^\alpha}{\alpha!} \omega(f^{(\alpha)}; |u|) \int_0^1 s^{r-1} ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f) - f\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |\phi_\rho(u)| \sum_{|\alpha|=r} \frac{|u|^\alpha}{\alpha!} \omega(f^{(\alpha)}; u) du \\ &= \rho^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} |v|^\alpha |\phi(v)| \omega(f^{(\alpha)}; |v|\rho) dv \end{aligned}$$

Nun kann man allgemein

$$\omega(f; \lambda h)_p \leq (1 + \lambda) \omega(f; h)_p, \quad (2.1. 10)$$

zeigen, denn

$$\begin{aligned} \omega(f; \lambda h)_p &= \sup_{|u| \leq \lambda h} \|f(x+u) - f(x)\|_p \leq \sup_{|u| \leq \lambda} \left\| \sum_{i=1}^N f(x+u_i) - f(x+u_0) \right\|_p \\ &\leq N \sup_{|v| \leq h} \|f(v+h) - f(v)\|, \end{aligned}$$

wobei $u_N \equiv u$, $u_0 = 0$ und die u_i , $i = 1, \dots, N-1$, Punkte mit Abstand h auf der Strecke zwischen x und $x+u$ mit $|u_{N-1} - u_N| \leq h$ sind. Dann gilt $(N-1)h \leq \lambda h$ und daher (2.1. 10). Dies angewendet (mit $\lambda = |v|\rho$) ergibt

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq \rho^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega(f^{(\alpha)}; h) \int_{\mathbb{R}^m} |v|^\alpha \left(1 + \rho \frac{|v|}{h}\right) |\phi(v)| dv. \quad (2.1. 11)$$

Wähle dann $h = \rho$ und es folgt die Behauptung. \square

Man kann (mit Taylor-Entwicklung für $r = 1$) leicht abschätzen, daß für $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ und $\partial f / \partial u_i \in L_p(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \omega(f; \delta) &= \sup_{|u| \leq \delta} \left\| - \int_0^1 \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial u_i} f(x - u + su) ds \right\|_p \\ &\leq \sup_{|u| \leq \delta} \sum_{i=1}^m |u_i| \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial u_i} f(\cdot - u + su) \right\|_p \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\| \frac{\partial}{\partial u_i} f \right\|_p \delta \end{aligned} \quad (2.1. 12)$$

gilt. Damit ergibt sich wegen

$$(m+1)^k = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}$$

aus dem obigem Satz das folgende

Korollar 2.1.1 Für $f \in C^{r+1}(\mathbb{R}^m)$ und $\partial^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $|\alpha| = r + 1$, ist die Fehlerordnung der Approximation durch I_ρ gleich $r + 1$, genauer

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq \frac{m^r}{r!} \rho^{r+1} (\mu_r + \mu_{r+1}) \sup_{|\alpha|=r+1} \|f^{(\alpha)}\|_p.$$

Bemerkung 2.1.3 Im Fall $r = 0$ erhält man als Restglied

$$R(x, u) = - \sum_{i=1}^m u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f(x - u + su) ds,$$

und damit mit $r = 0$ in (2.1. 11)

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq (\|\phi\|_1 + \mu_1) \omega(f; \rho)_p.$$

Aus Satz 2.1.1 hingegen würde man mit

$$\kappa(t) \leq \int_{|u|>t} \frac{|u|}{t} |\phi(u)| du \leq \frac{\mu_1}{t}$$

nur

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq \|\phi\|_1 \omega(f; \delta)_p + 2\mu_1 \|f\|_p \frac{\rho}{\delta}$$

folgern können, und eine Abschätzung mit dem Stetigkeitsmodul nach (2.1. 12) nur für $\delta = \sqrt{\rho}$ erhalten.

2.1.3 Charakterisierung von Sobolev-Räumen

Die vorangegangenen Fehler- Abschätzungen sind typisch für die Approximationstheorie und werden noch mehrmals auftreten. Es soll nun Satz 2.2 von $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ auf endlich oft differenzierbare Funktionen ausgedehnt werden. Grob gesprochen wollen wir k -fach differenzierbare Funktionen in L_p -Normen betrachten. Wünschenswert ist die Vollständigkeit der so entstehenden Räume. Diese Eigenschaft definiert die sogenannten *Sobolev-Räume*.

Definition 2.1.1 (Sobolev-Räume) Die Sobolev-Räume $W^{r,p} \equiv W^{r,p}(\mathbb{R}^m)$ sind (für $r = 1, 2, \dots$ und $1 \leq p < \infty$) definiert als Vervollständigung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ im Sinne der Norm

$$\|f\|_{p,r} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \|f^{(\alpha)}\|_p,$$

d. h. $W^{r,p}$ ist die Menge aller Funktionen f aus L_p , zu denen eine Folge f_ϵ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ existiert mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f - f_\epsilon\|_p = 0$, derart daß es zu jedem $|\alpha| \leq r$ eine Funktion $D^\alpha f$ in L_p gibt, für die auch $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|D^\alpha f - f_\epsilon^{(\alpha)}\|_p = 0$ gilt. In Formeln bedeutet dies

$$W^{r,p} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^m) \mid (\exists \text{ Folge } f_\epsilon \text{ in } C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \wedge \forall |\alpha| \leq r \exists D^\alpha f \in L_p) : \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f - f_\epsilon\|_p = 0 \wedge \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|D^\alpha f - f_\epsilon^{(\alpha)}\|_p = 0 \right) \right\}$$

Falls $p = \infty$, so setzen wir

$$W^{r,\infty} := \left\{ f \in C^r(\mathbb{R}^m) : \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} \|f^{(\alpha)}\|_\infty < \infty \right\}$$

Bemerkung 2.1.4 Den Funktionen $D^\alpha f$, deren Existenz in dieser Definition gefordert wird, kann eine anschauliche Deutung als sogenannte schwache partielle Ableitungen α -ter Ordnung von f gegeben werden. Dazu führen wir diesen Ableitungsbegriff, der von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist, jetzt ein.

Definition 2.1.2 (Schwache Ableitung) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Eine Funktion $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^m)$ heißt schwache (partielle) Ableitung von f , geschrieben $f_\alpha = D^\alpha f$, falls für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\int_{\mathbb{R}^m} (D^\alpha f(x))\phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\phi^{(\alpha)}(x) dx. \quad (2.1. 13)$$

Die Funktionen $D^\alpha f$ existieren also nur in einem *schwachen Sinne*, nämlich mit Hilfe von Glättungen durch Integrale. Existiert eine partielle Ableitung $f^{(\alpha)}$ punktweise im üblichen Sinne und ist stetig, so ist (2.1. 13) natürlich erfüllt; $f^{(\alpha)}$ ist dann auch eine Ableitung im schwachen Sinne. In diesem Zusammenhang ist von entscheidender Bedeutung

Lemma 2.1.1 Existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ als Funktion in $L^p(\mathbb{R}^m)$, so ist sie eindeutig bestimmt (in $L^p(\mathbb{R}^m)$).

Wir beweisen dieses Lemma nicht, sondern bemerken nur, daß diese Aussage offenbar gleichbedeutend damit ist, dass $0 = \int_{\mathbb{R}^m} g\phi$ für $g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ und alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ impliziert, daß $g = 0$ fast überall gilt. Dafür wird ein Beweis im allgemeineren Rahmen der Distributionentheorie gegeben (siehe Lemma 2.17 unten).

Die Funktionen $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, deren Existenz in der Definition des Sobolev-Raumes gefordert wird, sind notwendigerweise schwache Ableitungen, denn für sie folgt mit partieller Integration

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f\phi^{(\alpha)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f_\epsilon \phi^{(\alpha)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} f_\epsilon^{(\alpha)} \phi = \int_{\mathbb{R}^m} (D^\alpha f)\phi,$$

d. h. (2.1. 13) ist erfüllt. Es gilt aber mehr: die Sobolev-Räume $W^{r,p}$ bestehen genau aus den Funktionen, die schwache Ableitungen bis zur Ordnung r besitzen, d.h. die Sobolev-Räume sind dadurch charakterisiert. Bevor wir dies beweisen, zeigen wir, daß die angestrebte Ergänzung von Satz 2.1.3 auf L_p -Normen mittels der Sobolev-Räume gelingt.

Korollar 2.1.2 Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3 an den Kern ϕ gilt für $f \in W^{r,p}$

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq (\mu_r + \mu_{r+1})\rho^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega(D^\alpha f; \rho)_p,$$

wobei die $D^\alpha f$ schwache Ableitungen von f in $L^p(\mathbb{R}^m)$ sind.

BEWEIS: Mit der Folge $\{f_\epsilon\}$ aus der vorigen Definition gilt nach (2.1. 11) und (2.1. 9)

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f) - f\|_p &\leq \|I_\rho(f - f_\epsilon)\|_p + \|I_\rho(f_\epsilon) - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - f\|_p \\ &\leq \|\phi_\rho\|_1 \|f - f_\epsilon\|_p + \|I_\rho(f_\epsilon) - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - f\|_p \\ &\leq (1 + \|\phi\|_1) \|f - f_\epsilon\|_p + \|I_\rho(f_\epsilon) - f_\epsilon\|_p \\ &\leq (1 + \|\phi\|_1) \|f - f_\epsilon\|_p + (\mu_r + \mu_{r+1}) \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega(f_\epsilon^{(\alpha)} - D^\alpha f + D^\alpha f; \rho)_p \\ &\leq (\mu_r + \mu_{r+1}) \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega(D^\alpha f; \rho)_p + 2(\mu_r + \mu_{r+1}) \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \|f_\epsilon^{(\alpha)} - D^\alpha f\|_p + (1 + \|\phi\|_1) \|f - f_\epsilon\|_p. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme streben für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 und damit folgt die Behauptung. \square

Der Vorbereitung für den Charakterisierungssatz für Sobolev-Räumen dient auch noch folgendes

Lemma 2.1.2 Sei $\phi(x)$ wie in Satz 2.1.3, aber zusätzlich gelte $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $\phi^{(\beta)} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ für $|\beta| \leq r$. Dann ist $I_\rho(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| I_\rho(f)^{(\beta)} - D^\beta f \right\|_p = 0$$

für alle $|\beta| \leq r$, falls $f \in W^{r,p}$.

BEWEIS: Differentiation von $I_\rho(f; x) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(x-u)f(u) du$ zeigt $I_\rho(f; x) \in C^\infty(\Omega)$, weil $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Nun betrachtet man die Folge f_ϵ aus der Definition der Sobolev-Räume. Analog zum vorherigen Korollar führt man für $|\beta| \leq r$ die Abschätzung

$$\left\| I_\rho(f)^{(\beta)} - D^\beta f \right\|_p \leq \left\| I_\rho(f)^{(\beta)} - I_\rho(f_\epsilon)^{(\beta)} \right\|_p + \left\| I_\rho(f_\epsilon)^{(\beta)} - f_\epsilon^{(\beta)} \right\|_p + \left\| f_\epsilon^{(\beta)} - D^\beta f \right\|_p, \quad (2.1.14)$$

durch, wobei man $I_\rho(f_\epsilon)^{(\beta)} = I_\rho(f_\epsilon^{(\beta)})$, d. h. Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral beachtet. Der erste Term wird weiter abgeschätzt durch

$$\left\| I_\rho(f)^{(\beta)} - I_\rho(f_\epsilon)^{(\beta)} \right\|_p = \left\| I_\rho(f - f_\epsilon)^{(\beta)} \right\|_p \leq \left\| \phi_\rho^{(\beta)} \right\|_p \|f_\epsilon - f\|_p$$

und

$$\left\| \phi_\rho^{(\beta)} \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} \rho^{|\beta|} \rho^m \left| \phi^{(\beta)}(\rho u) \right| du = \rho^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^m} \left| \phi^{(\beta)}(v) \right| dv = \rho^{|\beta|} \left\| \phi^{(\beta)} \right\|_1.$$

Zur Abschätzung des mittleren Terms in 2.1.14 benutzen wir die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{(\beta)}(x-u) - f_\epsilon^{(\beta)}(x) &= \\ \sum_{0 < |\alpha| < r - |\beta|} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} f_\epsilon^{(\alpha+\beta)}(x) &+ (r - |\beta|) \sum_{|\alpha| = r - |\beta|} \frac{(-u)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 s^{r-|\beta|-1} f_\epsilon^{(\alpha+\beta)}(x-u+s) ds. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Mit Satz 2.1.3 folgt dann

$$\left\| I_\rho \left(f_\epsilon^{(\beta)} - f_\epsilon^{(\beta)} \right) \right\|_p \leq (\mu_{r-|\beta|} + \mu_{r-|\beta|+1}) \sum_{|\alpha|=r-|\beta|} \frac{1}{\alpha!} \omega_1 \left(f_\epsilon^{(\alpha+\beta)}, \frac{1}{\rho} \right)$$

Aus dieser Fehlerabschätzung folgt speziell der zweite Teil der Aussage. \square

Damit kann folgende Charakterisierung der Sobolev-Räume gegeben werden:

Satz 2.1.4 Für $1 \leq p < \infty$ besteht der Sobolev-Raum $W^{r,p}$ aus der Menge aller Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R})$, für die für alle $|\beta| \leq r$ die schwachen Ableitungen $D^\beta f$ in $L^p(\mathbb{R}^m)$ existieren.

BEWEIS: Wie schon bemerkt sind die D^β aus Definition 2.1.1 die schwachen Ableitungen aus Definition 2.1.2. Wenn umgekehrt letztere $D^\beta f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, $|\beta| \leq r$ existieren, so bilde man

$$(f_\rho)^{(\beta)} := [I_\rho(f; x)]^{(\beta)} = \left[\frac{1}{\rho^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi \left(\frac{x-u}{\rho} \right) f(u) du \right]^{(\beta)}$$

und setze voraus, dass $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{supp } \phi \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq 1\}$. Wegen

$$\begin{aligned} I_\rho(f; x) &= \left| \int \phi(v) f(x-v\rho) dv \right| \\ &\leq C_\phi \int_{|v| \leq 1} |f(x-v\rho)| dv = C_\phi \int_{|u-x| \leq \rho} |f(u)| du \end{aligned}$$

folgt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} I_\rho(f; x) = 0$ für festes ρ , d. h. $f_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Wir zeigen, daß die Folge $\{f_\rho\}$ den Forderungen aus der Definition der Sobolev-Räume genügt. Dazu beachte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} I_\rho(f)^{(\beta)} \phi &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^m} I_\rho(f) \phi^{(\beta)} = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(v) f(x-v) dv \right] \phi^{(\beta)}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(v) (-1)^{|\beta|} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x-v) \phi^{(\beta)}(x) dx \right] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(v) \int_{\mathbb{R}^m} [D^\beta f(x-v) \phi(x) dx] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \left[\int_{\mathbb{R}^m} \phi_\rho(x-u) (D^\beta f)(u) du \right] dx = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) I_\rho(D^\beta f; x) dx, \end{aligned}$$

so daß wegen der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung $D^\beta(I_\rho(f)) = I_\rho(D^\beta f) = I_\rho(f)^{(\beta)}$ gilt. Damit erfüllt die Folge $\{f_\rho\}$ also die Voraussetzungen aus der Definition des Sobolev-Raumes in Bezug auf f , d. h. $f \in W^{r,p}$, was zu zeigen war. \square

Korollar 2.1.3 *Gilt für $f \in W^{r,p}$, daß alle schwachen Ableitungen $D^\beta f$, $|\beta| = r$ verschwinden, so muß f fast überall gleich einem Polynom vom totalen Grad $r - 1$ sein.*

BEWEIS: Der vorige Beweis zeigt, daß in diesem Falle $0 = I_\rho(D^\beta f) = I_\rho(f)^{(\beta)}$ gilt. Es ist $I_\rho(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, so daß man daraus in der üblichen Weise schließen kann, daß die $I_\rho(f)$ Polynome vom totalen Grad r sind. Die Menge dieser Polynome, restringiert auf eine beschränkte Kugel im \mathbb{R}^m , ist aber abgeschlossen in jeder Norm, so daß wegen Satz 2.1.1 die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 2.1.5 *Sobolev-Räume werden üblicherweise für beliebige Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ definiert. Dies geschieht genau wie in Definition 2.1.1, nur daß \mathbb{R}^m durch Ω ersetzt wird. Man bezeichnet sie mit $W^{r,p}(\Omega)$. Mit verfeinerten Argumenten kann man dann die Aussagen dieses Abschnitts auf diese Sobolev-Räume erweitern, s. [Adams], Kapitel III.*

2.2 Grundlagen der Fourieranalysis

2.2.1 Fouriertransformation in L_1

Die Fouriertransformation und die durch sie bereitgestellten Hilfsmittel sind von grundlegender Bedeutung für diese Vorlesung. Wir stellen deshalb zuerst die grundlegenden Resultate vor und beschreiben dabei den Weg, der in [Stein71] eingeschlagen wird, d. h. wir betrachten zuerst die L_1 -Theorie.

Definition 2.2.1 (Fourier-Transformierte) Gegeben $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so ist die Fourier-Transformierte von f gegeben durch

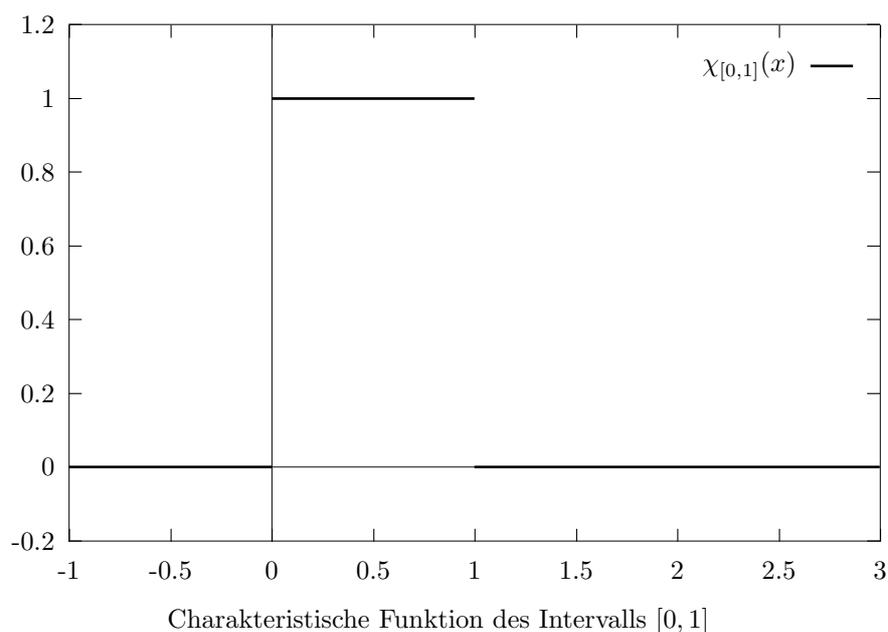
$$\mathcal{F}f(v) \equiv \hat{f}(v) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix \cdot v} f(x) dx, \quad (2.2.1)$$

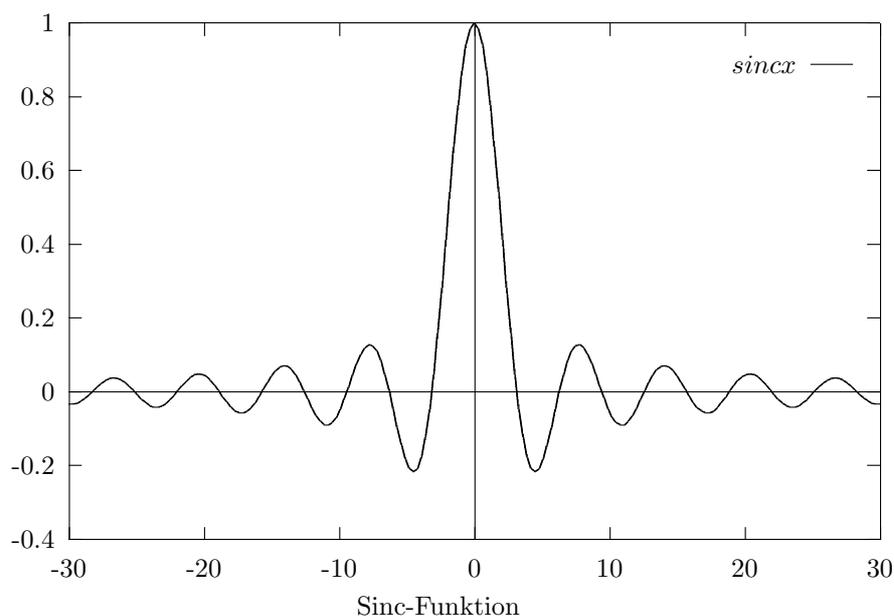
wobei $x \cdot v$ das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^m bedeutet.

Als erstes soll die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion $\chi_I(x)$ eines Quaders $I = [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_m, a_m]$ berechnet werden, die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_I(v) &= \int_{-a_1}^{a_1} e^{-iv_1 x_1} dx_1 \cdots \int_{-a_m}^{a_m} e^{-iv_m x_m} dx_m \\ &= \left[\frac{e^{-ix_1 v_1}}{iv_1} \right]_{x_1=-a_1}^{a_1} \cdots \left[\frac{e^{-ix_m v_m}}{iv_m} \right]_{x_m=-a_m}^{a_m} \\ &= 2a_1 \left(\frac{e^{ia_1 v_1} - e^{-ia_1 v_1}}{2iv_1 a_1} \right) \cdots 2a_m \left(\frac{e^{ia_m v_m} - e^{-ia_m v_m}}{2ia_m v_m} \right) \end{aligned}$$

Sie ist also das Produkt von Fourier-Transformationen der charakteristischen Funktionen von Intervallen.





Diese lassen sich bequem mit Hilfe der sogenannten *Sinc*- Funktion ausdrücken :

Definition 2.2.2 (Sinc-Funktion) Die *Sinc-Funktion* ist punktweise definiert als

$$\operatorname{sinc} x := \frac{\sin x}{x}.$$

Dies ist so zu lesen, dass der Wert an der Stelle $x = 0$ der Grenzwert dieses Bruches ist, d.h. $\operatorname{sinc} 0 = 1$.

Damit folgt für die Fourier-Transformation der charakteristischen Funktion $\chi_I(x)$

$$\hat{\chi}_I(v) = 2^m \prod_{l=1}^m a_l \operatorname{sinc}(a_l v_l).$$

Bemerkung 2.2.1 Offensichtlich hat $\chi_{[0,1]}(x)$ einen kompakten Träger – was bei der *Sinc-Funktion* nicht der Fall ist. Dies ist ein Beispiel für die später noch genauer beschriebene Tatsache, daß eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte nicht gleichzeitig kompakten Träger haben können. Weitergehende und auch genauere Aussagen über dieses Phänomen werden in Abschnitt 4.1.1 vorgestellt, unter Anderem der Zusammenhang mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

Lemma 2.2.1 (Riemann-Lebesgue) Die Fouriertransformation ist eine lineare beschränkte Abbildung von $L_1(\mathbb{R}^m)$ in $CB(\mathbb{R}^m)$, d.h. es gilt

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1; \quad (2.2. 2)$$

mehr noch, \hat{f} liegt sogar in $C_0(\mathbb{R}^m)$.

BEWEIS: Die Stetigkeit von \hat{f} folgt aus

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(v) - \hat{f}(v+h) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-iv \cdot x} (1 - e^{-ih \cdot x}) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| |1 - e^{-ih \cdot x}| dx \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (s.Kapitel 1). Für den zweiten Teil beachte zunächst, daß

nach dem vorangegangenen Beispiel für $f = \chi_I$ mit beliebigem I offenkundig $|\hat{f}(v)| \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ gilt. Dann folgt die Aussage durch Approximation eines beliebigen f im L_1 -Mittel durch *einfache Funktionen* (d.h. Stufenfunktionen die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen), indem man in der Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{f}(v)| &\leq \left| \hat{f}(v) - \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}(v) \right| + \left| \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}(v) \right| \\ &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k} \right\|_1 + \left| \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}(v) \right| \end{aligned}$$

zunächst N und dann $|v|$ genügend groß werden läßt. \square

Wir listen nun einige grundlegende Eigenschaften der Fourier-Transformation für L_1 -Funktionen auf, die im Folgenden immer wieder gebraucht werden.

Definition 2.2.3 (Differentialoperator-Polynom) Ist $P(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ ein Polynom auf \mathbb{R}^m mit Monom $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, dann ist der zugehörige Differentialoperator $P(D)$ definiert als $P(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$ mit

$$D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\alpha_m}.$$

Lemma 2.2.2 (Elementare Eigenschaften der Fourier-Transformation) Sei f eine Funktion aus $L_1(\mathbb{R}^m)$.

1. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\mathcal{F}(f(\alpha \cdot))(v) = \frac{1}{\alpha^m} \hat{f}\left(\frac{v}{\alpha}\right).$$

2. Für den Translations-Operator $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}^m$, gilt

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(v) = e^{iv \cdot h} \hat{f}(v).$$

3. Existieren die in $P(D)$ auftretenden partiellen Ableitungen D^{α} und alle Ableitungen D^{β} mit $\beta \leq \alpha$ bzw. $\beta_i \leq \alpha_i$ im starken Sinn, d.h. im Sinne von $L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt

$$\mathcal{F}(P(D)f)(v) = P(-iv) \hat{f}(v),$$

d. h. die Differentiation geht über in eine Multiplikation.

4. Gehört außer f auch $P(-ix)f(x)$ zu $L_1(\mathbb{R}^m)$, dann gilt

$$P(-iD)\hat{f}(v) = \mathcal{F}[P(ix)f(x)](v).$$

5. Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so existiert die Faltung $f * g$ und es gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(v) = \hat{f}(v) \hat{g}(v).$$

6. Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt

$$f(v)g(v) = \frac{1}{(2\pi)^m} (\hat{f} * \hat{g})(v).$$

Zum Beweis sei bemerkt, dass (1) und (2) direkt durch Nachrechnen zu verifizieren sind.

In (3) betrachten wir nur den Fall einer partiellen Ableitung $\partial/\partial x_j$ erster Ordnung. Existiert sie im starken Sinne, so gilt per Definition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} - g(x) \right\|_1 = 0$$

mit einer Funktion $g = \partial f/\partial x_j \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Bildet man die Fourier-Transformierte des Ausdrucks in der Norm, so gilt mit (2) und (2.2. 2)

$$\left\| \frac{e^{-iv \cdot h} - 1}{h} \hat{f}(v) - \hat{g}(v) \right\|_\infty \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Daraus folgt direkt

$$\frac{\hat{\partial}}{\partial x_j} f(v) = \hat{g}(v) = -iv \hat{f}(v), \quad \text{f.ü.}$$

Der Beweis von (4) folgt z.B. für $P(x) = x_1$ durch Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz auf

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[e^{-ix \cdot (v + e_1 h)} - e^{-ix \cdot v} \right] dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) (-ix_1) e^{-ix \cdot v} \left[\frac{e^{-ix_1 h} - 1}{-ix_1 h} \right] dx$$

Der wesentliche Punkt bei (5) ist die Existenz der Faltung $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, die schon in (1.4.1) allgemein betrachtet wurde. Wendet man dann den Satz von Fubini auf den Integranden $f(x - u) \exp[-iv \cdot (x - u)]g(u) \exp(-iv \cdot u)$ an, so folgt nach Vertauschung der Integrationen die Behauptung.

Teil (6) ergibt sich aus (5), falls wir die Umkehr-Abbildung der Fourier-Transformation benutzen, die wir nun näher betrachten.

Bemerkung 2.2.2 *Im Allgemeinen gilt nicht $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Ein Gegenbeispiel (im Fall $m = 1$) ist die schon anfangs betrachtete Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion eines Intervalls $[-a, a]$, $a > 0$:*

$$f(x) = \chi_{[-a, a]}(x) \implies \hat{f}(v) = 2a \operatorname{sinc} av.$$

Diese Funktion ist zwar analytisch, liegt aber nicht in L_1 .

Die Definition einer Umkehrtransformation ist also (wenn man den Raum L_1 nicht verlassen will) problematisch. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig, die beschrieben werden in

Satz 2.2.1 (Inverse Fourier-Transformation in L_1)

1. Sind $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt die Parseval-Relation

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(u)g(u) du = \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\hat{g}(u) du.$$

2. Gilt für eine Dirac-Folge mit Kern $\phi_\rho(u) := \varrho^{-d}\phi(u/\rho)$, $\rho > 0$, zusätzlich $\phi(u) = \phi(-u)$, und $\phi(u) = \hat{\Phi}(u)$ mit einem $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap C(\mathbb{R}^m)$, so besitzt $I_\rho(f; x)$ aus (2.1. 2) die Darstellung

$$I_\rho(f; x) = \frac{1}{\rho^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi\left(\frac{u}{\rho}\right) f(x + u) du = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(\rho v) \hat{f}(v) e^{ix \cdot v} dv. \quad (2.2. 3)$$

3. Gilt in Teil (2) zusätzlich $\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) dx = 1$, so ist $I_\rho(f; x)$ ein Summationsprozess für das formale Integral $\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) \exp(ix \cdot v) dv$ mit Grenzwert $f(x)$ im L_1 -Sinn. Insbesondere folgt aus $\hat{f}(v) =$

$\hat{g}(v)$ für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, daß $f = g$ fast überall gelten muss, d.h. die Injektivität der Fourier-Transformation. Ist $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$, so gilt

$$f(x) = \Phi(0) \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) e^{ix \cdot v} dv \quad (2.2.4)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$, d.h. diese Operation beschreibt die inverse Fourier-Transformation (auch Fourier-Umkehrtransformation genannt).

BEWEIS: Zu (1): Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(u) e^{-iu \cdot x} du \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-iu \cdot x} dx \right) f(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(u) \hat{g}(u) du \end{aligned}$$

Der Satz von Fubini ist anwendbar, da z.B. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\|\hat{g}\|_\infty \leq \|g\|_1$ nach Lemma 2.2.2 eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x)\hat{g}(x)$ ergeben. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Zu (2): Nach (1) sowie Teil (1) und (2) aus Lemma 2.2.2 gilt

$$\begin{aligned} I_\rho(f; x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\rho^m} \phi\left(\frac{u}{\rho}\right) f(x+u) du = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\rho^m} \hat{\Phi}\left(\frac{u}{\rho}\right) (\tau_x f)(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(\rho v) \hat{f}(v) e^{iv \cdot x} dv \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Teilaussage bewiesen.

Zu (3): Wir haben in Satz 2.1.1 gezeigt, daß mit der angegebenen Normierung von $\phi \lim_{\rho \rightarrow +0} I_\rho(f; x) = f(x)$ im Sinne von $L_1(\mathbb{R}^m)$ gilt. Wegen $\lim_{\rho \rightarrow +0} \Phi(\rho v) = \Phi(0)$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ bedeutet dies, daß der Grenzwert des zweiten Integrals in (2) formal als das Integral aus (2.2.4) geschrieben werden kann. Man nennt dies einen *Summationsprozess* für das Integral. Im Falle $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ existiert der Grenzwert im strengen Sinne nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn $|\hat{f}(v)| \|\Phi\|_\infty$ ist eine von ρ unabhängige Majorante in $L_1(\mathbb{R}^m)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Um die Voraussetzungen von Teil 3 des Satzes zu erfüllen müssen wir eine Funktion $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ finden, deren Fouriertransformierte wieder in $L_1(\mathbb{R}^m)$ liegt. Außerdem müssen wir $\int_{\mathbb{R}^m} \phi(u) du = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\Phi}(u) du = 1$ erreichen, was zu dem richtigen Faktor in der Umkehrformel (2.2.4) führen wird. Dieser ist ja – wie aus dem Beweis hervorgeht – unabhängig von der Funktion f . Dazu bestimmen wir die Fouriertransformierte des Gauß-Weierstraß-Kerns. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi\alpha|x|^2} e^{-ix \cdot v} dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|u|^2 - iuv/\sqrt{\pi\alpha}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|u+iv/2\sqrt{\pi\alpha}|^2} e^{-|v|^2/4\pi\alpha} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}^m} e^{-|v|^2/4\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-|u|^2} du = \frac{1}{\sqrt{\alpha}^m} e^{-|v|^2/4\pi\alpha} \end{aligned}$$

Setzt man nun $\alpha = 1/2\pi$ an, so erhält man die Gaußsche Glockenkurve, also

$$W(x) = \exp(-|x|^2/2), \quad \hat{W}(v) = \sqrt{2\pi}^m W\left(\frac{v}{2}\right).$$

Mit der Schreibweise $\Phi(x) = \alpha W(x)$ folgt dann die Bedingung

$$1 = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^m} \hat{W}(v) dv = \sqrt{2\pi}^m \alpha \int_{\mathbb{R}^m} W(v) dv = \sqrt{2\pi}^m \alpha \hat{W}(0) = (2\pi)^m \alpha,$$

Also ist $\alpha = (2\pi)^{-m}$ und man erhält – falls $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ – als **Fourier– Umkehrtransformation**

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v) e^{ix \cdot v} dv := \mathcal{F}^{-1} \hat{f}(v). \quad (2.2. 5)$$

Damit ist die L_1 -Theorie der Fourier-Transformation im Wesentlichen vorgestellt. Als Nachtrag sei bemerkt, daß im Falle $\hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ aus (5)

$$(fg)(v) = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}(v) \mathcal{F}^{-1} \hat{g}(v) = \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}^{-1} \hat{f} * \hat{g}(v)$$

folgt, d.h. (6).

2.2.2 Fouriertransformation in L_2

Um eine L_2 -Theorie der Fourier-Transformation aufzubauen, benötigen wir den folgenden

Satz 2.2.2 (Isometrie der Fourier-Transformation) *Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, so gilt*

$$\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^m \|f\|_2^2$$

BEWEIS: Wir zeigen die Gleichheit der beiden Ausdrücke, indem wir den linken durch den rechten zuerst nach oben und dann nach unten abschätzen. Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, $g(x) := \overline{f(-x)}$. Dann gilt

$$\hat{g}(v) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{\pi i v \cdot x} \overline{f(-x)} dx = \overline{\hat{f}(v)}.$$

Bildet man die Faltung $h \equiv f * g$, so ist $h \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und nach (2.2.2) folgt damit $\hat{h} = \hat{f} \hat{g} = |\hat{f}|^2$.

Nun betrachten wir eine Dirac-Folge zu h wie in (2.1. 2). Speziell nehmen wir den Gauß-Kern $\phi(u) = \hat{\Phi}(u)$ mit $\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} W(x)$ wegen der richtigen Normierung, d. h. nach Teil 2 von 2.2.1

$$I_\rho(h; x) = \frac{1}{\rho^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi\left(\frac{u}{\rho}\right) h(x+u) du = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} W(\rho v) e^{ix \cdot v} \hat{h}(v) dv. \quad (2.2. 6)$$

Dann beachtet man, daß $h = f * g$ gleichmäßig stetig ist, denn mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |h(x+\delta) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} [f(x+\delta-u) - f(x-u)] g(u) du \right| \\ &\leq \|f(x+\delta-\cdot) - f(x-\cdot)\|_2 \|g\|_2 \\ &\leq \omega_1(f; \delta)_{L_2} \|f\|_2 \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also folgt nach der punktweisen Abschätzung (siehe Bemerkung 2 zu Satz 2.1.1) speziell für $x = 0$:

$$h(0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^m} W(\rho v) \hat{h}(v) dv \geq \liminf_{\rho \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\rho v) |\hat{f}(v)|^2 dv.$$

Wegen

$$\liminf_{\rho \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\rho v) |\hat{f}(v)|^2 dv = \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)|^2 dv \in L_1(\mathbb{R}^m)$$

folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)|^2 dv \leq h(0) = \int_{\mathbb{R}^m} f(0-x) \overline{f(-x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 dx,$$

d.h. die Abschätzung nach oben. Für den Gauß-Kern gilt außerdem (s.o.) $W(x) = e^{-|x|^2} \leq 1$, so daß nach (2.2. 6) auch

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 dx = h(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} I_\rho(h; 0) \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{h}(v) dv = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)|^2 dv,$$

d.h. die Abschätzung nach unten folgt. Damit ist Satz 2.2.2 bewiesen. \square

Dieser fundamentale Satz erlaubt es, die Fourier-Transformation im L_2 -Sinn in einfacher Weise zu definieren, wobei $L_2(\mathbb{R}^m)$ jetzt als Raum *komplexwertiger* Funktionen zu verstehen ist.

Definition 2.2.4 (L_2 -Fourier-Transformation) Für $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(v) \equiv \hat{f}(v) := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq N} f(x) e^{ix \cdot v} dx.$$

Zur Wohldefiniertheit benutzen wir folgenden, einfach zu verifizierenden und aus der Funktionalanalysis wohlbekannten

Satz Ist T ein linearer und beschränkter Operator auf einer dichten Teilmenge \mathcal{D} eines linearen normierten Raumes X , so besitzt T eine eindeutig definierte stetige Fortsetzung auf ganz X .

Wir wenden diesen Satz auf $\mathcal{D} = L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ als dichter Teilmenge von $X = L_2(\mathbb{R}^m)$ an. Natürlich gilt dann

$$\mathcal{F}f(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n(v)$$

für jede Folge $f_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, die im L_2 -Sinne gegen f konvergiert.

Satz 2.2.3 (Plancherel) Die inverse Fourier-Transformation im L_2 -Sinne, die wir mit \mathcal{F}^{-1} bezeichnen werden, erhalten wir durch $\mathcal{F}^{-1}f(v) = (2\pi)^m \mathcal{F}f(-v)$, \mathcal{F} wie in Definition (2.2.1). \mathcal{F}^{-1} ist auf ganz $L_2(\mathbb{R}^m)$ definiert, insbesondere ist \mathcal{F} ein bis auf einen Faktor $(2\pi)^m$ unitärer Operator auf $L_2(\mathbb{R}^m)$. Insbesondere gelten für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^m} f\hat{g} \quad (\text{Parsevalsche Formel}). \quad (2.2. 7)$$

Dabei bedeutet (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt im L_2 -Sinn.

BEWEIS: \mathcal{F} ist nach dem vorigen Satz bis auf einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}^m$ isometrisch, denn gegeben $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0 \quad \forall f_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$$

folgt

$$\left| \|\mathcal{F}f\|_2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \|f_n\|_2 \right| = \left| \|\mathcal{F}f\|_2 - \|\mathcal{F}f_n\|_2 \right| \leq \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Die Bildung der inversen Fourier-Transformierten führen wir ebenfalls auf den Fall $f_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ zurück. Wegen $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ folgt nach dem Vorstehenden

$$\left\| f(v) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \mathcal{F}\hat{f}(-v) \right\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(v) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \mathcal{F}\hat{f}_n(-v) \right\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(v) - f_n(v)\|_2 = 0,$$

d. h. die Bildung $g \in L_2(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathcal{F}g(-v)$ liefert die Linksinverse der Fouriertransformation; ferner folgt $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}^m)) = L_2(\mathbb{R}^m)$. Auf die gleiche Weise folgt auch

$$\|f(v) - \mathcal{F}\mathcal{F}f(\cdot)(v)\|_2 = 0,$$

so dass $\mathcal{F}^{-1}g(v) := \mathcal{F}f(-v)$ auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt.

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts in der L_2 -Norm sieht man, dass die Parsevalsche Formel sich durch denselben Grenzübergang wie vorher aus Satz (2.2.1), Teil (1) ergibt. Schreibt man für das Skalarprodukt $\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} dx = (\hat{f}, \hat{g})$, so verifiziert man damit

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\overline{\hat{g}(v)} dv = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\mathcal{F}^{-1}\overline{\hat{g}}(v) dv = (2\pi)^m(f, g). \quad (2.2. 8)$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Ohne Beweis bemerken wir, dass sich alle Eigenschaften aus (2.2.2) auch auf die Fourier-Transformation in $L_1(\mathbb{R}^m)$ übertragen; dies geschieht mit den gleichen Methoden wie oben.

In einem späteren Abschnitt taucht das Problem auf, die Faltung von zwei Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ sowie deren Fourier-Transformierte zu bilden bzw. die Konvergenz der entsprechenden Integrale zu klären. Dazu dient

Lemma 2.2.3 (Faltung von L_2 -Funktionen) *Es seien $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Dann ist die Faltung $(f * g)(x)$ für jedes x definiert und stetig. Ferner gilt $\hat{f}(v)\hat{g}(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x_i| \leq N} (f * g)(x)e^{-iv \cdot x} dx = \hat{f}(v)\hat{g}(v) \quad (2.2. 9)$$

in jedem Stetigkeitspunkt von $\hat{f}(v)\hat{g}(v)$.

BEWEIS: Man arbeitet zunächst mit Folgen $f_n, g_n \in L_1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$, die in L_2 -Sinn gegen f bzw. g konvergieren. Dann ist die Faltung $f_n * g_n$ wie im L_1 -Fall definiert und $\mathcal{F}(f_n * g_n) = \hat{f}_n\hat{g}_n$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt $\|\hat{f}_n\hat{g}_n\|_1 \leq \|\hat{f}_n\|_2 \|\hat{g}_n\|_2 = (2\pi)^m \|f_n\|_2 \|g_n\|_2$ und weiter

$$\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\|_1 \leq \left(\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_1 \|\hat{g}_n\|_1 + \|\hat{f}\|\|\hat{g}_n - \hat{g}\|_1 \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Auf $\hat{f}\hat{g} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ ist die Fourier-Umkehrformel anwendbar. Es sei also $\psi(x) := (2\pi)^{-m}\mathcal{F}\hat{f}\hat{g}(-x)$. Dann folgt

$$\|\psi - f_n * g_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{(2\pi)^m} \mathcal{F}\hat{f}\hat{g} - \hat{f}_n\hat{g}_n \right\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \|\hat{f}\hat{g} - \hat{f}_n\hat{g}_n\|_1 \rightarrow 0$$

Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß auch

$$\|f * g - f_n * g_n\|_\infty \rightarrow 0$$

gilt, so daß $f * g$ eine stetige Funktion ist. Wir könnten dann auf $f * g$ die Fourier-Transformation im distributionellen Sinne anwenden und damit $\hat{f}(v)\hat{g}(v)$ im Sinne der Distributionen als Fourier-Transformierte von $f * g$ erklären. Anschaulicher ist Formel (2.2. 9), die man durch folgende Betrachtung gewinnt:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x_i| \leq N} (f * g)(x)e^{-iv \cdot x} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_N(x)\mathcal{F}\hat{f}\hat{g}(-x)e^{-iv \cdot x} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^m \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{l=1}^m \text{sinc } N(v_l - u_l) \right) \hat{f}(u)\hat{g}(u) du, \end{aligned}$$

wobei $\chi_N(u) = \prod_{l=1}^m \chi_{[-N, N]}(u)$ und die Isometrieformel der Fourier-Transformation angewandt wurde. Mit der Variablensubstitution $x := N(u - v)$ folgt weiter

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x_i| \leq N} (f * g)(x)e^{-iv \cdot x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{l=1}^m \text{sinc } x_l \right) \hat{f}\left(v - \frac{x}{N}\right)\hat{g}\left(v - \frac{x}{N}\right) dx.$$

Wegen $|\operatorname{sinc} x| \leq 1$ hat die Funktionenfolge im Integranden hier offensichtlich eine Majorante in $L_1(\mathbb{R}^m)$, so daß mit dem Lebesgueschen Satz über majorisierte Konvergenz aus dem Vorigen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x_i| \leq N} (f * g)(x) e^{-iv \cdot x} dx = \hat{f}(v) \hat{g}(v) \operatorname{sinc} 0 = \hat{f}(v) \hat{g}(v)$$

– wie in (2.2. 9) angegeben – folgt. \square

2.2.3 Poisson-Summationsformel

Sei \mathbb{T}^m der m -dimensionale Torus $[0, 2\pi]^m$. Für $1 \leq p < \infty$ sei $X(\mathbb{T}^m)$ die Klasse der in jeder Variablen 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R}^m , die in $L_p(\mathbb{T}^m)$ liegen. Für $p = \infty$ sei $X(\mathbb{T}^m)$ die entsprechende Klasse von Funktionen die in $C(\mathbb{T}^m)$ liegen. Man kann dann die *formale* Fourier-Reihe

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}[k] e^{ik \cdot x}, \quad \hat{f}[k] := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(x) e^{-ik \cdot x}, \quad (2.2. 10)$$

bilden. \mathbb{Z}^m bezeichnet die Menge der ganzzahligen Gitterpunkte des \mathbb{R}^m . Die Theorie der univariaten Fourierreihen wird nun hierauf verallgemeinert. Grundlegende Tatsachen sind in den folgenden Sätzen zusammengefasst:

Satz 2.2.4 (Weierstraß) *Die trigonometrischen Polynome auf \mathbb{R}^m , d.h. diejenigen Funktionen, die in jeder Variablen trigonometrische Polynome sind, liegen dicht in (der Norm von) $X(\mathbb{T}^m)$.*

BEWEIS: Wir zeigen dies nur für den Fall $p = \infty$ und bilden dazu den Fejerschen Summationsprozess

$$L_N(g; v) := (F_{m,N} * \cdots * F_{1,N} * g)(v), \quad g \in C(\mathbb{T}^m)$$

wobei jede Faltung eine univariate Faltung in der jeweiligen Komponente v_j sein soll, d. h.

$$(F_{j,N} * g)(v) := \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u_j) g(v - u_j) du_j \quad (2.2. 11)$$

mit

$$F_N(x) := \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=0}^N D_k(x).$$

Dabei kann g auch eine 2π -periodische Funktion in $L_1(\mathbb{R}^m)$ sein. $D_N(x)$ ist der sogenannte *Dirichlet-Kern*, d. h.

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)}. \quad (2.2. 12)$$

Man kann ferner die Identität

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)} \right)^2 \quad (2.2. 13)$$

zeigen, so dass der sogenannte **Fejer-Kern** $F_N(x)$ nichtnegativ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|F_{m,N} * g\|_{\infty} &= \left\| \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v_m) g(\cdot - v_m) dv_m \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(v_m)| dv_m \\ &= \frac{1}{2\pi} \|g\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(v_m) dv_m = \|g\|_{\infty} \end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung dieser Ungleichung zeigt

$$\|L_N(g; v)\|_\infty \leq \|g(v)\|_\infty$$

Mit Hilfe der Abschätzung

$$\int_{\delta \leq x \leq \pi} |F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{1}{\sin^2 \delta/2}, \quad \delta > 0,$$

kann man analog zum Korollar zu Satz 2.1.1 zeigen, dass in jedem Stetigkeitspunkt von $g(v)$ – also fast überall – gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N(g; v) = g(v). \quad (2.2. 14)$$

□

Die beiden folgenden Sätze wollen wir nicht mehr beweisen, sondern bemerken nur, daß sie nach klassischem Muster aus dem Satz von Weierstraß folgen ($\hat{f}[k]$ bezeichnet die *Fourier-Koeffizienten*).

Satz 2.2.5 (Eindeutigkeitssatz) Sei $f \in X(\mathbb{T}^m)$. Falls $\hat{f}[k] = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^m$, so ist $f = 0$ fast überall.

Satz 2.2.6 (Riesz-Fischer) Für $f \in L_2(\mathbb{T}^m)$ konvergiert die Reihe (2.2. 10) in $L_2(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\hat{f}[k]|^2 = (\|f\|_{L_2})^2$$

Wir arbeiten nun auf die *Poisson-Summationsformel* hin, die einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den Fourierreihen und der Fouriertransformation herstellt.

Definition 2.2.5 (Periodisierung) Gegeben sei eine Funktion f auf \mathbb{R}^m . Dann heißt

$$f^*(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f(x + 2\pi l) \quad (2.2. 15)$$

die (formale) Periodisierung der Funktion f auf \mathbb{R}^m falls die rechte Seite von (2.2. 15) fast überall definiert ist.

Es ist klar, daß die Funktion f^* in jeder Variablen periodisch mit Periode 1 ist, denn der Übergang $x \mapsto x + l$, $l \in \mathbb{Z}^m$, bedeutet lediglich eine Umordnung der Terme in (2.2. 15). Man sieht daran, daß es sinnvoll ist, die absolute Konvergenz von (2.2. 15) zu fordern.

Wir wollen nun zeigen, daß man die Fourierreihe von f^* mittels der Fouriertransformierten von f berechnen kann. Dies führt auf die Poisson-Summationsformel.

Lemma 2.2.4 Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Dann konvergiert (2.2. 15) absolut im Sinne der Norm von $L_1(\mathbb{R}^m)$ gegen $f^* \in L_1(\mathbb{T}^m)$. Es gilt

$$\hat{f}^*[k] = (2\pi)^{-m} \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^m. \quad (2.2. 16)$$

BEWEIS: f^* ist meßbar und

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{L_1(\mathbb{T}^m)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x)| dx_1 \dots dx_m \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x - 2\pi l)| dx_1 \dots dx_m = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx \end{aligned}$$

Das Zeichen “ \leq ” bedeutet speziell, daß die Konvergenz von (2.2. 15) absolut und im Sinne von $L_1(\mathbb{T}^m)$ stattfindet. Speziell hat jede Umordnung der Reihe den gleichen Limes in $L_1(\mathbb{T}^m)$, so daß f^* 2π -periodisch in jeder Variablen ist.

Man kann nun dasselbe Vorgehen auf den Integranden $f^*(x) \exp(-ik \cdot x)$ anwenden und erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f^*(x) e^{-ik \cdot x} dx &= \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} f^*(x + 2\pi l) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} f^*(x + 2\pi l) e^{-ik \cdot (x + 2\pi l)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(2\pi)^m} f(x) e^{-ik \cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summe und Integral war hier erlaubt und somit ist (2.2. 16) gezeigt. \square

Man kann nun den Zusammenhang aus (2.2.4) ausnutzen in folgendem

Satz 2.2.7 (Poisson-Summationsformel) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue) und $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}[k]$ sei absolut konvergent. Dann läßt sich die in (2.2. 15) definierte Funktion f^* auf einer Nullmenge des \mathbb{R}^m dergestalt abändern, daß

$$f^*(x) \equiv \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f(x + 2\pi l) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}f(k) e^{ik \cdot x} \quad (2.2. 17)$$

für alle x gilt. Sind f und f^* zusätzlich stetig, so braucht man dazu f^* nicht abzuändern; speziell gilt dann

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f(2\pi l) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}f(k). \quad (2.2. 18)$$

BEWEIS: Die Reihe

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}f(k) e^{ik \cdot x}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig in $x \in \mathbb{T}^m$. Das Ergebnis g ist dann eine stetige Funktion auf \mathbb{T}^m , deren Fourierkoeffizienten nach dem vorigen Lemma gleich denen von $f^* \in L_1(\mathbb{T}^m)$ sind. Nach Satz 2.2.5 müssen dann g und f^* fast überall gleich sein. Damit ist (2.2. 17) bewiesen – die restliche Aussage folgt daraus. \square

Bemerkung 2.2.3 Eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (2.2. 17) ist, daß \hat{f} das Aklingverhalten $|\hat{f}(v)| \leq A(1 + |v|)^{-m-\delta}$ mit $A > 0$ und $\delta > 0$ hat.

Wendet man Satz 2.2.7 auf Funktionen $f = \hat{g}$ an, so erhält man als Variante der Poisson-Summationsformel

Korollar 2.2.1 Seien g und \hat{g} aus $L_1(\mathbb{R}^m)$ (womit g nach Lemma 2.2.1 in $C_0(\mathbb{R}^m)$ liegt) und $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} g(k)$ sei absolut konvergent. Dann gilt

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} g(l) e^{-il \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{g}(x + 2\pi k)$$

2.3 Approximation mit bandbegrenzten Funktionen

2.3.1 Grundlagen

Die Klasse der bandbegrenzte Funktionen (*band-limited functions*) spielt für die Approximations-Theorie im Rahmen der Fourieranalysis eine zentrale Rolle.

Definition 2.3.1 (Bandbegrenzte Funktionen in $L_2(\mathbb{R}^m)$) Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ heißt bandbegrenzt, falls es ein beschränktes Gebiet $W \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so daß $\text{supp } \hat{f} \subseteq W$.

Dieser Name rührt von der (mathematischen) Physik her, nach der das Spektrum eines Signals (z. B. einer elektromagnetischen Schwingung) durch seine Fouriertransformierte gegeben ist. Am Ende dieses Abschnitts werden wir kurz die Grundprinzipien der Signalverarbeitung erläutern, die eine schöne Veranschaulichung dieser Funktionen bieten. Zunächst folgt aus obiger Definition

Lemma 2.3.1 Eine bandbegrenzte Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ hat eine analytische Fortsetzung $F(z)$ auf den Raum \mathbb{C}^m der m -Tupel von komplexen Zahlen, d. h. $F(z)$ ist eine ganze Funktion auf \mathbb{C}^m . Im Spezialfall $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| \leq \sigma\}$ mit $\sigma > 0$ gilt außerdem

$$|F(z)| \leq C \|\hat{f}\|_2 e^{\sigma|\text{Im}z|}, \quad (2.3. 1)$$

Hier ist $C = \max(1, \sqrt{\omega_m \sigma^m})$, wobei ω_m das Volumen der m -dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Analog gilt für $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v_i| \leq \sigma_i\}$ mit $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ und $\sigma_i > 0$

$$|F(z)| \leq C \|\hat{f}\|_2 \exp\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i |\text{Im}z_i|\right). \quad (2.3. 2)$$

BEWEIS: Wir betrachten für die angegebenen f die Fourier-Transformierte

$$F(z) = \int_W \hat{f}(v) e^{iv \cdot z} dv, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}^m$$

Im Falle $z = x$ gilt nach den Umkehrsätzen des vorigen Abschnitts $F(x) = f(x)$. Nun kann man aber $F(z)$ komplex differenzieren, da (mit $z = (z_1, \dots, z_n)$)

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \int_W \hat{f}(v) \frac{\partial}{\partial z_j} e^{i \sum_i v_i \cdot y} dv = \int_W i v_j \hat{f}(v) e^{iv \cdot z} dv$$

und die Vertauschung von Integration und Differentiation erlaubt ist (unter Verwendung der gleichen Regeln wie im reellen Fall, vgl. Teil4. von Lemma 2.4. Wiederholte Anwendung dieser Operation zeigt, dass F eine ganze Funktion auf \mathbb{C}^m ist. Weiter gilt im Fall $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v| \leq \sigma\}$ für $p = 1$ nach (2.2. 2)

$$|F(z)| \leq \int_{|v| \leq \sigma} |\hat{f}(v)| e^{-v \cdot \text{Im}z} dv \leq \|f\|_1 \sup_{|v| \leq \sigma} e^{-v \cdot \text{Im}z} \leq \|f\|_1 e^{\sigma|\text{Im}z|}$$

Im Fall $p = 2$ verwendet man die Schwarzsche Ungleichung

$$|F(z)| \leq \|\hat{f}\|_2 \sqrt{\int_{|v| \leq \sigma} e^{-v \cdot \text{Im}z} dv} \leq \|\hat{f}\|_2 e^{\sigma|\text{Im}z|/2} \sqrt{\int_{|v| \leq \sigma} dv}.$$

Damit ist (2.3. 1) gezeigt, der Beweis von (2.3. 2) verläuft analog. □

Eine interessante Folgerung aus diesem Lemma, die Bemerkung 2.2.4 ergänzt, ist

Korollar 2.3.1 Eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ kann nicht gleichzeitig einen kompakten Träger und eine Fouriertransformierte mit kompaktem Träger haben.

Bandbegrenzte Funktionen lassen sich allgemeiner in L_p -Räumen, $1 \leq p \leq \infty$ definieren. In Verallgemeinerung von Definition 2.3.1 führen wir ein

Definition 2.3.2 (Bandbegrenzte Funktionen in L_p) Sei \mathcal{S} die Menge der unendlich oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen auf \mathbb{R}^m (vergleiche Definition 2.4.1 in Abschnitt 2.4.1), W sei eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^m und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt

$$B_p(W) := \left\{ g \in L^p(\mathbb{R}^m) \mid \forall \phi \in \mathcal{S}, \text{supp } \phi \cap W = \emptyset : \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \hat{\phi}(x) dx = 0 \right\}$$

Menge der bandbegrenzten Funktionen mit Band W .

Bemerkung 2.3.1 Diese Definition ist äquivalent dazu, dass die Fouriertransformierte von g im Sinne der Distributionstheorie einen Träger in W besitzt (vergl. Definition 2.15 in Abschnitt 2.4).

Zur Illustration betrachten wir den Fall $p = 1$. Anwendung der Parseval-Relation ergibt dann

$$B_1(W) := \left\{ g \in L^1(\mathbb{R}^m) \mid \forall \phi \in \mathcal{S}, \text{supp } \phi \cap W = \emptyset : \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x) \phi(x) dx = 0 \right\}.$$

Dann setze $W_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, W) \leq \epsilon\}$ für $\epsilon > 0$ und definiere für $\rho > 0$

$$\psi_{\epsilon, \rho}(x) = \int_{W_\epsilon} \phi\left(\frac{x-u}{\rho}\right) du$$

mit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } \phi = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq 1\}$ und $\int_{\mathbb{R}^m} \phi(u) du = 1$. Man verifiziert leicht, dass $\psi_\epsilon(x) := \psi_{\epsilon, 1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{supp } \psi_\epsilon \subseteq W_{2\epsilon}$ und $\psi_\epsilon(x) = 1$ für $x \in W$. Für jedes $\phi \in \mathcal{S}$ ist dann $(1 - \psi_\epsilon)\phi$ wieder in \mathcal{S} und verschwindet auf W . Also gilt nach dem Vorstehenden für $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$

$$\forall \phi \in \mathcal{S} : \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(v) \phi(v) (1 - \psi_\epsilon(v)) dv.$$

Da \mathcal{S} nach Lemma 2.4.3 dicht in $L^1(\mathbb{R}^m)$ ist, folgt $\hat{g}(v)(1 - \psi_\epsilon(v)) = 0$ fast überall und somit $\hat{g}(v) = 0$ fast überall für $x \notin W_{2\epsilon}$. Da $\epsilon > 0$ beliebig klein sein kann, folgt somit – in Konsistenz zu Definition 2.3.1

$$B_1(W) = \{g \in L^1(\mathbb{R}^m) \mid \text{supp } \hat{g} \subseteq W\}. \quad (2.3. 3)$$

Diese Charakterisierung läßt sich in gleicher Weise für alle $p \in [1, 2]$ durchführen, wo sich die Fouriertransformierte in L_p -Sinne erklären läßt. Ferner kann man die Aussage von Lemma 2.3.1 auf den allgemeinen L_p -Fall von Definition 2.3.2 erweitern. Dazu beachtet man, daß für $f \in B_p(W)$ und alle $\phi \in \mathcal{S}$, deren Restriktion $\phi|_W$ auf W verschwindet, gilt

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^m} (1 + |x|^2)^m \hat{\phi}(x) dx.$$

Im Abschnitt 2.4.1 über die Distributionentheorie werden wir zeigen, daß $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ liegt und somit $(1 + |x|^2)^m \hat{\phi}(x) \equiv \hat{\psi}(x) \in \mathcal{S}$ und ψ durchläuft ganz \mathcal{S} . Setzt man nun $g(x) := (1 + |x|^2)^{-m} f(x)$, so ist $g \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty$ sowie $\psi(x) = (I - \Delta)^m \phi(x)$ mit $\Delta := \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2$ nach Lemma 2.2.2 (Δ ist der wohlbekannte Laplace-Operator). Wie für $p = 1$ gilt dann

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x) (I - \Delta)^m \phi(x) dx$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\phi(x) = 0$ für alle $x \in W$; es folgt also $\text{supp } \hat{g} \subseteq W$. Damit ist Lemma 2.3.1 anwendbar und g holomorph, also auch f . Für g gilt (2.3. 1), was dann für f selbst eine etwas schwächere Abschätzung liefert. Trotzdem kann man (vgl. [Rudin91], Kapitel 7) folgende schärfere Abschätzung beweisen:

Lemma 2.3.2 Die Aussage von Lemma 2.3.1 bleibt – mit einer anderen Konstante – für Elemente $f \in B_p(W)$, $1 \leq p \leq \infty$ weiter gültig.

Lemma 2.3.1 und 2.3.2 führen zu folgenden Klassen von Funktionen

Definition 2.3.3 (Ganze Funktionen von exponentiellem Typ) Die Klasse $B_\sigma^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ der ganzen Funktionen auf \mathbb{C}^m vom exponentiellen Typ $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ mit $\sigma_j > 0$, $1 \leq j \leq m$, in $L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, ist definiert als die Menge aller Funktionen f der Form

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m_+} a_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m},$$

wobei die Potenzreihenentwicklung auf jeder kompakten Teilmenge des \mathbb{C}^m gleichmäßig konvergiert, die Restriktion auf \mathbb{R}^m eine Funktion in $L^p(\mathbb{R}^m)$ ist und ferner

$$|f(z)| \leq C \exp\left(\sum_{j=1}^m \sigma_j |\operatorname{Im} z_j|\right) \quad (2.3.4)$$

mit von z unabhängigem C . Analog definieren wir die Klasse $B_\sigma^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ für $\sigma > 0$, indem wir (2.3.4) durch

$$|f(z)| \leq C \exp(\sigma |\operatorname{Im} z|)$$

ersetzen.

Bemerkung 2.3.2 Es sei bemerkt, daß ein echtes Wachstum (wenigstens in $\operatorname{Im} z$) vorliegen muß, da andernfalls f in obiger Definition nach dem Satz von Liouville konstant wäre.

Nach Lemma 2.3.1 und Lemma 2.3.2 ist nun klar, daß bandbegrenzte Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ der Bandbreite $\sigma s = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, d. h. $W = \{v \in \mathbb{R}^m : |v_j| \leq \sigma_j\}$, zur Klasse $B_\sigma^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ gehören. Dies gilt auch für die Variante, dass W die Einheitskugel ist, vergleiche hierzu [Rudin91], Kapitel 7. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß die Umkehrung von Lemma 2.3.1 und 2.3.2 gültig ist. Dies ist der Inhalt des Satzes von Paley-Wiener, den wir hier nur für $p = 2$ formulieren wollen.

Satz 2.3.1 (Paley-Wiener) Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion auf \mathbb{C}^m wie in Definition 2.3.3, deren Restriktion auf \mathbb{R}^m eine Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist und die Abschätzung

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^m \sigma_j |\operatorname{Im} z_j|\right)$$

mit von z unabhängigen positiven Konstanten C , α und σ_j erfüllt. Dann ist f die Fouriertransformierte einer Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ mit Träger in $W = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_j| \leq \sigma_j\}$.

Für den Beweis sei auf Anhang 1 verwiesen, wo auch die Verallgemeinerung auf $1 \leq p \leq \infty$ durchgeführt wird. Bezüglich des Falls der Einheitskugel sei wieder auf [Rudin91] verwiesen. Aussagen für den Fall $p = 2$ und allgemeinere Gebiete W findet man in [Stein71], Kapitel 3. Anwendungen der Paley-Wiener-Sätze findet man z. B. in [Reed75], Band 1.

2.3.2 Eigenschaften von bandbegrenzten Funktionen

Viele Resultate über Räume von Funktionen vom exponentiellem Typ findet man in [Achieser93], [Nikolskij75] und [Timan63]; in diesen Büchern wird die Wichtigkeit dieser Funktionen für die Approximations-Theorie betont. Im Hinblick auf den Satz von Paley-Wiener wollen wir einige Aussagen in dieser Richtung für bandbegrenzte Funktionen zeigen. Zunächst untersuchen wir die beste Approximation, betrachten aber nur den $p = 2$ Fall des Hilbert-Raums näher (für Aussagen über $L_p(\mathbb{R}^m)$, $p \neq 2$ sei auf den Anhang verwiesen).

Satz 2.3.2 (Beste Approximation) Die beste Approximation $g^* \in B_2(W)$ zu $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ ist

$$g^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u)W(x+u) du, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (2.3.5)$$

wobei $W(x)$ die durch

$$W(x) := \int_W e^{ix \cdot v} dv = \mathcal{F}\chi_W(-v) \quad (2.3.6)$$

definierte Transferfunktion des Gebietes W ist. Ferner gilt die Fehlerformel

$$\|f - g^*\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^m \setminus W} |\hat{f}(v)|^2 dv \quad (2.3.7)$$

BEWEIS: Nach dem in der Einleitung erwähnten Satz der Theorie der Hilbert-Räume gilt für die beste Approximation g^* aus $B_2(W)$ zu $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ – falls sie existiert – notwendigerweise

$$\int_{\mathbb{R}^m} [f(x) - g^*(x)]\overline{h(x)} dx = 0 \quad \forall h \in B_2(W) \quad (2.3.8)$$

Nach dem Satz von Plancherel folgt daraus (ausgedrückt mit Hilfe des Skalarprodukts)

$$(\hat{f} - \hat{g}^*, \hat{h})_2 = 0 \quad \forall h \in B_2(W).$$

Nun ist $\hat{h} = \hat{h}\chi_W$, wobei χ_W die charakteristische Funktion des Gebietes W ist. Damit folgt

$$0 = (\chi_W(\hat{f} - \hat{g}^*), \hat{h})_2 = (\chi_W\hat{f} - \hat{g}^*, \hat{h})_2 \quad \forall h \in B_2(W)$$

Setzt man speziell $\hat{h} = \chi_W\hat{f} - \hat{g}^*$ ein, so folgt $\hat{g}^* = \chi_W\hat{f}$ fast überall. Nach (2.3.6) gilt nun $W = \mathcal{F}\chi_W$ oder $\chi_W = \mathcal{F}W/(2\pi)^m$, so daß mit Lemma 2.2.2, Teil 5. folgt, daß

$$\hat{g}^* = \frac{1}{(2\pi)^m} \hat{W}\hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^m} W^* f$$

dies ergibt aber mit der inversen Fouriertransformation genau (2.3.2). \square

Man braucht die Existenz von g^* nicht anzunehmen, sondern kann von (2.3.8) ausgehend direkt zeigen, dass die angegebene Funktion g^* die beste Approximation ist. Denn laut Konstruktion erfüllt g^* (2.3.8) und daraus folgt für ein beliebiges $h \in B_2(W)$

$$\begin{aligned} \|f - h\|_2^2 &= \|f - g^* + g^* - h\|_2^2 \\ &= \|f - g^*\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(f - g^*, g^* - h) + \|g^* - h\|_2^2 \\ &= \|f - g^*\|_2^2 + \|g^* - h\|_2^2 \geq \|f - g^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.3 Im Spezialfall $f \in B_2(W)$ folgt aus (2.3.2)

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u)W(x+u) du, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (2.3.9)$$

Man bezeichnet deshalb $W(x-u)$ als den reproduzierenden Kern auf $B_2(W)$. Allgemein heißt $K(x,y)$ reproduzierender Kern auf dem Teilraum $B \subseteq L_2(\mathbb{R}^m)$ falls $f(x) = (K(x, \cdot), f(x))_2$ für alle $f \in B$ gilt.

Als weitere Eigenschaft bandbegrenzter Funktionen beweisen wir

Lemma 2.3.3 (Bernstein-Ungleichung) *Es sei $f \in B_2(W)$ mit $\sigma_j := \max_{v \in W} < \infty$. Dann gilt*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_2 \leq \sigma_j \|f\|_2 \quad (2.3. 10)$$

BEWEIS: Nach den vorangegangenen Überlegungen ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Für $\phi \in S$ hat man dann mit der Parseval-Formel und Lemma 2.2.2

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(t) \phi(t) dt \right| &= \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F} \frac{\partial f}{\partial x_j}(v) \mathcal{F} \phi(-v) dv \right| = \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_W \hat{f}(v) i v_j \hat{\phi}(-v) dv \right| \\ &\leq \frac{\sigma_j}{(2\pi)^m} \int_W |\hat{f}(v) \hat{\phi}(-v)| dv \leq \frac{\sigma_j}{(2\pi)^m} \|\hat{f}\|_2 \|\hat{\phi}\|_2 \leq \sigma_j \|f\|_2 \|\phi\|_2 \end{aligned}$$

Nun nimmt man zunächst $f \in S$ und $\phi = \partial f' / \partial x_j$ an. Dann folgt sofort nach Division durch $\|\phi\|$ sofort (2.3. 10). Für allgemeine $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ folgt die Ungleichung durch Grenzübergang, da S dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$ (siehe Lemma 2.4.1 in Abschnitt 2.4.1). \square

Man kann die Bernstein-Ungleichung auch auf beliebige partielle Ableitungen verallgemeinern. Dies auszuführen sei dem Leser überlassen. Außerdem wäre eine Erweiterung dieses einfachen Beweises auf den Fall $f \in B_p(W)$ wünschenswert.

Als nächstes beantworten wir die Frage, welche periodischen Funktionen in der Klasse der bandbegrenzten Funktionen enthalten sind.

Lemma 2.3.4 (Periodische bandbegrenzte Funktionen) *Die Menge der in jeder Variablen $2L$ -periodischen Funktionen, $L > 0$, die in $B_p(W)$ liegen, besteht nur aus Linearkombinationen von Exponentialfunktionen $\exp(2\pi i k x / 2L)$ mit Frequenzen $k\pi / L \in W$.*

BEWEIS: Sei g eine solche Funktion aus $B_p(W)$ und $\phi \in S$ beliebig. Dann liegt auch $\hat{\phi}$ in S und

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \hat{\phi}(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \int_{[-L, L]^m} g(x) \hat{\phi}(x + 2Lk) dx \\ &= \int_{[-L, L]^m} g(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \hat{\phi}(x + 2Lk) dx. \end{aligned} \quad (2.3. 11)$$

Die Funktion $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \hat{\phi}(x + 2Lk)$ ist die Periodisierung von $\hat{\phi}(x)$ mit Periode $2L$. Analog wie beim Beweis der Poisson-Summationsformel folgt

$$\begin{aligned} A_l &:= \frac{1}{(2L)^m} \int_{[-L, L]^m} \psi(x) e^{-\pi i l x / L} dx \\ &= \frac{1}{(2L)^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \int_{[-L, L]^m} \hat{\phi}(x + 2Lk) e^{-\pi i l x / L} dx \\ &= \frac{1}{(2L)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\phi}(x) e^{-\pi i l x / L} dx = \left(\frac{2\pi}{2L} \right)^m \phi \left(\frac{-l\pi}{L} \right) \end{aligned}$$

Nun beachten wir, daß die skalierte Funktion $\tilde{\psi}(x) = \psi(xL/\pi)$ 2π -periodisch ist und so nach dem Satz 2.2.6 (Satz von Riesz-Fischer)

$$\psi \left(\frac{xL}{\pi} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \tilde{\psi}[j] e^{ikx}$$

mit

$$\tilde{\psi}[k] = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \psi \left(\frac{xL}{\pi} \right) e^{-ikx} dx = A_k$$

gilt, also mit dem Vorhergehenden

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\frac{\pi}{d}\right)^m \phi\left(\frac{-k\pi}{L}\right) e^{-\pi i k x / L}.$$

Dies setzen wir nun in (2.3. 11) ein und erhalten nach Definition von ψ , daß

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \hat{\phi}(x) dx = \int_{[-L, L]^m} g(x) \psi(x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^m \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \phi\left(\frac{-j\pi}{L}\right) \int_{[-L, L]^m} g(x) e^{\pi i k x / L} dx = 2\pi^m \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \phi\left(\frac{-j\pi}{L}\right) \tilde{g}[j] \end{aligned}$$

mit $\tilde{g}(u) := g(uL/\pi)$ analog zu $\tilde{\psi}(x)$. Die Funktion \tilde{g} hat Periode 2π und obige Summe muss für jedes ϕ mit $\text{supp } \phi \subseteq W$ verschwinden. Daher müssen die Fourierkoeffizienten $\tilde{g}[j]$ für $k\pi x/L$ verschwinden, $\tilde{g}[j] = 0$. Da W aber eine beschränkte Menge ist, folgt hieraus

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k\pi/L \in W} \tilde{g}[k] e^{i k \cdot x}$$

und folglich

$$g(x) = \sum_{k\pi/L \in W} \tilde{g}[k] e^{\pi i k \cdot x / L},$$

d. h. die obige Aussage. □

Wir wollen nun Spezialfälle dieser Aussage betrachten und formulieren

Korollar 2.3.2 *Folgende Aussagen ergeben sich unmittelbar aus dem Satz über die beste Approximation:*

1. Falls $0 \notin W$ kann $B_\infty(W)$ nicht die (mit beliebiger Periode) periodische, konstante Funktion $f \equiv 1$ enthalten.
2. Wenn $W = \{u \in \mathbb{R}^m : u_i \leq \omega_i\}$ dann enthält $B_\infty(W)$ keine Funktionen $\exp(\pi i k x / L)$ mit Frequenzen $k\pi/L$ größer als das Maximum aller ω_i .
3. Speziell im Fall einer Variablen gilt: Ist $W = (-\omega, \omega)$, so enthält $B_\infty(-\omega, \omega)$ genau die Sinus- und Cosinusfunktionen, deren Frequenzen kleiner als ω sind.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei auf den Zusammenhang mit der Signalverarbeitung, d. h. der Analyse von zeitabhängigen Funktionen $f(t)$ (die nicht unbedingt periodisch sein müssen) eingegangen. Hier sind Signale mit beschränktem Frequenzspektrum von besonderem Interesse. Nicht nur, dass jedes Meßgerät nur einen beschränkten Frequenzbereich messen kann, sogar einfache Leitungen wirken bandbegrenzend. Ganz allgemein spricht man von einem Filterungsprozess, wenn während dieses Prozesses das Signal so verändert wird, dass sich seine Fouriertransformierte ändert, $\hat{f}(v) \mapsto m(v) \hat{f}(v) = \hat{g}(v)$. Mathematisch entsteht das Signal also durch Faltung von $\mathcal{F}^{-1}m$ mit f aus f , also $g = \mathcal{F}^{-1}m * f$. (Physikalisch gesehen findet die Operation tatsächlich im Frequenzbereich statt.) In der (digitalen) Signalverarbeitung konstruiert man nun Filter bzw. Multiplikatoren $m(v)$ oder auch Faltungskerne $\mathcal{F}^{-1}m$ für die verschiedensten Zwecke und in den verschiedensten Formen. Bezüglich der Wirkungsweise unterscheidet man drei Grundtypen von Filtern:

- **Tiefpass filter (low-pass filter)** Dies sind Filter, die niedrige Frequenzen praktisch unverändert lassen, hohe Frequenzen hingegen praktisch ausblenden. Beispiel:

$$m(v) = \chi_{[-\omega, \omega]}$$

- **Hochpassfilter (high-pass filter)** Dies sind Filter, die niedrige Frequenzen praktisch ausblenden, hohe Frequenzen hingegen praktisch unverändert lassen. Beispiel:

$$m(v) = 1 - \chi_{[-\omega, \omega]}$$

- **Bandpassfilter (band-pass filter)** Dies sind Filter, die sowohl niedrige als auch hohe Frequenzen praktisch ausblenden, mittlere hingegen praktisch unverändert lassen. Beispiel:

$$m(v) = \chi_{[-\omega_2, \omega_2] - [-\omega_1, \omega_1]}$$

mit $\omega_1 < \omega_2$.

Das signifikanteste und einfachste Beispiel eines Tiefpassfilters liefert der Satz über die beste Approximation über den Operator $L_2 \ni f \rightarrow W(f) = f * (2\pi^{-m}W)$ bzw. $W(\hat{f}) = \hat{g}^* = \chi_W \hat{f}$, d. h. die Frequenzen aus W werden durchgelassen (alle anderen werden herausgefiltert). Dies führt automatisch zu Klassen $B_p(W)$, unterstreicht also deren Bedeutung.

2.3.3 Abtasttheorem für bandbegrenzte Funktionen

Zunächst wollen wir zeigen, dass bandbegrenzte Funktionen eine bemerkenswerte Interpolationseigenschaft besitzen, sie können mit Hilfe von abzählbar vielen Funktionswerten (Abtastwerten oder ‘samples’) exakt dargestellt werden. Dieses Ergebnis – als Abtasttheorem bekannt – wurde zuerst vom Mathematiker E. T. Whittaker 1915 und von Shannon 1949 (mit einer Arbeit von Kotelnikov 1933 als Vorläufer) für die Nachrichtentechnik entdeckt. Wir wollen hier eine allgemeine Version angeben und benötigen dazu

Definition 2.3.4 Eine beschränkte Teilmenge W des \mathbb{R}^m heißt Fundamentargebiet des \mathbb{R}^m (bezüglich der Translation 1), falls die Mengen $k + W$, $k \in \mathbb{Z}^m$, paarweise disjunkt sind, d. h. wenn $\forall j \neq k : (j + W) \cap (k + W) = \emptyset$ und falls die Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} (k + W)$ ganz \mathbb{R}^m überdeckt.

Satz 2.3.3 (Abtasttheorem) Es sei $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ bandbegrenzt mit Spektrum $\omega \cdot W$ sei ein Fundamentargebiet des \mathbb{R}^m . Dann gilt, falls die Folge $\{f(2\pi k/\omega)\}$ der Abtastwerte in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegt, im Sinne der $L_2(\mathbb{R}^m)$ -Norm

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \quad (2.3.12)$$

wobei $W(x)$ durch (2.3.6) definiert Transferfunktion von W ist. Für die Fouriertransformierte von f gilt im Sinne der L_2 -Norm

$$\hat{f}(v) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \chi_W(v/\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) e^{-2\pi i k v/\omega} \quad (2.3.13)$$

BEWEIS: Wegen $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $\text{supp } \hat{f} \subset \omega W$ ist f nach Lemma 2.3.1 eine ganze Funktion, also insbesondere stetig. Wir führen dann $\psi(u) := \hat{f}(u\omega/2\pi)$ ein. Nach dem Satz von Plancherel ist $\psi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und mit der Fourier-Umkehrtransformation folgt

$$\mathcal{F}\psi(x) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \mathcal{F}\hat{f}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = (2\pi)^m f\left(\frac{-2\pi x}{\omega}\right) \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m. \quad (2.3.14)$$

Dann betrachten wir die Periodisierung $\psi^*(u) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \psi(u - 2\pi j)$. Es ist $\text{supp } \psi = 2\pi W$ und $\text{supp } \psi(x + 2\pi j) \cap \text{supp } \psi(x + 2\pi l) = \emptyset \quad \forall j \neq l$ nach Voraussetzung. Also gilt

$$\chi_{2\pi W}(u)\psi^*(u) = \psi(u), \quad \psi^*(u + 2\pi k) = \psi^*(u) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m,$$

wobei $\chi_{2\pi W}$ die charakteristische Funktion von $2\pi W$ ist. Es ist $\psi^*(u) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^m} |\psi^*(u)| du &\leq \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} |\psi(u + 2\pi j)| du = \int_{\mathbb{R}^m} |\psi(u)| du \\ &= \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)| dv \leq \sqrt{\text{meas}W} \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \|\hat{f}\|_2 < \infty \end{aligned}$$

Daher können wir die Fourierkoeffizienten bilden und erhalten mit Lemma 2.2.4 und (2.3. 14)

$$\hat{\psi}^*[k] = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \psi^*(u) e^{-iku} du = \frac{1}{(2\pi)^m} \hat{\psi}(v) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m f\left(\frac{-2\pi}{\omega}\right).$$

Nach Voraussetzung ist die Folge $\{\hat{\psi}^*[k]\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ der Abtastwerte daher in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ und mit dem Satz von Riesz-Fischer folgt (k durch $-k$ ersetzen)

$$\psi^*(u) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) e^{-iku} \quad (2.3. 15)$$

im L_2 -Sinn, da zunächst die rechte Seite im L_2 -Sinn definiert ist und wegen der Eindeutigkeit der Fourierreihe in $L_1(\mathbb{T}^m)$ mit $\psi^*(u)$ übereinstimmen muss. Es folgt

$$\hat{f}\left(\frac{u\omega}{2\pi}\right) = \psi(u) = \chi_{2\pi W}(u)\psi^*(u) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^m \chi_{2\pi W}(u) \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) e^{-iku}$$

Hieraus folgt (2.3. 13) mit $v = u\omega/2\pi$ wegen $\chi_{\alpha W}(u) = \chi_W(u/\alpha)$. Da dies im L_2 -Sinn gilt, können wir auf beide Seiten die Fouriertransformation im L_2 -Sinn anwenden und es folgt mit Lemma 2.2.2, Teil 1 und 2

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{\omega^m} \mathcal{F} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \chi_W\left(\frac{v}{\omega}\right) e^{-2\pi i k v / \omega}(x) \\ &= \frac{1}{\omega^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \omega^m W(-\omega(x + 2\pi k / \omega)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(-\omega x - 2\pi k) \end{aligned}$$

nach Definition von $W(x)$ in (2.34). □

Korollar 2.3.3 Für bandbegrenzte Funktionen mit Spektrum ωW gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ivx} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) e^{2\pi i k v / \omega},$$

d. h. die Diskretisierung des Fourierintegrals mittels der Trapezregel liefert die exakte Formel, falls die Gitterweite $2\pi/\omega =: \Omega$ beträgt.

Das einfachste Beispiel eines Fundamentalgebietes im \mathbb{R}^m ist der (symmetrisch liegende) Würfel $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m$, für den man sofort die definierenden Eigenschaften zeigen kann. Die entsprechende Filterfunktion lautet

$$W(x) = \prod_{l=1}^m \text{sinc} \frac{x_l}{2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad (2.3. 16)$$

Im Falle $m = 1$ liefert (2.3. 12) dann die klassische ‘cardinal series’ von E. T. Whittaker (ω ersetzt durch $\Omega := \omega/2\pi$)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}(\pi(\Omega t - k)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.3. 17)$$

mit der Sincfunction $\operatorname{sinc} x \equiv (\sin x)/x$. In der Sprechweise der Nachrichtentechnik bedeutet dies, daß das Signal $f(t)$ mit der Bandbreite $\Omega/2$, d. h. mit der Frequenzdarstellung

$$f(t) = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{f}(v) e^{2\pi i t v} dv,$$

exakt dargestellt werden kann mittels der Abtastwerte $\{f(k/\Omega)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Man sagt, es wird abgetastet mit der Frequenz Ω (bzw. in Zeitintervallen der Größe $1/\Omega$ oder auch mit der Abtastrate $1/\Omega$.)

Eine andere Anwendung des obigen Satzes ergibt sich z. B. durch die Wahl

$$W = \left((-1, -1/2] \cup (1/2, 1] \right)^m \quad (2.3. 18)$$

wo man ebenfalls die in der Definition geforderten Eigenschaften leicht nachprüfen kann. Wegen der Bedeutung des Abtasttheorems geben wir noch eine andere Herleitung mittels Methoden aus der Theorie der Hilbert-Räume an.

Definition 2.3.5 Eine beschränkte, meßbare Menge $W \subseteq \mathbb{R}^m$ nennen wir Whittaker-Menge, falls die Funktionenfolge $\{\exp(2\pi i k x)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ ein vollständiges orthonormiertes System für den Hilbert-Raum $L_2(W)$ bildet.

Bemerkung 2.3.4 Mit der durch (2.3. 6) definierten Transferfunktion $W(x)$ gilt: W ist eine Whittaker-Menge genau dann, wenn

$$W(2\pi j) = \int_W e^{-2\pi i j x} dx = \delta_{0,j}$$

gilt. Ein Beispiel für eine Whittaker-Menge ist das eben betrachtete Fundamentalgebiet $[-1/2, 1/2]^m$.

Wir können nun folgende Variante des Abtastsatzes beweisen:

Satz 2.3.4 Es sei W eine Whittaker-Menge und $W(x)$ sei ihre durch (2.3. 6) erklärte Transferfunktion. Dann folgt mit $\Omega = \omega/2\pi$

1. Die Funktionen $\{\omega^{m/2} W(\omega x - 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ bilden eine ONB (Orthonormalbasis) von $L_2(\mathbb{R}^m)$.
2. Für jedes $g \in B_2(\omega W)$ gilt im Sinne der $L_2(\mathbb{R}^m)$ -Norm

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} g\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k). \quad (2.3. 19)$$

BEWEIS: Es gilt

$$W(\omega v - 2\pi j) = \int_W e^{-i(\omega v t - 2\pi j t)} dt = \mathcal{F}\chi_W(\omega v) e^{2\pi i j t}$$

Weil wir W als Whittaker-Menge vorausgesetzt haben ergibt sich mit Bemerkung 2.3.4, daß

$$\omega^m (W(\cdot - 2\pi j), W(\cdot - 2\pi k)) = (W(\cdot - 2\pi(j - k)), W) = \int_W e^{2\pi i(j-k)t} dt = \delta_{j,k} \quad (2.3. 20)$$

womit schon Teil 1 gezeigt ist. Zum Beweis von Teil 2 beachten wir zunächst, daß für jedes $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ nach der zweiten Darstellung von $W(v\omega - 2\pi j)$

$$\begin{aligned} (g, W(\cdot\omega - 2\pi j)) &= \int_{\mathbb{R}^m} g(v) \mathcal{F}\chi_W(t) e^{-2\pi i t j} (\omega v) dv \\ &= \frac{1}{\omega^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(t) \chi_W\left(\frac{t}{\omega}\right) e^{2\pi i t j / \omega} dt = \int_W \hat{g}(\omega t) e^{\pi i t j} dt. \end{aligned}$$

gilt. Hieraus schließen wir, dass das System $\{W(x\omega - 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ vollständig bezüglich des abgeschlossenen Unterraums $B_2(\omega W)$ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, denn mit obiger Formel folgt aus $(g, W(\cdot\omega - j)) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}^m$ (nach Voraussetzung an W), dass $\hat{g}(\omega t) = 0$ fast überall für $t \in W$ ist. Zusammen mit $g \in B_2(\omega W)$ ergibt dies $\hat{g}(v) = 0$ fast überall und somit $g \equiv 0$. Aus der allgemeinen Theorie (Satz 1.4.5) schließen wir dann

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \omega^m (g, W(\cdot\omega - 2\pi k)) W(x\omega - 2\pi k), \quad g \in B_\omega^{(2)}(W).$$

Spezialisieren wir obige Formel für das Skalarprodukt auf $\text{supp } \hat{g} \subseteq \omega W$, so folgt

$$\omega^m (g, W(\cdot\omega - 2\pi k)) = \omega^m \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(\omega t) e^{2\pi i k t} dt = \mathcal{F}^{-1} \hat{g}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) = g\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \quad (2.3. 21)$$

und somit die Behauptung. \square

Bemerkung 2.3.5 *Vergleicht man die Voraussetzungen von Satz 2.3.3 und Satz 2.3.4 fällt auf, daß letzterer scheinbar schwächere Voraussetzungen hat, er fordert nämlich nicht $\{f(2\pi k/\omega)\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. Diese Eigenschaft folgt aber aus (2.3. 21). Für $f \in B_2(\omega W)$ gilt nämlich*

$$\|f\|_2^2 = \omega^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left| (f, W(\cdot\omega - 2\pi k)) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left| f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) \right|^2 \quad (2.3. 22)$$

weil $\omega^{m/2} \{W(\cdot\omega - 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ nach Teil 1 eine ONB in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, die bezüglich $B_2(\omega W)$ vollständig ist.

Bemerkung 2.3.6 *Die durch die Translate von $W(x)$ erzeugten Räume sind spezielle translationsinvarianten Räume. Letztere werden wir später noch allgemein untersuchen. Satz 2.3.4 wird dann als Spezialfall eines allgemeineren Kriteriums erscheinen, das sowohl notwendig als auch hinreichend ist. In diesem Rahmen ist dann auch eine Erweiterung durch eine allgemeinere Wahl der Transferfunktion möglich: etwa $W(x) = \int_W K(x, t) dt$ mit geeignetem Kern $K(x, t)$ um z. B. eine bessere Lokalisierung von $W(x)$ zu erreichen.*

Wir zeigen noch, dass die Voraussetzungen von Satz 2.3.4 auch notwendig sind.

Korollar 2.3.4 *Für ein beschränktes Gebiet W sei die Transferfunktion $W(x)$ wie in Satz 2.3.4 definiert. Dann gelten die Aussagen 1 und 2 von Satz 2.3.4 genau dann, wenn das Gebiet W eine Whittaker-Menge ist.*

BEWEIS: In Formel (2.3. 20) wurde benutzt, dass

$$\omega^m \left(W(\cdot\omega - 2\pi j), W(\cdot\omega - 2\pi k) \right) = \int_W e^{2\pi i (j-k)t} dt$$

gilt. Bilden die $\{W(\cdot\omega - 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ also nach Aussage 1 ein orthonormales System, so muss dies entsprechend für die $\{\exp(2\pi i j x)\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ auf W gelten. Gilt weiter Aussage 2, so ist zu zeigen, daß für $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ aus

$$\int_W f(x) e^{2\pi i j x} dx = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}^m \quad (2.3. 23)$$

$f \equiv 0$ in W folgt. Dazu setze man

$$g(t) := \begin{cases} f(t/\omega), & t \in \omega W \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $G(x) := \mathcal{F}^{-1}g(x)$. Dann gilt offenbar $G(x) \in B_2(\omega W)$ und mit (2.3. 21) folgt aus (2.3. 23)

$$0 = \int_{\omega W} f\left(\frac{t}{\omega}\right) e^{2\pi i j t/\omega} dt = \int_{\mathbb{R}^m} g(t) e^{2\pi i j t/\omega} dt = (2\pi)^m G\left(\frac{j}{\Omega}\right)$$

für alle $j \in \mathbb{Z}^m$. Anwendung von (2.3. 19) auf $G(x)$ liefert dann $G(x) = 0$ und somit $g(t) = 0$, d. h. $f(x) = 0$ fast überall in W . \square

2.3.4 Approximation von nicht bandbegrenzten Funktionen

Es soll nun der Fall beliebiger Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^m)$ oder $L_2(\mathbb{R}^m)$ betrachtet werden. Dann entsteht ein zusätzlicher Fehler, wenn man zunächst mit bandbegrenzten Funktionen approximiert. Die erste Frage ist dann die nach der besten Approximation mit solchen Funktionen. Diese Frage kann man auch bezüglich der L_p -Norm studieren, wozu auf den Anhang 2.5 verwiesen sei.

Im Fall der L_2 -Approximation ist diese Frage leicht zu beantworten und durch Satz 2.3.2 gegeben. Wie bereits zu diesem Satz bemerkt, stellt $\hat{g}^* = \chi_W \hat{f}$ die einfachste Form eines Tiefpassfilters dar: nur die Frequenzen aus W treten in g^* auf. Die Formel (2.3.2) für g^* als Faltung ist jedoch für eine praktische Berechnung zu kompliziert. Daher möchte man eher die Reihe (2.3. 12) zur Approximation verwenden und muß dann einen zusätzlichen Fehler in Kauf nehmen. Außerdem muß die Reihe noch durch eine endliche Teilsumme ersetzt werden. Läßt man diesen Abschneidefehler außer Acht, so bedeutet dies zu untersuchen, welcher zusätzliche Fehler in Satz 2.3.2 durch die idealisierte Annahme der Bandbegrenztheit von f entsteht.

Satz 2.3.5 (Abtasttheorem für nicht bandbegrenzte Funktionen) *Es seien $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Ferner sei W ein Fundamentalgebiet des \mathbb{R}^m . Dann gilt*

$$f(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} [1 - e^{ixl\omega}] \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u) e^{ixu} du \quad (2.3. 24)$$

BEWEIS: Gegenüber dem Beweis von Satz 2.3.3, der durch seinen Aufbau die *Kardinalreihe* ('cardinal series') (2.3. 12) motivierte, gehen wir diesmal direkt von dieser Reihe aus. Für festes $x \in \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$g_x(u) := f\left(\frac{u}{\omega}\right) W(\omega x - u),$$

so dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} g_x(2\pi k). \quad (2.3. 25)$$

Wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ ist f selbst stetig (dies gilt nach Lemma 2.2.1 und Satz 2.2.1 über die inverse L_1 -Fouriertransformation) und so auch $g_x(u)$ für festes x . Ferner ist $g_x(u) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ weil $W(\omega x - u)$ nach Lemma 2.2.1 gleichmäßig beschränkt ist. Wir können also versuchen, die Poisson-Summutationsformel (2.2. 18) auf obige Summe anzuwenden. Dazu berechnen wir für $l \in \mathbb{Z}^m$

$$\hat{g}_x(l) = \int_{\mathbb{R}^m} g_x(u) e^{-il u} du = \int_{\mathbb{R}^m} f\left(\frac{u}{\omega}\right) W(\omega x - u) e^{-il u} du.$$

Nun liegen sowohl $f(u/\omega) \exp(-ilu)$ als auch $\chi_W(v)$ in $L^1(\mathbb{R}^m)$, so dass wir die L_1 -Parsevalformel von Satz 2.2.1, Teil 1, anwenden können. Dies ergibt mit Lemma 2.2.2, Teil 1

$$\begin{aligned}\hat{g}_x(l) &= \int_{\mathbb{R}^m} f\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-il\omega(u/\omega)} \chi_W(v) \hat{e}^{i\omega xv}(u) du \\ &= \omega^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}f(u) e^{-il\omega u} (\omega v) \chi_W(v) e^{i v \omega x} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}f(u) e^{-il\omega u} (v) \chi_W\left(\frac{v}{\omega}\right) e^{ixv} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v + l\omega) \chi_W\left(\frac{v}{\omega}\right) e^{ixv} dv = \int_{\omega W} \hat{f}(v + l\omega) e^{ixv} dv\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} |\hat{g}_x(l)| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{\omega W} |\hat{f}(v + l\omega)| dv = \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)| dv < \infty,$$

da laut Voraussetzung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} (\omega W + l\omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} (W + l) = \mathbb{R}^m.$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Poisson-Summationsformel aus Korollar 2.2.1 auf (2.3. 25) erfüllt. Es folgt für festes x

$$(2\pi)^m \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \hat{g}_x(l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u) e^{ix(u-l\omega)} du.$$

Auf der anderen Seite kann man $f(x)$ über die inverse L_1 -Fouriertransformation darstellen,

$$(2\pi)^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(u) e^{iux} du = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \int_{\omega W + l\omega} \hat{f}(u) e^{iux} du$$

Subtraktion beider Seiten ergibt die Restgliedformel (2.3. 24). □

Aus diesem Satz läßt sich eine einfachere Fehlerabschätzung gewinnen.

Korollar 2.3.5 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.5 gilt*

$$\left| f(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k) \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} |\hat{f}(u)| du. \quad (2.3. 26)$$

Speziell gilt

$$f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) W(\omega x - 2\pi k)$$

gleichmäßig in x , falls W absorbierend in \mathbb{R}^m ist, d. h. es zu jeder Kugel $K \subset \mathbb{R}^m$ ein $\omega > 0$ gibt, so dass $K \subset \omega W$ gilt.

BEWEIS: Für $l = 0$ gilt $|1 - \exp(ixl\omega)| = 0$ und für $l \neq 0$ gilt $|1 - \exp(ixl\omega)| \leq 2$. Hieraus folgt sofort die obige Abschätzung und wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ ergibt dies auch die Konvergenzaussage. □

Mit diesem Korollar ist auch das Abtasttheorem 2.3.3 nochmals unter anderen Voraussetzungen bewiesen worden. Es bedeutet anschaulich, dass man ein Signal f mit umso höherer Frequenz abtasten muss, je größer seine Bandbreite ist, und dass dieser Prozess für allgemeine Signale konvergent ist.

Besonders instruktiv ist der Fall $m = 1$, wenn $f(t)$ die Amplitude eines zeitabhängigen Signals bedeutet und $W = [-1/2, 1/2]$. Dann folgt mit (2.3. 17) die Abschätzung

$$\left| f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}((\Omega t - k)\pi) \right| \leq 2 \int_{|u| \geq \pi\Omega} |\hat{f}(u)| du, \quad \Omega := \frac{\omega}{2\pi}.$$

In den Fehler gehen also die Frequenzen größer als $\pi\Omega$ ein, wenn die Zeit, die zwischen zwei Messungen von $f(t)$ vergeht gleich $1/\Omega$ ist. In der Signalanalyse heißt Ω die Nyquist-Rate. Was passiert nun, wenn ein Signal $f \in B_{2\pi\Omega}(W)$ mit $\Omega' \leq \Omega$ abgetastet wird, also beim sogenannten ‘Undersampling’? Es gilt dann $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-2\pi\Omega', 2\pi\Omega']$ und die obige Formel liefert (für Ω' anstelle von Ω)

$$\left| f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\Omega'}\right) \operatorname{sinc}((\Omega' t - k)\pi) \right| \leq 2 \int_{\Omega' \leq |u|/2\pi \leq \Omega} |\hat{f}(u)| du,$$

Dies kann so interpretiert werden, dass die in $B_{2\pi\Omega}$ vorhandenen Frequenzen größer als $2\pi\Omega'$ stören. Man nennt diesen Effekt ‘Aliasing’, siehe etwa [Papoulis].

Man kann natürlich auch mit ‘Oversampling’ arbeiten. Dies ist bei akustischen Signalen auch tatsächlich üblich. Im Idealfall kann das Ohr Frequenzen bis 20 kHz wahrnehmen. Nach dem shannonschen Abtasttheorem sollte also ein akustisches Signal mit mindestens 40 kHz abgetastet werden. Bei den üblichen CD-Spielern beläuft sich die Abtastrate normalerweise auf 44 kHz. Der Grund dafür ist, dass Oversampling einen stabilisierenden Effekt hat. Um dies einzusehen ersetzen wir $f(x)$ durch $F(x) := f(\lambda x)$ und tasten f mit Werten $f(2\pi k\lambda/\omega)$, $\lambda \in (0, 1)$, d.h. F mit Werten $2\pi k/\omega$ wie bisher ab. Dann gilt für \hat{F} die Entwicklung (2.3. 13). Weil aber \hat{f} seinen Träger in $\lambda\omega \cdot W$ hat, kann man in dieser Entwicklung $\chi_W(v/\omega)$ durch $\hat{g}_\lambda(x/\omega)$ ersetzen, wobei $g_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^m)$ so sein soll, dass seine Fouriertransformierte gleich

$$\hat{g}_\lambda(v) = \begin{cases} 1, & |v| \leq \frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{|v| - \lambda/2}{(1-\lambda)/2}, & \frac{\lambda}{2} \leq |v| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |v| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist. Bildet man dann die inverse Fouriertransformation, so erhält man die Entwicklung (2.3. 12) mit der Transferfunktion $g_\lambda(x)$, die schneller abfällt als $W(x) = \operatorname{sinc}(x/2)$, weil $\hat{g}_\lambda(v)$ glatter als $\chi_W(v)$ ist.

Diese Idee lässt sich natürlich noch ausbauen, so dass eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ noch durch andere Reihen mit Translaten von verallgemeinerten Sincfunktionen approximiert werden kann. Eine weitere Möglichkeit bilden durch Summationsprozesse der Reihe (2.3. 12). Eine kanonische Form ergibt sich durch die beste Approximation in L_2 .

Lemma 2.3.5 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und W sei eine Whittaker-Menge. Dann ist die beste Approximation $g^* \in B_2(\omega W)$ zu f gegeben durch*

$$g^*(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \omega^m \left(f, W(\cdot - 2\pi k) \right) W(2\pi(\Omega x - k)). \quad (2.3. 27)$$

wobei $\Omega = \omega/2\pi$. Im Falle $f \in B_2(\omega W)$ gilt $g^* = f$ und $\left(f, W(2\pi(\cdot - k)) \right) = \Omega^m f(k/\Omega)$. Der Fehler der Reihe in (2.3. 27) ist durch Formel (2.3. 7) mit ωW statt W gegeben.

BEWEIS: Wir bemerken zuerst, dass die obige Darstellung jene aus Satz 2.3.2 ergänzt und daraus ergibt sich auch die Aussage über den Fehler.

Durch Anwendung von Satz 1.4.5 auf die nach Satz 2.3.4 vorliegende ONB

$$\left\{ \omega^{m/2} W(\cdot - 2\pi k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$$

für $g^* \in B_2(\omega W)$ ergibt sich dann (2.3. 27) zunächst für g^* statt f in den Skalarprodukten. Da aber $f - g^*$ orthogonal zu allen $W(2\pi(\cdot - k))$ ist, kann g^* durch f ersetzt werden. Dann wende man (2.3. 21) an. \square

Vergleicht man nun den Fehler in (2.3. 26), der durch die Samplingreihe (2.3. 12) entsteht, mit dem Fehler der besten Approximation in (2.3. 27), so sieht man mit (2.3. 7), dass er gegenüber diesem nur um einen Faktor 2 schlechter ist.

Wir wollen nun auch den zusätzlichen Fehler untersuchen, der entsteht, wenn man die Reihen (2.3. 12) und (2.3. 27) durch endliche Teilsummen ersetzt.

Satz 2.3.6 (Abschneidefehler)

1. Für die abgebrochene Reihe in (2.3. 12) gilt die Fehlerabschätzung

$$\left\| f(x) - \sum_{|k| \leq N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) W(2\pi(\Omega x - k)) \right\|_2 \leq \sqrt{\Omega^m \sum_{|k| < N} \left| f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \right|^2} + 2 \int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} |\hat{f}(u)| du \quad (2.3. 28)$$

2. Die abgebrochene Reihe

$$g_N^*(x) := \sum_{|k| \leq N} \Omega^m \left(f, W(2\pi(\cdot - k)) \right) W(2\pi(\Omega x - k))$$

ist die beste Approximation aus

$$S_N \equiv S_{N,\omega} := \text{span} \left\{ W(2\pi(\Omega x - k)) \right\}_{|k| \leq N}.$$

Es gilt

$$\|f - g_N^*\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \text{dist}(f; B_2(\omega W))_{L_2}^2 + \Omega^m \text{dist}(\hat{g}^*; \Pi_N^*)_{L_2(W)}^2, \quad (2.3. 29)$$

wobei nach Lemma 2.3.5 $\hat{g}^* = \hat{f} \cdot \chi_W$ zu beachten ist und Π_N^* die Menge der trigonometrischen Polynome vom totalen Grad kleiner als N bezeichnet.

BEWEIS: Zu (1): Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| f - \sum_N \right\|_2 \leq \left\| f - \sum_\infty \right\|_2 + \left\| \sum_\infty - \sum_N \right\|_2,$$

dabei steht \sum_∞ für die vollständige Reihe (2.3. 12) und \sum_N für die abgebrochene Reihe. Ferner benutzt man die Abschätzung (2.3. 26) und die Parsevalidentität

$$\left\| \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k}{\Omega}\right) W(2\pi(\Omega x + k)) \right\|_2 = \sqrt{\Omega^m \sum_{|k| > N} \left| f\left(\frac{k}{\Omega}\right) \right|^2},$$

die analog zu (2.3. 22) gilt.

Zu (2): Benutzt man wie im Beweis von Satz 2.3.4 die Identität

$$\mathcal{F}W(2\pi(\Omega x - k))(v) = \frac{1}{\Omega^m} \chi_{\omega W}(v) e^{2\pi i k v / \omega}, \quad (2.3. 30)$$

so erhält man die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|f - g_N^*\| &= \inf_{g \in S_N} \|f - g\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \inf_{g \in S_N} \left\| \hat{f} - \hat{g} \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \inf_{a_k \in \mathbb{R}} \left\| \hat{f}(v) - \chi_{\omega W}(v) \sum_{|k| \leq N} a_k e^{-2\pi i k v / \omega} \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \left[\int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} |\hat{f}(v)|^2 dv + \left\| \chi_{\omega W}(v) \left(\hat{f}(v) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{-2\pi i k v / \omega} \right) \right\|_2^2 \right] \end{aligned}$$

Mit der Substitution $v = u\omega$ und der Fehlerformel (2.3. 7) folgt dann die Aussage von Teil 2. \square

Zur Abrundung wollen wir noch Abschätzungen für die im vorangegangenen Lemma auftretenden Fehler mittels Sobolevnormen angeben, so dass die Fehlerordnungen bezüglich ω sichtbar werden.

Lemma 2.3.6

1. Es sei W ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^m und $\rho > 0$ der Radius der größten ganz in W liegenden Kugel des \mathbb{R}^m . Dann gilt für f aus dem Sobolevraum $W^{r,2}(\mathbb{R}^m)$, $r = 1, 2, \dots$, (siehe Definition 2.1.1) die Abschätzung

$$\text{dist}(f; B_2(\omega W))_{L_2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{C}{(\omega\rho)^r} \sum_{|\beta|=r} \|D^\beta f\|_2 \quad (2.3. 31)$$

wobei $C > 0$ eine nur von r und m abhängige Konstante ist.

2. Es sei $W = [-1/2, 1/2]^m$ und $g \in W^{r,2}(2\pi W)$ sei 2π -periodisch. Dann gilt für $r = 1, 2, \dots$ die Abschätzung

$$\text{dist}(g; \Pi_N^*(\mathbb{R}^m))_{L_2(2\pi W)} \leq \frac{C}{N^r} \sum_{|s|=r} \|D^s g\|_{r,2;2\pi W} \quad (2.3. 32)$$

BEWEIS: **Zu (1):** Nach Formel (2.3. 26) haben wir abzuschätzen

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus \omega W} |\hat{f}(v)|^2 dv \leq \int_{|v| \geq \omega\rho} |\hat{f}(v)|^2 dv \leq \frac{1}{(\omega\rho)^{2r}} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |v|^2)^r |\hat{f}(v)|^2 dv.$$

Nach Korollar 2.4.1 in Abschnitt 2.3.4 kann das letzte Integral durch die Sobolev-Halbnorm in (2.3. 31) bis auf eine Konstante $C > 0$ abgeschätzt werden.

Zu (2): Zunächst gilt

$$\text{dist}(g; \Pi_N^*(\mathbb{R}^m))_{L_2(2\pi W)}^2 = \sum_{|k| > N} |\hat{g}[k]|^2 \leq \frac{1}{N^{2r}} \sum_{|k| < N} |k|^{2r} |\hat{g}(k)|^2$$

Dann weist man mittels partieller Integration nach, dass

$$\begin{aligned} k^s \hat{g}[k] &= \hat{g}[k] \prod_{j=1}^m k_j^{s_j} \equiv \frac{1}{(2\pi)^m} i^s \int_{2\pi W} \prod_{j=1}^m (-ik_j)^{s_j} e^{-iku} g(u) du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} (-i)^s \int_{2\pi W} e^{-iku} D^s g(u) du = (-i)^s \hat{D}^s \hat{g}[k] \end{aligned}$$

für jede schwache partielle Ableitung D^s , $s = (s_1, \dots, s_m)$, mit $|s| \leq r$ gilt. Hierbei ist wesentlich, dass g als Funktion in $W^{r,2}(2\pi W)$ 2π -periodisch ist, da nur dann die Randterme verschwinden ($g \in L_2(2\pi W)$ genügt dazu nicht). Ferner gilt

$$|k|^{2r} |\hat{g}(k)|^2 = \left(\sum_{i=1}^m k_i^2 \right)^r |\hat{g}[k]|^2 \leq C' \left(\sum_{|s|=r} |k^s \hat{g}[k]| \right)^2$$

mit einer Konstanten $C' > 0$. Mit dem Vorigen und dem Satz von Riesz-Fischer folgt daraus die Behauptung wegen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2r} |\hat{g}[k]|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \sum_{|s|=r} |D^s \hat{g}[k]|^2 = C \sum_{|s|=r} \|D^s g\|_{r,2;2\pi W}^2$$

mit einer Konstanten C . \square

Zur Anwendung der Fehlerabschätzung (2.3. 32) auf den Fall von Satz 2.3.6, Teil 2 sei noch bemerkt, dass sie nur bedingt anwendbar ist, denn für $g(u) = \hat{g}^*(u) = \hat{f}(u\Omega)\chi_{2\pi W}(u)$ ist diese Funktion nur mäßig glatt, wenn sie periodisch fortgesetzt wird. Dies ist aber notwendig, um (2.3. 32) anwenden zu können und zeigt, dass der wesentliche Fehler dadurch entsteht, dass die im Allgemeinen nicht periodische Funktion $\hat{f}(u\Omega)\chi_{2\pi W}(u)$ durch periodische Funktionen approximiert wird.

Bemerkung 2.3.7 *Die beiden Abschätzung in Lemma 2.3.6 wurden angegeben, um die Analogie zwischen dem periodischen und dem Fall des \mathbb{R}^m herauszustellen. Solche Fehlerabschätzungen für die (beste) Approximation von Funktionen aus Sobolevräumen durch bandbegrenzte Funktionen oder trigonometrische Polynome bilden ein zentrales Thema der klassischen Approximations-Theorie und sind auch für die späteren Betrachtungen von Bedeutung. Es gibt allgemeinere Abschätzungen vom Typ des obigen Lemmas für $W^{r,p}$ -Räume mit beliebigem p , $1 \leq p \leq \infty$. Man kann sie durch Spezialisierung von Satz 2.1.3 auf Dirac-Folgen gewinnen, vergleiche Anhang 2.5.*

2.4 Fourieranalysis und Distributionen

2.4.1 Zur Distributionstheorie

Die Grundidee der Distributionstheorie ist das Prinzip der Dualität, d. h. die zu betrachtenden Operationen wie Multiplikation, Translation, Dilatation, Differentiation, Faltung und so weiter werden zuerst auf Klassen von “sehr guten Funktionen”, den sogenannten Testräumen untersucht, und dann durch “Hinüberwälzen” auf die Dualräume auch für “schlechte Funktionen” bzw. Distributionen. Durch geeignete Darstellungs- bzw. Regularitätssätze können die gemachten Aussagen dann wieder für gewöhnliche Funktionen (z. B. in Sobolev-Räumen) zurückgewonnen werden.

Der einfachste Testraum auf \mathbb{R}^m ist der sogenannte Schwarzsche Raum $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Für ihn gilt

Lemma 2.4.1 \mathcal{D} liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^m)$ für $1 \leq p < \infty$ und in $C_0(\mathbb{R})$, d. h. der Menge der stetigen Funktionen auf \mathbb{R}^m , die für $|x| \rightarrow \infty$ verschwinden.

Der Beweis kann z.B. mit Hilfe von Satz 2.1 erfolgen.

Für die Verwendung der Fourier-Transformation sind folgende Testräume sehr wichtig:

Definition 2.4.1 (Schnell abfallende Funktionen) Eine (stetige) Funktion ϕ heißt schnell abfallend, falls

$$|\phi(x)| \leq C_m(1 + |x|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (2.4.1)$$

gilt. Der Raum \mathcal{S} der beliebig oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen ist dann definiert als die Menge aller $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, für die jede Ableitung $D^{j'}\phi(x)$ schnell abfallend ist, bzw. die Seminormen

$$P_{j,j'}(\phi) := \sum_{x \in \mathbb{R}^m} \left| x^j \left(D^{j'} \phi \right) (x) \right| \quad j, j' \in \mathbf{Z}^m$$

endlich sind.

Lemma 2.4.2 Für Funktionen $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ sei $\{d_k(\phi, \psi)\}_{k=1}^\infty$ eine Anordnung der abzählbar vielen Seminormen $p_{j,j'}(\phi - \psi)$. Dann bildet \mathcal{S} mit der Metrik

$$d(\phi, \psi) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{d_k(\phi, \psi)}{1 + d_k(\phi, \psi)}$$

einen lokal konvexen Raum (genauer einen Fréchet-Raum), d. h. \mathcal{S} ist vollständig).

Lemma 2.4.3 \mathcal{S} liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, sowie in $C_0(\mathbb{R})$. Darüber hinaus liegt der Testraum \mathcal{D} dicht in \mathcal{S} bezüglich dessen Topologie.

Der Beweis dieser beiden Lemmata sei dem Leser überlassen.

Auf \mathcal{S} kann man wie in $L_1(\mathbb{R}^m)$ die Fourier-Transformation– ab jetzt mit \mathcal{F} bezeichnet– definieren. Für sie gelten dann alle in Lemma 2.2.2 für $L^1(\mathbb{R}^m)$ formulierten Eigenschaften bezüglich Translation, Dilatation, Differentiation und Faltung. Sie lassen sich sogar leichter als dort direkt beweisen, insbesondere vereinfachen sich die Überlegungen zur Existenz. Die grundlegenden Eigenschaften von \mathcal{F} auf \mathcal{S} sind formuliert in

Satz 2.4.1 Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare und eineindeutige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} (in der Topologie von \mathcal{S}).

BEWEIS: Für $f \in \mathcal{S}$ ist klar, daß

$$\frac{\partial \hat{f}(v)}{\partial v_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ix \cdot v} (-ix_1) dx$$

gilt, und allgemein

$$(\hat{f})^{(\alpha)}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(-ix)^\alpha e^{-ix \cdot v} dx$$

bzw.

$$(P(D))\hat{f}(v) = P(-i\hat{x})f(x)(v). \quad (2.4. 2)$$

Ferner folgt mittels partieller Integration

$$\mathcal{F} \frac{\partial f}{\partial x_1}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-ix \cdot v} dx = (-iv_1)\mathcal{F}f(v)$$

und allgemein

$$\mathcal{F}P(D)f(v) = P(-iv)\mathcal{F}f(v). \quad (2.4. 3)$$

Somit gilt für alle P und alle α

$$P(-iv)[\hat{f}(v)]^{(\alpha)} = P(D)((-i\hat{x})^\alpha f(x))(v).$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \left\| P(-iv)(\hat{f}(v))^{(\alpha)} \right\|_{\infty} &\leq \|P(D)((-i\hat{x})^\alpha f(x))\|_1 \\ &\leq C \sum_{\beta \leq |\alpha|} \sum_{\gamma \leq \deg P} \left\| (1 + |x|^\beta) f^{(\gamma)}(x) \right\|_1 < \infty \end{aligned}$$

d. h. $\hat{f}(v) \in \mathcal{S}$; gleichzeitig folgt daraus die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $f \mapsto \hat{f}$. Ferner gilt die Inversionsformel aus (2.2.1), Teil (3), da $\hat{f}(v) \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^m)$ ist, also

$$\mathcal{F}\hat{f}(x) = f(-x) \text{ oder } \hat{f} = \check{f},$$

wobei $\check{f}(x) := f(-x)$. Ebenso gilt $\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\hat{f}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x)f(x) dx$ für $f, g \in \mathcal{S}$, weil dies schon in $L^1(\mathbb{R}^m)$ bewiesen wurde. Mit $\hat{f}(x) = \overline{h(x)}$ folgt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\overline{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \mathcal{F}\overline{h}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m} \overline{\mathcal{F}h(x)}$$

und daher

$$(g, h) := \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\overline{h}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}(x)\overline{\hat{h}(x)} dx = (\hat{g}, \hat{h})$$

für $g, h \in \mathcal{S}$, d. h. \mathcal{F} ist ein bis auf eine multiplikative Konstante unitärer Operator auf \mathcal{S} und daher auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ als Fortsetzung. Diese Fortsetzung ist eindeutig, denn

$$\mathcal{F}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n \text{ für } \|f - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und

$$\mathcal{F}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}g_n \text{ für } \|f - g_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

impliziert

$$\|\mathcal{F}g_n - \mathcal{F}f_n\| = \|g_n - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für $f_n, g_n \in \mathcal{S}$. □

Nun geht man wie anfangs bemerkt zu den Dualräumen über.

Definition 2.4.2 (Temperierte Distributionen) Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf \mathcal{S} heißt Menge der temperierten Distributionen und wird mit \mathcal{S}' bezeichnet.

Beispiele für Elemente aus \mathcal{S}' sind im Folgenden zusammengestellt:

1. Sei f meßbar auf dem \mathbb{R}^m und ferner gelte

$$f(x) \left(1 + |x|^2\right)^{-k} \in L^p(\mathbb{R}^m) \quad (2.4.4)$$

für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$, d. h. $f \in \mathbb{L}$. Die Klasse \mathbb{L} heißt *Klasse der langsam wachsenden Funktionen*. Dann ist

$$L_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

(dx bezeichnet das Lebesgue-Maß) eine temperierte Distribution. Dies gilt auch für $k = 0$ also $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Speziell ist jedes *Polynom* eine langsam wachsende Funktion.

2. μ sei ein temperiertes Borel-Maß, d. h. es gelte

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(1 + |x|^2\right)^{-k} d\mu(x) < \infty$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L_\mu(\phi) := \int_{\mathbb{R}^m} \phi d\mu \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

ein Element von \mathcal{S}' . Das Gleiche gilt auch für $k = 0$ wenn μ ein endliches Borel-Maß auf \mathbb{R}^m .

3. Punktfunktionale liefern temperierte Distributionen über die Darstellung ($y \in \mathbb{R}^m$ fest)

$$L(\phi) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \phi(y) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Im Spezialfall $k = 0$ sind sie als Dirac-Maße oder Diracsche δ -Funktionen bekannt.

Weitere temperierte Distributionen gewinnt man durch folgende Operationen auf \mathcal{S}' :

1. Ist g eine langsam wachsende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $u \in \mathcal{S}'$, so definiert man das Produkt $g \cdot u$ durch

$$(g \cdot u)(\phi) := u(g\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

2. Differentiation von $u \in \mathcal{S}'$ mit einem Operator D^α , $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, wird erklärt durch

$$(D^\alpha u)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Dies ist konsistent mit der schwachen Ableitung, falls $u \in L^p(\mathbb{R}^m)$ wie in (1) ist.

3. Die Translation τ_h und die Dilatation d_a mit Faktor $a > 0$ werden definiert über

$$\begin{aligned} (\tau_h u)(\phi) &:= u(\tau_{-h}\phi) & \forall \phi \in \mathcal{S}', \\ (d_a u) &:= a^{-m} u(d_{1/a}\phi) & \forall \phi \in \mathcal{S}'. \end{aligned}$$

Lemma 2.4.4 Die Operationen (1) bis (3) sind wohldefiniert und stetig von \mathcal{S}' in \mathcal{S}' .

BEWEIS: Dazu beachte einfach, daß

- im Fall (1) gilt $g\phi \in \mathcal{S}$ für alle $\phi \in \mathcal{S}$,

- im Fall (2) $D^\alpha \phi \in \mathcal{S}$ für alle $\phi \in \mathcal{S}$ und
- im Fall (3) $\tau_h \phi \in \mathcal{S}$ und $\delta_{1/h} \in \mathcal{S}$ für alle $\phi \in \mathcal{S}$.

Die Identifizierung im Spezialfall $u \in \mathbb{L}$ (also für langsam wachsende Funktionen) zeigt, dass $g \cdot u \in \mathcal{E}$ im üblichen Sinne der punktweisen Multiplikation gilt. Gleiches gilt für (3). Für (2) ergibt sich: Falls die übliche partielle Ableitung $f^{(\alpha)}$ existiert und in \mathbb{L} liegt, dann gilt für $f \in \mathbb{L}$

$$(D^\alpha f)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f D^\alpha \phi = \int_{\mathbb{R}^m} f^{(\alpha)} \phi,$$

womit auch dieses Lemma gezeigt ist. □

Mit Hilfe von Testfunktionen der Form $\psi \phi$ ($\psi \in \mathcal{D}$ fest, $\phi \in \mathcal{S}$ beliebig) kann man zeigen

Lemma 2.4.5 *Im Fall $f \in \mathbb{L}$ ist die Zuordnung $f \mapsto L_f \in \mathcal{S}'$ eineindeutig, d. h. für Funktionen f wie in (2.4. 4) gilt*

$$L_f(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S} \implies f = 0 \text{ fast überall}$$

mit anderen Worten: Für f und g aus \mathbb{L} folgt aus $L_f = L_g$, dass $f = g$ fast überall gilt.

Vor dem Beweis sei noch auf den Zusammenhang mit dem Begriff der schwachen Ableitung eingegangen:

Bemerkung 2.4.1 *Aus der Existenz der schwachen Ableitung in $L^p(\mathbb{R}^m)$ in (2.1. 13) folgt das Bestehen der Beziehung unter 2., also auch die Existenz der Ableitung im distributionellen Sinne, denn es gilt ja $L^p(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{L}$. Das Gleiche gilt auch für die Ableitungen von temperierten Distributionen. Lemma 2.4.5 zeigt also, daß alle drei Typen von Ableitungen für langsam wachsende Funktionen aus \mathbb{L} zusammenfallen, wenn die Ableitungen ebenfalls in \mathbb{L} liegen.*

BEWEIS (von Lemma 2.4.5): Wähle $R > 0$ groß genug und setze

$$f_R(x) := \begin{cases} g(x), & |x| \leq R; \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Setze $V_{R,\epsilon} := \{x : R \leq |x| \leq R + \epsilon\}$ und wähle Funktionen $\phi_{R,\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ die

- für $|x| < R$ gleich 1 sind,
- für $|x| > R + \epsilon$ verschwinden und
- auf $V_{R,\epsilon}$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

(Man kann für beliebiges kleines $\epsilon > 0$ solche Funktionen finden.)

Dann ist für beliebiges $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ das Produkt $\psi \phi_{R,\epsilon}$ in $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{S}$ und

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} g \psi \phi_{R,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^m} g_R \psi + \int_{V_{R,\epsilon}} g \phi_{R,\epsilon} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} g_R \psi + \delta_{R,\epsilon}.$$

Falls $g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ so gilt im Fall $1 \leq p < \infty$

$$|\delta_{R,\epsilon}| \leq \int_{V_{R,\epsilon}} |g| \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

so daß für alle $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} g_R \psi = \int_{\mathbb{R}^m} |g_R|^2 + \int_{\mathbb{R}^m} g_R (\psi - g_R).$$

Wähle nun eine Folge von Approximationen ψ_ρ mit

$$\|\psi_\rho - g_R\|^2 \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0$$

und $\psi_\rho \in C^\infty \mathbb{R}^m$, was nach (2.1.3) und dem zugehörigen Korollar möglich ist. Dann folgt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} g_R(\psi_\rho - g_R) \right| \leq \|g_R\|_2 \|\psi_\rho - g_R\|_2 \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0$$

und so $g_R(x) = 0$ fast überall.

Im Fall $p = \infty$ schätzt man einfacher ab:

$$|\delta_{R,\epsilon}| \leq \|g\|_\infty \int_{V_{R,\epsilon}} 1 \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

□

Die Frage nach den allgemeinsten temperierten Distributionen kann ebenfalls beantwortet werden (ein Beweis findet sich z. B. in [Constantinecu74], Abschnitt 7.3.):

Satz 2.4.2 *Zu jedem $u \in \mathcal{S}'$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ mit $|\alpha| \leq n$ Zahlen a_α sowie langsam wachsende stetige Funktionen f_α gibt, mit deren Hilfe sich u als*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha (L f_\alpha),$$

darstellen läßt. Dabei sind $L f_\alpha$ und D^α wie in (2) definiert.

Die Parsevalsche Formel (2.2.2) motiviert nun

Definition 2.4.3 (Fouriertransformation auf \mathcal{S}') *Die Fouriertransformation auf \mathcal{S}' , bezeichnet durch \mathcal{F} oder $\hat{\cdot}$, ist definiert durch*

$$(\mathcal{F}u)(\phi) := u(\mathcal{F}\phi) \quad \text{bzw.} \quad \hat{u}(\phi) := u(\hat{\phi}), \quad u \in \mathcal{S}', \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Dann läßt sich zeigen:

Satz 2.4.3 *Die Fouriertransformation ist eine wohldefiniert, lineare, in der schwachen Topologie von \mathcal{S}' stetige Abbildung von \mathcal{S}' auf ganz \mathcal{S}' . Sie ist mit der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^m)$ wie auch mit der auf $L_2(\mathbb{R}^m)$ konsistent. Weiterhin ist sie eine eineindeutige Abbildung, wobei die inverse Fouriertransformation durch \check{u} , gegeben ist. Die Spiegelung \check{u} einer Distribution $u \in \mathcal{S}'$ ist dabei erklärt durch*

$$\check{u}(\phi) := u(\check{\phi}) \quad \forall \phi \in \mathcal{S},$$

wobei $\check{\phi}(x) := \phi(-x)$.

Ein Beweis findet sich in [Rudin91], Theorem 7.15. Von den Aussagen dieses Satzes benötigen wir eigentlich nur, daß die Fourier-Transformation wohl- definiert auf \mathcal{S}' ist, da uns hier primär die Wirkung von \mathcal{F} auf die oben betrachteten Operationen interessiert. Dazu formulieren wir

Lemma 2.4.6 *Sei P ein Polynom mit zugehörigem Differentialoperator $P(D)$ und $\tilde{P}(v) := P(iv)$. Dann gilt*

$$P(\hat{D})u = \tilde{P}\hat{u}, \quad \hat{\tilde{P}}u = P(-D)\hat{u} \quad \forall u \in \mathcal{S}'.$$

Speziell für das Dirac-Maß aus δ (das durch $L_\phi = \phi(0)$ erklärt ist) gilt

$$\hat{\delta} = 1, \quad \hat{1} = (2\pi)^m \delta \tag{2.4. 5}$$

bzw. allgemeiner

$$P(\hat{D})\delta = \tilde{P}, \quad \hat{\tilde{P}} = (2\pi)^m P(-D)\delta. \tag{2.4. 6}$$

Ferner gilt

$$\tau_{\hat{h}}\hat{u} = e^{ih \cdot} \hat{u} \tag{2.4. 7}$$

und

$$d_a \hat{u} = \frac{1}{a^m} d_{1/a} \hat{u}. \tag{2.4. 8}$$

BEWEIS: Die Beweise von (2.4. 7) und (2.4. 8) sind einfach, z.B. gilt

$$d_a^{\hat{}} u(\phi) = (d_a u)(\hat{\phi}) = \frac{1}{a^m} u(d_{1/a} \hat{\phi}) = u(d_a \hat{\phi}) = \hat{u}(d_a \phi) = \frac{1}{a^m} d_{1/a} \hat{u}$$

Die Fouriertransformierte der Delta-Distribution bestimmt man durch :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\phi) &:= \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) dx && \implies && \hat{\delta} = 1 \in \mathbb{L}; \\ \hat{1}(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\phi}(u) du = 2\pi^m \phi(0) && \implies && \hat{1} = (2\pi)^m \delta \end{aligned}$$

Mit $P_\alpha(x) = x^\alpha$, $\tilde{P}_\alpha(x) = (ix)^\alpha$ gilt

$$D^{\hat{\alpha}} \delta(\phi) = (D^\alpha \delta)(\hat{\phi}) := (-1)^{|\alpha|} \delta(D^\alpha \hat{\phi}) = \tilde{P}_\alpha \hat{\phi} = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_\alpha(x) \phi(x) dx,$$

so daß

$$D^{\hat{\alpha}} \delta = 1 \tilde{P}_\alpha \in \mathbb{L}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{P}}_\alpha(\phi) &:= \tilde{P}_\alpha(\hat{\phi}) := \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_\alpha(v) \hat{\phi}(v) dv \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} D^{\hat{\alpha}} \phi(v) dv = (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^m (D^\alpha \phi)(0) \\ &= (2\pi)^m P_\alpha(-D) \delta \end{aligned}$$

□

Durch Linearkombinationen von Monomen erhält man dann die allgemeineren Formeln (2.4. 8).

2.4.2 Sobolev-Räume und Fouriertransformation

Zunächst zeigen wir den grundlegenden

Satz 2.4.4 Sobolev-Räume und Fouriertransformation) *Folgende Aussagen sind äquivalent für $k = 1, 2, 3, \dots$:*

1. $f \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$, d. h. alle schwachen Ableitungen $D^s f$ existieren für $|s| \leq k$,
2. $\hat{f}(v)$ und $P(iv)\hat{f}(v)$ liegen in $L_2(\mathbb{R}^m)$ für jedes Polynom vom totalen Grad $\deg P \leq k$
3. alle starken partiellen Ableitungen, d. h. in der L_2 -Norm, existieren bis zur Ordnung s , $|s| \leq k$,
4. $\hat{f}(v)$ und $\sqrt{1+|v|^2}^k \hat{f}(v)$ liegen in $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Darüber hinaus bildet der Operator \mathcal{G}_k , definiert durch

$$\hat{\mathcal{G}}_k f(v) := \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}^k} \hat{f}(v) \tag{2.4. 9}$$

einen stetigen Isomorphismus von $L_2(\mathbb{R}^m) \equiv W^{0,2}(\mathbb{R}^m)$ auf $W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$.

BEWEIS: Den Beweis führen wir nach dem Schema

$$\begin{array}{ccc} 3 & \rightarrow & 1 \\ & \swarrow \downarrow & \\ & 2 & \leftrightarrow 4 \end{array}$$

(3) \Rightarrow (1): Die partielle Ableitung $\partial f/\partial x_j = g_j$ existiere in der L_2 -Norm. Dann gilt für jedes $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} g_j(x)\phi(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{f(x - he_j)}{h} - f(x) \right) \phi(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \left(\frac{\phi(x) - \phi(x - he_j)}{h} \right) dx = - \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx \end{aligned}$$

d. h. g_j ist gleich der schwachen partiellen Ableitung $\partial f/\partial x_j$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Argumentation sieht man, daß die Existenz der starken Ableitung die Existenz der entsprechenden schwachen Ableitung beinhaltet.

(1) \Rightarrow (2): Nach Voraussetzung existiert $D^s f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ für $|s| \leq k$, so daß nach Satz 2.1.4 $D^s f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Für $\phi \in \mathcal{D} \equiv C_{00}^\infty(\mathbb{R}^m)$ gilt auf Grund der Parsevalschen Formel 2.2. 7, der Definition der schwachen Ableitung und wegen Eigenschaft 4 aus Lemma 2.2.2

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} (\mathcal{F}D^s f)(x)\phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^m} (D^s f)(v)\hat{\phi}(v) dv = (-1)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\partial^s \hat{\phi}(x) dx \\ &= (-1)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(\mathcal{F}(-iv)^s \phi(v))(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)(-iv)^s \phi(v) dv \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die bereits in Satz 2.4.1 angegebene Eigenschaft, daß $\phi = \mathcal{F}^{-1}\hat{\phi}$ wegen $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$ wieder zu \mathcal{S} gehört und ebenso, daß $(iv)^s \phi(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Ferner zeigt Lemma 2.4.3, daß $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ dicht in \mathcal{S} liegt, so daß nach Grenzübergang in diesem Sinne die obige Identität für alle $\phi \in \mathcal{S}$ gilt. Nun ist aber $D^s f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $(iv)^s \hat{f}(v)$ eine langsam wachsende Funktion. Lemma 2.4.5 zeigt dann $(iv)^s \hat{f}(v) = D^s f(v)$ fast überall, woraus Aussage 2 folgt.

(2) \Rightarrow (3): Wir zeigen zunächst die Existenz der ersten partiellen Ableitung im Sinne der L_2 -Norm. Dazu sei $g(x) := \mathcal{F}^{-1}iv_j \hat{f}(v)(x)$, das nach Voraussetzung und dem vorigen Satz in $L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt. Dann bilde den Differenzenquotienten in e_j -Richtung in der L_2 -Norm:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} - g \right\|_2 &= \left\| \hat{f}(v) \frac{\exp(iv_j h) - 1}{h} - iv_j \hat{f}(v) \right\|_2 \\ &= \left\| \hat{f}(v) \left(\frac{2i \sin(v_j h/2)}{h} - iv_j e^{-iv_j h/2} \right) \right\|_2 \end{aligned}$$

Hier wurde der Integrand mit $\exp(-iv_j h/2)$ multipliziert. Man sieht leicht, daß der neue Integrand die Majorante $|\hat{f}(v)|(|v_j| + i|v_j|)$ hat und daher für $h \rightarrow 0$ fast überall gegen 0 strebt. Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz zeigt dann, daß g die partielle Ableitung von f in Richtung e_j ist. Im nächsten Schritt bilde man dann die Differenzenquotienten dieser ersten partiellen Ableitungen. Mit dem gleichen Argument folgt dann die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen im starken Sinne usw.

(2) \Rightarrow (4): Für gerade k folgt dies direkt aus

$$\sqrt{1 + |v|^2}^k \leq C \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m} |v_1|^{2\sigma_1} \dots |v_m|^{2\sigma_m}.$$

Für ungerade k benutzt man zusätzlich die Abschätzung

$$\sqrt{1 + |v|^2} \leq 1 + \sum_{j=1}^m |v_j|.$$

(4) \Rightarrow (2): Diese Richtung folgt aus der Abschätzung ($|s| \leq k$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |v^s \hat{f}(v)|^2 dv &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m \left(\frac{|v_j|^2}{1+|v|^2} \right)^{s_j} (1+|v|^2)^k |\hat{f}(v)|^2 dv \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^m} (1+|v|^2)^k |\hat{f}(v)|^2 dv \end{aligned}$$

Schließlich überlegt man sich, daß wegen der Isometrie der Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R}^m)$

$$\sum_{|s| \leq k} \left\| v^s \hat{f}(v) \right\|_2 = \sqrt{2\pi}^m \sum_{|s| \leq k} \|D^s f\|_2 \quad (2.4.10)$$

folgt. Ferner ist $\left\| \sqrt{1+|v|^2}^k \hat{f}(v) \right\|_2$ eine dazu äquivalente Norm, wie man aus dem Beweis der Äquivalenz von (2) und (4) sieht. Daher ist $\mathcal{G}_k f \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$ falls $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Umgekehrt folgt aus $g \in W^{k,2}(\mathbb{R}^m)$, daß $f = \mathcal{F}^{-1} \sqrt{1+|v|^2}^k \hat{g}(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$ die Gleichung $\mathcal{G}_k f = g$ erfüllt. Ebenso folgt die Injektivität von \mathcal{G}_k aus der Eineindeutigkeit der Fouriertransformation. \square

Bemerkung 2.4.2 Die Richtung (3) \Rightarrow (2) liefert Eigenschaft 3 aus Lemma 2.2.2 für den Raum $L_2(\mathbb{R}^m)$ und die Richtung (2) \Rightarrow (3) liefert über den den Satz von Plancherel die Eigenschaft 4.

Die Äquivalenz von (1) und (4) kann man zum Anlass nehmen, die Sobolev-Räume im Falle $p = 2$ zu verallgemeinern. Man erhält dann die sogenannten *Besselpotentialräume*, denen der folgende Abschnitt gewidmet ist.

2.4.3 Besselpotentialräume

Definition 2.4.4 (Besselpotential-Räume) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere den Besselpotentialraum $L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ als die Vervollständigung von

$$\left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \exists g \in L_2(\mathbb{R}^m) : (1+|v|^2)^{\alpha/2} \hat{f}(v) = \hat{g}(v) \right\}$$

bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\alpha,2} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^m} (1+|v|^2)^\alpha |\hat{f}(v)|^2 dv} \quad (2.4.11)$$

Per Definition sind dies Räume Banachräume. Für $\alpha \geq 0$ führt die Vervollständigung zu Teilräumen von $L_2(\mathbb{R}^m)$, da die Norm $\|f\|_{\alpha,2}$ dann stärker ist als die L_2 -Norm. Speziell für $\alpha = k$ erhält man zu Satz 2.4.4 das

Korollar 2.4.1 Es gilt

$$W^{k,2}(\mathbb{R}^m) = L^{k,2}(\mathbb{R}^m)$$

mit Äquivalenz der Normen (2.4.11) und (2.4.10).

Für $\alpha < 0$ erhält man Teilräume von \mathcal{S}' , also der Menge der temperierten Distributionen.

Zur näheren Erläuterung definiere für $\alpha < 0$ eine Funktion \mathcal{G}_α durch ihre Fouriertransformation, $\hat{\mathcal{G}}_\alpha := (1+|v|^2)^{-\alpha/2}$. Falls eine solche Funktion in L_1 existiert, so ist die wegen der Eindeutigkeit der Fouriertransformation wohldefiniert. Genauer gilt

Lemma 2.4.7 Sei $\alpha > 0$ und sei \mathcal{G}_α wie gerade angegeben definiert. Dann hat diese Funktion die Darstellung

$$\mathcal{G}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}^m \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-|x|^2/4t} e^{-t} t^{(\alpha-m)/2} \frac{dt}{t}$$

Speziell gilt $\mathcal{G}_\alpha(x) < 0$ und $|\mathcal{G}_\alpha(x)| = \mathcal{O}(\exp(-c_\alpha|x|))$ für $|x| \rightarrow \infty$ mit einer gewissen Konstanten c_α .

BEWEIS: Die zweite Aussage folgt durch Aufspaltung des Integrals \int_0^∞ in $\int_0^{|x|}$ und $\int_{|x|}^\infty$ und zeigt speziell, dass $\mathcal{G}_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Nun benutzt man die schon (in Anschluß an Satz 2.2.1) bewiesene Beziehung

$$\mathcal{F}e^{-|x|^2/4t}(v) = \underbrace{\sqrt{2t}^m e^{-t|v|^2}}_{I_\alpha}$$

Multipliziert man und integriert I_α , so folgt

$$\hat{I}_\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{2}^m \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-|v|^2 t} e^{-t} t^{\alpha/2} \frac{dt}{t}.$$

Nun benutzt man die leicht nachzurechnende Identität

$$u^{-a/2} = \frac{1}{\Gamma(a/2)} \int_0^\infty e^{-ut} t^{a/2} \frac{dt}{t}$$

für $u = 1 + |v|^2$ und erhält $\hat{I}_\alpha(v) = (1 + |v|^2)^{-\alpha/2} \equiv \hat{\mathcal{G}}_\alpha(v)$. □

Als Folgerung erhält man

Korollar 2.4.2 Für $\alpha > 0$ ist der auf $L^p(\mathbb{R}^m)$ definierte Faltungsoperator

$$\mathcal{G}_\alpha(f; x) := (\mathcal{G}_\alpha * f)(x)$$

stetig und beschränkt. Er ist ein Isomorphismus von $L^{\beta,2}(\mathbb{R}^m)$ auf $L^{\beta+\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ für $\beta \geq 0$, d. h. es gilt speziell $L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m) \subset L^{\beta,2}(\mathbb{R}^m)$ für $\alpha > \beta \geq 0$. Es ist \mathcal{G}_2 der Umkehroperator zu $I - \Delta$ und $g = \mathcal{G}_2(f)$ löst die Gleichung $(I - \Delta)g = f$, ist also eine Potentialfunktion.

Schreibt man formal für $\alpha \geq 0$ die Definition $\mathcal{G}_\alpha * f := (I - \Delta)^{-\alpha/2} f$, so gilt folgendes

Lemma 2.4.8 Auf $L^{\alpha,2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, gelten folgende Aussagen:

1. Für $k \in \mathbb{N}$ und $\beta \geq 0$ ist $(I - \Delta)^k$ ein Isomorphismus von $L^{\beta+2k,2}$ auf $L^{\beta,2}$.
2. Genau dann gilt $f \in L^{\beta+r,2}$ mit $r \in \mathbb{N}$, wenn jede schwache Ableitung $D^\gamma f$ mit $|\gamma| = r$ in $L^{\beta,2}$ liegt.

Wir benötigen dieses Ergebnis im Folgenden nicht und überlassen es dem Leser, den Beweis nötigenfalls (z. B. in [Donoghue69]) nachzulesen. Von Bedeutung sind aber folgende Aussagen über die glättende Wirkung der Faltung:

Lemma 2.4.9 Es sei $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und $|\hat{\psi}(v)| \leq C|v|^{-\beta}$ für $\beta > 0$ und $|v| \geq 1$. Dann bildet der Operator $\Lambda_\psi f := \psi * f$ den Sobolev-Raum $W^{s,2}$ stetig auf $L^{s+\beta,2}$ ab.

BEWEIS: Per Definition gilt (wegen $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt $\psi * f$ ja in $L_2(\mathbb{R}^m)$), so daß nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\psi f\|_{s+\beta,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |v|^2)^{s+\beta} \left| \psi \hat{*} f(v) \right|^2 dv \\ &\leq \int_{|v| \leq 1} (1 + |v|^2)^s 2^{2\beta} \left| \psi \hat{*} f(v) \right|^2 dv + \int_{|v| \geq 1} (1 + |v|^2)^s (2|v|^2)^\beta \left| \hat{\psi}(v) \hat{f}(v) \right|^2 (2\pi)^m dv \\ &\leq 2^{2\beta} \|\Lambda_\psi f\|_{s,2}^2 + 2^{2\beta} (2\pi)^m C^2 \int_{|v| \geq 1} (1 + |v|^2)^s \left| \hat{f}(v) \right|^2 dv \end{aligned}$$

Nun beachte, daß nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $|\hat{\psi}(v)| \leq \|\psi\|_1$ gilt und daher

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\psi f\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |v|^2)^s \left| \hat{\psi}(v) \right|^2 \left| \hat{f}(v) \right|^2 dv \\ &\leq \|\psi\|_1^2 \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |v|^2)^s \left| \hat{f}(v) \right|^2 dv. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen folgt

$$\|\Lambda_\psi f\|_{s+\beta,2}^2 \leq 2^\beta (\|\psi\|_1 + (2\pi)^m C^2) \|f\|_{s,2}^2$$

□

Für spätere Zwecke beweisen wir für $m = 1$ eine etwas schärfere Variante, die ein Spezialfall des berühmten **Einbettungssatzes von Sobolev** ist.

Lemma 2.4.10 Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ gelte

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(v)| (1 + |v|)^\alpha dv < \infty,$$

wobei $n < \alpha < n + 1$ sei. Dann gilt $f \in C^n(\mathbb{R})$ und weiterhin

$$|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)| \leq C|x - y|^{\alpha-n},$$

gleichmäßig in $x, y \in \mathbb{R}$, d.h. per Definition, daß $f^{(n)}$ in dem Hölder-Raum $C^{\alpha-n}$ liegt.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $\hat{f}(v)(iv)^n$ eine L_1 -Funktion. Mit Lemma 2.4, Teil 3 folgt daher

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ivx} \hat{f}(v) dv \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ivx} (iv)^n \hat{f}(v) dv.$$

Auf Grund des Lemmas von Riemann-Lebesgue ist damit der erste Teil bereits bewiesen. Mit $y - h = x$ folgt dann weiter

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} (iv)^n \hat{f}(v) (e^{ivh} - 1) e^{ivx} dv \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{ivh} - 1}{(vh)^{\alpha-n}} \right| |h|^{\alpha-n} |v|^\alpha |\hat{f}(v)| dv \end{aligned}$$

Der Faktor $(vh)^{-\alpha+n} |\exp(ivh) - 1|$ ist offensichtlich gleichmäßig durch vh beschränkt. Daraus ergibt sich sofort der zweite Teil des Lemmas nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. □

Bemerkung 2.4.3 Allgemein sind **Hölder-Räume der Ordnung α** für nicht ganzzahliges $\alpha > 0$ definiert als die Menge aller f mit Ableitung $f^{(n)}$ im Hölder-Raum $C^{\alpha-n}$, wobei n die größte ganze Zahl $< \alpha$ ist.

2.5 Anhang

2.5.1 Satz von Paley-Wiener

Zu gegebener Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $f \in L_2(\mathbb{R})$ definiere Funktionen G_{\pm} durch

$$G_{\pm}(v) := \begin{cases} f(v)e^{-\pm vx}, & v > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z > 0.$$

Die Funktionen G_{\pm} liegen für $x > 0$ beide in $L_1(\mathbb{R})$ (bzw. $L_2(\mathbb{R})$) und man stellt fest, daß

$$\hat{G}_+(y; x) = \int_0^{\infty} f(v)e^{-v(x+iy)} dv, \quad \hat{G}_-(y; x) = \int_{-\infty}^0 f(v)e^{+v(x-iy)} dv.$$

Für diese Funktionen beweisen wir zunächst

Lemma 2.5.1 *Es sei $f(z)$ ferner eine ganze Funktion der Form $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_k z^k$ auf \mathbb{C} von exponentiellem Typ $\sigma > 0$, d. h. $|f(z)| \leq C(z) \exp(\sigma |\operatorname{Im} z|)$, wobei $C(z) > 0$ höchstens polynomial in $|z|$ wächst. Dann ist die zugeordnete Funktion*

$$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{-l-1}$$

analytisch für $|z| > \sigma$ und für $z = x + iy$ mit $x > 0$ gelten die Identitäten

$$g(x + iy) = \hat{G}_+(y; x), \tag{2.5.1a}$$

$$g(-x - iy) = -\hat{G}_-(-y; x). \tag{2.5.1b}$$

BEWEIS: Nach dem Satz von Cauchy gilt mit einem Kreis \mathcal{C} vom Radius r um 0

$$a_k = f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz.$$

Es gelte nun $|C(z)| \leq C(1 + |z|)^n$ für ein festes n . Hieraus folgt mit der Stirlingschen Formel

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} e^{-k} k^k$$

sowie der Wahl $r = r_k = k/\sigma$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{e^{r\sigma} k! (1 + \sigma)^n}{r^{k+1}}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^{k+1/2} e^{-k} e^k k^{-k-1} \sigma^{k+1}} = \sigma.$$

Damit existiert zu jedem $\delta > 0$ eine Konstante $C_{\delta} > 0$ mit $|a_k| \leq C_{\delta}(\sigma + \delta)^k$ und

$$\left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{z^{l+1}} \right| < \frac{C_{\delta}}{|z|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sigma + \delta)^l}{|z|^{-l}}, \quad \text{falls } |z| > \sigma + \delta.$$

Die oben definierte Funktion $g(z)$ ist also analytisch für $|z| > \sigma$.

Es sei nun $x = \operatorname{Re} z > \sigma + 2\delta$. Dann gilt für alle $v < 0$

$$\begin{aligned} |f(v)e^{-v(x+iy)}| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |a_k| v^k e^{-vx} \leq C_{\delta} e^{-vx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma + \delta)^k v^k \\ &= C_{\delta} e^{(\sigma + \delta - x)v} \leq C_{\delta} e^{-\delta v}. \end{aligned}$$

Damit ist (unabhängig von dem p , $1 \leq p \leq \infty$, mit $f \in L_p(\mathbb{R})$) das Integral in (2.5. 1a) absolut konvergent und im Folgenden die Vertauschung von Summe und Integral erlaubt. Dies liefert

$$\int_0^\infty f(v)e^{-v(x+iy)} dv = \sum_{k=0}^\infty a_k \int_0^\infty \frac{1}{k!} v^k e^{-vz} dv. \quad (2.5. 2)$$

Wegen $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z > 0$, konvergiert jedes einzelne Integral der Summe. Man kann also die Regeln der komplexen Integration wie im Reellen anwenden (speziell ist die Substitution erlaubt), so dass

$$\int_0^\infty v^k e^{-vz} dv = \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^\infty (zv)^k e^{-vz} d(vz) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^{Rz} e^{-u} u^k du.$$

Nun betrachte das Integral über $\exp(-u)u^k$ längs der Geraden $(0, Rz)$, dann auf dem Kreisbogen mit Radius $|Rz|$ und schließlich zurück auf der Geraden $(\operatorname{Re} Rz, 0)$; dieses Integral verschwindet gemäß dem Cauchyschen Integralsatz. Da der Anteil auf dem Kreisbogen für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, folgt schließlich

$$\int_0^\infty v^k e^{-vz} dv = \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt = \frac{k!}{z^{k+1}}.$$

Aus (2.5. 2) folgt dann (2.5. 1a). Ähnlich ergibt sich (2.5. 1b):

$$\begin{aligned} -\hat{G}_-(-y; x) &= - \int_{-\infty}^0 f(v)e^{v(x+iy)} dv = - \sum_{k=0}^\infty a_k \int_{-\infty}^0 \frac{1}{k!} v^k e^{vz} dz \\ &= - \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k! z^{k+1}} \int_{-\infty}^0 t^k e^t dt = - \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k! (-z)^{k+1}} \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = g(-z) \end{aligned}$$

□

Satz 2.5.1 (Paley-Wiener, 1934) Sei $f(z)$ eine ganze Funktion auf \mathbb{C} vom exponentiellen Typ $\sigma > 0$ im Sinne von des vorangegangenen Lemmas und ihre Restriktion auf \mathbb{R} liege in $L_1(\mathbb{R})$ (bzw. $L_2(\mathbb{R})$). Dann ist f bandbegrenzt, insbesondere gilt für die Fourier-Transformierte \hat{f}

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\sigma, \sigma].$$

BEWEIS: Für $f \in B_\sigma^{(p)}(\mathbb{R})$ setzen wir

$$f_\pm(t) := \begin{cases} f(t), & \pm t > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $p = 2$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{G}_+(y; x) - \hat{f}_+(y) \right|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |G_+(v) - f_+(v)|^2 dv \\ &= \int_0^\infty |1 - e^{-vx}|^2 |f(v)|^2 dv \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Satz von Plancherel benutzt ($G_+(v)$ liegt in $L_2(-\infty, \infty)$). Im Falle $p = 1$ macht man die Abschätzung

$$\left| \hat{G}_+(y; x) - \hat{f}_+(y) \right| \leq \int_0^\infty |1 - e^{-vx}| |f(v)| dv \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

wobei wieder die majorisierte Konvergenz nach Lebesgue ausgenutzt wird. Analog gelten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{G}_-(y; x) - \hat{f}_-(y) \right|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{G}_-(v) - \hat{f}_-(v) \right|^2 dy \\ &= \int_{-\infty}^0 |1 - e^{vx}|^2 |f(v)|^2 dv \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

und

$$\left| \hat{G}_-(-y) - \hat{f}_-(y) \right| \leq \int_{-\infty}^0 |e^{vx}| |f(v)| dv \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Hieraus schließt man weiter (im Sinne von $L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$), daß für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(y) = \hat{f}_+(y) + \hat{f}_-(y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\hat{G}_+(y) + \hat{G}_-(y)]. \quad (2.5. 3)$$

Nun sind die Funktionen $\pm \hat{G}_\pm(y)$ auf den rechten Seiten von (2.5. 1a) und (2.5. 1b) wegen der Voraussetzung $f \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $f \in L_2(\mathbb{R})$ analytisch für $x = \operatorname{Re} z > 0$, wie man durch Differentiation nach z feststellt. Daher sind sie nach dem vorigen Lemma Fortsetzungen der für $|z| > \sigma$ analytischen Funktion $g(z)$. Der Grenzwert (2.5. 3) geht also für $|y| > \sigma$ über in

$$\hat{f}(y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\hat{G}_+(y) + \hat{G}_-(y)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x + iy) - g(-x + iy)] = 0,$$

denn liegt x beliebig nahe bei 0, so gilt $|\pm x + iy| > \sigma$. \square

Wir wollen dieses Ergebnis auf die Klassen $B_{\sigma s}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$ vom exponentiellen Typ aus Definition 2.10 verallgemeinern.

Satz 2.5.2 (L. Schwartz) *Ist $f \in B_{\sigma s}^{(p)}(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq 2$, $\sigma s = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, so gilt für die Fourier-transformierte \hat{f} von f , daß $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq K_{\sigma s} \equiv [-\sigma_1, \sigma_1] \times \dots \times [-\sigma_m, \sigma_m]$. Allgemeiner gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) \hat{\phi}(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \phi(x) = 0, x \in K_{\sigma s}. \quad (2.5. 4)$$

BEWEIS: Im Falle $p = 1$ schreiben wir $f(x) = f(x_j, x')$ wobei x' alle Komponenten von x außer der j -ten bezeichnet, $x' \equiv (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$; dann definieren wir die Funktion $g_j(x_j) := f(x_j, x')$, die für fast alle $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ (nach dem Satz von Fubini) aus $L_1(\mathbb{R})$ ist. Ferner ist g_j eine ganze Funktion vom exponentiellen Typ σ_j in x_j wie unmittelbar aus Definition 2.10 folgt. Die Anwendung des vorigen Satzes liefert dann für fast alle $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$, daß

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iv_j x_j} dx_j \equiv \int_{\mathbb{R}} g_j(x_j) e^{-iv_j x_j} dx_j = 0, \quad |v_j| > \sigma_j.$$

Multiplikation mit $\exp(-ix', v')$ (v' analog zu x' definiert) und Integration über x' (was wegen $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ erlaubt ist) zeigt dann $\hat{f}(v) = 0$ für v mit $|v_j| > \sigma_j$. Dies beweist den Fall $p = 1$, da j beliebig war, $1 \leq j \leq m$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall von (2.5. 4). Dazu sei $\psi_\rho(x) = \rho^{-m} \Phi(x/\rho)$ eine Dirac-Folge, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $\operatorname{supp} \Phi \subseteq [-1, 1]^m$. Es ist dann $\psi_\rho \in \mathcal{S}$ und so $\hat{\psi}_\rho(v) = \hat{\Phi}(\rho v) \in \mathcal{S}$ für $\rho > 0$. Man kann leicht verifizieren, daß $f(v) \hat{\Phi}(\rho v) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ ist und $\mathcal{F}(f(\cdot) \hat{\Phi}(\rho \cdot))(v) \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Es ist nun $f(v) \hat{\Phi}(\rho v) \in B_{\sigma s + \varrho}^{(1)}(\mathbb{R}^m)$, $\varrho = (\rho, \dots, \rho)$, denn $\hat{\Phi}(\rho v)$ ist wegen

$$|\hat{\Phi}(\rho v)| = \left| \int_{[-1, 1]^m} e^{-i\rho v x} \Phi(x) dx \right| \leq e^{\varrho \operatorname{Im} v} \|\Phi\|_1$$

vom exponentiellen Typ ϱ . Nach dem bereits Bewiesenen folgt daher

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}(f(\cdot) \hat{\Phi}(\rho \cdot))(v) \phi(v) dv = 0$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\phi(v) = 0$ für $|v_j| \leq \sigma_j + \rho$. Mit der Parsevalschen Formel folgt für solche ϕ weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(v) \hat{\Phi}(\rho v) \hat{\phi}(v) dv = 0.$$

Wegen $f(v)\phi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und $\lim_{\rho \rightarrow 0} \hat{\Phi}(\rho v) = \hat{\Phi}(0) = 1$ punktweise kann man den Lebesgueschen Satz über majorisierte Konvergenz anwenden und erhält $\int f(v)\hat{g}(v) dv = 0$ für alle $g \in \mathcal{S}$ mit $g(v) = 0$ für v mit $|v_j| \leq \sigma_j + \rho$, $1 \leq j \leq m$. Ist nun $\phi \in \mathcal{S}$ beliebig gegeben mit $\phi(x) = 0$, $|x_j| \leq \sigma_j$ für $1 \leq j \leq m$, so liegt

$$g_\rho := \phi\left(\frac{\sigma_1 x_1}{\sigma_1 + \rho}, \dots, \frac{\sigma_m x_m}{\sigma_m + \rho}\right)$$

wieder in \mathcal{S} und g_ρ hat einen Träger in $|v_j| > \sigma_j$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^m} f(v)\hat{g}_\rho(v) dv$$

und der Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ liefert (2.5. 4).

Nimmt man nun $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ an, so kann man die Parsevalsche Formel anwenden und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(v)\phi(v) dv = 0$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\phi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^m$. Weil \mathcal{S} dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, bedeutet dies $\text{supp } \hat{f} \subseteq K_{\sigma_s}$. Analog folgt der allgemeinere Fall $1 \leq p \leq 2$, unter Beachtung von $\hat{f}(v) \in L_{p'}(\mathbb{R}^m)$, $1/p + 1/p' = 1$. \square

Noch allgemeinere Versionen des Paley-Wiener-Satzes findet man in den Büchern von [Stein71] und in [Reed75]. Im letzteren sind auch Anwendungen solcher Sätze auf (schwache) Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu finden.

2.5.2 Approximationsgüte bandbegrenzter und trigonometrischer Funktionen

Als vorbereitendes Ergebnis benötigen wir

Lemma 2.5.2 *Es bezeichne X einen der Räume $L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit Norm $\|\cdot\|$. Dann gelten:*

1. *Ist g ein Element von $B_p(\omega W)$, dann ist $g(\alpha x)$ für $\alpha > 0$ ein Element von $B_p(\alpha \omega W)$.*
2. *Ist ein Kern $K(u)$ aus $L^1(\mathbb{R}^m)$ gegeben mit $\hat{K}(u) = 0$ für $u \notin W$, d. h. $K \in B_1(W)$, so ist $f * K \in B_p(W)$ für f aus $L^p(\mathbb{R}^m)$.*
3. *Ist unter den Voraussetzungen aus Teil 2 an $K(u)$ außerdem f ein Element von $X = L_p(\mathbb{T}^m)$, d. h. f ist 2π -periodisch, so gilt dies auch für $f * K$. Insbesondere ist $f * K \equiv t$ ein trigonometrisches Polynom, dessen Fourier-Koeffizienten $\hat{t}[j]$ für $j \notin W$ verschwinden.*

BEWEIS: Zu 1: Da er einfach ist, ist er dem Leser überlassen.

Zu 2: Wie bereits im einleitenden Kapitel dargestellt ist $f * K$ für $f \in X$ ein Element von X . Man wähle nun eine Folge $\{f_n\} \in X \cap L^1(\mathbb{R}^m)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n * K - f * K\| = 0$: Für $g_n \equiv f_n * K$ gilt $\hat{g}_n(v) = \hat{f}_n(v)\hat{K}(v)$ nach Lemma 2.2.2, Teil 6, so dass $\text{supp } \hat{g}_n \subseteq \text{supp } \hat{K} \subseteq W$. Dann folgt für $\phi \in \mathcal{S}$ mit $W \cap \text{supp } \phi = \emptyset$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)\hat{\phi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{g}_n(v)\phi(v) dv = \int_W \hat{g}_n \phi = 0,$$

d. h. $g_n \in B_p(W)$. Es folgt mit der Hölderungleichung 1.4. 2 für solche ϕ weiter

$$\left| \int (f * K)\phi \right| = \left| \int (f * K - f_n * K)\hat{\phi} \right| \leq \|f * K - g_n\|_p \left\| \hat{\phi} \right\|_q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

so dass $f * K \in B_p(W)$ wie gewünscht.

Zu 3: Ist f 2π -periodisch, dann gilt

$$(f * K)(x + 2\pi j) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + 2\pi j - u)K(u) du = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - u)K(u) du = (f * K)(x).$$

für Vektoren $j \in \mathbb{Z}^m$. Der Rest des Beweises folgt aus Lemma 2.10. \square

Wir wollen nun die Fourieranalysis benutzen, um die Momentenbedingung aus Satz 2.1.3 alternativ zu beschreiben. Daraus werden wir eine Methode zu ihrer Realisierung herleiten, die ein Analogon zur – später zu behandelnden – Strang-Fix-Theorie bildet.

Satz 2.5.3 Gegeben sei ein Kern $K(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\mu_{r+1} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} |u|^{r+1} |K(u)| du < \infty$$

Dann existiert $D^\alpha \hat{K}$ (mit Multiindex $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$) punktweise, ist stetig und es gelten folgende Aussagen

1.

$$(-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^\alpha K(u) du = (D^\alpha \hat{K})(0), \quad \hat{K}(v) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-ivx} K(x) dx$$

2. Ist $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_+^m$ eine Menge von Multiindizes mit $0 \in \Gamma$ und $|\alpha| \leq r$ für alle $\alpha \in \Gamma$, so gilt für alle $\alpha \in \Gamma$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^\alpha K(u) du = \delta_{\mathbf{0}, \alpha} \iff (D^\alpha \hat{K})(0) = \delta_{\mathbf{0}, \alpha}$$

3. Ist $\Psi(x) \in L_1(\mathbb{R})$ gegeben mit $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} |x|^{r+1} \Psi(x) dx < \infty$, so erfüllt

$$\Psi_r(x) := \mathcal{F}^{-1} 1 - \left(1 - \hat{\Psi}(v)\right)^{r+1}(x)$$

die Bedingung in Teil 1 für $m = 1$ und $\Gamma = \{1, 2, \dots, r\}$.

4. Sei Ψ wie in Teil 3 gegeben, so erfüllt die für $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ durch

$$\Psi_{\mathbf{r}}(x) := \prod_{j=1}^m \Psi_{r_j}(x_j),$$

definierte Funktion die Aussage von Teil 2 mit $\Gamma = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m : \alpha_j \leq r_j, 1 \leq j \leq m\}$.

5. Für die Dirac-Folge mit Kern

$$K(x) \equiv \prod_{j=1}^m \Psi_r(x_j)$$

sind die Bedingungen von Satz 2.1.3 erfüllt und es gilt wie in Korollar 2.1.1

$$\|I_\rho(f) - f\|_p \leq (\mu_r + \mu_{r+1}) \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \omega_1 \left(D^\alpha f; \frac{1}{\rho_p} \right) \quad (2.5. 5)$$

BEWEIS: Zu 1: Dies folgt direkt aus Lemma 2.2.2, Teil 4, soll jedoch hier noch einmal wiedergegeben:

$$\frac{1}{t} \left(\hat{K}(v + e_j t) - \hat{K}(v) \right) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{t} (e^{x e_j t} - 1) e^{-ixv} K(x) dx.$$

Für $t \rightarrow 0$ strebt der erste Faktor gegen $-i(xe_j)$. Außerdem ist er gleichmäßig beschränkt, so daß nach dem Lebesgueschem Theorem Grenzwertbildung und Integration vertauschbar sind. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{K}(v) = \mathcal{F}[-i(xe_j)K(x)](v).$$

Die Stetigkeit folgt wie in Lemma 2.2.1. Wiederholte Anwendung ergibt

$$P(D)\hat{K}(v) = \mathcal{F}[P(-ix)f(x)](v)$$

und mit $v = 0$ die Behauptung.

Zu 2: Dies folgt direkt aus Teil 1.

Zu 3: Die angegebene Definition für Ψ_r ist (zunächst) nur eine Schreibweise für

$$\hat{\Psi}_r(v) = 1 - \left(1 - \hat{\Psi}(v)\right)^{r+1} = \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \left(\hat{\Psi}(v)\right)^\nu$$

Nach Lemma 2.2.2, Teil 5 ist $\left(\hat{\Psi}(v)\right)^\nu = \Psi * \Psi * \dots * \Psi(v)$ (also Fourier-Transformierte der ν -fachen Faltung von Ψ mit sich selbst) ein Element von $L^1(\mathbb{R}^m)$. Also liegt die oben definierte Funktion $\Psi_r(x)$ in $L^1(\mathbb{R}^m)$. Aus der Darstellung folgt auch, dass $\int_{\mathbb{R}} |x|^{r+1} |\Psi_r(x)| dx < \infty$ ist, denn man kann per Induktion zeigen, dass für $1 \leq l, j \leq r+1$ alle Momente $\mu_{l,j}$ von Ψ_j beschränkt sind; z. B. gilt

$$\begin{aligned} \mu_{2,r+1} &:= \int |x|^{r+1} |(\Psi * \Psi)(x)| dx \leq \int |x|^{r+1} \left(\int |\Psi(u)| |\Psi(x-u)| du \right) dx \\ &\leq \int |\Psi(u)| du \int |u+v|^r |\Psi(v)| dv \leq \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} \mu_{j,1} \mu_{r-j,1} < \infty, \end{aligned}$$

Damit ist Teil 2 anwendbar und liefert die Behauptung wegen $\hat{\Psi}_r(0) = 1 - (-1)^{r+1} = 0$ und

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^l \hat{\Psi}_r \right) (0) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^l \left(1 - \hat{\Psi}(v) \right)^{r+1} \right) (0) = 0, \quad 1 \leq l \leq r.$$

Letzteres gilt, weil $\left(1 - \hat{\Psi}(v)\right)^{r+1}$ nach Voraussetzung und Teil 1 eine $(r+1)$ -fache Nullstelle bei $v = 0$ hat.

Zu 4: Die Fourier-Transformation auf \mathbb{R}^m von $\Psi_r(x)$ ist in univariate Fourier-Transformationen zerlegbar:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi_r(x) e^{-ivx} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m (\Psi_{r_j}(x_j)) e^{-iv_j x_j} dx = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \Psi_{r_j}(x_j) e^{-iv_j x_j} dx_j$$

Aus Teil 3 folgt dann für α mit $\alpha \leq r_j$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}^\alpha \Psi_r(u) du = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} u_j^{\alpha_j} \Psi_{r_j}(u_j) du_j = \prod_{j=1}^m \delta_{0,\alpha_j} = \delta_{\mathbf{0},\alpha}.$$

Zu 5: Dies folgt mit Teil 4 direkt aus Satz 2.1.3 und zugehörigem Korollar. \square

Bemerkung 2.5.1 Die Tensorprodukt-Struktur der Kerne in Teil 5 des vorstehenden Satzes ist zu speziell, um die Momentenbedingung von Satz 2.1.3 zu erfüllen. Es gilt nämlich $\int \mathbf{u}^\alpha K(u) du = 0$ sogar für alle α mit $\alpha_j \leq r$ (statt $\alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq r$). Man kann daher die Fehlerabschätzung (2.5. 5) für Funktionen mit entsprechender koordinatenabhängiger Glattheit beweisen, z. B. statt $f \in W_p^r(\mathbb{R}^m)$ die „anisotropen“ Sobolev-Räume $W_p^r(\mathbb{R}^m)$ betrachten, dessen Elemente schwache Ableitungen D^α für α mit $\alpha_j \leq r_j$ besitzen.

Andererseits kann man in der Fehlerabschätzung (2.5. 5) die Halbnorm auf der rechten Seite beibehalten und nach dazu passenden Kernen suchen. Zu diesem Zweck dient folgende Variante des Satzes:

Satz 2.5.4 Sei $K(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ mit $\int_{\mathbb{R}^m} K(u) du = 1$ sowie endlichem $(r+1)$ -sten Moment wie in Satz 2.23 gegeben. Dann genügt

$$\Psi_{r+1,\rho}(t) := - \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} K_{\rho/\nu}(t), \quad K_\alpha(t) := \alpha^m K(\alpha t),$$

den Bedingungen $\int_{\mathbb{R}^m} u^\alpha \Psi_{r+1,\rho}(u) du = 0$ für $1 \leq |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq r$ für jedes $\rho < 0$. Weiter gilt für $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$

$$\|\Psi_{r+1,\rho} * f - f\|_p \leq \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\rho}\right)_p \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \quad (2.5. 6)$$

wobei in Verallgemeinerung von (2.1. 3) die Stetigkeitsmoduli höherer Ordnung definiert seien durch

$$\omega_r(f; \rho)_p := \sup_{0 \leq h \leq \rho} \|\Delta_h^r f\|_p$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ und

$$(\Delta_h^r f)(x) := \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} f(x + \nu h).$$

BEWEIS: Man kann leicht zeigen, daß der Kern $\Psi_{r+1,\rho}$ die angegebenen Bedingungen erfüllt und dann wieder Satz 2.23 anwenden um (2.5. 5) zu erhalten. Die allgemeinere Abschätzung (2.5. 6) erhält man aber leichter mit Hilfe der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|\Psi_{r+1,\rho} * f - f\|_p &= \left\| - \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \int_{\mathbb{R}^m} K_{\rho/\nu}(x-u) f(u) du - f(x) \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} \int_{\mathbb{R}^m} K(v) f\left(x - \frac{\nu v}{\rho}\right) dv + \int_{\mathbb{R}^m} K(v) f(x) dv \right\|_p \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^m} K(v) \Delta_{v/\rho}^{r+1} f(x) \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} |K(v)| \omega_{r+1}\left(f; \frac{|v|}{\rho}\right)_p dv \\ &\leq \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\rho}\right)_p \int_{\mathbb{R}^m} (1+|v|)^{r+1} |K(v)| dv \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung

$$\omega_{r+1}(f; \lambda h)_p \leq (1+\lambda)^{r+1} \omega(f; h)_p \quad (2.5. 7)$$

verwendet wurde. Diese Ungleichung erweitert (2.1. 10) auf den Stetigkeitmodul $\omega(f; \delta)_p \equiv \omega_1(f; \delta)_p$. Bezüglich eines Beweises sei auf Schumaker [Schumaker81] verwiesen. \square

Bemerkung 2.5.2 Ungleichung (2.5. 7) ist stärker als diejenige von Satz 2.23, denn es gilt

$$\omega_{j1}(f; \delta)_p \leq \delta \sum_{i=1}^m \omega_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}; \delta\right)_p. \quad (2.5. 8)$$

Diese Ungleichung folgt aber aus der für $f \in C_0^\infty$ geltenden Beziehung

$$\Delta_h^{j+1} f(x) = \int_0^1 \phi'(t) dt, \quad \phi(t) := \left(\Delta_h^j f\right)(x + th). \quad (2.5. 9)$$

Daraus schließt man

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_h^{j+1} f(x) \right\|_p &\leq \int_0^1 \left\| h \cdot \text{grad} \Delta_h^j f(\cdot) \right\|_p dt \\ &\leq \|h\| \sum_{i=1}^m \left\| \Delta_h^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right\|_p \end{aligned}$$

woraus (2.5. 9) für $f \in C_0^\infty$ folgt; durch Grenzübergang analog zu Korollar 2.1.1 verallgemeinert man die Aussage auf $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^m)$.

Wir erhalten als Anwendung der Sätze die Herleitung von Jackson-Ungleichungen für die Approximation mit bandbegrenzten Funktionen und trigonometrischen Funktionen im \mathbb{R}^m . Für ein festes Gebiet W mit $\text{meas}W > 0$ im \mathbb{R}^m geben diese das Verhalten von $\text{dist}\left(f; B_\rho^{(p)}(W)\right)_{X(\mathbb{R}^m)}$ für $f \in X(\mathbb{R}^m)$ wenn ρ gegen ∞ strebt und entsprechend Lemma 2.3.6 auch $\text{dist}\left(f; \Pi_n^*(W)_{X(\mathbb{T}^m)}\right)$ für $f \in X(\mathbb{T}^m)$ wenn n gegen ∞ strebt. Dabei ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometrischen Polynome t auf dem \mathbb{R}^m deren Fourier-Koeffizienten $\hat{t}[j]$ für alle $j \in \mathbb{Z}_+^m$, die nicht in nW liegen, verschwinden.

Wir betrachten folgende Möglichkeiten für W :

- Ist W ein Quader $[-r_1, r_1] \times \cdots \times [-r_m, r_m]$ mit Kantenlängen $2r_i > 0$, so ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometrischen Polynome mit einem Grad kleiner als nr_i in der i -ten Variable.
- Ist $W = \{x = (x_1, \dots, x_m) : |x_1 + \cdots + x_m| \leq r\}$, so ist $\Pi_n^*(W)$ die Menge aller trigonometrischen Polynome mit totalen Grad kleiner oder gleich nr .

Weniger anschaulich und gebräuchlich sind

- die Kugel $W = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}$
- und der hyperbolische Fall $W \cap \mathbb{Z}^2 = \{x = (x_1, x_2) : 1 \leq |x_1 x_2| \leq r\} \cup \{0\}$.

Wir wenden nun die Sätze auf Kerne $K(x)$ mit $K(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und $\text{supp } \hat{K} \subseteq W$ an. Nach Lemma 2.5.2 liefert wegen $\text{supp } \hat{K}_\rho(v) = \text{supp } \hat{K}(v/\rho) \subseteq \rho W$ die Dirac-Folge Abbildungen I_ρ von $X(\mathbb{R}^m)$ in $B_p(W)$, wobei die Räume $X(\mathbb{R}^m)$ mit den ihrer Definition entsprechenden L_p -Normen, $1 \leq p \leq \infty$ versehen sind. Betrachtet man dann in Satz 2.5.4 die Kerne $\chi_{r+1,\rho}$ die Linearkombinationen der Kerne $K_{\rho/\nu}$, $1 \leq \nu \leq r+1$, sind, so gilt bei obiger Wahl von K wieder $\text{supp } \hat{\chi}_{r+1,\rho} \subseteq \rho W$. Damit kommen wir zu

Satz 2.5.5 Approximationsprozesse

1. Die Familie $\chi_{r+1,\rho} * f$ für $f \in X$ und $\rho \rightarrow \infty$ liefert einen linearen Approximationsprozess auf $X(\mathbb{R}^m)$ in die Räume $B_p(\rho W)$. Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{dist}(f; B_p(\rho W)) &\leq \|\chi_{r+1,\rho} * f - f\|_{X(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\rho}\right)_{X(\mathbb{R}^m)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \end{aligned}$$

und falls $f \in X^{(r+1)}(\mathbb{R}^m)$ weiter

$$\text{dist}(f; B_p(\rho W)) \leq \rho^{-(r+1)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \sum_{|\alpha|=r+1} \|D^\alpha f\|_{X(\mathbb{R}^m)},$$

wobei die μ_l die absoluten Momente von K sind.

2. Ist f zusätzlich periodisch und $f \in X(\mathbb{T}^m)$, so liefert $\chi_{r+1,n} * f$ einen linearen Approximationsprozess auf $X(T)$ in die Räume $\Pi_n^*(W)$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{dist}(f; \Pi_n^*(W))_{X(\mathbb{R}^m)} &\leq \|\chi_{r+1,n} * f - f\|_{X(\mathbb{T}^m)} \\ &\leq \omega_{r+1}\left(f; \frac{1}{\rho}\right)_{X(\mathbb{T}^m)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \end{aligned}$$

und falls $f \in \chi^{(r+1)}(T)$ weiter

$$\text{dist}(f; \Pi_n^*(W))_{X(\mathbb{R}^m)} \leq n^{-(r+1)} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} \mu_l \sum_{|\alpha|=r+1} \|D^\alpha f\|_{X(\mathbb{T}^m)}$$

BEWEIS:Zu 1: Die erste Aussage folgt nach Satz 2.5.4 und sukzessiver Abschätzung der Stetigkeitsmoduli für $X^{(r+1)}(\mathbb{R}^m)$ nach (2.78) und (2.1. 12)

Zu 2: Die Argumentation für die Räume $X(\mathbb{T}^m)$ ist genau die gleiche wie für die Räume $X(\mathbb{R}^m)$, man ersetzt einfach sämtliche $X(\mathbb{R}^m)$ -Normen durch die entsprechenden $X(\mathbb{T}^m)$ -Normen. \square

Bemerkung 2.5.3 Die Fehlerabschätzungen in diesem Satz sind alle vom gleichen Typ und im Wesentlichen unabhängig von der Grundmenge W (und damit vom gewählten Approximationsraum). Verantwortlich für die Approximationsgüte ist stets nur ein einziger Parameter - und zwar entweder ρ oder n (wobei jeder dieser Parameter gegen ∞ strebt). Man kann also anschaulich von Approximationsgüte im „radialen Sinne“ sprechen. Die Mengen W werden mit wachsendem Parameter immer größer. Für $r_1 \leq r_2$ gilt $B_p(\rho_1 W) \subseteq B_p(\rho_2 W)$, für $n_1 \leq n_2$ gilt die entsprechende Inklusion $\Pi_{n_1}(W) \subseteq \Pi_{n_2}(W)$; in beiden Fällen sind die Räume zu verschiedenen Parametern ineinander geschachtelt. Insofern fügen sie sich in die in den nächsten Kapitel zu behandelnden Theorien der translationsinvarianten Räume und der Multiresolution-Analysis ein.

Kapitel 3

Translationsinvariante Räume

3.1 Allgemeine Theorie

3.1.1 Charakterisierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit (den Grundlagen) der Theorie der translationsinvarianten Räume. Die hier erhaltenen allgemeinen Ergebnisse werden dann im folgenden Abschnitt – vor allem auf Splineräume – spezialisiert. Als Grundlage der folgenden beiden Abschnitte dienen [JM91] und [BVR94]. Zuerst seien einige Notationen eingeführt.

Definition 3.1.1 (Translationsinvarianter Raum) *Ein Raum S von Funktionen auf \mathbb{R}^m heißt translationsinvariant, falls aus $f \in S$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ auch $f(\cdot + \alpha) \in S$ folgt.*

Ein spezieller translationsinvarianter Raum ist der durch alle *endlichen* Linearkombinationen von Translaten $\phi(\cdot + \alpha)$ einer Ausgangsfunktion ϕ erzeugte Raum $S_0(\phi)$. Wir machen dann die

Definition 3.1.2 *Der mit $S(\phi)$ bezeichnete Abschluss von $S_0(\phi)$ in $L_2(\mathbb{R}^m)$ heißt der von ϕ erzeugte translationsinvariante Raum in $L_2(\mathbb{R}^m)$ oder auch Raum der Translate von ϕ und ϕ heißt Erzeuger von $S(\phi)$.*

Beispiele sind Translate von Sinc-Funktionen und B-Splines. Im ersten Fall wählen wir ϕ mit Hilfe der Transferfunktion des Gebietes W nach (2.3. 6) und setzen

$$\phi(x) := \int_W e^{2\pi i x v} dv = W(2\pi x) \quad (3.1. 1)$$

sowie

$$S(\omega W) := \overline{\text{span}\{W(2\pi(\omega x - \alpha))\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}} \quad (3.1. 2)$$

wobei der Abschluss in $L_2(\mathbb{R}^m)$ gemeint ist. Satz 2.3.4 zeigt dann, dass $S(\omega W)$ gleich dem Raum $B_2(\omega W)$ von bandgrenzten Funktionen ist. Weitere Standard-Beispiele sind die weiter unten betrachteten Räume von "Cardinal Splines", d.h. Splines mit äquidistanten Knoten, Räume von ganzzahligen Translaten von "Radial Basis Functions" und vor allem die im nächsten Kapitel behandelten Räume von Wavelets.

Bemerkung 3.1.1 *Man kann auch von mehreren Funktionen ϕ_i erzeugte translationsinvariante Räume betrachten. Sie treten speziell dort auf wo wir es mit mehreren Variablen zu tun haben. Wir werden später Beispiele für solche Räume betrachten.*

Bemerkung 3.1.2 *Im Spezialfall, daß ϕ einen kompakten Träger hat, können wir auch den Raum $S_*(\phi)$ aller (also auch unendlicher) Linearkombinationen von Translaten von ϕ betrachten. Es treten bei den Summen dann keine Konvergenzprobleme auf, denn für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ verschwinden nur endlich viele Terme dieser Summen nicht. Man kann dann zeigen, daß $S_*(\phi) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ im L_2 -Sinn mit $S(\phi)$ übereinstimmt.*

Bemerkung 3.1.3 Für die Zwecke der Approximation definiert man für eine Gitterweite $h > 0$ skalierte, translationsinvariante Räume S^h durch

$$S^h = S^h(\phi) = \left\{ s \left(\frac{x}{h} \right) : s \in S(\phi) \right\} \quad (3.1.3)$$

Eine wichtige Frage –die wir im nächsten Abschnitt untersuchen werden– ist dann, welche Approximationsgüte diese Räume für $h \rightarrow 0$ besitzen.

Man kann $S(\phi)$ auch mit Hilfe der semi-diskreten Faltung von ϕ mit dem Folgenraum $l_2(\mathbb{Z}^m)$ einführen. Dazu macht man die

Definition 3.1.3 (Semidiskrete Faltung) Sei ϕ eine Funktion auf \mathbb{R}^m , und sei $a = \{a(\alpha)\}$ eine Folge auf dem ganzzahligen Gitter \mathbb{Z}^m . Dann ist die semi-diskrete Faltung von ϕ und a für alle $x \in \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$(\phi *' a)(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha) \phi(x - \alpha). \quad (3.1.4)$$

Entsprechend bezeichnen wir die Abbildung $a \mapsto \phi *' a$ mit $\phi *'$.

Bezeichnen wir mit l_0 die Menge aller Folgen mit kompaktem Träger, d. h. aller Folgen bei denen nur endlich viele Glieder nicht verschwinden, so ist der oben definierte Raum $S_0(\phi)$ das Bild von l_0 unter der Abbildung $\phi *'$ für $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Entsprechend macht man die

Definition 3.1.4 Gegeben eine Funktion ϕ auf \mathbb{R}^m , so bezeichnet $S_p(\phi)$ das Bild des Folgenraumes $l_p(\mathbb{Z}^m)$ unter der Abbildung $\phi *'$

Das folgende Lemma gibt ein Kriterium für ϕ an, damit $S_p(\phi)$ sinnvolle Räume liefert.

Lemma 3.1.1 Es sei ϕ eine Funktion auf \mathbb{R}^m und sei $\phi^0(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\phi(x - \alpha)|$ für $x \in [0, 1]^m$ und damit definiere die (linearen) Räume $(1 \leq p \leq \infty)$

$$\mathcal{L}^p := \left\{ \phi : \|\phi^0\|_{p, [0, 1]^m} < \infty \right\}. \quad (3.1.5)$$

Dann liegt $\phi *' a$ für $\phi \in \mathcal{L}^p$, $a \in l_p(\mathbb{Z}^m)$, in $L_p(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\|\phi *' a\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \|a\|_{l_p} \|\Phi^0\|_{p, [0, 1]^m} \quad (3.1.6)$$

BEWEIS: Im Falle $p = \infty$ folgt (3.1.6) direkt aus der Definition (3.1.5). Für $1 \leq p < \infty$ schreibe (falls letzteres Integral existiert)

$$\|\phi *' a\|_{p, \mathbb{R}^m}^p = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \int_{[0, 1]^m + \beta} |(\phi *' a)(x)|^p dx = \int_{[0, 1]^m} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} |(\phi *' a)(x + \beta)|^p dx.$$

Dann betrachte für festes x mittels der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha) \phi(x + \beta - \alpha) \right|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} a(\gamma - \beta) \phi(x + \gamma) \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} |\phi(x + \gamma)| \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^m} |a(\gamma - \beta)|^p \right)^{1/p} = \phi^0(x) \|a\|_{l_p} \end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt ergibt

$$\|\phi *' a\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \int_{[0, 1]^m} |\phi^0|^p \|a\|_{l_p}^p dx.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite endlich und die Behauptung folgt. \square

Nach diesem Lemma liegt $S_p(\phi)$ in $L_p(\mathbb{R}^m)$ falls $\phi \in \mathcal{L}^p$ und ist auf Grund der Ungleichung (3.1. 6) abgeschlossen. Im Falle $p = 2$ ist jedoch $S_2(\phi)$ – wie sich noch zeigen wird – im Allgemeinen nicht mit dem früher definierten Raum $S(\phi)$ identisch. Dazu wollen wir die Räume $S(\phi)$ und $S_2(\phi)$ per Fouriertransformation charakterisieren, was im weiteren Verlauf sehr nützlich sein wird. Zunächst gilt

Lemma 3.1.2 *Ist $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und σ eine 2π -periodische Funktion in $L_\infty(\mathbb{T}^m)$, so ist $g = \mathcal{F}^{-1}\sigma\hat{\phi}$ ein Element aus $S(\phi)$.*

BEWEIS: Laut Voraussetzung ist $\sigma\hat{\phi}$ wegen $\hat{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^m)$ eine $L_2(\mathbb{R}^m)$ -Funktion, so daß auch $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt. Es habe nun $\sigma(v) \in L_\infty(\mathbb{T}^m)$ die formale Darstellung

$$\sigma(v) \approx \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)e^{i\alpha v} \text{ bzw. } \hat{\sigma}[\alpha] = a(\alpha). \quad (3.1. 7)$$

Wir bilden den Fejerschen Summationsprozess von σ , d. h.

$$K_N(\sigma; v) := (F_{m,N} * \cdots * F_{1,N} * \sigma)(v)$$

und erhalten wie im Beweis zum Satz von Weierstraß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(\sigma; v) = \sigma(v), \quad |K_N(\sigma; v)| \leq \|\sigma\|_\infty.$$

Damit folgt über das Lebesguesche Majorantenkriterium (Satz 1.4.3)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K_N(\sigma; v)\hat{\phi}(v) - \sigma(v)\hat{\phi}(v)\|_2^2 = 0,$$

und somit nach dem Satz von Plancherel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}^{-1}K_N(\sigma)\hat{\phi} - g \right\|_2 = 0.$$

Nun ist aber $K_N(\sigma)\hat{\phi}$ eine endliche Linearkombination von Funktionen des Typs $\exp(i\alpha v)\hat{\phi}(v)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, und daher $\mathcal{F}^{-1}K_N(\sigma)\hat{\phi} \in S_0(\phi)$. Daraus folgt $g \in S(\phi)$. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich der Raum $S(\phi)$ charakterisieren:

Satz 3.1.1 *Ist $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$, so besteht $S(\phi)$ genau aus den Funktionen $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$, die die Darstellung $\hat{g} = \tau\hat{\phi}$ mit einer 2π -periodischen Funktion $\tau(v)$ besitzen.*

BEWEIS: Es sei $g \in S(\phi)$. Dann gibt es eine Folge von Funktionen

$$g_N(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a(\alpha)\phi(x - \alpha), \quad \hat{g}_N(v) = \tau_N(v)\hat{\phi}(v),$$

wobei die $\tau_N(v)$ derartige trigonometrische Polynome sind, daß

$$\|g_N - g\|_2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \|\tau_N\hat{\phi} - \hat{g}\|_2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Es sei nun $\Omega_\phi := \{v \in \mathbb{R}^m : \hat{\phi}(v) = 0\}$. Dann folgt daraus $\hat{g}(v) = 0$ für $v \in \Omega_\phi$ und $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N(v) = \hat{g}(v)/\hat{\phi}(v)$ fast überall für $v \notin \Omega_\phi$ bzw. $v \in \Omega_\phi^C$. Die Funktion $\hat{g}(v)/\hat{\phi}(v)$ muß auf Ω_ϕ^C als punktwiser Limes von 2π -periodischen Funktionen ihrerseits 2π -periodisch sein. Man definiere dann

$$\tau(v) := \begin{cases} \hat{g}(v)/\hat{\phi}(v), & v \in \Omega_\phi^C \\ 0, & v \in \Omega_\phi \end{cases}$$

Dann ist $\tau(v)$ auch 2π -periodisch und es gilt $\hat{g} = \tau\hat{\phi}$.

Zur Umkehrung gelte $\hat{g} = \tau\hat{\phi}$ mit 2π -periodischem τ . Es sei dann

$$E_N := \{v \in \mathbb{R}^m : |\tau(v)| \leq N\}$$

Dann definiere man

$$\tau_N(v) := \begin{cases} \tau(v), & v \in E_N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und weiter $\hat{g}_N = \tau_N\hat{\phi}$. Dann folgt mit $E_N^* = E_N \cap \Omega_\phi$

$$\|\hat{g}_N - \hat{g}\|_2^2 = \int_{v \notin E_N^*} |\tau(v)\hat{\phi}(v)|^2 dv \quad (3.1. 8)$$

Andererseits muß wegen $\hat{g} \in L_2(\mathbb{R}^m)$

$$\|\hat{g}\|_2^2 \geq \int_{v \notin E_N^*} |\tau(v)\hat{\phi}(v)|^2 dv \geq N^2 \int_{v \notin E_N^*} |\hat{\phi}(v)|^2 dv$$

gelten. Also muß das Maß des Komplements von E_N^* gegen 0 streben und daher in (3.1. 8)

$$\|\hat{g}_N - \hat{g}\|_2^2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

gelten. Es folgt dann weiter $\|g_N - g\|_2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Nach dem vorigen Lemma liegen die g_N wegen $\hat{g}_N = \tau_N\hat{\phi}$ und $\tau \in \mathbf{L}_\infty$ in $S(\phi)$ - und somit auch g . \square

Aus diesem Satz erkennt man, daß der Raum $S(\phi)$ für $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ im Allgemeinen größer ist als $S_2(\phi)$. Denn es gilt (zumindest im distributionstheoretischen Sinne)

$$\mathcal{F} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)\phi(x - \alpha) = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)e^{i v \alpha} \right) \hat{\phi}(v) \equiv \tau(v)\hat{\phi}(v).$$

Nach Satz 3.1.1 ist aber nur $\tau(v)\hat{\phi}(v) \in L_2(\mathbb{R}^m)$ nötig, damit $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} a(\alpha)\phi(x - \alpha)$ in $S(\phi)$ liegt, d. h. $\{a(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}$ muss nicht unbedingt in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegen, wie das für die Elemente von $S_2(\phi)$ verlangt wurde.

3.1.2 Basen

Für die praktische Verwendung der Räume $S_p(\phi)$ ist die Frage nach einer numerische stabilen Basis von zentraler Bedeutung. Für $S_p(\phi)$ legen wir fest:

Definition 3.1.5 (L_p -Stabilität) Gegeben Φ und $S_p(\Phi)$ als Bild von $l_p(\mathbb{Z}^m)$ unter der Abbildung $\Phi*$, so heißen die Translate von Φ l_p -stabil falls für alle $a \in l_p(\mathbb{Z}^m)$

$$C_p \|a\|_{l_p} \leq \|\Phi *' a\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq D_p \|a\|_{l_p} \quad (3.1. 9)$$

mit Konstanten $C_p, D_p > 0$ gilt. Mit anderen Worten ist die Abbildung $\Phi *'$ ein stetiger Isomorphismus von $l_p(\mathbb{Z}^m)$ auf $S_p(\Phi)$.

Es sei dazu bemerkt, dass (3.1. 9) impliziert, dass die Translate von ϕ eine *unbedingte Schauder-Basis* für $S_p(\phi)$ bilden, d. h. jedes Element von $S_p(\phi)$ ist als eine eindeutig bestimmte Linearkombination von Translaten von ϕ darstellbar und diese Linearkombination konvergiert unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder.

Lemma 3.1.1 gibt bereits ein Kriterium dafür, daß die Abschätzung nach oben gilt. Bezüglich eines Kriteriums für die Abschätzung nach unten sei auf Bemerkung 3.5 weiter unten verwiesen. Im Folgenden werden wir uns aber mit dem Fall $p = 2$ besonders beschäftigen, wo mit Hilfe der Fourier-Analysis eine elegante und zugleich exakte Charakterisierung der L_2 -Stabilität möglich ist.

Für diesen Fall gibt es aber noch das äquivalente Konzept einer sogenannten Riesz-Basis, das sich auch für beliebige Hilbert-Räume formulieren lässt, und das deshalb zuvor kurz dargestellt sei.

Definition 3.1.6 (Riesz-Basis) Eine Familie $\{f_j\}_{j \in J}$ von Elementen eines separablen Hilbert-Raums X heißt Riesz-Basis, falls die Elemente $\{f_j\}$ linear unabhängig sind und falls

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |(f, f_j)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.1. 10)$$

mit Konstanten $0 < A, B < \infty$ gilt.

Wir werden zeigen, daß eine Familie $\{f_j\}_{j \in J}$ in X genau dann eine Riesz-Basis bildet, wenn sie als Bild einer Orthonormalbasis unter einen Homöomorphismus A darstellbar ist, der einen anderen Hilbert-Raum Y auf X abbildet. Damit folgt speziell bei Wahl von $Y = l_2(\mathbb{R}^m)$ und $A = \phi^*$, daß eine l_2 -stabile Basis in $S_2(\phi)$ eine Riesz-Basis ist und umgekehrt. Anschaulich kann man also sagen, daß eine Riesz-Basis die nächst günstigen Eigenschaften zu denen einer Orthonormalbasis besitzt.

Es sei nun $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum Y und A eine stetige injektive Abbildung von Y auf X , so sei $f_j := Ae_j$, $j \in J$, definiert. Dann sind die $\{f_j\}_{j \in J}$ linear unabhängig, denn für $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$ gilt

$$0 = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j \implies 0 = A^{-1} \left(\sum_{j \in J} \alpha_j f_j \right) = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j \implies \alpha_j = 0 \quad \forall j \in J$$

Es sei dann A^* der zu A adjungierte Operator; dieser ist definiert als die lineare Abbildung von X nach Y , die die Forderung

$$(f, Ag)_X = (A^*f, g)_Y$$

für alle $f \in X$ und alle $g \in Y$ erfüllt. Man kann zeigen, dass der so definierte Operator wieder linear und stetig ist. Darüber hinaus gelten $\|A^*\| = \|A\|$ sowie $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, und $\|(A^*)^{-1}\| = \|A^{-1}\|$, falls A^{-1} stetig ist (siehe dazu [Heuser86], S. 327ff.). Dies auf den vorliegenden Fall mit $g = e_j$ angewendet ergibt mit der Parseval-Formel für Orthonormalbasen

$$\sum_{j \in J} |(f, f_j)_X|^2 = \sum_{j \in J} |(A^*f, e_j)_Y|^2 = \|A^*f\|_Y^2.$$

Wegen

$$\|(A^*)^{-1}\| \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |(f, f_j)_X|^2 \leq \|A^*\|^2 \|f\|^2$$

folgt dann, daß die $\{f_j\}_{j \in J}$ eine Riesz-Basis bilden.

Bilden umgekehrt die $\{f_j\}_{j \in J}$ eine Riesz-Basis, so definiere man die Abbildung S auf dem Folgenraum $l_2(J)$ in X durch

$$\mathbf{c} = \{c_j\} \in l_2(J) \implies S\mathbf{c} := \sum_{j \in J} c_j f_j \in X$$

Dann ist S linear und stetig bzw. beschränkt, denn

$$|(S\mathbf{c}, f)| = \left| \sum_{j \in J} c_j \overline{(f_j, f)} \right| \leq \sqrt{\sum_{j \in J} |c_j|^2} \sqrt{\sum_{j \in J} |(f_j, f)|^2} = \|\mathbf{c}\| \sqrt{B} \|f\|$$

unter Benutzung von (3.1. 10). Einsetzen von $f = S\mathbf{c} \neq 0$ zeigt dann

$$\|S\mathbf{c}\| \leq \sqrt{B} \sqrt{\sum_{j \in J} |c_j|^2}.$$

Weiterhin bildet S auf ganz X ab, denn mit (3.1. 10) folgt

$$f \perp S(l_2(J)) \implies (f, f_j) = 0 \quad \forall j \in J \implies \|f\| = 0.$$

Schließlich ist S noch eine invertierbare Abbildung, denn

$$S\mathbf{c} = 0 \implies \sum_{j \in J} c_j f_j = 0 \implies c_j = 0 \quad \forall j \in J,$$

da die $\{f_j\}$ als linear unabhängig vorausgesetzt waren. Also ist S eine stetige, injektive Abbildung vom Hilbert-Raum $l_2(J)$ auf X . Nun gilt der Satz von der beschränkten Inversen: Jede lineare, stetige und injektive Abbildung A eines Banachraumes X auf einen Banachraum Y ist stetig (siehe [Heuser86], S. 243ff). Damit folgt direkt, daß S ein stetiger Isomorphismus von $l_2(J)$ auf X ist und die Umkehrung ist bewiesen.

Wir werden nun zunächst die Räume $S_2(\phi)$ weiter (auf die Existenz von orthonormierten oder l_2 -stabilen Basen hin) untersuchen. Beide Fragen lösen wir mit Hilfe der Fourier-Transformation. Dazu benötigen wir einige Notationen, die im Folgenden immer wieder auftreten werden. Zunächst definieren wir

$$c(f, g)(\alpha) := \int_{\mathbf{R}^m} f(x) \overline{g(x - \alpha)} dx, \quad (3.1. 11)$$

die gegebenen $f, g \in L_2(\mathbf{R}^m)$ eine Folge zuordnet. Diese Folge liegt offenbar in L_∞ . Um $c(f, g)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation auszudrücken, wenden wir den Satz von Plancherel an und erhalten

$$c(f, g)(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbf{R}^m} \hat{f}(v) e^{i\alpha v} \overline{\hat{g}(v)} dv = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbf{T}^m} e^{i v \alpha} \left(\sum_{\beta \in \mathbf{Z}^m} \hat{f}(v + 2\pi\beta) \overline{\hat{g}(v + 2\pi\beta)} \right) dv$$

Hier ist zu bemerken, daß nach Voraussetzung $\hat{f}(v) \overline{\hat{g}(v)} \in L^1(\mathbf{R}^m)$ gilt und somit das letzte Integral im L_1 -Sinne konvergiert. Es sind also die $c(f, g)(\alpha)$ die Fourierkoeffizienten der 2π -periodischen L_1 -Funktion

$$[\hat{f}, \hat{g}](v) := \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^m} \hat{f}(v + 2\pi\beta) \overline{\hat{g}(v + 2\pi\beta)} \quad (3.1. 12)$$

Mit diesen Notationen formulieren wir

Lemma 3.1.3 (Orthogonalität von Translaten) *Es sei $\phi \in L_2(\mathbf{R}^m)$. Dann gilt*

1. *Eine Funktion $f \in L_2(\mathbf{R}^m)$ steht senkrecht zu allen ganzzahligen Translaten von ϕ genau dann, wenn*

$$c(f, \phi)(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^m \quad \text{oder} \quad [\hat{f}, \hat{\phi}](v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{T}^m \quad (3.1. 13)$$

2. *Die Translate $\{\phi(x - \alpha)\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^m}$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS) genau dann, wenn*

$$c(\phi, \phi) = \delta_{0, \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^m \quad \text{oder} \quad [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) = 1 \quad \forall v \in \mathbf{T}^m \quad (3.1. 14)$$

Der Beweis ist einfach und ist dem Leser überlassen..

Bemerkung 3.1.4 *Als Anwendung kann man Translate von Sinc-Funktionen betrachten. Für diese gilt $\phi(x) = \mathcal{F}^{-1} \chi_{2\pi W}(x)$, somit $\hat{\phi}(v) = \chi_{2\pi W}(v) = \chi_W(v/2\pi)$ und weiter*

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^m} \chi_W\left(\frac{v}{2\pi} + \beta\right) = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^m} \chi_{W+\beta}\left(\frac{v}{2\pi}\right) = 1$$

falls W ein Fundamentalgebiet ist (s. Definition 2.11). Daher bilden die Translate $W(2\pi(x - j))$ ein ONS in $L_2(\mathbf{R}^m)$. Setzen wir noch $x = v\omega$ mit ω wie in Satz 2.3.4 ein, so erhält man erneut die Aussage des ersten Teils dieses Satzes unter der Voraussetzung, daß W ein Fundamentalgebiet ist.

Statt der Fourier-Reihe der Koeffizienten $c(f, g)(\alpha)$ kann man allgemeiner ihre z -Transformation bilden, d. h.

$$F(f, g)(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} c(f, g)(\alpha) z^\alpha \quad (3.1. 15)$$

Im Falle $z = \exp iv$ geht sie in die Fourier-Reihe über. Man kann aber mit $|z| < 1$ bessere bzw. allgemeinere Konvergenz erreichen, was später hilfreich sein wird. Hinreichende Kriterien für die Konvergenz der Fourier-Reihe in (3.1. 15) sind die Bedingungen $\{c(f, g)(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$, d. h. absolute Konvergenz oder $\{c(f, g)(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$ nach dem Satz von Riesz-Fischer. Dazu formulieren wir

Lemma 3.1.4 Für $f, g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ seien die Funktion $f^0(x)$, g^0 mit Periode 1 wie in Lemma 3.1.1 definiert. Dann gelten

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |c(f, g)(\alpha)| \leq \|f^0\|_{2, [0, 1]^m} \|g^0\|_{2, [0, 1]^m}$$

und

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |c(f, g)(\alpha)|^2 = \left\| \left[\hat{f}, \hat{g} \right] \right\|_{2, [0, 2\pi]^m}^2$$

sowie

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |c(f, g)(\alpha)|^2 \leq \|f^0\|_{2, [0, 1]^m} \|g^0\|_{2, [0, 1]^m}$$

falls die rechten Seiten jeweils endlich sind.

Wir beweisen dieses Lemma nicht (s. [JM91]), sondern bemerken nur zur mittleren Formel, daß sie direkt aus der Parseval-Formel für die 2π -periodische Funktion $[\hat{f}, \hat{g}] \in L_2(\mathbb{R}^m)$ folgt. Wir können mit ihm folgenden Zusammenhang formulieren:

Korollar 3.1.1 Unter den hinreichenden Bedingungen von Lemma 3.1.4 gilt für die Funktionen aus (3.1. 12) und (3.1. 13) die Identität

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} c(f, g)(-\alpha) z^\alpha \equiv F(f, g)(z) = [\hat{f}, \hat{g}](v), \quad z = e^{iv}.$$

In Erweiterung von Lemma 3.1.4 geben wir nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Riesz-Basis an, das ebenfalls die Funktion $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$ verwendet.

Satz 3.1.2 (Y. Meyer) Die Translate $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ einer L_2 -Funktion ϕ bilden eine l_2 -stabile Basis für $S_2(\phi)$ genau dann, wenn für Konstanten $0 < C < D < \infty$

$$C \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \|\hat{\phi}(x + 2\pi k)\|^2 \equiv [\hat{\phi}, \hat{\phi}](x) \leq D, \quad \forall x \in \mathbb{T}^m. \quad (3.1. 16)$$

BEWEIS: Es sei $\{a_k\}$ eine Folge in $l_2(\mathbb{Z}^m)$. Dann konvergiert die Reihe

$$A(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(\omega) := \sum_{|k| \leq N} a_k e^{-i(k, \omega)}, \quad \omega \in \mathbb{T}^m$$

im L_2 -Sinn nach dem Satz von Riesz-Fischer. Mit Hilfe der Parsevalschen Formel aus dem Satz von Plancherel folgt dann wie bei der Berechnung der Koeffizienten $c(f, g)(\alpha)$

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} a_k \phi(x - k) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq N} a_k e^{-i(k, \omega)} \hat{\phi}(\omega) \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer gilt außerdem im l_2 -Sinn

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^m} |A(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |a_k|^2,$$

so daß die Forderung der l_2 -Stabilität äquivalent dazu ist, daß

$$C \int_{\mathbb{T}^m} |A(\omega)|^2 d\omega \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega \leq D \int_{\mathbb{T}^m} |A(\omega)|^2 d\omega \quad (3.1. 17)$$

für alle $A(\omega)$ bzw. alle $\{a_k\}$ in $l_2(\mathbb{Z}^m)$.

Die Ungleichungen (3.1. 16) implizieren nun diejenigen in (3.1. 17), denn mit dem Theorem über majorisierte Konvergenz folgt z.B. aus der oberen Ungleichung in (3.1. 16),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega \leq D \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 d\omega = D \int_{\mathbb{T}^m} |A(\omega)|^2 d\omega.$$

Analog geht man bei der unteren Ungleichung vor, so daß also (3.1. 16) hinreichend für die l_2 -Stabilität ist.

Zum Beweis der umgekehrten Richtung wähle man für festes ω^* im Innern von \mathbb{T}^m eine Folge $A_N(\omega)$ als

$$A_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2N+1)}^m} \prod_{j=1}^m D_N(\omega_j^* - \omega_j)$$

wobei D_N der univariate Dirichlet-Kern aus (2.2. 12) ist und ω_j^* und ω_j die Komponenten von ω^* und ω bezeichnen. Der Vergleich mit (2.2. 13) zeigt, daß

$$|A_N(\omega)|^2 = \prod_{j=1}^m F_{2N}(\omega_j^* - \omega_j)$$

und daher für diese Wahl

$$\int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) d\omega = ((F_{m,2N} * \cdots * F_{1,2N}) * g)(\omega^*), \quad \text{wobei } g(\omega) \equiv [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega).$$

Setzt man $\int_{-\pi}^{\pi} F_{2N}(\omega_j) d\omega_j = 1$ für $1 \leq j \leq m$ bzw. $\int_{\mathbb{T}^m} |A_N(\omega)|^2 d\omega = 1$ in (3.1. 17), so liefert dies

$$C \leq (F_{m,2N} * \cdots * F_{1,2N} * g)(\omega^*) \leq D.$$

Wegen (2.2. 14) folgt weiter für jeden Stetigkeitspunkt ω^* (also fast überall)

$$C \leq g(\omega^*) \equiv [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) \leq D,$$

d. h. die l_2 -Stabilität impliziert die Ungleichungen in (3.1. 16). □

Korollar 3.1.2 *Ist $\tilde{\phi}$ ein beliebiges Element in $S_2(\phi)$ mit der Darstellung $\tilde{\phi}(v) = a(v)\hat{\phi}(v)$ und $a(v) \in L_2(\mathbb{T}^m)$, so bilden die Translate von $\tilde{\phi}$ eine Riesz-Basis genau dann, wenn*

$$0 < A \leq a(v) \leq B < \infty, \quad v \in \mathbb{T}^m$$

mit Konstanten A, B gilt.

Bemerkung 3.1.5 *Bezüglich eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die l_p -Stabilität der Translate sei auf [JM91] verwiesen, wo dies für $\phi \in \mathbb{L}^p$ gezeigt wird. Es ist eine Modifikation des Kriteriums (3.1. 16) und verlangt einen relativ aufwendigen Beweis.*

Als Variante von Satz 3.1.2 sei noch ein Kriterium für die Äquivalenz der Räume $S(\phi)$ und $S_2(\phi)$ bewiesen:

Korollar 3.1.3 Erfüllt $\phi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ die linke Ungleichung in (3.1. 16), so gilt $S_2(\phi) = S(\phi)$.

BEWEIS: Nach Definition ist nur $S(\phi) \subseteq S_2(\phi)$ zu zeigen. Es sei also $g \in S(\phi)$. Nach Satz 3.1.1 gilt dann $\hat{g}(v) = \tau(v)\hat{\phi}(v)$ mit einer 2π -periodischen Funktion $\tau(v)$ und daher $\hat{g}(v + 2\pi k) = \tau(v)\hat{\phi}(v + 2\pi k)$ und weiter

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} |\hat{g}(v + 2\pi k)|^2 dv \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} |\tau(v)\hat{\phi}(v + 2\pi k)|^2 dv \geq \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{k \leq N} |\tau(v)\hat{\phi}(v + 2\pi k)|^2 dv. \end{aligned}$$

Lässt man nun N gegen unendlich gehen, so folgt wegen der Stetigkeit der Funktionen $\hat{\phi}(v + 2\pi k)$ nach (3.1. 16)

$$\sum_{|k| \geq N} |\hat{\phi}(v + 2\pi k)|^2 dv \geq \frac{A}{2}$$

und somit $\tau(v) \in L_2(\mathbb{T}^m)$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer muß dann $\tau(v) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} a_l \exp(ilv)$ mit $\{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$ gelten und somit

$$\hat{g}(v) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} a_l \hat{\phi}(\cdot + l)(v),$$

d. h. $g \in S_2(\phi)$. □

Man kann mit Hilfe der beschriebenen allgemeinen Charakterisierung einer Riesz-Basis in einem Hilbert-Raum auch eine Methode zur Konstruktion einer ONB gewinnen. Dies folgt aus dem Beweis in [Meyer90], der allerdings abstrakter Natur ist, da er mit dem Operatoralkül für positive selbstadjungierte Operatoren arbeitet. Im Spezialfall der Räume $S_2(\phi)$ gibt jedoch die Fourier-Analyse eine einfachere Methode. Wir beschreiben sie in

Lemma 3.1.5 Es sei $\phi \in L_2(\mathbb{T}^m)$ die Erzeugenden von $S_2(\phi)$ und es sei (3.1. 16) erfüllt. Dann bilden die Translate von $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$, definiert per

$$\hat{g}(v) = \frac{\hat{\phi}(v)}{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)}} \tag{3.1. 18}$$

eine ONB für $S_2(\phi)$.

BEWEIS: Wenn solch ein g existiert, muß es nach Satz 3.1.1 die Form $\hat{g}(v) = \tau(v)\hat{\phi}(v)$ mit einem 2π -periodischen $\tau(v)$ haben. Nach Lemma 3.1.3 muß dafür

$$1 = [\hat{g}, \hat{g}](v) = [\tau\hat{\phi}, \tau\hat{\phi}](v) = |\tau(v)|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v),$$

d. h. $|\tau(v)| = 1/\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)}$ gelten. Wegen (3.1. 16) ist dieses $|\tau(v)|$ wohldefiniert. Wir können speziell $\tau(v) = |\tau(v)|$ wählen und erhalten (3.1. 18). Hiermit kann man auch umgekehrt $[\hat{g}, \hat{g}](v) = 1$ nachweisen und die Behauptung ist bewiesen. □

Als Anwendung dieser Formel für g bzw. \hat{g} kann man zeigen

Lemma 3.1.6 Ist $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ zusätzlich glatt in dem Sinne, daß $\phi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ (vgl. Definition in Abschnitt 2.4) für $\alpha > 0$, so gilt dies auch für das ONS aus (3.1. 18).

BEWEIS: Er folgt unmittelbar aus (3.1. 16) und (3.1. 18), denn $\phi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ bedeutet, daß

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\phi}(v)|^2 (1 + |v|^2)^\alpha dv < \infty$$

gilt. □

Im Spezialfall ganzzahliger $\alpha = r < 0$ sind die Räume $L^{r,2}(\mathbb{R}^m)$ mit dem Sobolev-Raum $W^{r,2}(\mathbb{R}^m)$ äquivalent. Mit Hilfe des bereits bewiesenen Spezialfalles der Sobolev-Einbettung (vgl. 2.4) folgt aus obigem Lemma, daß $\phi \in L^{\alpha,2}(\mathbb{R}^m)$ mit $\alpha - m/2 > k$ eine ONB in (3.1. 18) in $C^k(\mathbb{R}^m)$ liefert.

Eine weitere wichtige Folgerung ist

Lemma 3.1.7 *Es sei $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m) \cap L_\infty$ exponentiell abfallend in x , d. h. es gebe ein $q \in (0, 1)$ und $C < 0$ unabhängig von x , so dass*

$$|\phi(x)| \leq Cq^{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ferner seien die Translate von ϕ l_2 -stabil. Dann sind die Fourier-Koeffizienten $\{b_k\}$ von $1/[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$ in (3.1. 18) eindeutig bestimmt und fallen exponentiell in k ab. Das durch $\{g(x-j)\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ erzeugte ONS besteht dann ebenfalls aus exponentiell abfallende Funktionen.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß die Koeffizienten $\overline{c(\phi, \phi)(j)}$ in (3.1. 11) exponentiell abfallen. Dazu unterscheidet man zwischen $|x| \geq 2|j|$, wofür man die Abschätzung

$$|\phi(x-j)\phi(x)| \leq C^2 q^{|x-j|} q^{|x|} \leq C^2 q^{|x|-|j|+|x|} \leq C^2 q^{|x|} q^{|j|}$$

macht und $|x| \leq 2|j|$, wofür die Abschätzung

$$|\phi(x-j)\phi(x)| \leq C^2 q^{|j|-|x|} q^{|x|} \leq C^2 q^{|j|}.$$

gilt. Weiterhin schätzt man ab:

$$|c(\phi, \phi)(j)| \leq C^2 q^{|j|} \left[\int_{\mathbb{R}^m} q^{|x|} dx + \int_{|x| \leq 2|j|} dx \right] \leq \tilde{C} \tilde{q}^{|j|},$$

wobei $\tilde{C} < 0$ und $\tilde{q} \in (0, 1)$ wieder Konstanten sind. Dabei kann \tilde{q} (um das lineare Wachstum in $|j|$ des zweiten Terms zu kompensieren) geringfügig größer sein als q .

Damit konvergiert die Laurent-Reihe $F(\phi, \phi)(z)$ in (3.1. 15) für $z \in \mathbb{C}^m$ mit $\tilde{q} < |z| \leq 1/\tilde{q}$. Ferner sind die $\overline{c(\phi, \phi)(j)}$ die Fourier-Koeffizienten von $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$. Da nun die entsprechende Reihe konvergiert, folgt

$$F(\phi, \phi)(e^{iv}) = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) \geq C > 0.$$

Daher ist $1/F(\phi, \phi)(z)$ holomorph in einer Umgebung von $\mathbb{T}^m = \{z : |z| = 1\}$ in \mathbb{C}^m und folglich wieder in eine Laurent-Reihe für $1/\rho < |z| < \rho$ mit einem gewissen $\rho = 1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, entwickelbar. Die Koeffizienten dieser Reihe sind gerade die gesuchten $\{b_k\}$ und müssen exponentiell in $|k|$ abfallen, damit die Reihe im angegebenen Bereich konvergiert. Es gilt also $|b_k| \leq \bar{C} \rho^{-|k|}$ mit einer gewissen Konstanten $\bar{C} > 0$ und daher für g aus (3.1. 18)

$$|g(x+j)| \leq \sum_k |b_k \phi(x+j-k)| \leq \bar{C} \sum_k |b_k| q^{-|j-k|}, \quad x \in [0, 1], \quad j \in \mathbb{Z}^m$$

Durch Unterscheiden der Fälle $|k| \geq 2|j|$ und $|k| \leq 2|j|$ analog wie oben erhält man dann das exponentielle Abfallen von $|g(x)|$ in $|x|$. □

Bemerkung 3.1.6 *In Kapitel 4, speziell in den Abschnitten 4.2 und 4.3, wird auf dem Wege zur Konstruktion von Wavelets zuerst wie in Lemma 3.5 eine ONB aus Translaten der Erzeugenden ϕ eines zugrundeliegenden Raums $S_2(\phi)$ konstruiert. Es stellt sich dann heraus, daß deren Eigenschaften sich auf die Wavelets vererben. Insbesondere zeigen die gerade bewiesenen Lemmata 3.6 und Lemma 3.7 dies für die Eigenschaften der Glattheit und des exponentieller Abfalls von ϕ .*

3.1.3 Lineare Projektionsoperatoren

Als weitere Anwendung der Fourieranalysis charakterisieren wir lineare Projektionsoperatoren in $S_2(\phi)$. Dabei nehmen wir an, daß die Translate von ϕ eine Riesz-Basis bilden, so daß $S_2(\phi) = S(\phi)$ gilt. Zuerst bestimmen wir den orthogonalen Projektor P_ϕ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ auf $S(\phi)$, d. h. wir suchen

$$\begin{aligned} P_\phi : L_2(\mathbb{R}^m) &\rightarrow S(\phi) \\ f &\mapsto P_\phi f : \quad (f - P_\phi f, g) = 0 \quad \forall g \in S(\phi) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Dieser Operator existiert, ist stetig und liefert –da $S(\phi)$ per Definition abgeschlossen ist– nach dem allgemeinen Satz 1.4.5 aus Kapitel 1 die beste Approximation im Hilbert-Raum $L_2(\mathbb{R}^m)$ bezüglich $S(\phi)$. Nach Satz 3.1.1 wissen wir, daß für seine Fourier- Transformation

$$P_\phi f(v) = \tau_f(v) \hat{\phi}(v) \quad (3.1.20)$$

mit 2π -periodischem τ_f gelten muß. Die obige Orthogonalitäts-Relation liefert dann mit Lemma 3.1.3

$$0 = [\hat{f} - P_\phi \hat{f}, \hat{\phi}](v) = [\hat{f}, \hat{\phi}](v) - \tau_f(v) [\hat{\phi}, \hat{\phi}], \quad v \in \mathbb{T}^m. \quad (3.1.21)$$

Damit folgt

Lemma 3.1.8 Für den orthogonalen Projektor P_ϕ von $L_2(\mathbb{R}^m)$ auf $S(\phi)$ gilt die Darstellung (3.1.21) mit

$$\tau_f(v) := \begin{cases} [\hat{f}, \hat{\phi}](v) / [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v), & [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.22)$$

für alle $v \in \mathbb{T}^m$. Für den Fehler der Approximation im L_2 -Sinn durch $S(\phi)$ gilt

$$\text{dist}(f, S(\phi))_{2, \mathbb{R}^m}^2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \left[\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)|^2 dv - \int_{\mathbb{T}^m} \frac{||[\hat{f}, \hat{\phi}](v)||^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv \right] \quad (3.1.23)$$

mit der Konvention, daß $\hat{\phi}(v)/[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 0$ für $\hat{\phi}(v) = 0$ gesetzt wird.

BEWEIS: Die Wahl (3.1.22) für $\tau_f(v)$ garantiert, daß (3.1.21) immer erfüllt ist, denn aus $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) = 0$ folgt $\hat{\phi}(v + 2\pi\beta) = 0$ für alle $\beta \in \mathbb{Z}^m$ und somit $[\hat{f}, \hat{\phi}] = 0$. Nun gilt nach (3.1.21) für den Fehler des orthonormalen Projektors P_ϕ , daß

$$\|f - P_\phi f\|_2^2 = (f - P_\phi f, f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\hat{f}(v)} [\hat{f}(v) - \mathcal{F}P_\phi f(v)] dv,$$

wobei für die letzte Gleichheit die Parseval-Identität verwendet wurde. Setzt man darin $\mathcal{F}P_\phi f(v) = \tau_f(v) \hat{\phi}(v)$ mit $\tau_f(v)$ aus (3.1.22) ein, so folgt

$$\text{dist}(f, S(\phi))_{2, \mathbb{R}^m}^2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\hat{f}(v)} \left[\hat{f}(v) - \frac{[\hat{f}, \hat{\phi}](v)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} \hat{\phi}(v) \right] dv$$

Nun beachte

$$\int \overline{\hat{f}(v)} \hat{\phi}(v) \frac{[\hat{f}, \hat{\phi}](v)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv = \int_{\mathbb{T}^m} \overline{\hat{f}(v)} \hat{\phi}(v) \frac{\sum_{\beta} \overline{\hat{f}(v + 2\pi\beta)} \hat{\phi}(v + 2\pi\beta)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv = \int_{\mathbb{T}^m} \frac{||[\hat{f}, \hat{\phi}](v)||^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv.$$

□

Bemerkung 3.1.7 Das Ergebnis dieses Lemmas wurde ohne die Bedingung (3.1. 16) bewiesen. Ist sie jedoch erfüllt, so hat die Menge der v mit $[\phi, \phi](v) = 0$ das Maß 0 und (3.1. 22) vereinfacht sich entsprechend. Die explizite Form (3.1. 23) des Fehlers im allgemeinen Fall ist besonders bei der Untersuchung der Güte der Approximation durch Translate von ‘Radial Basis Functions’ nützlich, da deren Fourier-Transformation speziell am Nullpunkt singular werden können, obwohl sie sonst stetig sind. Dies ist ein zentrales Anliegen der bereits zitierten Arbeit von de Boor - DeVore - Ron ([BVR94]).

Bemerkung 3.1.8 Im Falle $\text{supp } \hat{f} \subseteq \mathbb{T}^m + 2\pi\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ vereinfacht sich (3.1. 23) weiter, denn dann gilt für $v \in \mathbb{T}^m$

$$[\hat{f}, \hat{\phi}](v) = \sum_{\beta} \hat{f}(v + 2\pi\beta) \overline{\hat{\phi}(v + 2\pi\beta)} = \hat{f}(v + 2\pi\alpha) \hat{\phi}(v + 2\pi\alpha)$$

und daher

$$\int \overline{\hat{f}(v) \hat{\phi}(v)} \frac{[\hat{f}, \hat{\phi}](v)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv = \int_{\mathbb{T}^m + 2\pi\alpha} \frac{|\hat{f}(v) \hat{\phi}(v)|^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} dv.$$

Wir erhalten somit

$$\text{dist}(f; S(f))_{2, \mathbb{R}^m}^2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(v)|^2 \left[1 - \frac{|\hat{\phi}(v)|^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} \right] dv \quad (3.1. 24)$$

Als Anwendung kann man die beste Approximation mit Translaten von $W(2\pi x)$ bestimmen. Spezialisierung der Formel (3.1. 24) liefert die bereits durch (2.35) gegebene Formel für den Fehler der besten Approximation.

Eine andere Methode, die beste Approximation $P_{\phi} f$ von $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ aus $S_2(\phi)$ ergibt sich, wenn man die Orthogonalitätsrelation (3.1. 19) zur Gewinnung eines Gleichungs-Systems für $P_{\phi} f$ ausnutzt, das allerdings unendlich ist. Man erhält es durch den Ansatz

$$P_{\phi}(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k(f) \phi_k, \quad \phi_k(x) := \phi(x - k) \quad (3.1. 25)$$

wobei die Koeffizienten $a_k(f) \in \mathbb{R}$ bestimmt werden aus

$$(P_{\phi} f, \phi_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k(f) (\phi_k, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j \in \mathbb{Z}^m$$

Speziell kann man das Element $g \in S(\phi)$ mit

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k \phi_k \quad (3.1. 26)$$

bestimmen, dessen Koeffizienten $\{b_k\}$

$$(g, \phi_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k (\phi_k, \phi_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k (\phi, \phi_{j-k}) = \delta_{0,j} \quad (3.1. 27)$$

erfüllen. Wie man leicht nachrechnet, gewinnt man mit Hilfe der Translate $g_l(x) := g(x - l)$ für die beste Approximation die Darstellung

$$P_{\phi}(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (f, g_l) \phi_l = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} b_k (f, \phi_{k+l}) \right) \phi_l.$$

Gleichung (3.1. 27) ist eine sogenannte *Toeplitz-Matrix*, d.h. sie hat Faltungsstruktur. Man löst sie deshalb (zunächst formal) mit der *z-Transformation*, d. h. wir multiplizieren beide Seiten mit $z^j = z_1^{j_1} \dots z_m^{j_m}$ für $z \in \mathbb{C}^m$ und summieren über j . Bei (formaler) Vertauschung der Summation folgt mit (3.1. 11)

$$1 = \sum_j \sum_k b_k z^k (\phi, \phi_{j-k}) z^{j-k} = \sum_k b_k z^k \sum_l c(\phi, \phi)(l) z^l \quad (3.1. 28)$$

bzw.

$$\sum_k b_k z^k = \frac{1}{\sum_l c(\phi, \phi)(l) z^l} \quad (3.1. 29)$$

Aus dieser Formel lassen sich die in (3.1. 27) gesuchten Koeffizienten $\{b_k\}$ z. B. über Potenzreihenentwicklung der rechten Seite ermitteln.

Es gibt mehrere Möglichkeiten dieses Vorgehen streng zu rechtfertigen. Eine davon beruht auf der Voraussetzung, daß die Translate von ϕ eine Riesz-Basis bilden. Dann sind nach Satz 3.1.1 sowohl $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$ als auch $1/[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$ Elemente von L_∞ und nach Lemma 3.1.4 liegen die Folgen $\{c(\phi, \phi)(v)\}_{l \in \mathbb{Z}^m}$ und $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$ aus (3.1. 27) in $l_2(\mathbb{R}^m)$. Die nötige Vertauschung der Summationen führt man in (3.1. 28) zunächst für $|z| < 1$ durch und lässt dann z gegen Eins streben.

Auf analoge Weise lässt sich die sogenannte **Cardinal Interpolation** mit Translaten von ϕ per Fourieranalysis durchführen. Dieses Problem kann wie folgt beschrieben werden:

Gegeben eine Folge \vec{f} von Daten $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}^m}$ finde ein Element $s = s_{\vec{f}} \in S(\phi)$, so daß

$$s_{\vec{f}}(l) = f_l \quad \forall l \in \mathbb{Z}^m, \quad (3.1. 30)$$

bzw. finde eine Koeffizientenfolge $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$, so dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j \phi(l - j) = f_l \quad \forall l \in \mathbb{Z}^m.$$

Wir betrachten dazu zuerst die spezielle Datenfolge $f_l = \delta_{l,0}$ mit dem Kroneckersymbol $\delta_{l,0}$ und suchen einen Fundamentalinterpolanten $L(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \phi(x - j)$ mit Koeffizienten a_j^* mit

$$L(l) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \phi(l - j) = \delta_{l,0}. \quad (3.1. 31)$$

Multiplikation beider Seiten mit e^{ilx} und Summation über l ergibt formal

$$1 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} e^{ilx} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* \phi(l - j) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* e^{ijx} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(l) e^{ilx} \right). \quad (3.1. 32)$$

Wenden wir dann die Poisson-Summationsformel von Korollar 2.2.1 (zunächst noch formal) auf $g = \phi$ an, so erhalten wir aus (3.1. 32)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* e^{ijv} = \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\phi}(v + 2\pi k)}.$$

Daraus folgt (ebenfalls noch rein formal) für die Fouriertransformierte des Fundamentalinterpolanten

$$\hat{L}(v) = \hat{\phi}(v) \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} a_j^* e^{ijv} = \frac{\hat{\phi}(v)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\phi}(v + 2\pi k)} \quad (3.1. 33)$$

All diese Rechnungen können unter geeigneten Annahmen über ϕ streng gerechtfertigt werden. Dies geschieht im folgenden Satz, wobei die Annahmen über ϕ gegenüber dem Fall des orthogonalen Projektors leicht modifiziert sind.

Satz 3.1.3 *Es sei $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ Erzeugende von $S(\phi)$ derart, dass $\hat{\phi}(v) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und $\{\phi(l)\}_{l \in \mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ gilt, sowie*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\phi}(x + 2\pi k) \geq A > 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^m. \quad (3.1. 34)$$

Dann gibt es genau eine Lösung $L \in S_2(\phi)$ von (3.31), d. h. $L(l) = \delta_{l,0}$ für $l \in \mathbb{Z}^m$, und ihre Fourier-Transformierte hat die Form (3.1. 33). Liegt die Datenfolge $\{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}^m}$ in $l_1(\mathbb{Z}^m)$, so hat auch das ‘cardinal interpolation problem’ (3.1. 30) genau eine Lösung $s_{\vec{f}}$ mit der Darstellung

$$s_{\vec{f}}(x) = \sum_k f(k)L(x-k), \quad \mathcal{F}s_{\vec{f}}(v) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f_l e^{ivl} \right) \hat{L}(v). \quad (3.1. 35)$$

BEWEIS: Laut Voraussetzung ist die Poisson-Summationsformel von Korollar 2.2.1 darauf anwendbar, also

$$\sum_l \phi(l)e^{-ilx} = \sum_k \hat{\phi}(x+2\pi k). \quad (3.1. 36)$$

Diese Funktion ist 2π -periodisch und somit nach (3.1. 32) auch ihr Kehrwert. Speziell liegt sie in $L_2(\mathbb{T}^m)$, so daß nach dem Satz von Riesz-Fischer die dadurch definierten $\{a_j^*\}$ in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ liegen. Daher ist die Vertauschung der Summen in (3.1. 32) zulässig, so daß diese Relation im $L_2(\mathbb{R}^m)$ -Sinn gültig ist. Dann gilt in (3.1. 31), daß diese $\{a_j^*\}$ die einzige Lösung dieser Gleichung in $l_2(\mathbb{Z}^m)$ sind. Es folgt die Darstellung (3.1. 33) und die $L_k(x) := L(x-k)$ erfüllen $L_k(l) = \delta_{k,l}$. Somit ist $\sum f(k)L_k(x)$ die Lösung von (3.1. 30) falls gezeigt wird, daß diese Funktion in $L_2(\mathbb{R}^m)$ liegt. Dies folgt aber aus der Abschätzung

$$\left| \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} f_l e^{ivl} \right| \frac{|\hat{\phi}(v)|}{\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\phi}(v+2\pi k) \right|} \leq \frac{1}{A} \|f\|_{l_1} |\hat{\phi}(v)|$$

Nun gilt lt Annahme $S(\phi) = S_2(\phi)$. Wäre also obige Lösung nicht eindeutig, so gäbe es eine nichttriviale homogene Lösung zu (3.1. 30) mit Koeffizienten $\{\tilde{a}_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. Dann müsste analog zu (3.1. 32)

$$0 = \left(\sum \tilde{a}_l e^{ijx} \right) \left(\sum \phi(l) e^{ilx} \right)$$

gelten. Wegen (3.1. 34) und (3.1. 36) folgt daraus $\sum_j \tilde{a}_j e^{ijx} = 0$ fast überall und somit $\tilde{a}_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}^m$, was einen Widerspruch liefert. \square

Mit Hilfe des folgenden Lemmas von Wiener kann man unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.3 sogar zeigen, daß die Koeffizientenfolge $\{a_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ des Fundamental-Interpolanten ψ in $l_1(\mathbb{Z}^m)$ liegt:

Satz 3.1.4 (Wiener-Lemma) *Es sei $g(x) = \sum b_l e^{ilx}$ mit $\{b_l\} \in l_2(\mathbb{Z}^m)$. Dann folgt aus $g(x) \neq 0$ für alle x , daß*

$$\frac{1}{g(x)} = \sum c_l e^{ilx}$$

mit $\{c_l\} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$.

Zum Beweis sei auf [Rudin91], Kapitel 11 verwiesen. Anwendung auf $g(x) = \sum_k \hat{\phi}(x+2\pi k)$ liefert $\{a_l^*\} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$. Damit kann man allgemeiner als oben Interpolation mit l_p -Daten betrachten.

Korollar 3.1.4 *Bilden unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.3 die Translate von ϕ eine l_p -stabile Basis, so gibt es zu jeder Datenfolge $\vec{f} = \{f_l\}$ in $l_p(\mathbb{Z}^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ eine eindeutige Lösung $s_{\vec{f}} \in L_p(\mathbb{R}^m)$ von (3.1. 19)*

Der Beweis folgt mit Hilfe der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung, die

$$(\vec{f} * \{a_l^*\})_j := \sum_l f_l * a_{j-l}^* \in l_p(\mathbb{Z}^m)$$

zeigt. Nach Definition der L_p -Stabilität gilt dann für den Interpolanten $s_{\vec{f}}(x) = \sum_l f_l L(x-l)$

$$\sum_l f_l L(x-l) = \sum_l f_l \sum_j a_j^* \phi(x-j-l) = \sum_j \phi(x-j) \sum_l f_l a_{j-l}^* \in L_p(\mathbb{R}^m).$$

Bemerkung 3.1.9 Unter den Bedingungen von Satz 3.1.3 zeigt Formel (3.1. 33), daß man aus einer beliebigen Erzeugenden $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ eine sogenannte interpolatorische Erzeugende $L(x)$ konstruieren kann, d.h. die ganzzahligen Translate von $L(x)$ bilden wieder eine Basis von $S_2(\phi)$. Dies folgt aus Korollar 3.1.4. Insbesondere liefert dann $\phi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ eine solche Basis, wenn

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\phi}(v + 2\pi k) = 1 \quad (3.1. 37)$$

gilt. Diese Bedingung ist auch notwendig für eine interpolatorische Erzeugende ϕ , denn wegen der Eindeutigkeit des Interpolanten folgt sie aus $\hat{\phi} = \hat{L}$ und Formel (3.1. 33).

Man kann weiter danach fragen, ob diese interpolatorische Basis auch eine Riesz-Basis bildet bzw. l_2 -stabil ist. Das Kriterium (3.1. 16) lautet hierfür mit (3.1. 33)

$$0 < C \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\hat{L}(v + 2\pi k)|^2 = \frac{\sum_k |\hat{\phi}(v + 2\pi k)|^2}{\left| \sum_l \hat{\phi}(v + 2\pi l) \right|^2} \leq D < \infty.$$

Die Abschätzung nach unten ist hier trivial, während diejenige nach oben mit $D = 1$ gültig ist, wenn stärker als in (3.1. 34) $\hat{\phi}(v) > 0$ gefordert wird. Dies folgt aus $\sqrt{\sum_l |c_l|^2} \leq \sum_l |c_l|$ für $c_l = \hat{\phi}(v + 2\pi l)$. Insbesondere ist dies bei den Basen aus Translaten von univariaten B-Splines erfüllt.

Eine Methode zur Bestimmung des Fundamentalinterpolanten in (3.1. 31) liefert die schon in (3.1. 27) verwendete z -Transformation. Angewendet auf (3.1. 31) ergibt sie

$$\left(\sum_j a_j^* z^j \right) = \left(\sum_l \phi(l) z^l \right)^{-1}$$

Im eindimensionalen Fall ($m = 1$) und wenn ϕ kompakten Träger hat, kann die rechte Seite nach Faktorisierung des 'Polynoms' $\sum_l \phi(l) z^l$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden, deren Koeffizienten dann die gesuchten a_j^* sind. Dies ist z. B. bei o.g. Spline-Basen der Fall (s. [Chui92a]).

Eine andere Methode ist die Verwendung der diskreten Fouriertransformation (DFT). Dazu diskretisiert man vor Anwendung der inversen DFT $\hat{L}(v)$ in (3.1. 33) auf einem genügend feinen Gitter (s. [JS91]).

Um eine gute Approximation von stetigen Funktionen f auf \mathbb{R}^m zu erreichen, ist es nötig, die Interpolationsstellen auf einem äquidistanten Gitter mit *kleiner* Schrittweite $h > 0$ zu wählen. Man betrachte in Verallgemeinerung von (3.1. 30) das folgende Problem: Finde einen Interpolanten $I_h(f; x)$ im Raum $S^h(\phi)$ (s. Definition in (3.1. 3)) mit

$$I_h(f; lh) = f(lh); \quad l \in \mathbb{Z}^m, \quad h > 0. \quad (3.1. 38)$$

Die Elemente von $S^h(\phi)$ haben nach Definition die Form $\sum_j a_j \phi(x/h - j)$, so daß dies auf die Gleichungen

$$\sum_j a_j \phi(l - j) = f(lh) \quad \forall l \in \mathbb{Z}^m \quad (3.1. 39)$$

führt, also auf die gleiche Matrix wie in (3.1. 31). Fasst man I_h als Operator auf, den man auf f anwendet, und führt den Dilatationsoperator $d_h f$ wie in Abschnitt 2.4) als

$$(d_h f)(x) := f(hx) \quad (3.1. 40)$$

ein, so kann man dafür auch

$$I_h f = d_{1/h} I_1 d_h f \quad (3.1. 41)$$

schreiben, d. h. man kann I_h durch den Operator I_1 der kardinalen Interpolation ausdrücken. Satz 3.1.3 und die anschließenden Bemerkungen über Existenz und Eindeutigkeit gelten also auch für I_h , wenn man

die Datenfolge $\{f_l\}$ durch $\{f(lh)\}$ ersetzt.

Der Interpolant $I_h(f; x)$ kann zur Approximation der FT herangezogen werden. Die Relationen (3.1. 35) und (3.1. 41) liefern

$$S_h(\hat{f})(v) = \hat{\phi}(vh) \left(\sum_l f(lh) e^{ivlh} \right) / \left(\sum_k \hat{\phi}(vh + 2\pi k) \right) \quad (3.1. 42)$$

Diese Formel sollte mit (2.41) für $h = 2\pi/\omega$ verglichen werden, die wir durch Interpolation mit Translaten der Sinc-Funktion erhalten haben. In der Tat enthält der in (3.1. 42) auftretende Vorfaktor vor dem Term $h^m \sum_l f(lh) \exp(ivlh)$ denjenigen von (2.41) als Spezialfall. Er kann als Filter bei der Berechnung der Fouriertransformierten betrachtet werden und ist gegenüber (2.41) dazu als Tiefpass-filter (s. Ende Abschnitt 2.3.1) besser geeignet.

Wendet man das Vorgegangene auf das Problem der kardinalen Interpolation mit Translaten von $W(2\pi x)$, so scheitert die strenge Rechtfertigung von Formel (3.1. 33) für den Fundamental-Interpolanten über die Poisson – Summationsformel jedoch daran, daß die Voraussetzung

$$\{\phi(l) = W(2\pi l)\}_{l \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$$

nicht erfüllt ist. Man kann allerdings zunächst formal vorgehen und erhält aus (3.1. 33), dass $L(x) = \phi(x) = W(2\pi x)$ gelten sollte. Die gewünschte Interpolationseigenschaft

$$W(2\pi x) = \delta_{0,j}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

kann man dann aber bereits durch Bemerkung 2.12 erhalten, wenn W eine Whittaker-Menge ist.

Weitere Anwendungen betreffen kardinale Interpolation durch Translate von ‘Radial Basis Functions’. Nähere Informationen dazu findet man z.B. in [JT93] und [Scha95].

Im übernächsten Abschnitt wird ‘Cardinal Interpolation’ für Splineräume behandelt, wo die erzeugende Funktion ϕ eine Splinefunktion mit kompaktem Träger ist. Dies liefert sofort $\hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^m)$ und die entscheidende Bedingung (3.1. 34) kann noch detaillierter untersucht werden.

3.2 Approximationsgüte von translationsinvarianten Räumen

3.2.1 Approximation mit Quasiinterpolanten

Wie im vorigen Abschnitt ausgeführt, hat diese Matrix als Toeplitz-Matrix günstige Eigenschaften sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht. Trotzdem ist es von Vorteil, zur Untersuchung der Approximationsgüte explizite Approximationen zur Verfügung zu haben. Von daher rührt die Idee Quasiinterpolanten zu konstruieren, die Projektionsoperatoren verwendet, die nur auf Teilräumen exakt zu sein brauchen und trotzdem fast optimale Approximationsgüte besitzen.

Zunächst sei das Grundprinzip der Approximation mit Quasiinterpolanten erläutert. Dazu sei X einer der Räume $L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$ oder $X = C(\mathbb{R}^m)$ im Falle $p = \infty$ und zusätzlich zu (3.1. 40) bezeichne

$$\tau_\alpha f(x) := f(x + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (3.2. 1)$$

die Operation der Translation, speziell bezeichne $\phi_\alpha := \tau_\alpha \phi$. Man betrachte dann die translationsinvarianten Räume

$$S \equiv S_p(\phi) := \overline{\text{span}\{\phi(\cdot - \alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}}$$

aus dem vorigen Abschnitt.

Definition 3.2.1 *Quasiinterpolanten auf X sind Operatoren der Form*

$$Af := \sum_\alpha \lambda(\tau_\alpha f) \phi_\alpha, \text{ bzw. } (Af)(x) = \sum_\alpha \lambda(f(\cdot + \alpha)) \phi(x - \alpha) \quad (3.2. 2)$$

Das Funktional λ soll linear, lokal und stetig, d.h. es soll eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ geben mit $0 \in K$ (üblicherweise $K = \text{Kreis um } 0 \text{ mit festem Radius } r$), so daß gilt

$$|\lambda(f)| \leq \|\lambda\|_{p,K} \|f\|_{p,K} \quad (3.2. 3)$$

Bemerkung 3.2.1 *Allgemeiner könnten statt $\lambda(\tau_\alpha f)$ Funktionale $\lambda_\alpha f$ mit Mengen K_α statt K genommen werden). Die Wahl $\lambda_\alpha(f) := \lambda(\tau_\alpha f)$ garantiert jedoch die Translationsinvarianz des Operators A , d.h. $A(\tau_\gamma f) = \tau_\gamma Af$, was im Hinblick auf den translationsinvarianten Raum S sinnvoll ist. Es gilt im übrigen auch in (3.1. 19) $P_\phi(\tau_\gamma f) = \tau_\gamma P_\phi f$.*

Eine zweite wichtige Forderung betrifft die erzeugende Funktion ϕ . Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß sie stetig ist und

$$\text{supp}(\phi) \subset J \subset \mathbb{R}^m, \quad J = \text{kompakt und } 0 \in J \quad (3.2. 4)$$

gilt. Dann ist die Größe

$$C_\phi := \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\phi(x - \alpha)| = \sup_{x \in [0,1]^m} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\phi(x - \alpha)| \quad (3.2. 5)$$

endlich. Es gilt nämlich $C_\phi \leq \#\phi \|\phi\|_\infty$, wobei $\#\phi$ die Anzahl der $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ ist, die in der Menge

$$[0, 1]^m - J := \{u \in \mathbb{R}^m : u = x - y \text{ mit } x \in [0, 1]^m, y \in J\}$$

liegen.

Bemerkung 3.2.2 *„Radial basis functions“ sind in neuerer Zeit als Verallgemeinerung der univariaten Splinefunktionen auf mehrere Variable viel untersucht worden, insbesondere auch die Approximation mit Translaten von einer „Radial basis function“ ϕ . Dann ist Voraussetzung (3.2. 4) i.a. nicht erfüllt, da ϕ typischerweise als Fundamentallösung einer elliptischen Differentialgleichung auf \mathbb{R}^m auftritt und ihre Fourier-Transformation nur glatt auf $\mathbb{R}^m \setminus 0$ ist bzw. singular in 0 wird. In diesem Fall muß (3.2. 5) durch ein stärkeres Abklingverhalten ersetzt werden.*

Zur Approximation von Funktionen verwendet man die skalierten Räume $S_h(\phi)$, um Konvergenz der Approximation für $h \rightarrow 0$ zu erreichen. Also muß man auch die Quasiinterpolanten entsprechend skalieren. Dies ergibt die Operatoren

$$Q_h(f; x) := (\delta_{1/h} Q \delta_h)(f; x) \quad f \in X, h > 0 \quad (3.2. 6)$$

Hiermit können auch Funktionen aus $X = C(\Omega)$ oder $X = L_p(\Omega)$, wobei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^m ist, approximiert werden, indem man f geeignet von Ω auf \mathbb{R}^m fortsetzt.

Satz 3.2.1 *Unter den obigen Voraussetzungen (3.2. 3), (3.2. 4) an X, ϕ, λ gelte noch*

$$Q(g) = g, \quad g \in F \quad (3.2. 7)$$

d.h. der Operator Q reproduziere die Elemente eines Unterraums $F = S = S(\phi)$, der dilatationsinvariant sei, d.h. $\delta_h g \in F$ für jedes $g \in F$. Dann gilt für jedes kompakte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ die Abschätzung

$$\|Q_h f - f\|_{p, \Omega} \leq [1 + C_\phi \|\lambda\|_{p, h \cdot K} (\text{vol}(\Omega)^{1/p})] \text{dist}(f; F)_{p, \Omega + h(K-J)} \quad (3.2. 8)$$

wobei $\text{vol}(\Omega)$ das m -dimensionale Volumen von Ω bezeichnet.

BEWEIS: Da F dilatationsinvariant ist, folgt $Q_g \equiv \delta_{1/h} Q \delta_h g = \delta_{1/h} \delta_h g = g$, d.h. Q_h hat ebenfalls die Eigenschaft (3.2. 7). Gemäß dieser spalten wir auf

$$\|Q_h f - f\|_{p, \Omega} \leq \|f - g\|_{p, \Omega} + \|Q_h(f - g)\|_{p, \Omega}.$$

Können wir nun zeigen

$$\|Q_h f\|_{p, \Omega} \leq C_\phi \|\lambda\|_{p, h \cdot K} (\text{vol}(\Omega)^{1/p}) \|f\|_{p, \Omega + h(K-J)}, \quad (3.2. 9)$$

so folgt wegen $\Omega \subset \Omega + h(K - J)$

$$\|Q_h f - f\|_{p, \Omega} \leq [1 + C_\phi \|\lambda\|_{p, h \cdot K} \text{vol}(\Omega)^{1/p}] \|f - g\|_{p, \Omega + h(K-J)}$$

für jedes $g \in F$ und somit (3.2. 8).

Wir beachten zum Beweis von (3.2. 9), daß nach (3.2. 3)

$$\begin{aligned} \|\delta_{1/h} Q \delta_h f\|_{p, \Omega} &= \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{\alpha} \lambda(f(h(\cdot + \alpha))) \phi\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq h^{m/p} \|\lambda\|_{p, h \cdot K} \left(\int_{h^{-1}\Omega} \left| \sum_{\alpha \in y-J} \|f(h(\cdot + \alpha))\|_{p, K} \phi(y - \alpha) \right|^p dz \right)^{1/p} \\ &\leq h^{m/p} \|\lambda\|_{p, h \cdot K} (\text{vol}(h^{-1}\Omega))^{1/p} \sup_{y \in h^{-1}\Omega} \left(\sum_{\alpha} |\phi(y - \alpha)| \right) \sup_{\alpha \in y-J} \|f(h(\cdot + \alpha))\|_{p, K} \\ &\leq \|\lambda\|_{p, h \cdot K} (\text{vol}(\Omega))^{1/p} C_\phi \sup_{\alpha \in h^{-1}\Omega - J} \|f\|_{p, h\alpha + hK} \\ &= C_\phi \|\lambda\|_{p, h \cdot K} \text{vol}(\Omega)^{1/p} \|f\|_{p, \Omega + h(K-J)} \end{aligned}$$

□

Dieser Satz liefert eine lokale Fehlerabschätzung. Um zu globalen Aussagen zu kommen, geht man zu lokalen Abschätzungen der Form

$$\text{dist}(f; F)_{p, \Omega} \leq C (\text{diam } \Omega)^k \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta f\|_{p, \Omega}, \quad \text{diam}(\Omega) = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y| \quad (3.2. 10)$$

für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ über, wobei C unabhängig von $\text{diam}(\Omega)$ und f sein soll. Dies wird im nächsten Unterabschnitt behandelt.

3.2.2 Bramble-Hilbert-Lemma und lokale Fehlerabschätzungen

Satz 3.2.2 Die abgeschlossene Einheitskugel von

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| = k, \quad \Omega \text{ Gebiet in } \mathbf{R}^m\}$$

ist kompakt in $W_p^l(\Omega)$ für feste $l < k \in \mathbf{N}$. Es gilt

$$E_l(f)_{p,\Omega} := \text{dist}(f; \Pi_k)_{W_p^l(\Omega)} \leq C(\Omega, p, k, l) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{p,\Omega} \quad (3.2.11)$$

mit $\Pi_k := \text{span}\{x^\alpha\}_{|\alpha| \leq k-1}$ und einer nur von Ω, p, k, l abhängigen Konstanten $C(\Omega, p, k, l)$.

Beweis: Wir können $f \notin \Pi_k$ voraussetzen, da sonst die Aussage trivial ist, und nehmen dann an, daß (3.2.11) nicht gelte, d.h.

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists f_n^* \in W_p^k(\Omega) : \quad E_l(f_n)_{p,\Omega} > n \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f_n\|_{p,\Omega} \quad (3.2.12)$$

Definiert man $f_n^* := \left(E_l(f_n)_{p,\Omega}\right)^{-1} f_n$, so gilt für diese Funktionen :

$$E_l(f_n^*)_{p,\Omega} = \inf_{\sigma \in \Pi_k} \|f_n^* - \sigma\|_{W_p^l(\Omega)} = \frac{1}{E_l(f_n)_{p,\Omega}} \inf_{\sigma \in \Pi_k} \|f_n - \sigma\|_{W_p^l(\Omega)} = 1$$

und folglich

$$\begin{aligned} 1 = E_l(f_n^*)_{p,\Omega} &\stackrel{(3.2.12)}{>} \frac{n}{E_l(f_n)_{p,\Omega}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f_n\|_{p,\Omega} \\ &= n \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f_n^*\|_{p,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Da Π_k abgeschlossen ist, existiert ein $\sigma_n \in \Pi_k$ mit

$$\|f_n^* - \sigma_n\|_{W_p^l(\Omega)} = E_l(f_n^*)_{p,\Omega} = 1.$$

Definiert man $\tilde{f}_n := f_n^* - \sigma_n$, so gilt daher

$$\|\tilde{f}_n\|_{W_p^l(\Omega)} = 1 \quad (3.2.14)$$

Weil die Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}_1(W_p^l(\Omega), 0)}$ kompakt in $W_p^k(\Omega)$ ist, existiert nach (3.2.14) eine konvergente Teilfolge $(\tilde{f}_{n_j})_{j \in \mathbf{N}}$ mit Grenzwert $f \in W_p^l(\Omega)$, d.h.

$$\|\tilde{f}_{n_j} - f\|_{W_p^l(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow \infty \quad (3.2.15)$$

Nun gilt nach Definition der schwachen Ableitung D^α

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{f}_{n_j} D^\alpha \phi \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} D^\alpha \tilde{f}_{n_j} \phi \, dx \right| \leq C_0 \|D^\alpha \tilde{f}_{n_j}\|_{p,\Omega}$$

für alle $|\alpha| = l$ und alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Ungleichung (3.2.13) zeigt dann

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{f}_{n_j} D^\alpha \phi \right| \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow \infty.$$

Daraus folgt mit (3.2.15)

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \phi = 0, \quad \forall |\alpha| \leq l,$$

also $D^\alpha f = 0, \forall |\alpha| \leq l$ im schwachen Sinne. Damit gilt $f \in \mathbf{P}_{l+1}$ und dies ergibt einen Widerspruch, denn nach (3.2. 13) und (3.2. 15)

$$\begin{aligned} 1 &= E_l(f_{n_j})_{p,\Omega} = E_l(\tilde{f}_{l_j})_{p,\Omega} \leq E_l(f)_{p,\Omega} + \|f - \tilde{f}_{n_j}\|_{W_p^l(\Omega)} \\ &= \|f - \tilde{f}_{n_j}\|_{W_p^l(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die in diesem Satz vorausgesetzte kompakte Einbettung von $W_p^k(\Omega)$ in $W_p^l(\Omega)$ ist ein bekanntes Ergebnis aus der Funktionalanalysis (s. mein Skript "Funktionalanalysis"). Es existieren ferner feinere Kompaktheitsaussagen für Sobolev-Räume mit jeweils verschiedenen L_p, L_q -Normen.

Eine Skalierungsvariante des Satzes von Bramble- Hilbert wird gebraucht, wenn man mit lokalen Approximationen bezüglich einer unregelmäßigen Unterteilung des \mathbf{R}^m arbeitet. Dies ist von großer Bedeutung in der Theorie der finiten Elemente, wo man mit Linearkombinationen von sogenannten "nodal elements" arbeitet. Man erhält sie als Basisfunktionen bei geeigneter lokalen Lagrange- oder Hermite Interpolation mit Polynomen. Wir benötigen zuerst folgende

Definition 3.2.2 Es sei $\tilde{\Omega}$ ein festes Gebiet des \mathbf{R}^m (Referenzgebiet). Dann heißt $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ affin äquivalent zu $\tilde{\Omega}$, falls es eine affine Abbildung

$$\begin{aligned} F: \tilde{\Omega} &\longrightarrow \Omega \\ \tilde{x} &\longmapsto x = F(\tilde{x}) := B\tilde{x} + b \end{aligned}$$

gibt mit $B \in GL(\mathbf{R}^m)$ und $b \in \mathbf{R}^m$, so daß gilt:

$$\Omega = F(\tilde{\Omega}) \quad \text{und} \quad \tilde{\Omega} = F^{-1}(\Omega).$$

Lemma 3.2.1 Sind $\tilde{\Omega} \subset \mathbf{R}^m$ und Ω affin äquivalent und $f \in W_p^l(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$, so liegt die Funktion $\tilde{f}(\tilde{x}) := f(F\tilde{x}) = f(B\tilde{x} + b) = f(x)$ in $W_p^l(\tilde{\Omega})$ und es gibt eine Konstante C , die nur von l, p und m abhängt, so daß gilt

$$\|\tilde{f}\|_{l,p,\tilde{\Omega}} \leq C \|B\|^l |\det B|^{-\frac{1}{p}} = \|f\|_{l,p,\Omega}, \quad (3.2. 16)$$

wobei $\|B\|$ die Operatornorm von B im Euklidischen Sinne ist. In analoger Weise gilt:

$$\|f\|_{l,p,\Omega} \leq C \|B^{-1}\|^l |\det B|^{\frac{1}{p}} \|\tilde{f}\|_{l,p,\tilde{\Omega}} \quad (3.2. 17)$$

Ferner gelten entsprechende Modifikationen für die Räume $C^l(\Omega), C^l(\tilde{\Omega})$.

Beweis: Sei zunächst $f \in C^l(\Omega)$. Mit der Kettenregel folgt für \tilde{x} fest:

$$\partial_{\tilde{x}_j} \tilde{f}(\tilde{x}) = \partial_{\tilde{x}_j} f(F(\tilde{x})) = \sum_{i=1}^m \partial_{x_i} f(x) \partial_{\tilde{x}_j} F_i(x) = \sum_{i=1}^m \partial_{x_i} f(x) b_{j,i}, \quad (3.2. 18)$$

also $\nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x}) = B^t \nabla_x f$. Damit folgt

$$\|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}(\tilde{x})\|_{\mathbf{R}^m} \leq \|B\| \|\nabla_x f(x)\|_{\mathbf{R}^m}$$

so daß

$$\sup_{1 \leq i \leq m} |\partial_{\tilde{x}_i} \tilde{f}(\tilde{x})| \leq \|B\| \sup_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{l=1}^m |\partial_{x_l} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m} \|B\| \sup_{1 \leq j \leq m} |\partial_{x_j} f(x)|$$

Eine iterative Anwendung dieser Ungleichung ergibt:

$$\sup_{|\alpha|=l} |\partial_\alpha \tilde{f}(\tilde{x})| \leq \left(\sqrt{m} \|B\| \right)^l \sup_{|\alpha|=l} |\partial_\alpha f(x)| \quad (3.2. 19)$$

Durch Integration von (3.2. 19) erhält man:

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha|=l} \int_{\tilde{\Omega}} |\partial_\alpha \tilde{f}(\tilde{x})|^p d\tilde{x} &\leq \left(\sqrt{m} \|B\|\right)^{lp} \sup_{|\alpha|=l} \int_{\tilde{\Omega}} |\partial_\alpha (f \circ F)(\tilde{x})|^p d\tilde{x} \\ &= \left(\sqrt{m} \|B\|\right)^{lp} |\det B^{-1}| \sup_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} |\partial_\alpha x f(x)|^p dx \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|\tilde{f}|_{l,p,\tilde{\Omega}} \leq C \|B\|^l |\det B|^{-\frac{1}{p}} |f|_{l,p,\Omega}, \quad (3.2. 20)$$

d.h. (3.2. 16) im Falle $f \in C^l(\Omega)$. Ist nun f ein allgemeines Element aus $W_p^l(\Omega)$, so gibt es eine Folge $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit $f_\nu \in C^\infty(\Omega)$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f - f_\nu\|_{l,p,\Omega} = 0$ wegen der grundlegenden Approximationseigenschaft der Sobolev-Räume. Wir setzen dann $\tilde{f}_\nu := f_\nu \circ F$, so daß nach (3.2. 20) gilt:

$$|\tilde{f}_\mu - \tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}} \leq C \|B\|^l |\det B|^{-\frac{1}{p}} |f_\mu - f_\nu|_{l,p,\Omega} \rightarrow 0, \quad \nu, \mu \rightarrow \infty \quad (3.2. 21)$$

Es ist also $\{\tilde{f}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach Definition ist der Grenzwert \tilde{f} in $W_p^l(\tilde{\Omega})$ und man erhält durch Grenzübergang $\nu \rightarrow \infty$ aus der Ungleichung (3.2. 21):

$$|\tilde{f} - \tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}} \leq C \|B\|^l |\det B|^{-\frac{1}{p}} |f - f_\nu|_{l,p,\Omega}$$

Benützt man jetzt (3.2. 20) für \tilde{f}_ν und läßt $\nu \rightarrow \infty$ streben, so gilt:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}|_{l,p,\tilde{\Omega}} &\leq |f - \tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}} + |\tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}} \\ &\leq |f - \tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}} + C \|B\|^l |\det B|^{-1/p} = |\tilde{f}_\nu|_{l,p,\tilde{\Omega}}, \end{aligned}$$

d.h. (3.2. 16) für $f \in W_p^l(\Omega)$.

Die Ungleichung (3.2. 17) folgt einfach durch Vertauschung der Rollen von Ω und $\tilde{\Omega}$.

Dann können wir eine Fehlerabschätzung für lokale Approximation durch Elemente von Π_k formulieren.

Satz 3.2.3 *Es sei für $p, q \in [1, \infty]$ der Raum $W_p^k(\tilde{\Omega})$ kompakt eingebettet in den Raum $W_q^l(\tilde{\Omega})$ ¹ (mit den entsprechenden Modifikationen für p oder $q = \infty$). Es sei Ω affin äquivalent zu $\tilde{\Omega}$ mit*

$$\begin{aligned} h = \text{diam}(\Omega) &:= \sup_{x,y \in \Omega} \{|x - y|\} \leq 1 & \tilde{h} &= \text{diam}(\tilde{\Omega}) \\ \rho &= \sup\{\text{diam}(K) : K = \text{Kugel in } \Omega\} & \tilde{\rho} &= \sup\{\text{diam}(\tilde{K}) : \tilde{K} = \text{Kugel in } \tilde{\Omega}\} \end{aligned}$$

Dann gilt mit einer von h, ρ und f, \tilde{f} unabhängigen Konstanten $C = C(k, \tilde{\Omega}, l, p, q)$ für $f \in W_p^k(\Omega)$:

$$\text{dist}(f; \Pi_k)_{l,p,\Omega} \leq C \text{meas}(\Omega)^{1/q-1/p} h^k \rho^{-l} |f|_{k,p,\Omega} \quad (3.2. 22)$$

Beweis: Wir wenden den Satz von Bramble-Hilbert auf das Referenzgebiet $\tilde{\Omega}$ an für $\tilde{f} = f \circ F$. Die leichte Verallgemeinerung auf unterschiedliche Halbnormen $|\cdot|_{l,p,\Omega}$ und $|\cdot|_{k,p,\tilde{\Omega}}$ wird dabei durch die obige Voraussetzung der kompakten Einbettung garantiert. Es gilt also mit Konstante C_1 bzw. C aus (3.2. 11):

$$\begin{aligned} \text{dist}(\tilde{f}; \Pi_k)_{l,q,\tilde{\Omega}} &\leq C_1 \text{dist}(\tilde{f}; \Pi_k)_{k,p,\tilde{\Omega}} = \stackrel{(3.2.11)}{\leq} C C_1 \sum_{\alpha \in \Gamma} \|D^\alpha \tilde{f}\|_{p,\tilde{\Omega}} \\ &= C C_1 |\tilde{f}|_{k,p,\tilde{\Omega}} \end{aligned} \quad (3.2. 23)$$

¹Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz ist dies z.B. der Fall, wenn gilt: $k - \frac{m}{p} \geq l - \frac{m}{q}$

Wir wählen dann ein Element $\tilde{g} \in \Pi_k$ mit $dist(\tilde{f}; \Pi_k) = dist(\tilde{f}; \tilde{g})$, setzen dann $\tilde{g} = g \circ F$ mit $\tilde{g}, g \in \Pi_k$ und erhalten dann über die inverse Ungleichung (3.2. 17) angewandt auf l statt k und q statt p :

$$\begin{aligned} dist(f; \Pi_k)_{l,q,\Omega} \leq |f - g|_{l,q,\Omega} &\stackrel{(3.2.17)}{\leq} C' \|B^{-1}\|^l |\det B|^{\frac{1}{q}} |\tilde{f} - \tilde{g}|_{l,q,\Omega} \\ &\leq C' \|B^{-1}\|^l |\det B|^{\frac{1}{q}} dist(\tilde{f}; \Pi_k)_{l,q,\tilde{\Omega}} \end{aligned} \quad (3.2. 24)$$

Nun wenden wir auf die rechte Seite von (3.2. 24) Ungleichung (3.2. 16) mit k an und erhalten zusammen mit (3.2. 24):

$$\begin{aligned} dist(f; \Pi_k)_{l,q,\Omega} &\leq C'' \|B^{-1}\|^l |\det B|^{\frac{1}{q}} |\tilde{f}|_{k,p,\tilde{\Omega}} \\ &\stackrel{(3.2.16)}{\leq} C_2 \|B^{-1}\|^l |\det B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|B\|^k |f|_{k,p,\Omega} \end{aligned}$$

Um zu (3.2. 22) zu kommen, müssen noch die Größen $\|B^{-1}\|$, $\|B\|$ und $|\det B|$ durch geometrische Eigenschaften des Gebietes Ω ausgedrückt werden. Zunächst betrachten wir, daß mit der Variablentransformation $\tilde{x} \mapsto x$ bei Integration der 1 über $\tilde{\Omega}$ folgt $|\det B| = \text{meas}(\Omega)/\text{meas}(\tilde{\Omega})$. Dann benutzen wir, daß nach Definition $\|B\| = \sup_{\|\tilde{\xi}\|=\tilde{\rho}} \|B\tilde{\xi}\|$, bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ des \mathbf{R}^d . Nach Definition von $\tilde{\rho}$ als Durchmesser der größten Kugel in $\tilde{\Omega}$ gibt es zu jedem $\tilde{\xi}$ mit $\|\tilde{\xi}\| = \tilde{\rho}$ Elemente $\tilde{z}, \tilde{y} \in \tilde{\Omega}$ mit $\tilde{\xi} = \tilde{z} - \tilde{y}$. Wegen $B\tilde{\xi} = B\tilde{z} - B\tilde{y} = F(\tilde{z}) - F(\tilde{y})$ und $F(\tilde{z}), F(\tilde{y}) \in \Omega$ gilt dann $\|B\tilde{\xi}\| \leq h$ und somit

$$\|B\| \leq \frac{h}{\tilde{\rho}} \quad \text{und analog} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\tilde{h}}{\rho}$$

(durch Vertauschung der Rollen von Ω und $\tilde{\Omega}$). Aus diesen Betrachtungen folgt nun

$$\begin{aligned} dist(f; \Pi_k)_{l,q,\Omega} &\leq C_3 \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/q-1/p} \|B\|^k |f|_{k,p,\Omega} \\ &\leq C_4 \tilde{h}^l \tilde{\rho}^{-k} |\Omega|^{1/q-1/p} h^k \rho^{-l} |f|_{k,p,\Omega} \end{aligned}$$

Es ist aber $\tilde{h}^l \tilde{\rho}^{-k} \leq \left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{\rho}}\right)^k \leq 1$ nach Voraussetzung, so daß die Behauptung folgt.

Bemerkung: Das Referenzgebiet $\tilde{\Omega}$ wird i.a. als ein möglichst einfaches Standardgebiet angenommen, z.B. in der Theorie der Finiten Elemente als ein Dreieck.

Wir wollen dies auf Satz 3.2.1 anwenden, um globale Fehlerabschätzungen zu bekommen. Dazu setzt man dort $\Pi_k \subset F$ voraus und wählt Ω von der Form $\Omega = h(G + j)$ mit festem G (z.B. Einheitswürfel) und $j \in \mathbf{Z}^m$. Es gilt also $\tilde{\Omega} = G$ und man erhält durch Einsetzen in (3.2. 8)

$$\|Q_h f - f\|_{p,h(G+j)} \leq C [1 + \|\lambda\|_{p,h,K} (\text{vol}(h \cdot G))^{1/p}] h^k \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta f\|_{p,h(j+G+K-J)}$$

An dieser Stelle ist es noch nötig, das Verhalten der Norm des Funktionals λ in (3.2. 3) genauer anzugeben, um zu sinnvollen Fehlerabschätzungen zu kommen. Wir setzen voraus

$$\|\lambda\|_{p,K} \leq C_\lambda \text{vol}(K)^{-1/p} \quad (3.2. 25)$$

Dann ergibt sich aus der vorigen Ungleichung

$$\|Q_h f - f\|_{p,h(G+j)} \leq C \left(1 + C_\lambda [(\text{vol}(G)/\text{vol}(K))]\right)^{1/p} h^k \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta f\|_{p,h(j+G+K-J)}$$

Da ein Gebiet $h(j + G)$ lt. Voraussetzung an K, J nur endlich oft durch Gebiete der Form $h(l + G + K - J), l \in \mathbf{Z}^m$ überdeckt wird, folgt nach Summation der p -fachen Potenz über j

Korollar 3.2.1 *Unter den obigen Voraussetzungen (3.2. 3), (3.2. 4) an X, ϕ, λ seien zusätzlich (3.2. 7) mit $\Pi_{k-1} \subset F$ und (3.2. 25) erfüllt. Dann gilt für genügend glatte f auf \mathbb{R}^m*

$$\|Q_h f - f\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \text{const } h^k \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta f\|_{p, \mathbb{R}^m}, \quad (3.2. 26)$$

wobei $D^\beta f$ wie üblich die partiellen Ableitungen von f bezeichnen.

3.2.3 Strang-Fix-Theorie

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Abschnitts ist man nun daran interessiert, Bedingungen herzuleiten, die die Reproduktions- Eigenschaft (3.2. 7) garantieren. Wir verwenden dazu den Zugang von Strang-Fix (1969,1973), der auf einer älteren Arbeit von Schoenberg (1946) aufbaut und seither von vielen Autoren (z.B. Dahmen- Michelli, Chui-Jetter-Ward, de Boor-deVore-Ron) verallgemeinert worden ist. Wir führen dazu die semidiskrete Faltung ein:

Definition 3.2.3 *Für eine beliebige Folge $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}$ sei*

$$(\phi * c)(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} c_\alpha \phi(x - \alpha) \quad (3.2. 27)$$

die semidiskrete Faltung von \vec{c} und ϕ . Speziell bezeichne $f|$ die Folge $\{f(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m}$ für ein $f \in C(\mathbb{R}^m)$.

Eine zentrale Rolle spielt nun der Operator T_ϕ definiert auf $C(\mathbb{R}^m)$ durch

$$(T_\phi f)(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} f(\alpha) \phi(x - \alpha) := (\phi * f|)(x), \quad (3.2. 28)$$

der der Vorläufer eines Quasiinterpolanten ist.

Lemma 3.2.2 *Der Operator T_ϕ bildet $C(\mathbb{R}^m)$ auf $S(\phi)$ ab und kommutiert mit der Translation $\tau_\beta, \beta \in \mathbb{Z}^m$. Weiter gilt für alle $f \in S(\phi)$ die Vertauschungsrelation*

$$\phi * f| = f| * \phi \quad (3.2. 29)$$

Speziell gilt $T_\phi(F) \subset F$ für translationsinvariante Unterräume F von $S(\phi)$.

BEWEIS: Die Summe in (3.2. 27) ist für jedes feste x endlich und daher wohldefiniert. Es gilt

$$(\tau_\beta T_\phi f)(x) = \sum_{\alpha} f(\alpha) \phi(x + \beta - \alpha) = \sum_{\alpha} f(\alpha + \beta) \phi(x - \alpha) = T_\phi(\tau_\beta f)(x), \quad \beta \in \mathbb{Z}^m$$

Jedes $f \in S(\phi)$ hat die Darstellung

$$f(x) = (\phi * c_f)(x)$$

mit einer Folge $\{c_f(\beta)\}_{\beta \in \mathbb{Z}^m} = \{g_\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}^m}$ für ein $g \in C(\mathbb{R}^m)$. Für ein solches f folgt dann

$$\begin{aligned} (\phi * f|)(x) &= \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} \phi(\alpha - \beta) g_\beta \right) \phi(x - \alpha) \\ &= \sum_{\beta} g_\beta \sum_{\gamma} \phi(x - \beta - \gamma) \phi(\gamma) = \sum_{\gamma} \phi(\gamma) \left[\sum_{\beta} g_\beta \phi(x - \beta - \gamma) \right] \\ &= \sum_{\gamma} f(x - \gamma) \phi(\gamma) = (f * \phi|)(x) \end{aligned}$$

Nun ist $T_\phi f = \phi * f|$ und $f * \phi|$ eine endliche Summe von Translaten $\tau_{-\gamma}$ von f , so daß die Translationinvarianz von $F \subset S(\phi)$ liefert $T_\phi f \in F$ für $f \in F$, d.h. $T_\phi(F) \subset F$. □

Bemerkung: In diesem Beweis wurde benötigt, daß ϕ kompakten Träger hat. Durch Modifikation von $S(\phi)$, z.B. durch Einschränkungen an die Koeffizienten von $s(x) \in S(\phi)$ im Sinne von $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ können auch allgemeinere $\phi \in C(\mathbb{R}^m)$ zugelassen werden.

Wir geben nun ein Kriterium für die gewünschte Einbettung $F \subset S(\phi)$ an. Dazu fordern wir die Gültigkeit der Vertauschungsrelation (3.2. 29) auch auf F , was dann stärker $F \subset T_\phi(F)$ ergibt.

Lemma 3.2.3 *Es sei $c_\phi := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \phi(\alpha) \neq 0$ und F ein endlich-dimensionaler, translationsinvarianter Unterraum in der Menge Π aller Polynome.*

a) *Ist die Vertauschungsrelation (3.2. 29) für alle $f \in F$ erfüllt, so bildet der Operator $c_\phi I - T_\phi$ die Menge F in sich ab und reduziert dort den totalen Grad eines Elementes $f \in F$.*

b) *Bildet der Operator $c_\phi I - T_\phi$ die Menge F in sich ab und ist dort grad-reduzierend, so ist T_ϕ injektiv auf F und erfüllt $F \subset T_\phi(F)$.*

BEWEIS: a) Aus dem Beweis von Lemma 3.2.2 folgt bereits die Einbettung $T_\phi(F) \subset F$ und daher $(c_\phi - T_\phi)(F) \subset F$. Die Vertauschungsrelation (3.2. 29) für F gibt für $p \in F$ dann

$$\begin{aligned} (T_\phi p)(x) &= (\phi * p)(x) = (p * \phi)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} p(x - \alpha) \phi(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} p(x) \phi(\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} [p(x - \alpha) - p(x)] \phi(\alpha) \equiv c_\phi p(x) + q(x) \end{aligned}$$

wobei der Grad von $q(x)$ kleiner als der von $p(x)$ ist, denn dies ist der Fall für die Polynome $q_\alpha(x) = p(x - \alpha) - p(x)$.

b) Die Injektivität von T_ϕ auf F folgt durch Induktion nach dem Grad:

Gilt $(T_\phi p)(x) \equiv x$, so folgt $p = c_\phi^{-1}(c_\phi I - T_\phi)p$, so daß $p(x)$ einen reduzierten Grad hat. Daher ist die Induktionshypothese für $p(x)$ anwendbar und $T_\phi p = 0$ impliziert $p = 0$. Die zweite Aussage folgt ebenfalls induktiv nach dem Grad: Es gilt $c_\phi p(x) - (T_\phi p)(x) \in T(F)$, weil $c_\phi I - T_\phi$ gradreduzierend ist und daher

$$p = c_\phi^{-1} T_\phi p + c_\phi^{-1} (c_\phi I - T_\phi) p \in T_\phi(F)$$

□

Die obigen Aussagen können zu einem Äquivalenzsatz kombiniert werden:

Satz 3.2.4 *Es sei F ein linearer, endlich-dimensionaler und translationsinvarianter Unterraum von Π und ϕ eine Funktion aus $C_0(\mathbb{R}^m)$ derart, daß $c_\phi \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} \phi(\alpha) = 1$ ist. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt einen Quasiinterpolanten vom Typ (3.2. 2), der exakt auf F auf F ist,*
2. *Es gilt $F = T_\phi(F) \subset S(\phi)$,*
3. *Es gilt auf die Vertauschungsrelation (3.2. 29),*
4. *Der Operator $I - T_\phi$ bildet F auf sich ab und ist dort grad-reduzierend,*
5. *Der Operator T_ϕ ist injektiv auf F und erfüllt $F \subset T_\phi(F)$.*

BEWEIS: Der Beweis besteht aus einem Ringschluß. Die Richtung 1) \implies 2) ist trivial und die Richtungen 2) \implies 3), 3) \implies 4), 4) \implies 5) folgen direkt aus Lemma 3.2.2, Lemma 3.2.3. Der letzte Schluß von 5) \implies 1) ergibt sich so: aus 5) folgt die Existenz einer *Rechtsinverse* T^{-1} von T auf dem Unterraum F . Damit bilde

$$Q_F(f; x) := \sum_{\alpha} (T^{-1} f)(\alpha) \phi(x - \alpha) \tag{3.2. 30}$$

Dieser Operator ist der in 1. gewünschte Quasiinterpolant. Denn zu jedem $p \in F$ bilde $q_2 = T^{-1}p$, so daß $T_\phi q_2 = T_\phi T^{-1}p = p$ und es folgt

$$Q_F(p)(x) = \sum_{\alpha} q_2(\alpha) \phi(x - \alpha) \equiv (T_\phi q_2)(x) = p(x).$$

□

Eine konkrete Möglichkeit, einen Quasiinterpolanten zu konstruieren, zeigt

Lemma 3.2.4 Sei $F \subset \Pi$ ein translationsinvarianter Unterraum von $C(\mathbb{R}^m)$ derart, daß T_ϕ aus dem vorigen Lemma eine injektive Abbildung auf F ist mit $F \subset T_\phi(F)$. Dann gelten:

a) Eine spezielle Rechtsinverse von T auf $F_0 := F \cap \Pi_r$ ist gegeben durch (Π_r ist die Menge der Polynome vom totalen Grad r)

$$(\Lambda_r f)(x) := \sum_{j=0}^r (I - T_\phi)^j f(x) \quad (3.2.31)$$

und der entsprechende Quasiinterpolant der Form (3.2. 2) durch

$$Q_r(f; x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} (\Lambda_r f)(\alpha) \phi(x - \alpha) \quad (3.2.32)$$

b) Das Funktional Λ_r erfüllt die entscheidende Voraussetzung (3.2. 3) der Beschränktheit im Falle $p = \infty$.

BEWEIS: Die erste Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} T\Lambda_r &= \Lambda_r + (T_\phi - I)\Lambda_r = \sum_{j=0}^r (I - T_\phi)^{j+1} \\ &= I - (I - T_\phi)^{r+1} \end{aligned}$$

und der Tatsache, daß $(I - T_\phi)^{r+1} = 0$ auf Π_r ist, da $(I - T_\phi)$ grad-reduzierend ist. Zum Beweis der zweiten schätzen wir nach (3.2. 4) und (3.2. 28) ab

$$|(Tf)(x)| \leq \sup_y \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} |\phi(z - \alpha)| \sup_{x-\alpha \in J} |f(\alpha)| \leq C_\phi \|f\|_{\infty, x-J}$$

Hieraus folgt für $j = 1, 2, \dots$

$$|(I - T)^j f(0)| \leq (1 + C_g f)^j \|f\|_{\infty, -j-J}$$

so daß nach der Definition von Λ_r

$$|(\Lambda_r f)(0)| \leq \sum_{j=0}^r (1 + C_\phi)^j \|f\|_{\infty, -r-J}$$

und somit

$$|(\Lambda_r f)(0)| \leq (1 + C_g f)^{r+1} c_\phi^{-1} \|f\|_{\infty, U}, U = -r \text{ supp } \phi \equiv -rJ \quad (3.2.33)$$

□

Bemerkung: Für $1 \leq p < \infty$ ist Λ_r nicht definiert, weil der Operator T_ϕ nur für stetige f definiert ist; es gibt aber noch andere Möglichkeiten eine Rechtsinverse von T_ϕ zu finden. Ein spezieller Zugang ist in $L_2(\mathbb{R}^m)$ möglich, wo auch allgemeinere ϕ zugelassen sind (de Boor -DeVore-Ron 1993)

Ist F_0 in Lemma 3.2.4 noch invariant gegenüber Dilationen, so folgt daraus mit dem Argument von Satz 3.2.1 eine lokale Fehlerabschätzung von $f - \delta_{1/h} Q_r \delta_h f$ durch $\text{dist}(f; F_0)_{\infty, \Omega - h(r+1)J}$. Wir formulieren dies genauer für die Räume $S_h(\phi)$ als

Korollar 3.2.2 *Es sei ϕ wie in Lemma 3.2.3 gegeben und $\Pi \cap S(\phi)$ sei dilatationsinvariant und endlich dimensional. Dann gilt für $f \in C(\mathbb{R}^m)$ und Ω eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^m*

$$\text{dist}(f; S_h(\phi))_{\infty, \Omega} \leq [1 + (1 + c_\phi)^{r+1}] \sup_{y \in \Omega} \text{dist}(f; \Pi \cap S(\phi))_{\infty, y - (r+1)h \text{supp } \phi} \quad (3.2. 34)$$

BEWEIS: Weil $\Pi \cap S(\phi)$ als endlich dimensional vorausgesetzt ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\Pi \cap S(\phi) \subset \Pi_r$, also gilt $\Pi \cap S(\phi) = \Pi_r \cap S(\phi)$ und $\delta_{1/h} Q_r \delta_h f \in S_h(\phi)$. Nun wende die Fehlerabschätzung (3.2. 8) in Verbindung mit Ungleichung (3.2. 33) an. \square

Es läßt sich daraus auch noch eine Abschätzung des globalen Fehlers mittels (??) wie in Korollar 3.2.1 gewinnen. Der Fortschritt dieser Aussagen gegenüber den früheren ist dann der, daß unter den Voraussetzungen (3.2. 4)- (3.2. 8) ein Quasiinterpolant konstruiert worden ist, so daß nur noch Voraussetzungen an ϕ selbst benötigt werden. Um zu konkreten Aussagen für einen Raum $S(\phi)$ bei gegebenem $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ zu kommen, ist jetzt nur noch der Unterraum $F = \Pi \cap S(\phi)$ zu bestimmen, und der lokale Approximationsfehler mit diesem F abzuschätzen.

Dies kann von Fall zu Fall geschehen (wie z.B. in Abschnitt 2.5.2), für translationsinvariante Räume gibt es jedoch den erwähnten Zugang von Strang-Fix, der konkret nachprüfbar Bedingungen liefert, die zugleich *hinreichend und notwendig* sind. Er benützt Fourier-Analyse und insbesondere die Poissonsche Summationsformel.

Definition 3.2.4 *Es sei P eine Teilmenge von Π und $p(D)$ der durch*

$$p(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}, \quad p = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in P$$

definierte Differentialoperator. Dann erfüllt eine stetige Funktion ϕ in $L_1(\mathbb{R}^m)$ mit $\{\hat{\phi}(2\pi j)\} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ die Strang-Fix Bedingung relativ zu P , falls für alle $p \in P$ gilt:

$$p(iD)\hat{\phi}(2\pi k) = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\} \quad (3.2. 35)$$

mit der wie in Kapitel 2 erklärten Fourier-Transformation

$$\hat{\phi} := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i2\pi(x,v)} \phi(x) dx,$$

Für das Folgende benötigen wir außerdem noch:

Definition 3.2.5 *Eine Menge $P \subset \Pi$ heißt D-invariant, falls $D^{\beta} p \in P$ für jede partielle Ableitung D^{β} gilt, wenn p ein Element aus P ist.*

Bemerkung: Die Eigenschaft der D-Invarianz von P bedingt, daß $p(x) \equiv c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$ in P enthalten sein muß. Insbesondere gilt dann

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l) = c^{-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} c \phi(l) = c_{\phi} = 1$$

Dies sieht man so :

Sei $p(x) = \sum a_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$ koordinatenweise ausgeschrieben, $x \equiv (x_1, \dots, x_m)$. Dann bildet man die partiellen Ableitung der i_m^* $\equiv \max i_m$ in den Variablen x_m und erhält ein Polynom $p \in P$, daß konstant bezüglich der Variablen x_m ist. Nun wendet man die gleiche Prozedur sukzessive in den Variablen x_{m-1}, \dots, x_1 an und erhält schließlich ein konstantes Polynom $\neq 0$ in P .

Satz 3.2.5 *Es sei P ein linearer, endlich-dimensionaler und D-invarianter Teilraum von Π und es sei $\phi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cup C(\mathbb{R}^m)$ mit $C_{\phi} \equiv \sum_l \phi(l) = 1$ gegeben. Außerdem gelte $p \cdot \phi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für alle $p \in P$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gelten die Strang-Fix Bedingungen relativ zu P ,*

2. Es gilt die Vertauschungsrelation (3.2. 29) auf P , d.h.

$$\sum_l p(l)\phi(x-l) = \sum_l p(x-l)\phi(l), \quad p \in P$$

3. für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gilt die Identität

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(x-l)\phi(x-l) = \sum_l p(-l)\phi(l), \quad p \in P \quad (3.2. 36)$$

BEWEIS: 1) \implies 2): Für jedes feste $y \in \mathbb{R}^m$ und $p \in P$ betrachten wir die Funktion $\psi(x) = p(x)\phi(y-x)$, die nach Voraussetzung wieder in $L_1(\mathbb{R}^m)$ liegt. Ihre Fourier-Transformierte berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(v) &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi(y-x)p(x)e^{-i(x,v)} dx \\ &= p(iD)_v \left(\int_{\mathbb{R}^m} \phi(y-x)e^{-i(x,v)} dx \right) \\ &= p(iD) \left(e^{-i(y,v)} \hat{\phi}(-v) \right) \\ &= e^{-i(y,v)} p(iD+y) \hat{\phi}(-v) \end{aligned} \quad (3.2. 37)$$

(Dies verifiziert man durch Differenzieren der Fourier-Transformation, wobei Vertauschung mit dem Integral erlaubt ist).

Nun erinnern wir an die Poisson-Summationsformel von Korollar 2.2.1 in der Form

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \psi(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\psi}(2\pi k)$$

an, die für $\psi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ und $\{\hat{\psi}(2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}^m} \in l_1(\mathbb{Z}^m)$ gilt. Diese Bedingungen sind nach obigen Voraussetzungen an ψ erfüllt, also die Formel anwendbar, was

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(l)\phi(y-l) &\equiv \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \psi(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} p(iD) \left(e^{-i(y,v)} \hat{\phi}(-v) \right) \Big|_{v=2\pi k} \\ &= p(iD) \left(e^{-i(y,v)} \hat{\phi}(-v) \right) \Big|_{v=0} \end{aligned}$$

ergibt. Aus dieser Darstellung schließt man, daß $\phi * p| = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(y-l)p(l)$ ein Polynom in y sein muß. Man betrachte dann das Polynom

$$q(y) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(l)p(y-l).$$

Für $y = k \in \mathbb{Z}^m$ folgt sofort durch Umindizierung, daß $(\phi * p|)(k) = q(k)$ gilt, d.h. das Differenzenpolynom verschwindet auf dem Gitter \mathbb{Z}^m . Daraus folgt die Vertauschungsrelation (3.2. 29) für $p \in P$, d.h. die Aussage 2) gilt, falls folgendes gezeigt wird:

verschwindet ein Polynom p in m Variablen auf \mathbb{Z}^m , so verschwindet es identisch.

Dazu sei angenommen, daß p in jeder Variablen höchstens vom Grad $\leq M$ und auf dem Gitter $G := \{\alpha \in \mathbb{Z}^m_+ : 1 \leq \alpha_i \leq M \text{ für alle } 1 \leq i \leq m\}$ verschwinde. Betrachte nun die Darstellung von p mittels Lagrange-Interpolation auf dem Gitter G , die über die univariate Lagrange-Interpolation in jeder Variablen eindeutig definiert ist. Dann müssen alle Koeffizienten dieser Darstellung verschwinden und die Behauptung folgt.

Beweis 2) \implies 3): Gilt die Vertauschungsrelation in Aussage 2. für alle $p \in P$, so folgt wegen der D-Invarianz von P , daß auch

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l) D^\alpha p(l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (D^\alpha p)(x-l) \phi(l), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^m_+$ gelten muß. Damit und mit Taylor-Entwicklung von $p(y-l)$ um den Punkt $x-l$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(y-l)\phi(l) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} ((y-x)^\alpha / \alpha!) (D^\alpha p)(x-l)\phi(l) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} ((y-x)^\alpha / \alpha!) \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (D^\alpha p)(x-l)\phi(l) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m} ((y-x)^\alpha / \alpha!) \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l) D^\alpha p(l) \\ &= \sum_l \phi(x-l) p(y-x+l) \end{aligned}$$

Mit der Wahl von $y=0$ ergibt sich die Identität von 3).

Beweis 3) \implies 1): Die Funktion $f^*(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(l-x)\phi(x-l)$ ist die bezüglich \mathbb{Z}^m periodisierte Form der Funktion $f(x) = p(-x)\phi(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$. Die Fourier-Koeffizienten

$$F[f^*](k) := \int_{[0,1]^m} f^*(x) e^{-i(x, 2\pi k)} dx$$

von f^* verschwinden für $k \neq 0$, da $f^* = \text{constant}$ nach (3.2. 36). Damit folgt für $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$

$$0 = F[f^*](k) = \int_{[0,1]^m} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(l-x)\phi(x-l) e^{-ix \cdot 2\pi k} dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ix \cdot 2\pi k} dx = \hat{f}(2\pi k).$$

Andererseits läßt sich auf $f(x)$ als Spezialfall $y=0$ von $\psi(x)$ die schon bekannte Formel aus Schritt 1) \implies 2) anwenden, d.h. es gilt $\hat{f}(v) = p(iD)\hat{\phi}(-v)$, so daß die Strang-Fix Bedingungen erfüllt sind. \square

Bemerkung 1: Mit der Wahl $y=x$ im Beweis 2) \implies 3) ergibt sich auch direkt die Vertauschungsrelation in 1).

Bemerkung 2: Ein endlich-dimensionaler, translationsinvarianter Teilraum F von Π ist auch D -invariant. Ist nämlich $p(x) \in F$, so ist auch $\tau_{hz}p$ für jedes feste $z \in \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}$ in F und somit der Differenzenquotient $[\tau_{hz}p(x) - p(x)]/h \equiv [p(x+hz) - p(x)]/h$. Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ zeigt, daß jede Richtungsableitung $D_z p$ wieder in F liegt, dann F ist endlich dimensional. Wiederholte Anwendung des Arguments zeigt die D -Invarianz von F .

Damit lassen sich die Sätze 3.2.5 und 3.2.4 kombinieren.

Korollar 3.2.3 *Es sei P ein linearer, endlich-dimensionaler, translationsinvarianter Teilraum von Π und es sei $\phi \in L_1(\mathbb{R}^m) \cup C(\mathbb{R}^m)$ mit $C_\phi \equiv \sum_l \phi(l) = 1$ gegeben. Außerdem gelte $p \cdot \phi \in L_1(\mathbb{R}^m)$ für alle $p \in P$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt einen Quasiinterpolanten vom Typ (3.2. 2), der exakt auf F auf P ist,*
2. *Es gilt $P \subset S(\phi)$,*
3. *Es gilt auf die Vertauschungsrelation (3.2. 29),*
4. *Es gelten die Strang-Fix Bedingungen relativ zu P .*

Ist unter diesen Voraussetzungen insbesondere P dilatationsinvariant, so gilt für $f \in C(\mathbb{R}^m)$ die Fehlerabschätzung von Korollar 3.2.2 mit P statt $\Pi \cap S(\phi)$.

Nun diskutieren wir noch einige weitere Konstruktionsmöglichkeiten von Quasiinterpolanten (eine Möglichkeit wurde bereits in Lemma 3.2.4 vorgestellt). Der Ansatz von Strang-Fix bzw. Schoenberg für Qf ist

$$\begin{aligned} (Qf)(x) &= \sum_l \phi(x-l)L(f;l), & L(f;x) &:= \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^\beta f(x) & (3.2. 38) \\ a_\beta &:= (iD)^\beta (1/\hat{\phi}(0)/\beta! \end{aligned}$$

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß die a_β wegen $\hat{\phi}(0) = 1$ und $\hat{\phi} \in C_\infty(\mathbb{R}^m)$ wohl definiert sind. Dann beachten wir, daß der Operator L den Raum P wieder in sich abbildet, da $D^\beta p \in P$ wegen der D-Invarianz von P gilt. Daher ist Formel (3.2. 37), also

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l)p(l) &= \hat{\psi}(0) = p(iD+x)\hat{\phi}(0) \\ &= \sum_{\alpha} (D^\alpha p)((iD)^\alpha/\alpha!) \hat{\phi}(0) \end{aligned}$$

die unter der Voraussetzung der Strang-Fix Bedingungen abgeleitet wurde, auf $L(p; \cdot)$ (statt p) anwendbar. Dies liefert

$$\begin{aligned} (Qp)(x) = (Lp)(iD+x)\hat{\phi}(0) &= \sum_{\alpha} ((D^\alpha Lp)(x)/\alpha!) (iD)^\alpha \hat{\phi}(0) \\ &= \sum_{\alpha} (iD)^\alpha \hat{\phi}(0)/\alpha! \sum_{|\beta| \leq r} a_\beta D^{\alpha+\beta} p(x) \\ &= \sum_{|\gamma| \leq r} (iD)^\gamma p(x) \sum_{\alpha+\beta=\gamma} (D^\beta(1/\hat{\phi})(0))(D^\alpha \hat{\phi})(0)/\alpha!\beta! \\ &= \sum_{|\gamma| \leq r} (iD)^\gamma p(x) \delta_{0,\gamma}/\gamma! = p(x) \end{aligned}$$

wobei außer $p \in P$ noch $\pi \in \Pi_r$ angenommen wurde. Damit erhalten wir

Korollar 3.2.4 *Ist eine der Voraussetzungen von Satz 3.2.5 erfüllt, so liefert der Ansatz (3.2. 38) für r derart, daß $P \subset \Pi_r$ gilt, einen Quasiinterpolanten, der auf P exakt ist.*

3.3 Approximation mit Splines

3.3.1 Univariate Splines

Für (polynomialen) Splines ist die einfachste Definition folgende

Definition 3.3.1 Gegeben sei ein Gitter, $\{\xi_i\}$, d. h. eine monotone Folge reeller Zahlen. Dieser Folge sei eine Folge ganzer Zahlen $Z = \{z_i\}$, $0 \leq z_i \leq k-1$, zugeordnet. Dann heißt

$$S_k(\Delta, Z) = \left\{ f(x) : f|_{(\xi_i, \xi_{i+1})} \in \Pi_{k-1}, f^{(r)}(\xi_i-) = f^{(r)}(\xi_i+), 0 \leq r < z_i \right\} \quad (3.3.1)$$

der Raum aller Splinefunktionen der Ordnung k (vom Grad $k-1$) mit Knoten ξ_i und Glattheits-Ordnung $z_i - 1$ bei ξ_i . Im Fall $z_i = 0$ ist Unstetigkeit zugelassen und der Wert in ξ_i durch als rechtsseitiger Grenzwert definiert.

Man kann zeigen (der Beweis sei dem Leser als Übung überlassen):

Lemma 3.3.1 Sei $\Delta = \{-\infty, \xi_1, \dots, \xi_n, +\infty\}$ gegeben mit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, $0 \leq z_i \leq k-1$. Dann hat obiger Spline-Raum die Dimension

$$d = (n+1)k - \sum_{i=1}^n z_i$$

und die Basis

$$\{x^j\}_{j=0}^{k-1} \cup \{(x - \xi_1)_+^{k-l}\}_{l=1}^{k-z_1} \cup \dots \cup \{(x - \xi_n)_+^{k-l}\}_{l=1}^{k-z_n}$$

Allgemeiner kann man sogenannte L -Splines als stückweise im Raum

$$N(L) = \left\{ f(x) : Lf = 0, L = \sum_{j=0}^n a_j(x) D^j \right\}$$

liegend definieren. Dabei ist $D = d/dx$ und die a_j liegen in C^{k-1} . Wir behandeln aber nur den Fall $L = D^k$ von polynomialen Splines aus Definition 3.3.1. Hier haben sich B-Splines als Basisfunktionen sowohl in praktischer als auch in theoretischer Hinsicht am besten bewährt. Wir definieren sie hier im schwachen Sinn als Kern einer Integralrelation.

Definition 3.3.2 Gegeben sei eine monoton wachsende Knotenfolge $\mathbf{t} := (t_i)$ mit Indizes i aus einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{Z}$, d. h. für alle $i \in I$ gelte $t_i \leq t_{i+1}$. Die Indexmenge I kann dabei unbeschränkt (z. B. \mathbb{Z} selbst), beschränkt (z. B. $\{1, 2, 3\}$), nur nach unten beschränkt (z. B. \mathbb{N}) oder nur nach unten beschränkt sein (z. B. $-\mathbb{N}$). Für ein fest vorgegebenes $k > 0$ gelte außerdem $t_i < t_{i+k}$. Dann definiere $M_{i,k}(x) \equiv M(t_i, \dots, t_{i+k}; x)$ durch

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k!} M_{i,k}(x) f^{(k)}(x) dx := [t_i, \dots, t_{i+k}] f \quad \forall f \in C^k([a, b]) \quad (3.3.2)$$

Hierbei bezeichnet $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ die dividierte Differenz zu den im Argument angegebenen Stützstellen. Sie sind rekursiv definiert durch

$$[t_i] f := f(t_i) \quad (3.3.3a)$$

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] := \frac{1}{t_{i+k} - t_i} \left([t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - [t_i, \dots, t_{i+k-1}] \right). \quad (3.3.3b)$$

Bemerkung 3.3.1 Im Falle mehrfacher Stützstellen greift folgende Konvention: Gegeben sei eine beliebige Stützstellenfolge (t_i) . Dann definiert man als zugehöriges Punktfunktional

$$\lambda_i f := f^{(r)}(t_i), \quad r = \max \{ \nu : t_{j-\nu} = t_j, \nu = 0, 1, \dots \}. \quad (3.3.4)$$

Speziell definiert man $[t_i, t_i]f = f'(t_i)$, $[t_i, t_i, t_i]f = f''(t_i)$, und so weiter. Diese Konvention stellt aufgrund der Beziehung

$$[t_i, \dots, t_{i+k}]f = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\eta), \quad \eta = \eta(f) \in (t_i, t_{i+k}) \quad (3.3. 5)$$

sicher, daß die $\lambda_i f$ und damit auch die dividierten Differenzen $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ stetige Funktionale auf $C^k([a, b])$ sind (man beachte, daß wir $t_i < t_{i+k}$ vorausgesetzt haben).

Verwendet man die Taylorformel mit Integral-Restglied,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (t-a)^j f^{(j)}(a) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (t-x)_+^{k-1} f^{(k)}(x) dx, \quad a \leq t \leq b,$$

so kann man durch Anwendung der dividierten Differenzen wegen $[t_i, \dots, t_{i+k}]p = 0$ für Polynome $p \in \Pi_k$ direkt

$$k \int_a^b [t_i, \dots, t_{i+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} f^{(k)}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} M_{i,k}(x) f^{(k)}(x) dx$$

folgern. Hieraus ergibt sich

$$M_{i,k}(x) = k [t_i, \dots, t_{i+k}] (\cdot - x)_+^{k-1}. \quad (3.3. 6)$$

Diese Formel kann man als äquivalente Definition der B-Splines ansehen. Mit ihrer Hilfe kann man leicht die folgende Rekursionsformel zur Berechnung ihrer Ableitung zeigen:

$$\frac{d}{dx} M_{i,k}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} [M_{i+1,k-1}(x) - M_{i,k-1}(x)] \quad (3.3. 7)$$

Üblicherweise verwendet man die folgenden (anders normierte) B-Splines:

$$N_{i,k} := \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k} M_{i,k}(x). \quad (3.3. 8)$$

Für diese Funktionen kann man folgern

Lemma 3.3.2 Falls stärker $t_i < t_{i+k-1}$ für alle $i \in I$ gilt, dann erfüllen die $N_{i,k} := (t_{i+k} - t_i) M_{i,k}(x)$ die Rekursionsgleichung

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x); \quad (3.3. 9)$$

ferner ist $N_{i,1} = \chi_{[t_i, t_{i+1})}(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[t_i, t_{i+1})$.

Der Beweis dieser Rekursionsformel sei als Übungsaufgabe gestellt. Er folgt aus der Leibniz-Formel für dividierte Differenzen eines Produkts $f = g \cdot h$:

$$[t_i, \dots, t_{i+k}]f = \sum_{j=0}^k [t_i, \dots, t_{i+j}]g \left([t_{i+j}, \dots, t_{i+k}]h \right).$$

Als Anwendung ergibt sich auch eine Rekursionsformel zur Berechnung von Linearkombinationen von B-Splines: Gegeben sei

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_{i,k}(x), \quad t_k \leq x < t_{n+1}, \quad (3.3. 10)$$

wobei die B-Splines zu einer Knotenfolge $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$ mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $t_i < t_{i+k}$ definiert seien. Dann gilt für $1 \leq j \leq k$

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n+j-1} c_i^{[j]}(x) N_{i,k-j+1}(x),$$

wobei die $c_i^{[j+1]} \equiv c_i^{[j]}(x)$ mittels folgender Iteration berechnet werden: Setze $c_i^{[1]} := c_i$ und dann

$$c_i^{[j+1]} := \begin{cases} 0 & , t_{i+k-j} = t_i \\ \frac{1}{t_{i+k-j} - t_i} \left((x - t_i) c_i^{[j]} + (t_{i+k-j} - x) c_{i-1}^{[j]} \right) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3. 11)$$

Das bedeutet, daß $s(x)$ als Linearkombination von B-Splines immer niedrigerer Ordnung dargestellt wird. Der Preis dafür besteht darin, dass die Koeffizienten zu Polynomen von immer höherem Grad in x werden. Im Grenzfall $j = k$ gilt schließlich

$$s(x) = c_l^{[k]}, \quad t_l \leq x < t_{l+1}. \quad (3.3. 12)$$

Weitere Algorithmen dieser Art zur Berechnung von Splines und ihren Ableitungen werden im [Schumaker81] in Kapitel 5 ausführlich behandelt.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen bereits eine Reihe von Eigenschaften auf, die als Motivation für multivariate Definitionen von B-Splines dienen können. Speziell durch Lemma 3.3.2 wird folgende univariate Definition motiviert, mit der weitere Eigenschaften abgeleitet werden können.

Definition 3.3.3 Gegeben sei eine Knotenfolge \mathbf{t} wie in Definition 3.3.2. Dann definiere man

$$N_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) N_{i+1,k-1}(x)$$

wobei

$$\omega_{i,k}(x) := \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & t_{i+k-1} > t_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Start dieser Rekursion setze man

$$N_{i,1}(x) := \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(x)$$

Bemerkung 3.3.2 Es wäre wünschenswert, dieses Rekursionsprinzip auf Triangulierungen statt Punktfolgen zu verallgemeinern. Man sollte damit „vernünftige“ Splineräume erhalten. Das neuere Konzept des „Blossoming“ strebt dies an.

Obige Definition liefert leicht

Lemma 3.3.3 Die in Definition 3.3.3 eingeführten Funktionen $N_{i,k}(x)$ haben folgende Eigenschaften:

1. Sie lassen sich als Linearkombination von charakteristischen Funktionen darstellen,

$$N_{i,k}(x) = \sum_{j=1}^{i+k-1} b_{j,k}(x) N_{j,1}(x).$$

Die Koeffizienten $b_{j,k}(x)$ sind dabei Polynome mit $\deg b_{j,k} < k$.

2. Die $N_{i,k}(x)$ sind stückweise polynomial, der Polynomialgrad ist auf jedem der Stücke kleiner als k ; die möglichen Sprungstellen sind die t_i .
3. Die Funktion $N_{i,k}(x)$ hat den Träger $[t_i, t_{i+k}]$ und ist positiv auf (t_i, t_{i+k}) .
4. Insbesondere ist $N_{i,2}$ stückweise linear und $N_{i,k}(x) = 0$ falls $t_i = t_{i+k}$.

Genauere Aussagen über die Glattheit kann man nicht sofort erhalten. Wir untersuchen daher zunächst Linearkombinationen dieser Funktionen:

Definition 3.3.4 Der Splineraum $S_{k,\mathbf{t}}$ zur Folge \mathbf{t} wie in Definition 3.3.3 ist definiert als

$$S_{k,\mathbf{t}} := \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i N_{i,k} : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lemma 3.3.4 (Zerlegung der Eins) Es gilt

$$\sum_{i=j+1-k}^j N_{i,k}(x) = 1, \quad \text{falls } t_j \leq x < t_{j+1}. \quad (3.3.13)$$

BEWEIS: Es gilt nach Definition 3.3.3

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1-k}^j N_{i,k}(x) &= \sum_{i=j+1-k}^j \omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + (1 + \omega_{i+1,k}(x)) N_{i+1,k-1}(x) \\ &= \sum_{i=j+2-k}^j [\omega_{i,k}(x) + (1 - \omega_{i,k}(x))] N_{i,k-1}(x) \\ &\quad + \omega_{j+1-k,k}(x) N_{j+1-k,k-1}(x) + (1 - \omega_{j+1,k}(x)) N_{j+1,k-1}(x). \end{aligned}$$

Nach Teil 3 aus dem vorigen Lemma (und wegen der rechtsseitigen Stetigkeit) fallen die beiden letzten Terme weg; wir erhalten

$$\sum_{i=j+1-k}^j N_{i,k}(x) = \sum_{i=j+1-(k-1)}^j N_{i,k-1}(x).$$

Per Induktion über k folgt dann die Behauptung (für $k = 1$ gilt sie offensichtlich). \square

Allgemeiner gilt

Satz 3.3.1 (Marsden-Identität, 1970) Für $t_j \leq x < t_{r+1}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(y - x)^{k-1} = \sum_{i=j+1-k}^r \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x). \quad (3.3.14)$$

dabei sind

$$\Psi_{i,1}(y) := 1, \quad (3.3.15a)$$

$$\Psi_{i,k}(y) := (t - t_{i+1}) \cdots (y - t_{i+k-1}), \quad k \geq 2 \quad (3.3.15b)$$

Für $p \in \Pi_{k-1}$ gilt speziell

$$p(x) = \sum_{i=j+1-k}^r \lambda_{i,k}^*(p) N_{i,k}(x), \quad t_j \leq x < t_{r+1} \quad (3.3.16)$$

dabei sind die Funktionale $\lambda_{i,k}^*$ definiert als

$$\lambda_{i,k}^*(f) := \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) f^{(\nu)}(y).$$

BEWEIS: Wie beim vorhergehenden Lemma folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j+1-k}^r \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) \\
&= \sum_{i=j+1-k}^r \left(\omega_{i,k}(x) N_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x)) N_{i+1,k-1}(x) \right) \Psi_{i,k}(y) \\
&= \sum_{i=j+2-k}^r \left(\omega_{i,k}(x) \Psi_{i,k}(y) + (1 - \omega_{i,k}(x)) \Psi_{i-1,k}(y) \right) N_{i,k-1}(x)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
& \omega_{i,k}(x) \Psi_{i,k}(y) + \Psi_{i-1,k}(y) (1 - \omega_{i,k}(x)) \\
&= \frac{(y - t_{i+1}) \cdots (y - t_{i+k-2})}{t_{i+k-1} - t_i} \left((y - t_{i+k-1})(x - t_i) + (y - t_i)(t_{i+k-1} - x) \right) \\
&= \frac{(y - t_{i+1}) \cdots (y - t_{i+k-2})}{t_{i+k-1} - t_i} \left((y - x)(t_{i+k-1} - t_i) \right) \\
&= \Psi_{i,k-1}(y)(y - x)
\end{aligned}$$

für $\omega_{i,k}(x) \neq 0$. Ist aber $\omega_{i,k}(x) = 0$, so gilt $t_{i+k-1} = t_i$ und $N_{i,k-1}(x) = 0$. Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$\sum_{i=j+1-k}^r \Psi_{i,k}(y) N_{i,k}(x) = (y - x) \sum_{i=j+1-(k-1)}^r \Psi_{i,k-1}(y) N_{i,k-1}(x).$$

Mittels Induktion über k und unter Verwendung von Lemma 3.3.4 folgt somit (3.3. 14). Differenziert man dies Formel nach y , so folgt für $t_j \leq x < t_{r+1}$

$$\frac{1}{\nu!} (y - x)^\nu = \sum_{i=j+1-k}^r \frac{1}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) N_{i,k}(x).$$

Entwickelt man p um den Punkt y in eine Taylorreihe und setzt ein, so folgt dann

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} (x - y)^\nu p^{(\nu)}(y) = \sum_{i=j+1-k}^r N_{i,k}(x) \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) p^{(\nu)}(y) \right)$$

für beliebige $p \in \Pi_{k-1}$. Dies ist aber mit der Darstellung (3.3. 16) identisch. \square

Bemerkung 3.3.3 Die Funktionale $\lambda_{i,k}^*$ sind unabhängig von y , wenn man sie auf Polynome aus Π_{k-1} einschränkt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(k-1)! \frac{d}{dy} [\lambda_{i,k}^*(p)] &= \frac{d}{dy} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) p^{(\nu)}(y) \right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) p^{(\nu+1)}(y) + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \Psi_{i,k}^{(k-\nu)}(y) p^{(\nu)}(y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Korollar 3.3.1 Die B-Splines $\{N_{i,k}(x)\}$ zu einer Knotenfolge $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ sind linear unabhängig. Der in Definition 3.3.4 eingeführte Raum $S_{k,\mathbf{t}}$ enthält alle Polynome und alle abgebrochenen Potenzen $(x - t_j)_+^{k-\mu}$, $1 \leq \mu \leq \mu_j$. Die μ_j sind dabei die Vielfachheiten der Stützstellen t_j , d. h. die Anzahl der mit t_j zusammenfallenden Stützstellen t_i .

BEWEIS: Die erste Aussage folgt aus dem angegebenen Rekursionsverfahren zur Berechnung von $s(x)$ in (3.3. 10). Ausgehend von (3.3. 10) schließt man aus $s(x) \equiv 0$ sukzessive mit (3.3. 11), daß alle intermediären $c_i^{[j+1]}$ – und so auch die c_i verschwinden. Die zweite Aussage folgt direkt aus (3.3. 16). Um die dritte zu beweisen, setze man in der Marsden-Identität $y = t_j$. Für $t_j \leq x < t_{r+1}$ gilt dann

$$(x - t_j)^{k-1} = \sum_{i=j+1-k}^r (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x).$$

Wegen $\Psi_{i,k}(t_j) = 0$ für $i = j - k + 1, \dots, j - 1$ und im Limes $r \rightarrow \infty$ folgt weiter

$$(x - t_j)_+^{k-1} = \sum_{i=j}^{\infty} (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x), \quad x \geq t_j.$$

Da die $N_{i,k}(x)$ für $i \geq j$ und $x \leq t_j$ verschwinden, folgt auch

$$(x - t_j)_+^{k-1} = \sum_{i=j}^{\infty} (-1)^{k-1} \Psi_{i,k}(t_j) N_{i,k}(x).$$

Die gleiche Argumentation kann man auch auf die nach t_j differenzierte Identität anwenden :

$$(x - t_j)^{k-\mu} = \frac{(k - \mu + 1)!}{(k - 1)!} \sum_{i=j+1-k}^r (-1)^{\mu-1} \Psi_{i,k}^{(\mu-1)}(t_j) N_{i,k}(x), \quad t_j \leq x \leq t_{r+1}.$$

Hierbei muß allerdings für $j - k + 1 \leq i \leq j - 1$ sichergestellt sein, dass $\Psi_{i,k}^{(\mu-1)}(t_j) = 0$ ist. Andernfalls greifen die obigen Argumente nicht. Damit t_j noch eine Nullstelle von $\Psi_{i,k}^{(\mu-1)}$ ist, müssen wir daher einschränkend $\mu \leq \mu_j$ fordern. \square

Man kann auch den Zusammenhang mit den Räumen $S_k(\Delta, Z)$ aus Definition 3.3.1 untersuchen. Es gilt

Korollar 3.3.2 *Es sei $\Delta = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ eine endliche Folge von Knoten und $Z = \{z_i\}_{i=1}^n$ der zugehörige Vektor wie in Definition 3.3.1. Dann gilt für $a < \xi_1 < \xi_n < b$*

$$S_k(\Delta, Z)|_{[a,b]} = S_{k,\mathbf{t}}|_{[a,b]}.$$

Dabei besteht $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=-k+1}^{N+k}$ mit $N := \sum_{i=1}^n (k - z_i)$ aus folgenden Gliedern:

$$t_{k+1} \leq \dots \leq \overbrace{t_0}^{=a} < \underbrace{\xi_1}_{(k-z_1)\text{-fach}} < \dots < \underbrace{\xi_n}_{(k-z_n)\text{-fach}} < \overbrace{t_{N+1}}^{=b} \leq \dots \leq t_{N+k}.$$

Die Basis besteht aus den zu dieser Knotenfolge gebildeten, auf $[a, b]$ eingeschränkten $\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^N$.

Der Beweis sei dem Leser überlassen. Der Standard-Fall von Korollar 3.3.2 ist der, daß bei vorgegebenen inneren Knoten $t_{-k+1} = \dots = t_0 = a$ und $t_{N+1} = \dots = t_{N+k} = b$ gewählt wird und so

$$S_k(\Delta, Z)|_{[a,b]} = \left(\text{span}\{N_{i,k}\}_{i=-k+1}^N \right) \Big|_{[a,b]}$$

gilt.

Als weitere Folgerung aus Satz 3.3.1 behandeln wir

Satz 3.3.2 (Biorthogonale Funktionale für B-Splines) *Es sei $G(y)$ eine sogenannte Übergangsfunktion aus $W_{\infty}^{(k)}(0, 1)$, d.h.*

$$G(y) = \begin{cases} 0 & : \quad k - \text{fach bei } y = 0 \\ \in \mathbf{R} & : \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & : \quad k - \text{fach bei } y = 1 \end{cases} \quad (3.3. 17)$$

Ferner wähle ein nichtleeres Intervall $I_j := (t_{j_0}, t_{j_0+1}) \subset (t_j, t_{j+k}) \subset (a, b)$, wobei $a := \min t_i$, $b := \max t_i$, und definiere mit den Funktionen aus (3.3. 15)

$$g_j(t) := \frac{\Psi_{j_0,k}(t)}{(k-1)!} G\left(\frac{t-t_{j_0}}{t_{j_0+1}-t_{j_0}}\right)/(k-1)! \quad , \quad (3.3. 18)$$

sowie die Funktionale

$$\lambda_{j,k}(f) := \int_{t_{j_0}}^{t_{j_0+1}} g_j^{(k)}(x) f(x) dx \quad f \in L_1(a, b). \quad (3.3. 19)$$

Dann sind diese biorthogonal zu den B-Splines, d.h. es gilt

$$\lambda_{j,k}(N_{i,k}) = \delta_{i,j} \quad (3.3. 20)$$

BEWEIS: Lt. Konstruktion gilt zunächst

$$\lambda_{j,k}(N_{i,k}) = 0, \quad \text{für } i \leq j_0 - k \quad \text{und} \quad i \geq j_0 + 1.$$

Für die restlichen Indizes beachte, daß

$$\lambda_{j,k}(N_{i,k}) = \lambda_{j,k}(p_i), \quad p_i := N_{i,k}|_{I_j}, \quad j_0 - k + 1 \leq i \leq j_0.$$

Ferner beachte, daß auf Grund der Definition der Übergangsfunktion $G(y)$ gilt $g_j^{(\nu)}(t_{j_0}) = 0$, $0 \leq \nu \leq k-1$ und $g_j^{(\nu)}(t_{j_0+1}) = \Psi_{j_0,k}^{(\nu)}(t_{j_0+1})$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Wiederholte partielle Integration in (3.3. 19) liefert daher mit $f = p_i$ unter Beachtung von $p_i^{(k)} \equiv 0$

$$\lambda_{j,k}(N_{i,k}) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(k-1)!} \Psi_{i,k}^{(k-1-\nu)}(y) f^{(\nu)}(y) = \lambda_{j,k}^*(p_i).$$

Andererseits gilt nach (3.3. 16)

$$N_{i,k}|_{I_j}(x) := p_i(x) = \sum_{l=j_0+1-k}^{j_0} \lambda_{l,k}^*(p_i) N_{l,k}(x), \quad t_{j_0} \leq x < t_{j_0+1}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der B-Splines folgt daraus $\lambda_{j,k}^*(p_i) = \delta_{i,j}$ für $j_0 - k + 1 \leq i \leq j_0$ und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.3.4 Wählt man das Intervall I_j so, daß

$(t_{j_0+1} - t_{j_0}) = \max(t_{l+1} - t_l) : (t_l, t_{l+1}) \subset (t_j, t_{j+k})$ gilt, so sind die Funktionale $\lambda_{j,k}(f)$ auf $L_p(\min t_i, \max t_i)$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$ durch eine nur von k, p abhängigen Konstante beschränkt. Dies folgt aus den Ungleichungen

$$|\lambda_{j,k}(f)| \leq \|f\|_{p, I_j} \cdot \|g_j^{(k)}\|_{q, I_j},$$

wobei q der zu p duale Index ist, $1/p + 1/q = 1$, und

$$\|g_j^{(k)}\|_{q, I_j} \leq \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \|\Psi_{j_0,k}^{(k-l)}\|_{q, I_j} \cdot \|G^{(l)}\|_{\infty, I_j}.$$

Da $\Psi_{j_0,k}^{(k-l)}$ aus Summen von $(l-1)$ -fachen Produkten von Faktoren der Form $(t-t_i)$, $j_0 + 1 \leq i \leq j_0 + k - 1$ besteht, und die Kettenregel $\|G^{(l)}\|_{\infty, I_j} \leq \text{const.} \cdot (t_{j_0+1} - t_{j_0})^{-l}$ liefert, ergibt sich zusammen daraus

$$|\lambda_{j,k}(f)| \leq C_k (t_{j+k} - t_j)^{-1/p} \|f\|_{p, I_j} \quad (3.3. 21)$$

mit einer nur von k abhängigen Konstanten C_k .

3.3.2 Kardinale Splines

Kardinale Splines (engl. 'cardinal splines') bilden einen besonders einfachen Spezialfall von Splinefunktionen, mit dem wir uns im Folgenden näher beschäftigen werden. Damit bezeichnet man die Elemente des Raumes

$$S_k := \{s(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}) : s(x)|_{(i,i+1)} \in \Pi_{k-1}\}$$

Wir betrachten daher den Spezialfall $\mathbf{t} = \{j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ des vorigen Abschnitts und untersuchen die Eigenschaften der zugehörigen B-Splines. Die Gleichungen (3.3. 6) und (3.3. 8) vereinfachen sich zu

$$N_{j,k}(x) = M_{j,k}(x) = k[j, \dots, j+k](\cdot - x)_+^{k-1} = k[0, \dots, k](\cdot - (x-j))_+^{k-1} = N_{0,k}(x-j). \quad (3.3. 22)$$

Mit anderen Worten : die B-Splines gehen durch Verschiebung ineinander über. Dies wird im Folgenden von grundlegender Bedeutung sein, da auf Linearkombinationen von B-Splines nun die bereits beschriebene Theorie der translationsinvarianten Räume angewendet werden kann. Wichtig ist ferner die Einführung der sogenannten zentralisierten B-Splines, die durch

$$N_k(x) := N_{0,k}\left(x + \frac{k}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3. 23)$$

definiert werden. Offenbar hat N_k Träger auf $[-k/2, k/2]$ während $N_{0,k}$ seinen Träger auf $(0, k)$ hat. Weitere Eigenschaften, darunter die für die nachfolgenden Betrachtungen wichtige Symmetrie von $N_k(x)$ um 0, liefert

Lemma 3.3.5 *Es gilt:*

$$N_1(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}, \quad (3.3. 24a)$$

$$N_k(x) = (N_{k-r} * N_r)(x), \quad 1 \leq r < k, \quad (3.3. 24b)$$

$$N_k(x) = N_k(-x), \quad (3.3. 24c)$$

$$\hat{N}_k(v) = \left(\frac{\sin v/2}{v/2}\right)^k. \quad (3.3. 24d)$$

BEWEIS: Nach (3.3. 23) und (3.3. 6) folgt

$$N_k(x) = k \{0, \dots, k\} \left(\cdot - x - \frac{k}{2}\right)_+^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \Delta_1^k \left(-x - \frac{k}{2}\right)_+^{k-1}, \quad (3.3. 25)$$

wobei statt dividierter Differenzen die einfachen (Vorwärts-)Differenzen Δ_1^k verwendet werden. Diese werden definiert durch

$$\Delta_h^1 f(x) := f(x+h) - f(x) \quad (3.3. 26a)$$

$$\Delta_h^k f(x) := \Delta_h^{k-1} \Delta_h^1 f(x) = \Delta_h^{k-1} (f(x+h) - f(x)), \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.3. 26b)$$

wobei $h > 0$ sein muß. Damit folgt

$$N_1(x) = \Delta_1^1 \left(-x - \frac{1}{2}\right)_+^0 = \left(\frac{1}{2} - x\right)_+^0 - \left(-x - \frac{1}{2}\right)_+^0 = \chi_{(-1/2, 1/2)},$$

d. h. (3.3. 24a). Um (3.3. 24b) zu zeigen, genügt es $N_k = N_{k-1} * N_1$ zu beweisen. Weil nämlich die Faltung assoziativ ist, folgt mittels Induktion

$$\begin{aligned} N_k &= N_{k-1} * N_1 = (N_{k-2} * N_1) * N_1 = N_{k-2} * N_1 * N_1 \\ &= \dots = \underbrace{N_1 * \dots * N_1}_{k\text{-mal}} = \underbrace{N_1 * \dots * N_1}_{(k-r)\text{-mal}} * \underbrace{N_1 * \dots * N_1}_{r\text{-mal}} = N_{k-r} * N_r \end{aligned}$$

Nun ist nach (3.3. 25)

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \Delta_1^k \int_x^\infty \left(-t - \frac{k}{2}\right)_+^{k-2} dt \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \Delta_1^{k-1} \int_x^\infty \left(\left(1 - t - \frac{k}{2}\right)_+^{k-2} \left(-t - \frac{k}{2}\right)_+^{k-2} \right) dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(t+x) dt = \int_{-1/2}^{1/2} N_{k-1}(x-t) dt = (N_1 * N_{k-1})(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt auch (3.3. 24c) induktiv, denn mit (3.3. 24b) gilt für $r = 1$ die Symmetrie

$$\begin{aligned} N_k(-x) &= \int_{\mathbf{R}} N_1(t) N_{k-1}(-x-t) dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} N_1(t) N_{k-1}(x+t) dt = \int_{\mathbf{R}} N_1(t) N_{k-1}(x-t) dt = N_k(x) \end{aligned}$$

Schließlich beachtet man noch die Faltungsformel

$$\mathcal{F}(f * g)(v) = \hat{f}(v) \hat{g}(v), \quad f, g \in L_1(\mathbf{R}).$$

Dann ergibt sich mit (3.3. 24b), dass $\hat{N}_k(v) = \left(\hat{N}_1(v)\right)^k$ ist. Wegen

$$\hat{N}_1(v) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ivx} dx = \frac{\sin v/2}{v/2}$$

ist damit das Lemma bewiesen. \square

Als Anwendung können wir die l_2 -Stabilität der B-Spline-Basis für kardinale Splines beweisen, wobei wir allgemeinere kardinale Splines betrachten. Dazu geben wir die Einschränkung auf ganzzahlige Knoten auf und lassen jetzt auch Folgen von Knoten zu, die ein äquidistantes Gitter mit einer Schrittweite h bilden. Dieses erhält man offensichtlich durch Skalierung aus dem kardinalen Gitter. Betrachten wir also im Weiteren die B-Splines

$$B_{j,h}(x) := N_{0,k}\left(\frac{x}{h} - j\right) \quad (3.3. 27)$$

mit positivem h . Der Träger von $B_{j,h}$ ist $(j, j + kh)$ und die Knoten liegen auf dem Gitter $\{jh\}_{j \in \mathbf{Z}}$. Mit diesen Splines können wir wieder translationsinvariante Räume erzeugen,

$$S_k^{(h)} = \text{span}\{B_{j,h}\}_{j \in \mathbf{Z}}. \quad (3.3. 28)$$

Genauer verstehen wir darunter die Menge aller Linearkombinationen aus den $B_{j,h}$ unabhängig davon ob diese endlich oder unendlich sind. Es gilt dann

$$S_k^{(h)} = \left\{ s(x) \in C^{k-2}(\mathbf{R}) : s(x)|_{(i, i+1)} \in \Pi_{k-1} \right\}.$$

Um dies zu sehen, beachtet man, daß jedes Element $s(x) \in S_k^{(h)}$ punktweise als

$$s(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j B_{j,h}(x), \quad a_j \in \mathbf{R}, \quad (3.3. 29)$$

darstellbar ist. Dazu benötigt man die lineare Unabhängigkeit der auftretenden B-Splines, die nach dem vorangehenden Abschnitt gilt. Weil ihre Anzahl k ist, treten für festes x in (3.3. 29) auch keine Konvergenzprobleme auf.

Als Spezialfall der Räume von Abschnitt 3.1 betrachten wir nun weiter die Unterräume $S_{k,2}^{(h)}$ von $S_k^{(h)}$, deren Elemente $s(x)$ die Darstellung (3.3. 29) mit Folgen $\{a_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ aus $l_2(\mathbf{Z})$ besitzen. Dann gilt

Lemma 3.3.6 Die B -Splines $\{B_{j,h}(x) = B_{0,h}(x-j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ bilden eine l_2 -stabile Basis des Raums $S_{k,2}^{(h)}$.

BEWEIS: Wir beachten zunächst, daß auf Grund der Normierung in nach Definition (3.3. 27)

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j B_{j,h}(x) \right\|_2 = \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j N_{0,k}(u-j) \right\|_2 = \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j N_k(u-j) \right\|_2$$

gilt, sofern die Summe eine L_2 -Funktion ist. Es reicht also, nur den Spezialfall $h = 1$ zu betrachten, da ja die Äquivalenzkonstanten unabhängig von h sind. Wir weisen dann nach, daß das Meyersche Kriterium erfüllt ist, zeigen also, daß

$$\left[\hat{N}_k, \hat{N}_k \right](v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 \quad (3.3. 30)$$

gleichmäßig beschränkt ist. Nach Lemma 3.13 gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(v/2 + \pi k)}{v/2 + \pi k} \right|^{2k} \\ &= \left(\operatorname{sinc} \frac{v}{2} \right)^{2k} + \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{2k} \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \neq 0}} \frac{1}{|v/2 + \pi l|^{2k}} \end{aligned}$$

Da letztere Summe nach dem Majorantenkriterium konvergent ist und $|\sin v/2| \leq 1$ folgt die in Satz 3.2 geforderte Abschätzung nach oben sofort. Wegen der 2π -Periodizität genügt es für die Abschätzung nach unten die Werte $|v/2| < \pi/2$ zu betrachten. Für diese gilt aber die bekannte Ungleichung $|\sin v/2| \geq \frac{|v|}{\pi}$, so daß die Abschätzung nach unten in (3.1. 16) mit einer Konstanten $A \geq (\pi/2)^k$ folgt. \square

Ein weiterer Punkt betrifft die Anwendung der Strang-Fix -Theorie, um die Approximationsgüte der Räume $S_{k,2}^{(h)}$ zu bestimmen. Dazu müssen wir die Bedingungen in Korollar 3.2.1 an die Erzeugende ϕ nachprüfen und ein Funktional λ mit den Eigenschaften (3.2. 3) und (3.2. 25) finden.

Was ϕ betrifft, so ist Voraussetzung (3.2. 4) eines kompakten Trägers mit $\phi = N_{0,k}$ trivialerweise erfüllt. Ferner folgt aus (3.3. 24d) sofort, daß $2\pi j, j \neq 0$ eine $(k+1)$ -fache Nullstelle von $\hat{\phi} = e^{-iv/2}(\operatorname{sinc} v/2)^k$ ist. Für den Punkt $v = 0$ gilt $D^\nu \hat{\phi}(0) = \delta_{0,\nu}$ für $0 \leq \nu \leq k$ genau dann, wenn $g_k(v) := (\operatorname{sinc} v/2 - 1)^k$ dort eine $(k+1)$ -fache Nullstelle hat, wie man durch Entwicklung von $g_k(v)$ nach sinc-Potenzen sieht. Durch induktive Anwendung von $g'_k(v) = k g_{k-1}(v) (\operatorname{sinc} v/2)'$ ergibt sich aber sofort, daß $g_k(v)$ in $v = 0$ eine $(k+1)$ -fache Nullstelle hat, so daß die Strang-Fix Bedingungen in Definition 3.2.4 erfüllt sind.

Als Funktional λ wählen wir $\lambda(f) = \lambda_{0,k}(f)$ aus (3.3. 18), (3.3. 19) zur Knotenfolge $\{t_j = j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ gemäß (3.3. 23) und $j_0 = 0$ in (3.3. 18). Dann zeigt (3.3. 21), daß auch die Bedingungen (3.2. 3) und (3.2. 25) mit $K = (0, 1)$ erfüllt sind. Damit lässt sich Korollar 3.2.1 anwenden und es folgt

Satz 3.3.3 Es gibt einen Quasiinterpolanten $Q_h(f)$ der Form wie in Definition 3.2.1 und (3.2. 6) aus $S_{k,2}^{(h)}$, so daß die Voraussetzungen (3.2. 3), (3.2. 4) an X, ϕ, λ erfüllt sind. Dann gilt für genügend glatte f auf \mathbb{R} die Fehlerabschätzung (3.2. 26) (mit $m = 1$).

Im Fall ganzzahliger Knoten ergibt sich außerdem aus der Theorie von Abschnitt 3.3.1 eine Reihe weiterer nützlicher Relationen. Aus (3.3. 7) folgt z. B.

$$N'_{0,k+1}(x) = N_{0,k}(x) - N_{0,k}(x-1) \quad (3.3. 31)$$

und aus Lemma 3.3.2 die Rekursionsformel

$$N_{0,k+1}(x) = \frac{1}{k} (x N_{0,k}(x) + (k+1-x) N_{0,k}(x-1)). \quad (3.3. 32)$$

Für die Berechnung des Skalarprodukts zweier B-Splines mit äquidistanten Knoten erhält man aus Lemma 3.3.2

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} N_k(x)N_k(x+l) dx &= \int_{\mathbf{R}} N_k(x)N_k(-l-x) dx = (N_k * N_k)(-l) \\ &= \underbrace{(N_1 * \dots * N_1)}_{k\text{-mal}} * \underbrace{(N_1 * \dots * N_1)}_{k\text{-mal}}(-l) \end{aligned}$$

also

$$\int_{\mathbf{R}} N_k(x)N_k(x+l) dx = N_{2k}(l) \quad (3.3.33)$$

Zur Berechnung von Linearkombinationen von B-Splines kann man die im vorigen Abschnitt angegebene Rekursionsformel auf äquidistante Knoten spezialisieren. Um einen effizienten Algorithmus für diesen Zweck herzuleiten, kann man jedoch auch eine ganz andere Methode benutzen. Ihr liegt die Idee zugrunde, dieselbe Spline-Kurve als Funktion auf immer feinerem Gitter (von Knoten) darzustellen. Diese Idee ist auf beliebige (zulässige) Gitter anwendbar, kann aber für den Fall von kardinalen Splines besonders einfach dargestellt werden.

Wir betrachten dazu den Spezialfall des B-Splines $N_{0,k}(x)$ in (3.3.22). Unser Ziel ist es, ihn als Linearkombination von B-Splines zur Knotenfolge $\{j/2\}_{j \in \mathbb{Z}}$ darzustellen. Trivialerweise ist jeder Spline mit ganzzahligen Knoten auch ein Spline auf diesem doppelt so feinen Gitter – wir geben ja nur jeden zweiten Knoten vor. Nun haben wir aber im vorigen Abschnitt (in Korollar 3.3.2) gesehen, daß man sämtliche Splinefunktionen mit Knoten auf dem feineren Gitter als Linearkombination schreiben kann; folglich gilt dies speziell auch für $N_{0,k}(x)$ und wir können (zumindest punktweise)

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j \in \mathbb{R}} h_{j,k} N_k^{(1)}\left(x - \frac{j}{2}\right), \quad (3.3.34)$$

schreiben, wobei $N_k^{(1)}(x)$ den B-Spline

$$N_k^{(1)}(x) = k \left[0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{k}{2}\right] (\cdot - x)_+^{k-1}$$

bezeichnet; durch Translation erhält man hieraus alle anderen B-Splines zum Gitter $\{j/2\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$, so daß (3.3.34) mit gewissen Koeffizienten $h_{j,k}$ gültig ist. Ferner kann man leicht verifizieren, daß

$$N_k^{(1)}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{k}{2^{k-1}} \left[0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{k}{2}\right] (2 \cdot -x)_+^{k-1} = N_{0,k}(x),$$

so daß wir (3.3.34) als

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} h_{j,k} N_{0,k}(2x - j).$$

schreiben können. In diesem Ansatz werden nun die Koeffizienten $\{h_{j,k}\}$ explizit berechnet.

Lemma 3.3.7 Für $\phi(x) = N_{0,k}(x)$ lautet das Symbol der Verfeinerungsgleichung

$$H_k(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^k := \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k} z^j.$$

Es gilt die Verfeinerungsgleichung

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j=0}^k h_{j,k} N_k(2x - j) \quad h_{j,k} = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{j}.$$

BEWEIS: Zunächst setzen rein formal

$$N_{0,k}(x) = \sum_{j=0}^k h_{j,k} N_{0,k}(2x - j) \quad \{h_{j,k}\}_{j=-\infty}^{\infty} \in l_2(\mathbb{Z})$$

an, transformieren sie nach Fourier und erhalten

$$\hat{N}_{0,k}(v) = \frac{1}{2} \hat{N}_{0,k}\left(\frac{v}{2}\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k} e^{-ijv/2}.$$

Wir setzen nun die Formel für $\hat{N}_{0,k}(v)$ ein, die aus derjenigen für $\hat{N}_k(v)$ folgt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k} e^{-ijv/2} &= \left(\frac{1 - e^{-iv}}{iv}\right)^k \left(\frac{iv/2}{1 - e^{-iv/2}}\right)^k = \left(\frac{1 + e^{-iv/2}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^{-k}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} e^{-ijv/2} \end{aligned}$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich die Behauptung. \square

Bemerkung 3.3.5 Eine analoge Rechnung zeigt, daß für das Symbol der Verfeinerungsgleichung des zentrierten B-Splines N_k gilt

$$H_k(z) = z^{-k/2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^k.$$

Die zentrierten B-Splines N_k von ungeradem Grad haben also kein Symbol mit endlicher Folge $\{h_{j,k}\}$!

Eine unmittelbare Anwendung der Verfeinerungsgleichung ist die Berechnung eines kardinalen Splines der Form

$$s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l N_k(2^{j_0} x - l) \quad \{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}).$$

Genauer gesagt nutzen wir sie für einen Algorithmus, der alle Funktionswerte auf einem höheren Diskretisierungsniveau berechnet, d. h. die Werte

$$s\left(\frac{i}{2^{j+j_0}}\right), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.35)$$

Dies kann so geschehen, daß man $f(x)$ darstellt als

$$s(x) = \sum_l a_l^{(j)} N_k(2^{j+j_0} x - l)$$

Dann berechnet man die $a_l^{(j+1)}$ rekursiv aus

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_l a_l^{(j)} N_k(2^{j+j_0} x - l) = \sum_l a_l^{(j)} \sum_i h_{i,k} N_k(2^{j+1+j_0} x - 2l - i) \\ &= \sum_i N_k(2^{j+1+j_0} x - i) \sum_l a_l^{(j)} h_{i-2l,k}, \end{aligned}$$

also

$$a_i^{(j+1)} = \sum_l h_{i-2l,k} a_l^{(j)} \quad l \in \mathbb{Z} \quad (3.3. 36)$$

mit $a_l^{(0)} := a_l$. Es folgt für die Werte in (3.3. 35)

$$s\left(\frac{i}{2^{j+j_0}}\right) = \sum_l a_l^{(j)} N_k(i-l) = \sum_{\nu=1}^{k-1} a_{l-\nu}^{(j)} N_k(\nu). \quad (3.3. 37)$$

Der Aufwand dieses Algorithmus ist proportional zur Anzahl der zu berechnenden Werte, da in jedem 'level j' ' nur halb so viele Koeffizienten $a_l^{(j)}$ wie im 'level $j+1$ ' berechnet werden. Er ist um so effizienter, je mehr Werte in (3.3. 35) berechnet werden. Ein weiterer Vorteil dieses *interpolatory graphical display algorithm* ist die Tatsache, daß die Koeffizienten im Wesentlichen ganzzahlig sind (siehe hierzu [Chui92a], Seite 94ff.). Dieser Algorithmus ist also sehr effizient für die Berechnung der Werte einer Linearkombination aus kardinalen B-Splines. Er stellt eine Variante des Unterteilungs-Algorithmus für B-Spline-Linearkombinationen dar, wo man sich damit begnügt, (3.3. 36) genügend oft auszuführen und den Schritt (3.3. 37) wegzulassen. Dies gründet auf der Beobachtung, daß man die Kurve $s(x)$ durch die diskrete Punktmenge $\{a_l^{(j)}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ approximieren kann. Dazu dient die Abschätzung

$$\left\|s(x) - a_l^{(j)}\right\| \leq \frac{C}{2^{j_0+j}} \|s'\|_{\infty} \quad \forall x \in \frac{1}{2^{j_0+j}} [l, l+k],$$

die mit einer – nur von k abhängigen – Konstante gilt. Danach ist die Approximation umso besser, je größer j ist und speziell für $j \rightarrow \infty$ liegt Konvergenz vor. Im CAD² wird der Algorithmus auf dieser Basis angewendet. Dabei wird (3.3. 36) allerdings durch eine noch einfachere Variante ersetzt, die als *Lane-Riesenfeld-Algorithmus* bekannt ist. Er wurde 1980 veröffentlicht und hat folgende Form:

Gegeben sei $s(x) = \sum_l c_l N_k(2^j x - l)$. Dann führe man durch:

type *Vektor* = **array** [-∞ .. ∞] **of** *real* ;

program *LaneRiesenfeld* (**var** *c* : *Koeffizientenvektor*) ;
var *l* : *integer* ;

begin

for *l* := -∞ **to** ∞

do begin

$c_{2l}^{(1)} := c_l; \quad c_{2l+1}^{(1)} := c_l;$

end ;

for *r* := 2 **to** *k*

do begin

for *l* := -∞ **to** ∞

do begin

$c_l^{(r)} := \frac{1}{2} \left(d_l^{(r-1)} + d_{l-1}^{(r-1)} \right)$

end

end ;

for *l* := -∞ **to** ∞

do begin

$c_l^{(1)} := d_l^{(k)}$

end

end .

Wir werden später noch in einem allgemeineren Rahmen auf Unterteilungsalgorithmen eingehen.

²Computerunterstütztes Entwerfen, engl. 'computer aided design'

3.3.3 Euler-Frobenius-Polynome und Anwendungen

In Abschnitt 3.1.3 haben wir Interpolation und beste Approximation mit Hilfe von Orthonormalbasen in allgemeinen translationsinvarianten Räumen betrachtet. In diesem Abschnitt untersuchen wir dieses Problem nun speziell für die Räume

$$S_{k,p} = \left(\overline{\{N_k(\cdot - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}} \right)_{L_p(\mathbb{R})} \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

von kardinalen Splines, wobei der Abschluß im Sinne der L_p -Norm zu verstehen ist und die B-Splines N_k nach (3.3. 23) definiert sind. Interpolation mit kardinalen Splines ('cardinal spline interpolation') ist dann nach I. J. Schoenberg das Problem, zu Daten $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ ein Element $s(x) = s(\mathbf{f}; x) \in S_{k,p}$ zu finden mit der Eigenschaft, daß

$$s(\mathbf{f}; j) = f_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.3. 38)$$

Um dieses Problem zu lösen konstruieren wir den Fundamentalspline $L_k(x) \in L_p(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$L_k(j) = \delta_{0,j}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.3. 39)$$

Dann gilt nämlich

$$s(\mathbf{f}; x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j L_k(x - j) \quad (3.3. 40)$$

(sofern diese Reihe in L_p konvergiert). Die Lösung von (3.3. 39) bestimmen wir wie in Abschnitt 3.1.3 mit Hilfe der z -Transformation. Setzen wir

$$L_k(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \rho_l^{(k)} N_k(x - l) \quad (3.3. 41)$$

an, so folgt aus (3.3. 39) die (formale) Identität

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} L_k(j) z^j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} z^l \rho_l^{(k)} N_k(j - l) z^{j-l} = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \rho_l^{(k)} z^l \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_k(j) z^j. \quad (3.3. 42)$$

Dies führt zur

Definition 3.3.5 (Euler-Frobenius-Polynom) *Das Polynom*

$$E_n(z) := n! \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_{n+1}(j) z^{j+m} = k! \sum_{j=0}^{n-1} N_{0,n+1}(j+1) z^j, \quad m := [n/2]$$

heißt Euler-Frobenius-Polynom vom Grad $n - 1$.

Diese Polynome wurden zuerst 1938 in einer Arbeit von Collatz-Quade [CQ38] im Zusammenhang mit Spline-Interpolation untersucht. Im Sinne obiger Definition wurden sie dann 1969 von Schoenberg eingeführt (vgl. seine Monographie [Schoenberg73]). In der Splineliteratur findet man eine Fülle von Eigenschaften dieser Polynome, auf die wir im Folgenden eingehen werden. Für unsere Zwecke ist zunächst wichtig, daß diese Polynome im Ausdruck (3.3. 30) auftreten, der für die l_2 -Stabilität der B-Spline Basis maßgeblich ist. Nach (3.3. 30) und Korollar 3.1.1 gilt nämlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijv} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 dv = \int_{\mathbb{R}} N_k(x) N_k(x + j) dx = N_{2k}(j),$$

so daß die Fourierreihe von $[\hat{N}_k, \hat{N}_k]$ endlich ist. Mit $z = e^{-iv}$ folgt dann die fundamentale Formel

$$\begin{aligned} [\hat{N}_k, \hat{N}_k](v) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 = \sum_{l=-k+1}^{k-1} N_{2k}(l) z^l \\ &= \sum_{l=0}^{2k-2} N_{0,2k}(l+1) z^l = \frac{z^{1-k}}{(2k-1)!} E_{2k-1}(z). \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Die Koeffizienten der Euler-Frobenius-Polynome $E_k(z)$ können bequem mit der Rekursionsformel (3.3.32) aus den Translaten der N_{k-1} berechnet werden. Speziell gilt

$$E_{2k-1}(z) = \sum_{j=0}^{2k-2} a_j z^j, \quad a_{k-1+l} = N_{2k}(l) = N_{2k}(-l) = a_{k-1-l}. \quad (3.3.44)$$

Eine weitere einfache Folgerung aus (3.3.32) ist

$$a_1 = a_{2k-1} = N_{2k}(1) = (2k-1)!.$$

Mit etwas größerem Aufwand ergibt sich der

Satz 3.3.4 (Euler-Frobenius-Polynome) Die Polynome $E_n(z)$ erfüllen die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} E_1(z) &= 1 \\ E_n(z) &= (1 + (n-1)z)E_{n-1}(z) + z(1-z)E'_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Ferner haben die Nullstellen eines beliebigen Euler-Frobenius-Polynoms $E_n(z)$ folgende Eigenschaften:

1. sie sind einfach,
2. sie sind negativ (also speziell reell) und daher die Polynome in reelle Linearfaktoren zerlegbar,
3. ist λ eine Nullstelle von $E_n(z)$, so auch $1/\lambda$.

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, vgl. dazu auch [Chui92a] (Abschnitt 6.4) oder [Schoenberg71]. Es sei nur angemerkt, daß die letzte Aussage aus $E_n(1/z) = z^{1-n}E_n(z)$ folgt. Nimmt man die Aussagen 2. und 3. zusammen, so erhält man offensichtlich das Resultat, daß -1 genau dann eine Nullstelle von $E_n(z)$ ist, wenn n gerade ist (man beachte, daß $\deg E_n = n-1$). Ist n hingegen ungerade, z.B. $n = 2m-1$, so treten die Nullstellen in Paaren $(\lambda_\nu, 1/\lambda_\nu)$, $\nu = 1, \dots, m$ auf. Dabei kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_m > -1$ gilt. Dann folgt

Korollar 3.3.3 Die Euler-Frobenius-Polynome haben die Darstellung

$$E_{2k-1}(z) = \prod_{j=1}^{k-1} (z - \lambda_j) \left(z - \frac{1}{\lambda_j} \right) = z^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(\lambda_j(z + 1/z) - \lambda_j^2 - 1)}{\lambda_j}, \quad |\lambda_j| < 1,$$

und folglich gilt

$$1 = \sup_v \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 \geq \inf_v \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (2l+1)^{-2k}. \quad (3.3.45)$$

BEWEIS: Die Formel für $E_{2k-1}(z)$ ist klar. Dann gilt nach (3.3.43)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 = \frac{1}{(2k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} (e^{-iv} - \lambda_j) \left(\frac{\lambda_j e^{-iv} - 1}{\lambda_j} \right) = \frac{1}{(2k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(1 + 2|\lambda_j| \cos v + \lambda_j^2)}{|\lambda_j|}.$$

Diese Formel zeigt, daß das Supremum bezüglich v für $v = 0$ erreicht wird. Wegen $\hat{N}^k(v) = (\text{sinc } v/2)^k$ erhält man daher

$$\sup_v \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(2\pi l) \right|^2 = \left| \hat{N}_k(0) \right|^2 = 1.$$

Andererseits wird das Infimum für $v = \pi$ erreicht. Damit folgt

$$\inf_v \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(v + 2\pi l) \right|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_k(\pi + 2l\pi) \right|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (\pi l + \pi/2)^{-2k}.$$

□

Bemerkung 3.3.6 *Mit diesem Korollar sind die Stabilitätskonstanten der B-Spline Basis in Lemma 3.3.6 exakt bestimmt!*

Eine andere Konsequenz dieses Korollars ist eine relativ explizite Formel für die ONB des Raumes

$$S_{k,2} := \left\{ s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l N_k(x-l) : \{a_l\} \in l_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

von kardinalen Splines aus den Translaten der Erzeugenden $\phi(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(v) &= \frac{\hat{N}_k(v)}{\sqrt{\sum_k \left| \hat{N}_k(v + 2\pi k) \right|^2}} = \sqrt{\frac{(2k-1)!}{z^{1-k} E_{2k-1}(z)}} \hat{N}_k(v) \\ &= \sqrt{(2k-1)!} \hat{N}_k(v) \prod_{j=1}^{k-1} \sqrt{\frac{|\lambda_j|}{(1 + \lambda_j^2 - 2\lambda_j \cos v)}}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Man erhält also $\phi(x)$ als Linearkombination von B-Splines, wenn man die Koeffizienten in der Laurent-Reihenentwicklung von $\sqrt{z^{k-1}/E_{2k-1}(z)}$ bestimmt. Um diese Entwicklung noch näher zu untersuchen, betrachten wir die Nullstellen des Polynoms $E_{2k-1}(z)$. Berechnet man einige der Polynome nach der Rekursionsformel, so erhält man:

$$\begin{aligned} E_0(t) &= 1 = E_1(t), \\ E_2(t) &= t + 1, \\ E_3(t) &= t^2 + 4t + 1, \\ E_4(t) &= t^3 + 11t^2 + 11t + 1, \\ E_5(t) &= t^4 + 26t^3 + 66t^2 + 26t + 1. \end{aligned}$$

Die beiden konstanten Polynome E_0 und E_1 haben keine Nullstelle, die (einzige) Nullstelle von E_2 ist $t = -1$. Bei E_3 ergeben sich die beiden Nullstellen als $-2 \pm \sqrt{3}$. Auch die Nullstellen des kubischen Polynoms E_4 lassen sich leicht berechnen: durch Einsetzen verifiziert man, daß -1 eine Nullstelle ist. Nach Polynomdivision durch den Linearfaktor $t + 1$ ist dann nur noch $t^2 + 10t + 1 = 0$ zu lösen und dies ergibt die Nullstellen $-5 \pm 2\sqrt{6}$. Um die Nullstelle von E_k , $k \geq 5$ zu bestimmen, ist es sinnvoll ein Computeralgebraprogramm wie z. B. Maple oder Mathematica zu benutzen.

Für $k = 5$ erhält man so folgende 4 Nullstellen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(13 - \sqrt{105} - \sqrt{270 - 26\sqrt{105}} \right) &\approx -0,4306, \\ -\frac{1}{2} \left(13 - \sqrt{105} + \sqrt{270 - 26\sqrt{105}} \right) &\approx -2,3225, \\ -\frac{1}{2} \left(13 + \sqrt{105} - \sqrt{270 + 26\sqrt{105}} \right) &\approx -0,0431, \\ -\frac{1}{2} \left(13 + \sqrt{105} + \sqrt{270 + 26\sqrt{105}} \right) &\approx -23,2039. \end{aligned}$$

Im Fall beliebiger Ordnung k kann der Faktor vor $\hat{N}_k(v)$ auf dem Kreisring $\bar{\lambda} < |z| < 1/\bar{\lambda}$, wobei

$$\bar{\lambda} := \max \{ |\lambda_j| : \lambda_j = \text{Nullstelle von } E_k(z) \text{ mit } |z| \leq 1 \}$$

ist, in eine (konvergente) Laurent-Reihe entwickelt werden. Um dies streng zu rechtfertigen beachte man, daß die Entwicklungen

$$\frac{1}{1 - \lambda_j/z} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j}{z} \right)^l, \quad \frac{1}{1 - \lambda z} = \sum_{l=0}^{\infty} (\lambda z)^l$$

(in geometrische Reihen) für $|z| > \bar{\lambda}$ bzw. $|z| < 1/\bar{\lambda}$ möglich sind. Die Produkte dieser Potenzreihen erhält man durch endlich viele Cauchy-Produkte mit jeweils exponentiell abfallenden Koeffizienten und es folgt nach Korollar 3.3.3

$$\frac{(2k-1)!z^{k-1}}{E_{2k-1}(z)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \omega_l^{(2k)} z^l, \quad \bar{\lambda} < |z| < \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad (3.3.47)$$

mit Koeffizienten $\omega_l^{(2k)}$, die in $|l|$ exponentiell abfallen. Genauer gilt

$$\left| \omega_l^{(2k)} \right| \leq C_k \bar{\lambda}^{|l|}$$

mit einer – von m abhängigen – Konstanten C_k . Als Folgerung erhält man auf dem Kreisring $\bar{\lambda} < |z| < 1/\bar{\lambda}$ die Darstellung

$$\sqrt{\frac{(2k-1)!z^{k-1}}{E_{2k-1}(z)}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(k)} z^l + \sum_{l=0}^{\infty} a_{-l}^{(k)} z^{-l}.$$

Die $a_l^{(k)}$ fallen genauso wie die $\omega_l^{(2k)}$ exponentiell ab. Setzt man dies in (3.3.46) ein, so folgt

$$\phi(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^{(k)} N_k(x-l),$$

d. h. ϕ fällt wie $\bar{\lambda}^{|x|}$ ab. Allerdings liefern diese Aussagen noch keinen praktikablen Algorithmus zur Berechnung von ϕ .

Zum Abschluss kehren wir wieder zur kardinalen Interpolation zurück und wenden diese Überlegungen darauf an. Dazu müssen wir zunächst die $\rho_l^{(k)}$ (siehe (3.3.41)) bestimmen; diese sind aber nach (3.3.42) durch

$$1 = \left(\sum_l \rho_l^{(k)} z^l \right) \left(\sum_j N_k(j) z^j \right) = \frac{z^{-[(k-1)/2]}}{(k-1)!} E_{k-1}(z) \sum_l \rho_l^{(k)} z^l$$

gegeben. Wir betrachten nun den Fall, daß $k = 2m$ gerade ist; der Vergleich mit (3.3.47) ergibt dann

$$\rho_l^{(k)} = \omega_l^{(2m)}. \quad (3.3.48)$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen wissen wir nun, daß dadurch die $\rho_l^{(k)}$ eindeutig bestimmt sind und wie $< \bar{\lambda}^{|l|}$, $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ abfallen. Damit ist $L_{2m}(x)$ eindeutig bestimmt und hat das Abklingverhalten

$$|L_{2m}(x)| \leq C_m \bar{\lambda}^{|x|}$$

mit einer Konstanten C_m .

Zum Beweis der Eindeutigkeit müssen wir die Existenz eines Nullsplines im gewünschten Splineräum $S_{k,p}$ ausschließen, d. h. zeigen, daß es in diesem Raum keine Funktion $O_{2m}(x) = \sum c_k^{(2m)} N_{2m}(x-k)$ mit

$$O_{2m}(\mathbb{Z}) = \{0\}$$

gibt. Angenommen es gebe eine solche Funktion mit einer nichttrivialen Folge $\{c_k^{(2m)}\}$, die (sogar) ein exponentielles Wachstum der Form $|c_k^{(2m)}| = Cq^{|k|}$ mit $q < 1/\bar{\lambda}$ aufweise. Sei dann $K_r(z_0)$ ein Kreis um z_0 mit Radius r , der ganz im Inneren des Kreisrings $K_{1/q}(0) \setminus K_q(0)$ liegt (es gelte also $|z_0| + r < 1/q$ und $|z_0| - r > q$). Für $z \in K_r(z_0)$ kann man dann wie oben die z -Transformation auf diesem Kreis anwenden und erhält

$$0 = \sum_l Q_{2m}(l)z^l = \frac{E_{2m-1}(z)}{(2m-1)!} \sum_k c_k^{(2m)} z^{k+1}.$$

Da $\sum_k c_k^{(2m)} z^{k+1}$ auf diesem Kreis nicht identisch verschwinden kann, müsste aber eine Nullstelle von $E_{2m-1}(z)$ in diesem Kreis liegen und dies würde Satz 3.3.4 bei $r \rightarrow 0$ widersprechen.

Wir fassen unsere Erkenntnisse zusammen in

Satz 3.3.5 (Cardinal Interpolation mit Splines) *Das spezielle kardinale Interpolationsproblem (3.3. 39) hat für $k = 2m$ genau eine Lösung $L_{2m}(x)$ der Form (3.3. 41) die erstens im Splinerraum $S_{2m,2}$ liegt, zweitens in $|x|$ exponentiell abfällt und deren Koeffizienten $\{b_k^{(2m)}\}$ drittens in $|k|$ exponentiell abfallen. Das allgemeine kardinale Interpolationsproblem (3.3. 38) hat für Datenfolgen $\mathbf{f} = \{f_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$, die $f_l \leq Cq^{|l|}$ mit einer Konstanten C und einem q mit $0 < q < 1/\bar{\lambda}$ erfüllen, genau eine Lösung; diese hat die Form (3.3. 40).*

Der Beweis des letzten Teils der Aussage sei dabei dem Leser überlassen. Es sei noch angemerkt, daß das analoge Interpolationsproblem für ungerades $n = 2m + 1$ (statt $n = 2m$) nicht eindeutig lösbar ist bzw. es existieren nichttriviale Nullsplines. Der Grund ist der, daß $E_{2m}(z)$ an der Stelle $z = -1$ eine Nullstelle hat. Dann ist die obige Argumentation mit Hilfe der Laurentreihe in der angegebenen Form nicht möglich.

Eine genauere Analyse der Nullsplines kann man in der Monographie von Schoenberg [Schoenberg73] finden. Er betrachtet dort Splinefunktionen des Typs

$$\phi_{m,z}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j N_m(x-j), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sie erfüllen die Funktionalgleichung $\phi_{m,z}(x+1) = z\phi_{m,z}(x)$ und somit

$$\phi_{m,z}(j) = z^j \phi_{m,z}(0) = z^j \sum_l z^l N_m(-l) = z^j \sum_l z^l N_m(m+l) = \frac{z^{j-m+1}}{(m-1)!} E_{m-1}(z).$$

Insbesondere gilt für die Nullstellen z des Euler-Frobenius-Polynoms $\phi_{m,z}(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Im obigen Fall ist $E_{2m}(-1) = 0$ und daher

$$\phi_{2m+1,-1}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j N_{2m+1}(x-j)$$

ein Nullspline in $L_\infty(\mathbb{R})$. In [Schoenberg73] wird gezeigt, daß die Menge aller Nullsplines (vom Grad $n-1$) ein linearen Raum der Dimension $n-1$ ist und die $\phi_{n,\lambda_i}(x)$ eine Basis dieses Raums bilden. Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ die $n-1$ einfachen Nullstellen von $E_n(z)$. Schoenberg zeigt weiter, daß für ungerades $n = 2m+1$ das Interpolationsproblem

$$s\left(\mathbf{f}, l - \frac{1}{2}\right) = f_l \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$

mit $s \in S_{2m+1,\infty}$ unter analogen Voraussetzungen wie in Satz 3.3.5 eindeutig lösbar ist. Für die speziellen Daten $f_l = \delta_{0,l}$ ergibt sich, daß die Lösung die Form

$$\tilde{L}_{2m+1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{b}_k^{(2m+1)} N_{2m+1}(x-k)$$

hat. Die Koeffizienten $\{\tilde{b}_k^{(2m+1)}\}$ erfüllen dabei analog zu obigen Ergebnissen die Gleichung

$$1 = z \left(\sum_k z^k \tilde{b}_k^{(2m+1)} \right) \left(\sum_{j=0}^{2m} z^j N_{2m+1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \equiv \frac{\tilde{E}_{2m}(z)}{(2m)!} \sum_k z^{k+1} \tilde{b}_k^{(2m+1)}.$$

Die hier auftretenden Polynome $\tilde{E}_{2m}(z)$ haben dabei ganz ähnliche Eigenschaften wie die $E_{2m+1}(z)$. Einzelheiten finden sich wie erwähnt in [Schoenberg73]. Mittlerweile sind beide Fälle einheitlich in dem folgendem Interpolationsproblem behandelt worden:

Gegeben sei eine Datenfolge $\{j_l\}_{l \in \mathbf{Z}}$ und ein $\alpha \in [0, 1)$. Bestimme ein $s \in S_{k, \infty}$ mit der Interpolationseigenschaft

$$s(l + \alpha) = f(l), \quad l \in \mathbf{Z} \tag{3.3. 49}$$

bzw. eine Koeffizientenfolge $\{a_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, so daß das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j N_k(l + \alpha - j) = f_l, \quad l \in \mathbf{Z} \tag{3.3. 50}$$

erfüllt ist. Man kann dann zeigen, daß es genau dann lösbar ist, wenn $|\alpha| < 1/2$ gilt. Dazu ist zu bemerken, daß die $N_k(x)$ die *um 0 zentrierten* B-Splines aus (3.3. 23) sind, so daß der in Satz 3.3.5 behandelte Fall gerade $\alpha = 0$ entspricht. Näheres dazu s. [Micchelli79].

Kapitel 4

Multi-Resolution-Analysis und Wavelets

4.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformationen

4.1.1 Gefensterte Fouriertransformation(WFT)

Bei der gefensterten Fouriertransformation (englisch: 'Windowed Fourier Transform', WFT) handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation, die zusätzliche Parameter verwendet. Vor der Transformation in den Frequenzbereich multipliziert man hier die Ausgangsfunktion mit einer sogenannten *Fensterfunktion*. Diese hängt im Wesentlichen von zwei Parametern ab, nämlich zum einen von der „Lage“ des Fensters und zum anderen von der sogenannten *Fensterbreite*.

Betrachten wir den univariaten Fall. Dann definiert man für $g \in L_2(\mathbb{R})$

$$f_t(u) := \overline{g(u-t)}f(u)$$

und

$$\tilde{f}(\omega, t) := \hat{f}_t(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f_t(u)e^{-i\omega u} du = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u-t)}f(u)e^{-i\omega u} du \quad (4.1.1)$$

Diese Transformation wurde 1946 von D. Gabor eingeführt. Mit

$$g_{\omega,t}(u) := e^{i\omega u}g(u-t) \quad (4.1.2)$$

kann man die WFT auch als Skalarprodukt

$$\tilde{f}(\omega, t) = (f, g_{\omega,t})_2 \implies \tilde{f}(\omega, t) \in L_\infty \quad (4.1.3)$$

schreiben; in dieser Form lässt sich die Ähnlichkeit zur WT am besten erkennen. Man nennt g wie schon gesagt Fensterfunktion oder kurz *Fenster*. Um zu sehen, wie sie sich im Frequenzbereich darstellt (also wie die zugehörige Filterfunktion aussieht) berechnen wir die Fourier-Transformation bezüglich t – also bezüglich der Zeit, wenn wir annehmen, dass $f(t)$ ein Signal ist. Mit der Faltungformel ergibt sich

$$\mathcal{F}\tilde{f}(\omega, \cdot)(v) = \mathcal{F}\overline{g(\cdot)}(v)\mathcal{F}f(u)e^{-i\omega u}(v) = \overline{\hat{g}(v)}\hat{f}(v+\omega).$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt nun, dass $\mathcal{F}\tilde{f}(\omega, \cdot)(v)$ in L_∞ liegt. Die Umkehrformel der Fourier-Transformation liefert dann

$$\tilde{f}(\omega, t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(v)}\hat{f}(v+\omega)e^{ivt} dv = \frac{1}{(2\pi)^m} e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(u-\omega)}\hat{f}(u)e^{iut} du. \quad (4.1.4)$$

Diese Formel kann man folgendermaßen als Konstruktionsformel ansehen: Man geht vom Signal $\hat{f}(u)$ im Frequenzbereich aus, filtere es durch Multiplikation mit dem Fenster, und bilde anschließend die invers

Fouriertransformierte. Damit verwendet man nicht genau die ursprüngliche Transformation $\tilde{f}(\omega, t)$, jedoch genügt eine einfache Multiplikation (*Modulation*) mit der Schwingung um dies zu erreichen. Dies nennt man in der Signaltechnik *Demodulation*. (Aus der Sicht des Ingenieurs hat diese Bezeichnung folgenden Grund: dem Zwischenergebnis ist noch eine unerwünschte Schwingung aufgeprägt, die es zu entfernen gilt.)

Die Transformation $\tilde{f}(\omega, t)$ kann je nach Wahl des „Fensters“ eine recht genaue Beschreibung des ursprünglichen Signals $f(t)$ liefern und zwar sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich. Ist nämlich z. B. $\hat{g}(v)$ um den Nullpunkt lokalisiert –z.B. in einer Umgebung $W = (-\epsilon, \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll 1$ – so zeigt obige Formel, dass

$$\mathcal{F}\hat{f}(\omega, \cdot)(v) = \hat{f}(v + \omega)\chi_W(v) \approx \hat{f}(\omega)\chi_W(v).$$

Im Extremfall könnte man statt $\chi_W(v)$ die δ -Distribution verwenden, die den Wert $\hat{f}(\omega)$ (also die Amplitude der Frequenz ω des Signals) *unendlich scharf* lokalisiert. Wegen $\mathcal{F}[1] = \delta$ ist dies der Fall, wenn als Fenster $g(x) \equiv 1$ gewählt wird, also wenn $g_{\omega,t}(u) = e^{i\omega u}$. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass man die übliche Fouriertransformation verwendet. Der andere Extremfall liegt vor, wenn $g_{\omega,t}(u) = \delta(\cdot - t_0)$ (also die nach t_0 verschobene Delta-Distribution) gewählt wird; das entspricht dem Limes einer Dirac-Folge. Dann gilt $\tilde{f}(\omega, t_0)$, d. h. der Wert des Signals zum Zeitpunkt t_0 wird unendlich scharf lokalisiert. Eine praktische Variante bilden die Fenster

$$\frac{1}{\rho} \Phi\left(\frac{u - t_0}{\rho}\right)$$

mit $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ und dem „zooming“-Parameter ρ . Läßt man ρ gegen 0 gehen, dann wird das Fenster immer kleiner, d. h. der Zeitpunkt wird immer genauer lokalisiert. Exakte Lokalisierung im Zeit- und auch im Frequenzbereich ist sowohl mathematisch als auch physikalisch nicht realisierbar. Man kann die Frage stellen, welche Fenster gut lokalisiert sind. Um diese Frage quantitativ beantworten zu können müssen wir zunächst einige Größen einführen (vgl. [Chui92a], Seite 54).

Definition 4.1.1 *Es seien $w(t)$ und $tw(t)$ Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$. Dann heißt*

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2} \int_{\mathbb{R}} t|w(t)|^2 dt$$

das Zentrum (*auch: der Schwerpunkt*) und

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t^*)^2 |w(t)|^2 dt}$$

die Breite (*manchmal auch Standardabweichung*) des Fensters $w(t)$.

Diese Definitionen für Zentrum und Breite haben einen anschaulichen Sinn, der ihre Namen motiviert. Klar ist, dass Δw umso kleiner ist, je schärfer der Träger um t^* lokalisiert ist. Ebenso ist klar, dass $\tilde{f}(\omega, t)$ eine sinnvolle Information über das lokale Verhalten von $f(t)$ innerhalb des Zeitfensters $[t^* + t - \Delta g; t^* + t + \Delta g]$ darstellt. Das zu bildende Integral in (4.1. 1) berücksichtigt ja im wesentlichen nur Funktionswerte zu Zeiten aus diesem Zeitintervall. Analog liest man an (4.1. 4) ab, dass $\tilde{f}(\omega, t)$ eine sinnvolle Information über das Verhalten von $\hat{f}(\omega)$ innerhalb des Zeitintervalls $[\omega^* + \omega - \Delta \hat{g}, \omega^* + \omega + \Delta \hat{g}]$ darstellt. Dabei sind ω und $\Delta \hat{g}$ die Entsprechungen von t^* und Δg die sich ergeben, wenn man obige Definitionen auf \hat{g} statt auf g anwendet.

Interessanterweise kann man nun zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |w(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{2} \tag{4.1. 5}$$

gilt. Einen Beweis findet man in Chui [Chui92a] auf Seite 56ff. oder in [Wickerhauser], Seite 22. Man kann ferner zeigen, dass das Minimum für Funktionen des Typs

$$w(x) = ce^{iat}W(\alpha t - b), \quad , c \neq 0, \quad \alpha < 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

tatsächlich angenommen wird. Dabei bezeichnet $W(x)$ die Gaußsche Glockenkurve $W(x) = \exp(-x^2/2)$. Damit haben wir die Aussage präzisiert, dass man kein Fenster finden kann, dessen zugehörige WFT ein Signal gleichzeitig im Zeit- und im Frequenzbereich unendlich scharf lokalisiert. Eine weitere Deutung der Relation (4.5) ist diejenige als Heisenbergsche Unschärferelation, d. h. das Produkt der Schwankungsbreiten von Ort und Impuls eines Teilchens hat eine feste, von Null verschiedene untere Grenze. (Genaugenommen ist diese Aussage nur ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Prinzips, dessen Untersuchung allerdings zu weit in die Funktionalanalysis führen würde). Die durch (4.1) bis (4.3) beschriebene Transformation von $L_2(\mathbb{R})$ nach $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ hat eine Umkehrung die man Rekonstruktions-Formel ('reconstruction formula') nennt. Es gilt

Lemma 4.1.1 *Unter den obigen Voraussetzungen an g gilt für $f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$f(u) = \frac{1}{C_g} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_{\omega,t}(u) \tilde{f}(\omega, t) d\omega dt \quad (4.1. 6)$$

mit $C_g = 2\pi \|g\|_2^2$. Ferner gilt

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_g} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(\omega, t)|^2 dt d\omega \quad (4.1. 7)$$

BEWEIS: Wir nehmen zunächst an, dass f und g zusätzlich genügend glatt sind. Weil dann f_t genügend glatt ist, folgt wegen $\tilde{f}(\omega, t) = \hat{f}_t(\omega)$ mit Lemma 2.4, Teil3, und Lemma 2.3, dass $\tilde{f}(\omega, t)$ in ω genügend schnell abfällt. Speziell soll dann $\hat{f}_t(\omega)$ bezüglich ω eine L_1 -Funktion sein, so dass sich darauf – bei festgehaltenem t – die inverse Fourier-Transformation anwenden läßt. Dies ergibt

$$\overline{g(u-t)} f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t) d\omega.$$

Da die Division durch g im Allgemeinen nicht möglich ist, multipliziert man mit $g(u-t)$ und integriert bezüglich t . Dann folgt

$$f(u) \int_{\mathbb{R}} |g(u-t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(u-t) e^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t) dt d\omega.$$

Hieraus folgt nach Definition von C_g

$$C_g f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(u-t) e^{i\omega u} \tilde{f}(\omega, t) dt d\omega.$$

Damit ist (4.7) für glatte f und g bewiesen. Multiplikation mit $\overline{f(u)}$ und Integration ergibt für solche Funktionen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} C_g \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega, t) \int_{\mathbb{R}} g(u-t) e^{i\omega u} \overline{f(u)} du dt d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\tilde{f}(\omega, t)} \tilde{f}(\omega, t) dt d\omega, \end{aligned} \quad (4.1. 8)$$

d.h. $\tilde{f}(\omega, t) \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Nun betrachte beliebige Funktionen $f, g \in L_2$ und approximiere sie durch Funktionen $f_n, g_n \in L_2$, die im obigen Sinne glatt sind. Für die Approximationen f_n, g_n gilt (4.7). Die linke Seite strebt dann für $n \rightarrow \infty$ gegen $C_g \|f\|_2^2$ während auf der rechten Seite der Integrand (der nach (4.3) in L_∞ liegt) punktweise gegen $|\tilde{f}(\omega, t)|^2$ strebt. Mit dem Lemma von Fatou, d. h. mit

$$\int \limsup f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf \int f_n(x) d\mu(x),$$

folgt dann $\tilde{f}(\omega, t) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ für allgemeine f, g . Damit ist dann auch (4.1. 6) für allgemeine f, g im L_2 -Sinne gültig. \square

Lemma (4.1) ist als Analogon zum Satz von Plancherel für die gewöhnliche Fourier-Transformation anzusehen. Neben diesem rein mathematischen Aspekt zeigt es, dass man das ursprüngliche Signal aus der Kenntnis von $\tilde{f}(\omega, t)$ als Funktion von ω und t wieder zusammensetzen (synthetisieren) kann. Man nennt $\tilde{f}(\omega, t)$ deshalb eine *Phasenraumlokalisierung* von f wobei der Phasenraum die Menge aller Paare (ω, o) ist, auch diese Bezeichnung stammt aus der Physik.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch erwähnt, dass die Diskretisierung der gefensterter Fourier-Transformation durch die Trapezregel zu Basisfunktionen der Form $\{g(x - n)e^{i2\pi mx}\}_{n,m \in \mathbb{Z}^m}$ führt. Für sie gilt in Verschärfung der Heisenberg-Relation der

Satz 4.1.1 (Balian-Low) *Sei $g \in L_2(\mathbb{R})$ und die Funktionen $\{g(x - n)e^{i2\pi mx}\}_{n,m \in \mathbb{Z}^m}$ eine Orthonormalbasis für $L_2(\mathbb{R})$. Dann muss das Heisenberg-Produkt (für g statt w) in (4.1. 5) unendlich sein.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in Daubechies [Daubechies92], Section 4.1. Als Konsequenz kann die Rekonstruktionsformel von Lemma 4.1 mit diesen g nicht gelten. Andererseits bieten solche Orthonormalbasen als Diskretisierung einer gefensterter Fourier-Transformation viele Vorteile. Deshalb sind in jüngster Zeit durch Modifikation des obigen Ansatzes erfolgreich Orthonormalbasen entwickelt worden, für die das negative Ergebnis des Satzes von Balian-Low keine Gültigkeit hat. Eine Darstellung dieser Zusammenhänge findet man in Daubechies [Daubechies92], Section 4.2, Algorithmen auf dieser Basis in [Wickerhauser], Kapitel 4.

4.1.2 Kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT)

Die Ideen des vorigen Abschnitts werden durch die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) – die 1983 von Grossman-Morlet eingeführt wurde – in bestimmter Weise abgewandelt. Wir beschränken uns dabei auf den Fall einer einzigen Variablen .

Definition 4.1.2 *Gegeben sei eine Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$, welche die Bedingung*

$$C_\Psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|v|} \|\hat{\Psi}(v)\|^2 dv < \infty \tag{4.1. 9}$$

erfüllt. Dann definiere für Funktionen $f \in L_1(\mathbb{R})$ die Wavelet-Transformierte von f zum Wavelet Ψ als

$$(L_\Psi f)(a, b) := \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \tag{4.1. 10}$$

Formel (4.1. 9) lässt sich wie (4.1) auch als Skalarprodukt schreiben,

$$(L_\Psi f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|aC_\Psi|}} (f, \Psi_{a,b}); \tag{4.1. 11}$$

dabei ist $\Psi_{a,b}$ definiert als

$$\Psi_{a,b}(u) := \Psi\left(\frac{u-b}{a}\right).$$

Die Funktion Ψ entspricht einem Fenster ,wobei die Parameter mit a, b bezeichnet werden und den bisherigen Parametern ω und t bei der gefensterter Fourier- Transformation entsprechen.

Wie bereits bei der gefensterter Fourier-Transformation diskutiert, kann man $(L_\Psi f)(a, b)$ auch als eine Dirac-Folge mit Parameter $a \rightarrow 0$ auffassen (anschaulich wird dabei das „Fenster“ immer schmaler). Der Parameter b dient dazu, das Fenster an die interessierende Stelle zu verschieben und entspricht dem Zeitpunkt t bei der WFT. Der Parameter ω in (4.1) hat keine direkte Entsprechung zu a in (4.10) und ist nur durch die Verbindung zur Fouriertransformation motiviert.

Bemerkung 4.1.1 *Der Name Wavelet rührt daher, dass aus (4.9) notwendigerweise $\hat{\Psi}(0) = 0$ folgt; das bedeutet, dass*

$$0 = \hat{\Psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(u) du. \tag{4.1. 12}$$

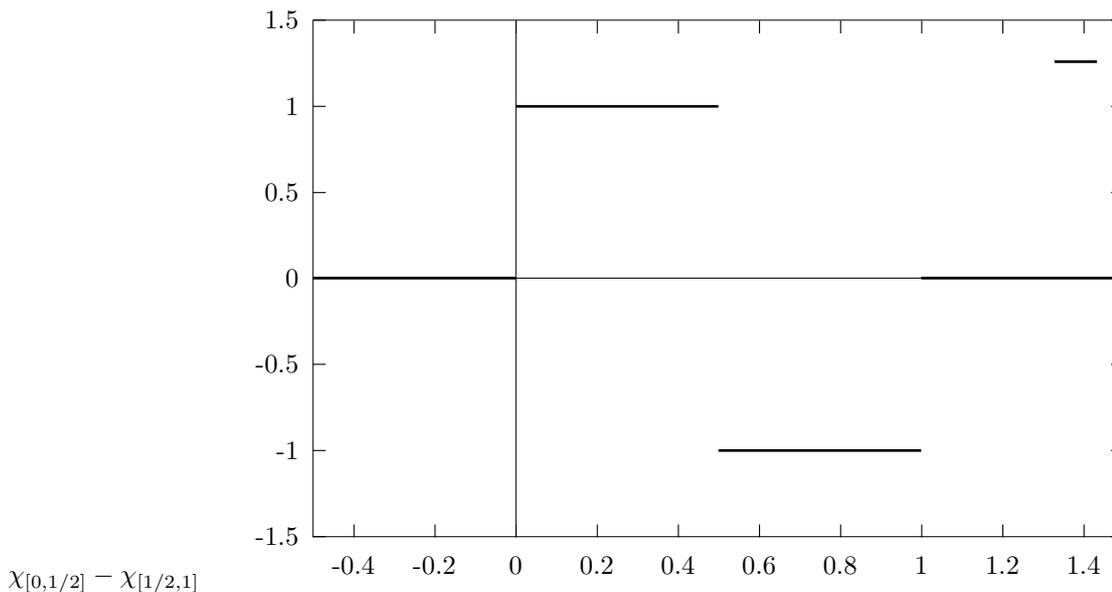
Da also der Mittelwert verschwindet, muss Ψ mindestens einen Vorzeichenwechsel aufweisen, also „Wellenstruktur“ haben.

Damit sich eine Funktion als Wavelet im Sinne obiger Definition eignet, muß sie also die Bedingung (4.1.9) erfüllen. Dies ist sehr einfach nachzuprüfen. Betrachtet man z.B. die bandbegrenzte Funktion $W(x)$ aus Kapitel 2, deren Fourier-Transformation die charakteristische Funktion eines Gebiets W ist, so gilt

$$\hat{W}(v) = \mathcal{F}[2\pi\mathcal{F}^{-1}[\chi_W]](v) = 2\pi\chi_W(v).$$

Man sieht, dass die Standardwahl $W = (-1/2, 1/2)$ kein Wavelet liefert, weil dann $\int_W dt/|t|$ divergiert. Dagegen ist (4.9) bei $W = (-1, 1/2) \cup (1/2, 1)$ erfüllt. Das bekannteste (weil einfachste) Wavelet ist das *Haar-Wavelet*:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.1.13)$$



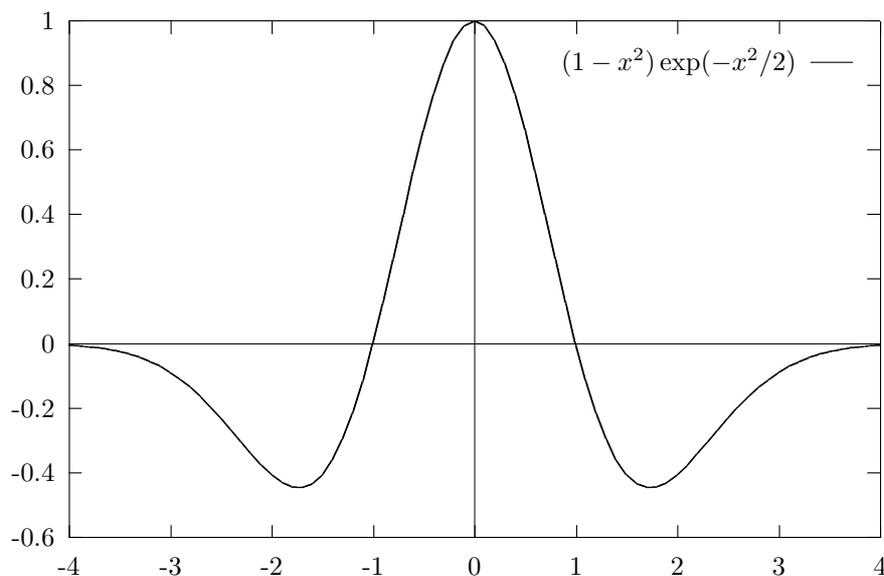
Offensichtlich verschwindet das Integral $\int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt$ und wie man leicht nachrechnet gilt $\hat{\Psi}(\omega) = i \exp(-i\omega/2) \sin(\omega/4) \text{sinc}(\omega/4)$.

Ebenso kann man leicht nachrechnen, dass Bedingung (4.9) erfüllt ist.

Ein weiteres Beispiel ist der sogenannte *mexikanische Hut*, der durch

$$\Psi(x) = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 e^{-x^2/2} = (1-x^2)e^{-x^2/2}.$$

definiert wird.



Nach der Formel in Bemerkung 2.8 über die Fourier-Transformierte des Gauß-Kerns gilt $\hat{\Psi}(\omega) = \omega^2 \exp(-\omega^2/2)$; offensichtlich ist (4.9) erfüllt. Im Gegensatz zum Haar-Wavelet ist der Mexikanische Hut eine C^∞ -Funktion. Allgemeine Kriterien für (4.9) liefert

Lemma 4.1.2

1. Sei ϕ eine k -fach, $k \geq 1$ differenzierbare Funktion für die $\phi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ nicht identisch verschwindet. Dann ist $\Psi(x) = \phi^{(k)}$ ein Wavelet.
2. Sei $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^m)(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dx = 0$ und $|\Psi(x)| \leq C/|x|^\beta$ für ein $\beta > 1/2$. Dann ist Ψ ein Wavelet. Speziell ist jede Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und Mittelwert $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x) dx = 0$ ein Wavelet.

Man fragt sich nun, warum Bedingung (4.9) an Ψ gestellt wird, vor allem wenn man einen Vergleich mit der Approximation durch Dirac-Folgen zieht. Dort haben wir

$$I_\rho(f; x) = \frac{1}{\rho^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u) \Phi\left(\frac{x-u}{\rho}\right) du$$

betrachtet und gesehen, dass zur Approximation allein $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ für die Approximation ausreichend war. Eine Erklärung dafür geben wir in den folgenden zwei Sätzen. Sie stellen die Analoga des Plancherel-Satzes für die CWT dar (vgl. Lemma 4.1).

Zuvor müssen wir die Fouriertransformierte von $(L_\Psi f)(a, b)$ bezüglich b berechnen. Unter Verwendung der in Lemma 2.5 bewiesenen, punktweise geltenden Formeln für die Fourier-Transformierte einer Faltung von L_2 -Funktionen folgt

$$(L_\Psi \hat{f})(a, \cdot)(\omega) = \sqrt{\left| \frac{a}{C_\Psi} \right|} \hat{\Psi}(-a v) \hat{f}(v) = \sqrt{\left| \frac{a}{C_\Psi} \right|} \overline{\hat{\Psi}(a v)} \hat{f}(v). \quad (4.1. 14)$$

Dieser Formel entnimmt man, daß die CWT eine Filterung mit Filter $\hat{\Psi}(a\omega)$ darstellt. Damit werden die hohen Frequenzen von f für große Werte von $|a|$ stark gedämpft. Ist $\hat{\Psi}$ gut um die Frequenz ω^* (also das Zentrum) lokalisiert, so beschreibt $L_\Psi f$ gut die Frequenzen von f , die innerhalb des Fensters

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a} \right] \quad (4.1. 15)$$

liegen, wobei die Größen ω^* und $\Delta_{\hat{\Psi}}$ gemäß Definition 4.1.1 gebildet sind. Man schließt dies aus der mit Hilfe der Parseval-Formel folgenden Darstellung

$$(L_{\Psi}f)(a, b) = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\left| \frac{a}{C_{\phi}} \right|} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\hat{\Psi}(a\omega)} d\omega. \quad (4.1.16)$$

Daß $(L_{\Psi}f)(a, b)$ zeitliche Details der Größe a für kleine $|a|$ gut beschreibt kann man sich anhand von (4.1.15) folgendermaßen überlegen:

Es sei f von der Form $f = \sum_j \alpha_j \chi_{I_j}$ mit Intervallen $|I_j|$. Es sei $I_j = [x_j - h/2, x_j + h/2]$, so dass $\chi_{I_j}(x) = \chi_{[-h/2, h/2]}(x + x_j)$ und $\chi_{I_j}(\omega) = \exp(-ix_j\omega) h/\text{sinc}(h\omega/2)$. Der wesentliche Trägerbereich von $\text{sinc}x$ ist $[-\pi, \pi]$ (das ist der Bereich um Null in dem die Sinc-Funktion positiv ist), so dass im Wesentlichen Frequenzen mit $|h\omega/2| \leq \pi$ oder $|\omega| \leq 2\pi/h$ die Details der Größe h beschreiben. Die Frequenzen von $L_{\Psi}f$ hängen aber nach (4.13) bei gut lokalisierten Ψ wesentlich von der Breite ω^*/a ab, so dass $L_{\Psi}f$ Details der Größe $h \approx 2\pi a/\omega^*$ gut beschreibt. Eine andere Begründung dafür bildet die Formel für das Zeit-Fenster:

$$[b + at^* - a\Delta_{\Psi}, b + at^* + a\Delta_{\Psi}]. \quad (4.1.17)$$

Satz 4.1.2 Die WT ist eine wohldefinierte und (bis auf einen Skalierungsfaktor) isometrische Abbildung von $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R}^2; da db/a^2)$; dabei bezeichne $da db/a^2$ das mit $1/a^2$ gewichtete Lebesgue-Maß.

BEWEIS: Es ist $\Psi((t-b)/a) \in L_2(\mathbb{R})$, so dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf (4.10) angewendet zeigt, dass

$$|(L_{\Psi}f)| \leq \frac{1}{\sqrt{|aC_{\Psi}|}} \|f\|_2 \left\| \Psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \right\|_2. \quad (4.1.18)$$

Also ist $L_{\Psi}f$ eine wohldefinierte Funktion in $L_{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Wir nehmen zunächst noch zusätzlich an, dass $f, g \in L_1 \cap L_2$. Dann liegen $L_{\Psi}f, L_{\Psi}g$ – als Funktionen von b betrachtet – nach dem Faltungssatz in $L_2(\mathbb{R})$. Aus der Parseval-Relation folgt dann über (4.13), dass

$$\int_{\mathbb{R}} (L_{\Psi}f)(a, b) \overline{(L_{\Psi}g)(a, b)} db = \frac{|a|}{2\pi |C_{\Psi}|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

gilt. Integration über a mit dem Maß da/a^2 ergibt dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (L_{\Psi}f)(a, b) \overline{(L_{\Psi}g)(a, b)} db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi C_{\Psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi C_{\Psi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a\omega|} |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 d(a\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi C_{\Psi}} (\hat{f}, \hat{g}) C_{\Psi} = \frac{1}{2\pi} (f, g). \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Anschließend approximieren wir beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ durch Folgen $\{f_n\}, \{g_n\}$ in $L_1 \cap L_2$ im L_2 -Sinn. Dann gilt nach dem eben Bewiesenen

$$\|L_{\Psi}f_n - L_{\Psi}f_m\|_{L_2(\mathbb{R}^2, da db/a^2)} \leq \|f_n - f_m\|_2,$$

so dass $L_{\Psi}f_n$ im $L_2(\mathbb{R}^2, da db/a^2)$ -Sinn gegen ein Element f^* konvergiert. Andererseits gilt aber nach (4.17) im $L_{\infty}(\mathbb{R}^2)$ -Sinn

$$\|L_{\Psi}f_n - L_{\Psi}f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{|aC_{\Psi}|}} \left\| \Psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \right\|_2 \|f_n - f\|_2,$$

so dass $f^* = L_{\Psi}f$ gelten muss. Analog gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\Psi}g_n = L_{\Psi}g$. Auf Grund der Stetigkeit des Skalarproduktes in $L_2(\mathbb{R}^2; da db/a^2)$ folgt dann (4.18) für beliebige $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. \square

Bemerkung: Aus obigem Beweis folgt auch die Relation

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, \Psi(a, b)) \overline{(g, \Psi(a, b))} \frac{da db}{a^2} = \frac{a}{2\pi} (f, g) C_{\Psi}.$$

Anhand dieser Formel sieht man dann, dass es notwendig ist die Bedingung (4.9) zu fordern. Ohne sie wäre die rechte Seite im Allgemeinen nicht endlich und die Aussage des Satzes falsch.

Satz 4.1.3 *Der zu L_{Ψ} adjungierte Operator ist durch die definierende Gleichung*

$$(h, L_{\Psi}^* g)_{L_2(\mathbb{R})} \equiv (L_{\Psi} h, g)_{L_2(\mathbb{R}^2; da db/a^2)}$$

für beliebige $h \in L_2(\mathbb{R})$ und $g \in L_2(\mathbb{R}^2; da db/a^2)$ gegeben. Ein solches Element $L_{\Psi}^* g$ existiert in $L_2(\mathbb{R})$ und ist gegeben durch die Zuordnung

$$\begin{aligned} L_2\left(\mathbb{R}^2; \frac{da db}{a^2}\right) &\rightarrow L_2(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (L_{\Psi}^* g)(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) g(a, b) db \frac{da}{a^2} \end{aligned} \quad (4.1. 20)$$

Dieser Operator invertiert die CWT L_{Ψ} in dem Sinne, dass

$$2\pi(L_{\Psi}^* L_{\Psi} f, h)_{L_2(\mathbb{R})} = (f, h)_{L_2(\mathbb{R})} \quad \forall h \in L_2(\mathbb{R}) \quad (4.1. 21)$$

für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt.

BEWEIS: Für die Funktionen g und h mit den obigen Eigenschaften gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} (L_{\Psi} h, g)_{L_2(\mathbb{R}^2; db da/a^2)} &\equiv \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (L_{\Psi} h)(a, b) \overline{g(a, b)} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|aC_{\Psi}|}} g(a, b) \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi\left(\frac{t-a}{b}\right)} h(t) dt db \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|aC_{\Psi}|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) g(a, b) db \frac{da}{a^2} dt. \end{aligned} \quad (4.1. 22)$$

Benutzt man nämlich den vorigen Satz (nach dem $(L_{\Psi} h)(a, b) \in L_2(\mathbb{R}^2; db da/a^2)$ gilt), so zeigt man mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass das Doppel-Integral in der ersten Zeile der Gleichungskette im absoluten Sinne existiert. Gilt aber (4.21) für jedes $h(t) \in L_2(\mathbb{R})$, so bedeutet dies nach dem Riesz'schen Darstellungssatz, dass das in (4.19) definierte Element $L_{\Psi}^* g$ in $L_2(\mathbb{R})$ liegen muss, so dass L_{Ψ}^* wohldefiniert ist. Aus der in Satz 4.1 bewiesenen Relation und der Definitions-Gleichung für L_{Ψ}^* folgt nun

$$(L_{\Psi}^* L_{\Psi} f, h)_{L_2(\mathbb{R})} = \overline{(h, L_{\Psi}^* L_{\Psi} f)_{L_2(\mathbb{R})}} = \overline{(L_{\Psi} h, L_{\Psi} f)_{L_2(\mathbb{R}^2; db da/a^2)}} = \frac{1}{2\pi} (f, h)_{L_2},$$

d. h. (4.20) gilt. □

Gleichung (4.20) liefert die Rekonstruktionsformel $2\pi L_{\Psi}^* L_{\Psi} = Id$ nur in einem schwachen Sinne, da man $2\pi L_{\Psi}^* L_{\Psi}$ zuerst mit $h \in L_2(\mathbb{R})$ multiplizieren und dann integrieren muss. Es ist aber eine anschaulichere Darstellung wie im Fall der Fouriertransformation möglich. Man ersetze dazu $L_{\Psi} f$ durch

$$(L_{\Psi} f) \chi_{\{a \in \mathbb{R}: \epsilon \leq |a| \leq N\}} \chi_{\{b \in \mathbb{R}: |b| \leq N\}}.$$

Dadurch werden L_2 -Funktionen $f_{\epsilon, N}$ erzeugt, für die

$$\begin{aligned} (L_{\Psi}^* ((L_{\Psi} f) \chi_{\{a \in \mathbb{R}: \epsilon \leq |a| \leq N\}} \chi_{\{b \in \mathbb{R}: |b| \leq N\}}))(t) &\equiv (L_{\Psi}^* f_{\epsilon, N})(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|aC_{\Psi}|}} \int_{\epsilon \leq |a| \leq N} \int_{|b| \leq N} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) (L_{\Psi} f)(a, b) \frac{da db}{a^2} \end{aligned} \quad (4.1. 23)$$

im üblichen Lebesgueschen Sinne definiert ist und die – weil sie wegen

$$\|L_{\Psi}^* f_{\epsilon_1, N_1}, L_{\Psi}^* f_{\epsilon_2, N_2}\|_2 \leq \|f_{\epsilon_1, N_1}, f_{\epsilon_2, N_2}\|_2$$

(für $\epsilon_i = \epsilon_i(N_i)$, $i = 1, 2$) eine Cauchyfolge bilden – für $\epsilon \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ im L_2 -Sinn gegen f konvergieren. In der Arbeit von Holschneider-Chamichian (1990) wird gezeigt, dass unter gewissen zusätzlichen Bedingungen an f auch punktweise Konvergenz in (4.22) gilt (s. Buch von Daubechies, Seite 28).

Eine weitere Beobachtung, die zeigt, dass man bei der Interpretation der Konvergenz in (4.22) vorsichtig sein muss, ist die Folgende:

Der Mittelwert eines Wavelets Ψ ist 0, also gilt dies (zumindest bei endlichem Integrationsbereich) auch für jede Integral-Superposition von Wavelets, d. h. für

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\epsilon \leq |a| \leq N} \int_{|b| \leq N} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(a, b) \frac{da db}{a^2} dt = 0.$$

Im gleichen approximationstheoretische Sinn gilt dies auch noch bei Anwendung von L_{Ψ}^* . Im Grenzfalle hingegen gilt dies nicht mehr, das Integral $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$ kann dann von 0 verschieden sein! Wie ist dies möglich? Die Erklärung liegt darin, dass die Konvergenz in (4.22) im L_2 -Sinn stattfindet. Würde die Konvergenz im L_1 -Sinn stattfinden, dann würde mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgen, dass auch im Grenzfalle der Mittelwert gleich 0 ist. Folglich haben wir es in diesem Beispiel mit L_2 -Konvergenz aber nicht unbedingt mit L_1 -Konvergenz zu tun. Ein einfacheres Beispiel für diesen Effekt ist $g_n(x) = \chi_{[-n, n]}(x)/(2n)$. Diese Funktionenfolge strebt punktweise gegen 0, es gilt $\|g_n\|_2 = 1/\sqrt{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; jedoch gilt stets $\|g_n\|_1 = 1$.

4.1.3 Mehr zur kontinuierlichen WT

Eine wichtige Verallgemeinerung der Umkehrformel (4.20) ergibt sich, wenn man L_{ϕ}^* mit einem anderen Wavelet ϕ bildet. Man kann nämlich in Verallgemeinerung von (4.20) für f, g zeigen, dass

$$((f, \Psi_{a,b}), (g, \phi_{a,b}))_{L_2(\mathbf{R}^2; da db/a^2)} = C_{\Psi, \phi}(f, g)_{L_2}. \quad (4.1. 24)$$

Abkürzend setzen wir hier $\sqrt{|C_{\Psi}|} L_{\Psi} f(a, b) = (f, \Psi_{a,b})$ mit

$$\Psi_{a,b}(t) := \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad C_{\phi, \Psi} := \int_{\mathbf{R}} \overline{\hat{\Psi}(u)} \hat{\phi}(u) \frac{du}{u} < \infty.$$

Um nun (4.1. 24) zu zeigen beachtet man, dass zunächst für glatte f, g, ϕ, Ψ nach (4.13) und dem Satz von Plancherel

$$\begin{aligned} \sqrt{\|C_{\phi} C_{\Psi}\|} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (L_{\Psi} f)(a, b) (L_{\phi} g)(a, b) db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \overline{\hat{\Psi}(a\omega)} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}(a\omega) \hat{g}(\omega) d\omega \frac{da}{|a|} \\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega \int_{\mathbf{R}} \overline{\hat{\Psi}(u)} \hat{\phi}(u) \frac{du}{|u|} \\ &= (f, g)_{L_2} \int_{\mathbf{R}} \overline{\hat{\Psi}(u)} \hat{\phi}(u) \frac{du}{|u|} \end{aligned}$$

(mit $a\omega = u$) folgt. Falls wir fordern, dass $C_{\Psi, \phi}$ endlich ist folgt damit (4.23) (zumindest für glatte f, g, ϕ und Ψ). Durch die gleichen Überlegungen wie in Satz 4.2 lässt sich die Identität dann auf beliebige $f, g \in L_2(\mathbf{R})$ sowie Ψ und ϕ , die (4.9) erfüllen, ausdehnen. Man kann (4.23) dann als allgemeine „Rekonstruktions-Formel“

$$f(t) = \frac{1}{C_{\phi \Psi}} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (f, \Psi_{a,b}) \phi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

interpretieren, die (4.20) verallgemeinert. Die obigen Bemerkungen über die Art der Konvergenz treffen auch hier zu. Das Bemerkenswerte an dieser Rekonstruktionsformel ist, daß sie viel mehr Möglichkeiten

als bisher zur Rekonstruktion bereitstellt, da ϕ und Ψ verschiedene Funktionen sein können. Erfüllen ϕ und Ψ beide (4.9), so sieht man mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass $C_{\Psi,\phi}$ endlich ist. Um dies zu erfüllen, können ϕ und Ψ aber allgemeiner gewählt werden. Bei der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) wird hiervon bei den biorthogonalen Wavelets Gebrauch gemacht. Das Verhalten der WT bezüglich des Parameters a kann auch zur Analyse der Regularität eines Signals benutzt werden, wie Holschneider-Chamichian in der oben zitierten Arbeit gezeigt haben. Anschaulich ist dies naheliegend: Der Parameter a kontrolliert ja, wie detailliert man eine bestimmte Stelle untersucht. Dies ist ein nützlicher Aspekt bei der Anwendung von Transformationen zur Analyse von Signalen. Auch hier ist die WT der WFT überlegen, letztere liefert schwächere Ergebnisse. Genauer gesagt gilt

Lemma 4.1.3 Sei $\Psi \in L_2$ mit $\hat{\Psi}(0) = 0$, das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|) |\Psi(x)| dx$$

sei endlich. Ist dann f eine beschränkte, Hölder-stetige Funktion, d. h. erfüllt f die Relation

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

mit einem Exponenten $0 < \alpha \leq 1$, so erfüllt die Wavelet-Transformation die Ungleichung

$$|(f, \Psi(a, b))| \leq C'|a|^\alpha \sqrt{|a|}$$

mit der Konstanten $C' = C \int |\Psi(u)| |u|^\alpha du$.

BEWEIS: Wegen $\int \Psi(x) dx = 0$ gilt

$$(f, \Psi_{a,b}) = \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) (f(x) - f(b)) dx$$

und daher

$$\begin{aligned} |(f, \Psi_{a,b})| &\leq C \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1/2} \left\| \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\| |x-b|^\alpha dx \\ &= C|a|^{\alpha+1/2} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(u)| |u|^\alpha du = C'|a|^\alpha \sqrt{|a|} \end{aligned}$$

□

In gewissen Fällen gilt sogar die Umkehrung:

Satz 4.1.4 Die Funktion $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ habe kompakten Träger. Ist dann $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine Funktion die

$$|(f, \Psi_{a,b})| \leq C|a|^{\alpha+1/2}$$

erfüllt, so ist f Hölder-stetig mit Exponent α .

Zum Beweis sei auf [Daubechies92], Seite 47 verwiesen. In gleiche Kategorie von Aussagen gehört auch die folgende über das Approximationsverhalten der WT für $|a|$ gegen 0.

Satz 4.1.5 Der Mittelwert (also formal das nullte Moment) sowie die ersten $M - 1$ Momente – mit Ausnahme des N -ten, $0 < N < M$ – von Ψ mögen verschwinden, d. h. es für $k < M$ gelte

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \Psi(x) dx = \begin{cases} \mu, & k = N, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist zusätzlich $\mu_M^* := \int_{\mathbb{R}} \|x^M \Psi(x)\|, dx$ endlich, so gilt für festes $r = 0, 1, \dots$ und $f \in W^{r+M,2}(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\left\| \text{sign}(a^N) \frac{C_\Psi}{|a|^{N+1/2}} (L_\Psi f)(a, b) - \frac{\mu}{N!} f^{(n)}(b) \right\|_r \leq C|a|^{M-N} \|f\|_{r+M,2}.$$

Dabei ist $C = \mu_M^* C' / M!$ und C' eine Konstante, die aus der Äquivalenz von Sobolevnormen (vgl. Satz 2.20) herrührt.

In Übereinstimmung mit der an Formel (4.15) anschließenden Diskussion werden also durch $L_\Psi f$ – bei einer gut um ihr Maximum ω_0 lokalisierten Funktion Ψ – Details der Größe $2\pi a/\omega_0$ beschrieben. Dieses Grenzverhalten ist genau jenes, welches bei der Approximation interessiert. Gleichzeitig entspricht es dem Verhalten, das wir bei Folgen von Faltungsintegralen vom Dirac-Typ in Abschnitt 2.1 studiert haben. Es kann also nicht verwundern, daß obige Aussagen über das Grenzverhalten bei $|a| \rightarrow 0$ große Ähnlichkeit mit den bereits dort gemachten aufweisen.

Zum Abschluß sei noch der Zusammenhang mit der *diskrete Wavelet-Transformation* erwähnt, die wir im nächsten Abschnitt ausführlich behandeln werden. Dort werden nur diskrete Werte von a, b im Integral (4.10) betrachtet. Speziell bildet man zu $f \in L_2(\mathbb{R})$ die *Wavelet-Koeffizienten*

$$(L_\Psi f)_{m,n} := a_0^{-m/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Psi(a_0^{-m} t - nb_0)} dt, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.1. 25)$$

wobei a_0, b_0 fest gewählte Parameter (typischerweise ist $a_0 = 2$ und $b_0 = 1$) sind. Die Umkehrtransformation wird dann durch Linearkombinationen von dilatierten Translaten der Funktion Ψ erreicht, analog zu dem Vorbild der Fourier-Reihen. (Die Bedingung (4.1. 9) wird dabei durch andere ersetzt, aber (4.1. 12) bleibt weiter notwendig). In diesen Rahmen paßt z.B. die Approximation mit den „verallgemeinerte“ Sinc-Funktionen $W(x)$ im vorigen Kapitel.

Es bestehen tiefliegende enge Zusammenhänge zwischen kontinuierlicher und diskreter Wavelet-Transformation über die Darstellungstheorie von Gruppen (s. Übersichtsartikel von C.E.Heil - D.F.Walnut 1989). In der abstrakten harmonischen Analysis sind analoge Zusammenhänge zwischen kontinuierlicher und diskreter Fourier-Transformation schon lange bekannt.

4.2 Multi-Resolution-Analysis (MRA)

4.2.1 Axiome einer MRA

Unter dem Namen *Multi-Resolution-Analysis*, bzw. *Multi-Skalen-Analyse* ist eine Reihe von Axiomen bekannt, die von S. Mallat in [Mallat89] aufgestellt wurden, um einen Rahmen für die Konstruktion von Wavelets im eigentlichen Sinne zu geben.

Definition 4.2.1 *Unter Multi-Resolution-Analysis (im Folgenden kurz MRA) des $L_2(\mathbf{R}^d)$ versteht man eine Folge $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ von abgeschlossenen linearen Unterräumen des $L_2(\mathbf{R}^m)$, die folgende Axiome erfüllen:*

(R1) V_0 ist ein translationsinvarianter Raum,

(R2) V_0 wird von einer Riesz-Basis erzeugt, d. h. es gilt

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}}$$

im Sinne des $L_2(\mathbf{R}^d)$ und die Translate $\text{span}\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ sind l_2 -stabil,

(R3) $V_j \subseteq V_{j+1}$,

(R4) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$,

(R5) $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ liegt dicht in $L_2(\mathbf{R}^d)$.

Bemerkung: S. Mallat betrachtete eine Folge $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ von solchen Unterräumen und forderte außerdem

$$(R6) \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

Im Hinblick auf die Approximations-Eigenschaft in (R5) ist dies jedoch überflüssig. Diese wird nämlich mit dem Grundraum V_0 und die immer größer werdenden Räume V_j erreicht. Eine Fortsetzung dieser Skala durch immer kleiner werdende Unterräume bringt daher nichts ein. Ferner fordert S. Mallat abweichend zu (R1), daß

$$(R1^*) \quad f(x) \in V_j \implies f(x - 2^{-j}l) \in V_j \quad \forall j, l \in \mathbf{Z}^d.$$

Diese Beziehung kann man aber aus (R4) in Verbindung mit $V_0 = S_2(\phi)$ ableiten.

Anschaulich wird (R4), wenn wir annehmen, daß ϕ kompakten Träger hat, z. B. $\text{supp } \phi = [-1, 1]$. Dann hat $\phi(2x)$ entsprechend den Träger $\text{supp } \phi(2x) = [-1/2, 1/2]$. Die Elemente von V_j lösen mit wachsenden j immer feinere Details auf, denn ihr Träger kann bis zu einem Faktor 2^{-j} kleiner werden.

(R1) und (R4) sind der Grund für die Bezeichnung **Multi-Resolution-Analysis** oder **Multi-Skalen-Analyse**. und bilden die Basis für die Konstruktion von „diskreten“ Wavelets.

In der Approximations-Theorie sind Skalen von Räumen, die die Axiome (R3) und (R5) erfüllen und ferner l_p -stabile Basen besitzen, schon seit langem bekannt und gut untersucht. Als Beispiele sind uns aus Kapitel 3 durch Spline-Räume mit sukzessiv verfeinerten Gittern oder aus Kapitel 2 durch Folgen von Räumen bandbegrenzter Funktionen bekannt. Zwei einfache, aber grundlegende Folgerungen aus den obigen Axiomen gibt

Lemma 4.2.1 a) Die Funktionen

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{dj/2} \phi(2^j x - k), \quad k \in \mathbf{Z}^d \quad (4.2.1)$$

bilden eine Riesz-Basis (mit gleichen Konstanten) für V_j .

b) Zu ϕ und $V_0 = S_2(\phi)$ gibt es eine Folge $\{h_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d} \in l_2(\mathbf{Z}^d)$ so daß für alle $x \in \mathbf{R}^d$

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} h_k \phi(2x - k) = \frac{1}{2^{d/2}} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} h_k \phi_{1,k}(x). \quad (4.2.2)$$

BEWEIS: Teil a) beweist man leicht induktiv in j . Ist $g \in V_{j+1}$, so gilt

$$g(x) = f(2x) = \sum a_k \phi_{j,k}(2x) = 2^{-m/2} \sum a_k \phi_{j+1,k}(x)$$

mit $f \in V_j$ und $\{a_k\} \in l_2(\mathbb{Z}^d)$, d.h die Translate $\phi_{j+1,k}$ bilden eine Basis für V_{j+1} . Axiom (R2) besagt nun, daß

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi_{0,k} \right\|_{2, \mathbb{R}^m}^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |a_k|^2 \quad (4.2. 3)$$

mit Konstanten $A, B > 0$ gilt. Die Substitution $2^j x = u$ zeigt dann

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi_{j,k} \right\|_{2, \mathbb{R}^d}^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi_{0,k} \right\|_{2, \mathbb{R}^d}^2$$

und damit folgt b).

Laut (R3) muß ϕ auch in V_1 liegen, das nach Teil a) aus l_2 -stabilen Translaten (bezüglich \mathbb{Z}^d) von $\phi(2x)$ besteht. Dies beweist b). □

Gleichung (4.2. 2) wird **Verfeinerungsgleichung** oder **Skalierungs-Gleichung** für ϕ genannt. Sie liefert eine Funktionalgleichung für $\phi(x)$, falls die Koeffizienten $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ vorgegeben sind. Dies ist auch der Weg, der später bei der Konstruktion von Wavelets verfolgt wird :

man startet mit gegebenen Koeffizienten $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, der sogenannten *Maske* und zeigt die Existenz einer Lösung ϕ der Verfeinerungsgleichung (4.2. 2). Dann kann man unter relativ schwachen Zusatzvoraussetzungen bereits eine MRA konstruieren, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.2.1 Sei $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in l_1(\mathbb{Z}^d)$ und sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L_2(\mathbb{R}^m)$ eine Funktion, die der Verfeinerungsgleichung (4.2. 2) zu dieser Koeffizientenfolge genügt. Außerdem gelte $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1$ und die Tranlate $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ seien eine Riesz-Basis. Dann bilden die Räume

$$V_j := \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}\}} \quad (4.2. 4)$$

eine MRA des $L_2(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere gilt

$$\hat{\phi}(2\pi\alpha) = \delta_{0,\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^d. \quad (4.2. 5)$$

BEWEIS: Offensichtlich erfüllt der Raum $V_0 := S_2(\phi)$ das Axiom (R1) und nach dem vorigen Lemma auch (R2). Aus (4.2. 2) und (4.2. 4) folgen ferner (R3) und (R4), es bleibt (R5) zu beweisen. Dazu zeigen wir zunächst (4.2. 5). Zu diesem Zweck betrachten wir die Fourier-Transformation von (4.2. 2), für die nach Lemma 2.4 gilt

$$\hat{\phi}(v) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h_k e^{-ikv/2} \right) \frac{1}{2^d} \hat{\phi}\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (4.2. 6)$$

Wir setzen nun

$$H(z) := \frac{1}{2^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h_k z^k; \quad (4.2. 7)$$

nach Voraussetzung ist $H(\exp(-iv))$ stetig. Nach k -maliger Anwendung von (4.2. 6) folgt dann

$$\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^k H\left(e^{2^{-j}iv}\right) \hat{\phi}(2^{-k}v). \quad (4.2. 8)$$

Wir können hierin $|H(1)| \geq 1$ annehmen, denn andernfalls würde entweder ein Widerspruch mit $|\hat{\phi}(0)| < |\hat{\phi}(0)|$ folgen oder es wäre $\hat{\phi}(0) = 0 = \int \phi(x) dx$, was der Voraussetzung widersprechen würde. Nun sei $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha \neq 0$ vorgegeben. Man wählt dann in (4.2. 8) $v = 2\pi\alpha \cdot 2^k$ und erhält dann wegen $\exp(-2^{-j}iv) = 1$, daß

$$\left| \hat{\phi}(2\pi\alpha \cdot 2^k) \right| = |H(1)|^k |\hat{\phi}(2\pi\alpha)|.$$

Dies impliziert aber $|\hat{\phi}(2\pi\alpha)| \leq \left| \hat{\phi}(2\pi\alpha \cdot 2^k) \right|$ für alle $k = 1, 2, \dots$, woraus wegen $\phi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $|\hat{\phi}(2\pi\alpha)| = 0$ folgen muß. Mit Hilfe von (4.2. 5) zeigen wir nun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(f; S_2^h(\phi)) = 0 \quad (4.2. 9)$$

für die in (3.3) definierten Räume $S_2^h(\phi)$ woraus für $h = 2^{-j}$, $j \rightarrow \infty$, das MRA-Axiom (R5) folgt. Dazu approximieren wir f zunächst durch bandbegrenzte Funktionen g_N mit $\text{supp } \hat{g}_N \subseteq N \cdot [-\pi, \pi]^d$. Nach der Fehlerformel (2.3. 7) von Satz 2.3.2 gilt, wenn wir g_N als beste Approximation aus dieser Klasse wählen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - g_N\|_{2, \mathbb{R}^d} = 0. \quad (4.2. 10)$$

Anschließend berechnen wir für $h > 0$ mit Hilfe der Parseval-Formel aus Satz 2.6

$$\begin{aligned} \text{dist}(g_N; S_2^h(\phi))_{2, \mathbb{R}^d}^2 &= \inf_{\{a_k\} \in l_2(\mathbb{R}^d)} \left\| g_N(x) - \sum_k a_k \phi\left(\frac{x}{h} - k\right) \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \inf_{\{a_k\} \in l_2(\mathbb{R}^d)} \left\| \hat{g}_N(u) - h^d \sum_k a_k e^{-iku} \hat{\phi}(uh) \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \inf_{\tau \in L_2(\mathbb{T}^d)} \left\| \frac{1}{h^d} \hat{g}_N\left(\frac{v}{h}\right) - \tau(v) \hat{\phi}(v) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

Hierauf können wir Formel (3.1. 22) der Orthogonalprojektion auf $S_2(\phi)$ anwenden und wegen $\text{supp } \hat{g}_N(v/h) \subseteq Nh[-\pi, \pi]^d \subseteq [-\pi, \pi]^d$ für genügend große h (nämlich $h \leq 1/N$) kann auch die vereinfachte Fehlerformel (3.1. 24) aus Bemerkung 3.1.8 angewendet werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \text{dist}(g_N; S_2^h(\phi))_{2, \mathbb{R}^d} &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}_N(v)|^2 \left(1 - \frac{|\hat{\phi}(v)|^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)} \right) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{|v| \leq N\pi h} \left| \hat{g}_N\left(\frac{v}{h}\right) \right|^2 \tau^*(v) dv \end{aligned}$$

wobei

$$\tau^*(v) := 1 - \frac{|\hat{\phi}(v)|^2}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)}.$$

Die Funktion $\tau^*(v)$ ist auf Grund des Kriteriums von Meyer in Satz 3.1.2 stetig. Sie hat nach Definition von $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$ wegen (4.2. 5) an der Stelle $v = 0$ einen Nulldurchgang. Daher folgt

$$\text{dist}(g_N, S_2^h(\phi))_{2, \mathbb{R}^d} \leq \frac{\epsilon}{(2\pi h)^d} \int_{|v| \leq Nh\pi} \left| \hat{g}_N\left(\frac{v}{h}\right) \right|^2 = \frac{\epsilon}{(2\pi)^d} \|\hat{g}_N\|_2^2$$

sofern $Nh\pi$ genügend klein ist. Wählen wir vorher N genügend groß, so folgt zusammen mit (4.2. 10) die gewünschte Eigenschaft (4.2. 9). \square

Bemerkung 4.2.1 Bedingung (4.2. 5) erlaubt eine direkte Interpretation als Approximationsaussage. Sie ist äquivalent dazu, daß die Translate von ϕ eine Zerlegung der Eins bilden, d.h. es gilt

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \phi(x - \alpha) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]^d. \quad (4.2. 11)$$

Zu $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ wie in Satz 4.2.1 definiere nämlich

$$\phi^*(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \phi(x - \alpha).$$

Dann konvergiert diese Reihe im L_1 -Sinn und ϕ^* liegt ebenfalls in $L_1(\mathbb{R}^d)$. Damit folgt

$$\hat{\phi}(2\pi\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) e^{-2\pi i \alpha x} dx = \int_{[0, 1]^d} \phi^*(x) e^{-2\pi i \alpha x} dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \phi^*\left(\frac{x}{2\pi}\right) e^{-i \alpha x} dx$$

Bedingung (4.2. 5) ist daher äquivalent dazu, daß die 2π -periodische Funktion $\phi^*(x/2\pi)$ gleich 1 sein muß, Aufgrund der Periodizität gilt dies fast überall in \mathbb{R}^m .

Bemerkung 4.2.2 Mit Hilfe der Zerlegung der Eins durch die Translate von ϕ kann man – allerdings mit größerem technischem Aufwand – zeigen, daß $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ dicht auch in $L_p(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 \leq p < \infty$ liegt, siehe dazu [JM91].

Bemerkung 4.2.3 Unter zusätzlichen Differenzierbarkeits-Annahmen an $\hat{\phi}(x)$ kann man über (4.2. 5) hinaus zeigen (siehe [Cava91]), daß

$$D^\beta \hat{\phi}(2\pi\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad |\beta| \leq r \quad (4.2. 12)$$

gilt, wobei D^β ein beliebiger Differentialoperator der Form

$$D^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\beta_d}$$

ist. Damit kann die Strang-Fix-Theorie aus Abschnitt 3.3 angewendet werden, um eine Approximations-Ordnung $\mathcal{O}(h^r)$ von S_2^h zu erreichen.

Es mag überraschen, daß die Approximations-Eigenschaft (R5) für die $V_j = S_2^h$, $h = 2^{-j}$ bereits unter diesen geringen Zusatzannahmen an ϕ aus der Verfeinerungsgleichung (4.2. 2) folgt. Dazu sei aus [Donoghue69] zitiert:

Satz 4.2.2 (Wiener) Sei $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $S_0(\phi)$ die Menge aller Linearkombinationen von beliebigen Translaten von ϕ . Dann liegt $S_0(\phi)$ genau dann dicht in $L_1(\mathbb{R}^d)$, wenn $\hat{\phi}(v) \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$ gilt. Ist $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, so liegt der Raum $S_0(\phi)$ genau dann dicht in $L_2(\mathbb{R}^d)$, wenn $\hat{\phi}(v)$ höchstens auf einer Nullmenge des \mathbb{R}^d verschwindet.

Vergleicht man dies mit dem obigen Satz 4.5, so haben wir gerade die Auswahl von Translaten aus $2^{-j}\mathbb{Z}^d$, $j = 0, 1, \dots$ getroffen, also eine dichte Teilmenge der Menge aller Translaten ausgewählt.

4.2.2 Beziehung zwischen MRA und Wavelets

Eine MRA besteht aus einer aufsteigenden Folge von translationsinvarianten Räumen $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$. In jedem dieser Räume existiert eine ONB von Translaten $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, deren Abschluss V_j aufspannt. Die zu den Wavelets führende Idee besteht nun darin, die Schachtelung der Räume V_j (die den verschiedenen Stufen der Dilatationsskala $\{2^{-j}\}_{j=0}^{\infty}$ entsprechen) zur effektiveren Konstruktion einer ONB für den gesamten Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$ zu benutzen. Statt in jedem Raum von neuem eine eigene ONB zu konstruieren

kann man – so die Idee – die bereits bestimmte Basis von V_j zu einer Basis von V_{j+1} *ergänzen*. Diese Idee wird mathematisch präzisiert in

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.2. 13)$$

wobei W_j das orthogonale Komplement in V_{j+1} von V_j ist. Man kann dies sukzessive fortführen und erhält

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^j W_i \right)$$

und mit Axiom (R5)

$$L_2(\mathbb{R}^m) = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right) \quad (4.2. 14)$$

Für jeden Raum W_j gilt nach (R4)

$$f \in W_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in W_0, \quad (4.2. 15)$$

denn ist $f(x) = g(x) + h(x)$ für $f \in V_{j+1}$ zu finden, so sei $f_1(x) := f(2^{-j}x) \in V_1$ und $f_1(x) = g_0(x) + h_0(x)$ wegen $V_1 = V_0 + W_0$. Dann folgt $f(x) = f_1(2^j x) = g_0(2^j x) + h_0(2^j x)$, so daß wegen $g_0(2^j x) \in V_j$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung $h(x) = h_0(2^j x)$ folgt.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall einer Variablen ($d = 1$). Ziel ist es dann, für W_0 eine analoge Darstellung wie für V_0 zu gewinnen, d.h. eine erzeugende Funktion $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$W_0 = \overline{\text{span}\{\psi(\cdot - l)\}_{l=-\infty}^{\infty}} \quad (4.2. 16)$$

derart, daß die Translate von $\psi(x)$ eine Riesz-Basis bilden. Dies lässt sich unter bestimmten Bedingungen –die im nächsten Abschnitt noch ausführlich untersucht werden –zeigen. Nach (4.2. 15) gilt dann sofort allgemeiner

$$W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,l}\}_{l=-\infty}^{\infty}} \quad \psi_{j,l}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - l)$$

und die obige Zerlegung des $L_2(\mathbb{R})$ impliziert

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j,l}(f)\psi_{j,l}(x) \quad (4.2. 17)$$

mit gewissen Koeffizienten $a_{j,l}(f)$. Aus der Forderung $W_j \perp V_j$ in (4.2. 13) folgt ferner $W_j \perp W_{j+1}$, d. h. die W_j sind zueinander orthogonal. Falls nun noch die Translate $\{\psi(x - l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ eine ONB bilden würden, d. h. es würde dann allgemeiner gelten

$$(\psi_{j,l}, \psi_{j',l'}) = \delta_{j,j'}\delta_{l,l'}, \quad (4.2. 18)$$

so hätte man ein vollständiges Orthonormalsystem für $L_2(\mathbb{R})$ konstruiert und könnte die $a_{j,l}(f)$ als "Fourierkoeffizienten "

$$a_{j,l}(f) = (f, \psi_{j,l}) \quad (4.2. 19)$$

dieser ONB ansehen.

Stattdessen spricht man von den *Wavelet-Koeffizienten* der Funktion f und bezeichnet die Abbildung, die f seine Wavelet-Koeffizienten zuordnet, als *diskrete Wavelet-Transformation (DWT)*. Sie ist ein Spezialfall der Abbildung (4.1. 25), die in Abschnitt 4.1.2 als Analogon zur CWT eingeführt wurde. Um dies noch besser heraus zu arbeiten, kann man die Skala $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ zu $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ erweitern, die Axiome (R1)-(R5) beibehalten und das oben erwähnte Axiom (R6) hinzufügen. Fordern wir dann(4.2.

13) für alle $j \in \mathbb{Z}$, so können wir (4.2. 14) als $L_2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$ schreiben und in (4.2. 17) die Summe über alle $j \in \mathbb{Z}$ erstrecken.

Der Vergleich von (4.2. 19) mit (4.1. 25) bzw. von (4.2. 17) mit (4.1. 10) zeigt dann, daß die Parameter b der Translation und a der Dilatation nun statt ganz \mathbb{R} nur noch diskrete Teilmengen durchlaufen, und zwar nimmt

- a alle Werte aus $\{2^j | j \in \mathbb{Z}\}$ und
- b alle Werte aus $\{2^j l | j, l \in \mathbb{Z}\}$

an. Formel (4.2. 19) entspricht also einer Zerlegung in *Wavelet-Koeffizienten* analog zur klassischen Zerlegung in Fourierkoeffizienten, (4.2. 17) bildet eine Rekonstruktionsformel analog zur klassischen Fourierreihe. In diesem Sinne wird also die Sprechweise "Wavelets" bzw. "diskrete Wavelet-Transformation" klar.

Bemerkung 4.2.4 *Zerlegungen in orthogonale Unterräume kennt man auch in der klassischen Spektralanalyse in Hilbert-Räumen. Hier ist jedoch das entscheidende Kriterium, daß die einzelnen Unterräume durch äußerst einfache Operationen auseinander entstehen und dies zu effizienten Algorithmen zur Approximation von Funktionen führt.*

Um diesen Punkt noch etwas zu illustrieren, betrachten wir die Orthogonalprojektionen $P_j : L_2(\mathbb{R}^m) \rightarrow V_j, f \mapsto P_j f$ und $Q_j : L_2(\mathbb{R}^m) \rightarrow W_j : f \mapsto Q_j f$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in (4.2. 13) kann man

$$P_{j+1}f = P_j f + Q_j f$$

schreiben. Um die Approximation in V_{j+1} zu erhalten, muss man $P_{j+1}f$ nicht vollständig neu berechnen. Vielmehr reicht es, die gegenüber $P_j f$ neu hinzukommenden Informationen (also $Q_j f$) zu bestimmen und diese zu P_j hinzuzufügen. Dies verringert den Aufwand deutlich, denn die Berechnung von $P_{j+1}f$ würde in V_{j+1} stattfinden, die von Q_j kann auf dem Unterraum W_j durchgeführt werden. Führt man dieses Prinzip nun weiter, so erhält man offensichtlich

$$P_{j+1}f = P_0 f + \sum_{i=0}^j Q_i f. \quad (4.2. 20)$$

Die in (4.2. 14) geforderte Orthogonalität liefert außerdem noch nach Satz 1.3 der Einleitung

$$(f - P_{j+1}f, f - P_{j+1}f) = (f, f) - (P_j f, f) - (Q_j f, f) = \|f\|^2 - \|P_j f\|^2 - \|Q_j f\|^2$$

und daher für den Fehler in der L_2 -Norm die Zerlegung

$$\|f - P_{j+1}f\|^2 = \|f - P_0 f\|^2 - \sum_{i=0}^j \|Q_i f\|^2.$$

Wegen der Orthogonalität in (4.2. 20) kann man dann den Fehler durch die Fourier-Koeffizienten in (4.2. 19) angeben :

$$\|f - P_{j+1}f\|^2 = \|f - P_0 f\|^2 - \sum_{i=0}^j |(f, \psi(2^i x - l))|^2 \quad (4.2. 21)$$

Anschaulich bedeutet dies folgendes:

- Man startet mit einer groben Approximation $P_0 f$. P_0 stellt dabei in aller Regel einen Tiefpassfilter dar, d. h. es werden nur die großen Strukturen erfasst.
- Dann fügt man höhere Frequenzanteile hinzu, d. h. verbessert die Approximation durch feinere Details.

- Im Grenzfall hat man es also mit einer Zerlegung des gesamten Frequenzspektrums in verschiedene Bänder zu tun. Mit anderen Worten: man betrachtet immer feiner werdende Strukturen des Signals.

Besonders durchsichtig werden die Begriffsbildungen der MRA bei der Zerlegung von bandbegrenzten Funktionen einer Variablen in Wavelets. Dies kann direkt (ohne die Verwendung der noch zu entwickelnden allgemeinen Theorie) geschehen. Wir betrachten dazu

$$\phi(x) = \text{sinc } \pi x \quad ; \quad \hat{\phi}(v) = \chi_W(v) \quad , \quad W = [-\pi, \pi] \tag{4.2. 22}$$

Das Shannon-Abtasttheorem (Satz 2.14) liefert mit $\omega = \sigma/\pi > 0$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k/\omega) \text{sinc } \pi(\omega x - k), \quad f \in B_\sigma,$$

wobei $B_\sigma := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : |\hat{f}(v)| = 0, |v| \in \sigma\}$. Speziell gilt also für $\omega = 2^n$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k2^{-n}) \text{sinc } \pi(2^n x - k).$$

Betrachtet man für dieses ϕ die MRA mit den Räumen

$$V_n = \overline{\text{span}\{\phi(2^n x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}},$$

so folgt $V_n = B_{\pi 2^n}$, speziell

$$V_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f}(v) \subseteq [-\pi, \pi]\}, \quad V_1 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f}(v) \subseteq [-2\pi, 2\pi]\}$$

Der Satz von Plancherel zeigt dann sofort, daß

$$W_0 = \{g \in L_2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{g}(v) \subseteq [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]\}. \tag{4.2. 23}$$

Es ist also W_0 die Vereinigung der beiden Frequenzbänder, die $[-\pi, \pi]$ zu $[-2\pi, 2\pi]$ ergänzen. Für beliebige j umfasst W_j die Funktionen mit Frequenzbereich in $[-\pi 2^{j+1}, -\pi 2^j] \cup [\pi 2^j, \pi 2^{j+1}]$. Diese Zerlegung in Frequenzbänder motiviert anschaulich die Terminologie "Multiresolution". Die Fourier -Transformation des erzeugenden Wavelets $\psi(x)$ für W_0 in (4.2. 16) lautet dann

$$\hat{\psi}(v) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\chi_{[-2\pi, 2\pi]}(x) - \chi_{[-\pi, \pi]}(x)]. \tag{4.2. 24}$$

Man kann mittels des Kriteriums von Lemma 3.1.3 leicht zeigen, daß seine ganzzahligen Translate wie bei einer Wavelet-Basis verlangt eine ONB bilden.

Ein anderes klassisches Beispiel liefert die Wahl

$$V_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f(x)|_{[i, i+1]} = \text{konstant}, \quad i \in \mathbb{Z}\}, \tag{4.2. 25}$$

d.h. der Raum aller stückweise konstanten Funktionen mit ganzzahligen Sprungstellen. Als Erzeugende kann man $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ nehmen. Die Räume V_n ergeben sich dann als

$$V_n = \overline{\text{span}\{\chi_{[k/2, (k+1)/2]}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \tag{4.2. 26}$$

d.h. sie bestehen aus Funktionen gleichen Typs, jedoch mit der Gitterweite 2^{-k} . Man kann sich leicht überlegen (vergleiche mit(4.44)), daß

$$H(x) := \chi_{[0, 1/2]}(x) - \chi_{[1/2, 1]}(x) \tag{4.2. 27}$$

senkrecht zu allen ganzzahligen Translate von $\chi_{[0,1]}(x)$ steht und daß alle ganzzahligen Translate von $H(x)$ orthogonal zueinander sind. Ferner sieht man, daß V_0 zu V_1 komplementiert wird durch den Raum aller Translate von $H(x)$.

Damit sind wieder die Voraussetzungen für eine Wavelet-Basis erfüllt. Das entstehende Orthogonalsystem $\text{span}\{H(2^j x - k)\}_{k, j \in \mathbb{Z}}$ ist bereits 1910 von A.Haar konstruiert worden. Die Funktion $H(x)$ wurde in (4.12) schon als (kontinuierliches) Wavelet angegeben und ist wie in der Einleitung erwähnt das älteste Beispiel eines Wavelets. Als seine Verallgemeinerungen sind diejenigen Wavelets bzw. Prewavelets anzusehen, die aus der Wahl von Splineräumen für V_0 resultieren.

4.2.3 Charakterisierung von Wavelets

Unter der Annahme, daß die Translate von $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ eine ONB für V_0 bilden und daß ϕ die Lösung der Verfeinerungs- bzw. Skalierungsgleichung von Lemma 4.4 ist, suchen wir nun nach Kriterien für die Existenz und Charakterisierung eines Wavelets ψ . Dazu verwenden wir eine solche Skalierungs-Gleichung auch für ϕ . Wir setzen nach Axiom (R4) an:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k), \quad \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z}). \quad (4.2. 28)$$

Analog zum Symbol $H(z)$ in (4.2. 6) definieren wir dann

$$G(z) := \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^k. \quad (4.2. 29)$$

Die Aufgabe ist nun, die definierenden Eigenschaften von ψ durch das Symbol $G(z)$ zu charakterisieren, d. h. die Eigenschaften $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $W_0 \perp V_0$ wobei die Translate von ψ eine ONB für W_0 bilden sollen. Zunächst geben wir ein notwendiges Kriterium dafür an, daß die Translate von ϕ eine ONB bilden.

Lemma 4.2.2 *Bilden die Translate von ϕ eine ONB für $V_0 = S_2(\phi)$, so gilt notwendig*

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \quad z = e^{-iv} \quad (4.2. 30)$$

für das Symbol $H(z)$ in (4.2. 6). Ferner gilt unter der Annahme $\hat{\phi}(0) \neq 0$

$$H(1) = 1 \quad (4.2. 31)$$

BEWEIS: Unter Benutzung der Fourier-Transformation (4.2. 6) der Verfeinerungs-Gleichung mit $2v$ statt v rechnet man leicht nach

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2v + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H(e^{-i(v+k\pi)}) \hat{\phi}(v + k\pi) \right|^2 \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \left| H(e^{-i(v+k\pi)}) \hat{\phi}(v + k\pi) \right|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \left| H(e^{-i(v+k\pi)}) \hat{\phi}(v + k\pi) \right|^2 \\ &= |H(e^{-iv})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(v + 2\pi j)|^2 + |H(-e^{-iv})|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(v + \pi + 2\pi j)|^2 \\ &= |H(e^{-iv})|^2 + |H(-e^{-iv})|^2. \end{aligned}$$

Nach Kriterium (3.1. 14) von Lemma 3.1.3 gilt für eine ONB von Translaten

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2v + 2k\pi)|^2 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$$

und es folgt (4.2. 30). Einsetzen von $v = 0$ ergibt direkt (4.2. 31). □

Bemerkung 4.2.5 *Aussage (4.2. 30) ist keineswegs hinreichend für eine ONB; es gibt Gegenbeispiele. Nach [Daubechies92] (Seite 177) wähle*

$$H(x) := \frac{1}{2}(1 + z^3) = \frac{1}{2}(1 + e^{-3iv/2}) = e^{-3iv/2} \cos\left(\frac{3v}{2}\right)$$

Aus dem Beweis von Satz 4.2.1 folgt

$$\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^k H(e^{-2^{-j}iv}) \hat{\phi}(2^{-k}v).$$

Nun benutzen wir die Formel

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j}x) = \lim_{J \rightarrow 0} \prod_{j=1}^J \frac{\sin 2^{-j+1}x}{2 \sin 2^{-j}x} = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^J \sin 2^{-J}x} = \operatorname{sinc} x,$$

mit der

$$\hat{\phi}(v) = e^{-3iv/2} \operatorname{sinc} \frac{3v}{2}$$

folgt. Man sieht jedoch, daß dann (für $v \neq 2\pi j$)

$$\sum_l \left| \hat{\phi}(v + 2\pi l) \right|^2 = \frac{4}{9} \sin^2 \frac{3v}{2} \sum_l \frac{1}{|v + 2\pi l|^2}$$

Für $v = 2\pi/3$ wird dieser Ausdruck jedoch null, so daß nach Satz 3.2 die Translate von ϕ keine Riesz-Basis bilden.

Bemerkung 4.2.6 *Hinreichende und notwendige Bedingungen an $H(z)$ für eine ONB sind im Vergleich zu denen von Lemma 4.5 kompliziert, wie wir noch sehen werden. Wichtige Arbeiten dazu sind [Lawton91] und [Cohen90].*

Als nächstes drücken wir die Orthogonalität $\psi \perp V_0$ mittels der Symbole $G(z)$ und $H(z)$ aus.

Lemma 4.2.3 *Die Translate von ϕ seien eine ONB für V_0 . Genau dann gilt $\psi \perp V_0$, wenn*

$$H(z)\overline{G(z)} + H(-z)\overline{G(-z)} = 0, \quad z = e^{-iv}. \quad (4.2.32)$$

BEWEIS: Kriterium (3.1.13) aus Lemma 3.1.3 zeigt, daß $\psi \perp \operatorname{span}\{\phi(\cdot - \alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ äquivalent zu $[\hat{\psi}, \hat{\phi}](v) = 0$ ist. Wir berechnen also unter Verwendung der Fourier-Transformation der Skalierungsgleichungen für ϕ und ψ

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}, \hat{\psi}](v) &= \sum_k \hat{\phi}(v + 2\pi k) \overline{\hat{\psi}(v + 2\pi k)} = \sum_k H(e^{-iv/2 - \pi k}) \overline{G(e^{-iv/2 - \pi k})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{v}{2} + \pi k\right) \right|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k} \text{ ungerade}} H(e^{-iv/2 - \pi k}) \overline{G(e^{-iv/2 - \pi k})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{v}{2} + \pi k\right) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k} \text{ gerade}} H(e^{-iv/2 - \pi k}) \overline{G(e^{-iv/2 - \pi k})} \left| \hat{\phi}\left(\frac{v}{2} + \pi k\right) \right|^2 \\ &= H(e^{-iv/2}) \overline{G(e^{-iv/2})} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{v}{2}\right) + H(-e^{-iv/2}) \overline{G(-e^{-iv/2})} [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{v}{2} + \pi\right) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1.3 gilt $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) = 1$ weil die Translate eine ONB bilden. Damit folgt

$$[\hat{\phi}, \hat{\psi}](v) = H(e^{-iv/2}) \overline{G(e^{-iv/2})} + H(-e^{-iv/2}) \overline{G(-e^{-iv/2})}$$

und die Aussage des Lemmas folgt aus dem bereits erwähnten Kriterium. \square

Bemerkung 4.2.7 *Ohne die Voraussetzung der Orthogonalität der Translate von ϕ , d.h. sie bilden nur eine Riesz-Basis, wird die Orthogonalität von ψ zu V_0 durch eine allgemeinere Relation beschrieben. Aus dem Beweis des obigen Lemmas folgt nämlich mit*

$$\tilde{H}(v) := H(e^{-iv}) \cdot [\hat{\phi}, \hat{\phi}](v)$$

$$\psi \perp V_0 \iff \tilde{H}(v) \overline{G(e^{-iv})} + \tilde{H}(v + \pi) \overline{G(e^{-i(v+\pi)})} = 0$$

Damit ist im Prinzip eine algebraische Beschreibung von Pre-Wavelets, d.h. von Räumen $W_0 \subseteq V_1$, die orthogonal zu V_0 sind, gegeben. Im nächsten Abschnitt wird dies genauer untersucht und auch die Eigenschaft einer Riesz-Basis mit einbezogen. Zunächst aber wird mit Hilfe des Symbols $G(z)$ für Wavelets im eigentlichen Sinne folgender Satz angegeben, der das Kriterium von Lemma 4.2.3 erweitert.

Satz 4.2.3 (Charakterisierungssatz für Wavelets) *Die Funktion ϕ erfülle die Bedingungen von Satz 4.2.1, erzeuge also eine MRA, und die Translate von ϕ seien eine ONB. Ferner sei $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ sei Lösung einer Skalierungsgleichung mit Symbol $G(z)$.*

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. ψ ist ein Wavelet.
2. Die Matrix

$$M_{H,G}(z) := \begin{pmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{pmatrix}, \quad z = e^{-iv}$$

ist für alle v unitär.

3. Es gelten

$$\begin{aligned} H(z)\overline{H(z)} + H(-z)\overline{H(-z)} &= 1, \\ G(z)\overline{G(z)} + G(-z)\overline{G(-z)} &= 1, \\ H(z)\overline{G(z)} + H(-z)\overline{G(-z)} &= 0, \\ G(z)\overline{H(z)} + G(-z)\overline{H(-z)} &= 0 \end{aligned}$$

4. Es gelten

$$\begin{aligned} H(z)\overline{H(z)} + G(z)\overline{G(z)} &= 1, \\ H(z)\overline{H(-z)} + G(z)\overline{G(-z)} &= 0. \end{aligned}$$

BEWEIS: Die Äquivalenz der Aussagen 2. und 3. folgt einfach dadurch, daß sich die vier Identitäten von Aussage 3. zusammengefaßt als

$$M_{H,G}^T(z) \cdot M_{H,G}(z) = Id$$

schreiben lassen. Zum Beweis der Äquivalenz mit 4. führt man die Vektoren

$\vec{G} = (G_1, G_2)^T := (G(z), G(-z))$ und $\vec{H} = (H_1, H_2)^T := (H(z), H(-z))$ ein. Dann ist Aussage 2.

äquivalent zu $\|\vec{G}\| = \|\vec{H}\| = 1$ und $(\vec{G}, \vec{H}) = 0$, d.h. zur Orthonormiertheit der Spaltenvektoren der

Matrix $M_{H,G}$. Äquivalent dazu bedeuten die Gleichungen in 4. die Orthonormiertheit der Zeilenvektoren, wobei zu beachten ist, daß von den vier entsprechenden Gleichungen zwei redundant sind, da die zweite Zeile von $M_{H,G}$ aus der ersten durch Übergang von z zu $-z$ entsteht.

Um die Äquivalenz mit Aussage 1. zu beweisen, beachte zunächst, daß wegen der vorausgesetzten Orthonormalität der Translate von ϕ die erste Gleichung in Aussage 3. a priori nach Lemma 4.5 gilt.

Dann kann man die aus (4.2. 28) folgende Identität $\hat{\psi}(v) = G(e^{iv})\hat{\phi}(v/2)$ benutzen, um mit dem gleichen Beweis wie in Lemma 4.5 zu zeigen, daß die Orthonormalität der Translate von ψ äquivalent zu

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(2v + 2k\pi) \right|^2 = |G(e^{iv})|^2 + |G(e^{-iv})|^2$$

ist, d.h. nach Lemma 3.1.3 äquivalent zur zweiten Gleichung von Aussage 3.

Nach Lemma 4.6 ist ferner die dritte Gleichung in Aussage 3. äquivalent zur Orthogonalität der Translate von ψ zu V_0 , während die vierte Gleichung durch Konjugation aus dieser entsteht.

Es bleibt noch $V_1 = V_0 \oplus W_0$ zu zeigen, damit ψ alle gewünschten Eigenschaften eines Wavelets besitzt. Dazu beachten wir, daß jede Funktion $f \in V_1$ gemäß Axiom (R4) als

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(2x - k), \quad \{a_k\} \in l_2(\mathbb{Z}) \quad (4.2. 33)$$

geschrieben werden kann. Es sei dann $g \in V_0 \oplus W_0$ die beste Approximation zu f . Nach Satz 1.3 der Einleitung gilt für den Fehler

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_l |(f, \phi(\cdot - l))|^2 - \sum_l |(f, \psi(\cdot - l))|^2,$$

wobei wir benützt haben, daß die Translate von ϕ und ψ bereits eine ONB bilden. Wendet man die mittlere Formel von Lemma 3.4 von Unterabschnitt 3.1.2 auf die gemäß (3.1. 11) definierten Folgen $\{c(f, f)(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$, $\{c(f, \phi)(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ und $\{c(f, \psi)(l)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ mit den entsprechenden Funktionen in (3.1. 12) an, so lassen sich diese drei Terme ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \left\| [\hat{f}, \hat{f}] \right\|_{2, [0, 2\pi]}^2 \\ \sum_l |(f, \phi(\cdot - l))|^2 &= \left\| [\hat{f}, \hat{\phi}] \right\|_{2, [0, 2\pi]}^2 \\ \sum_l |(f, \psi(\cdot - l))|^2 &= \left\| [\hat{f}, \hat{\psi}] \right\|_{2, [0, 2\pi]}^2 \end{aligned}$$

Dies in den Ausdruck für den Fehler $\|f - g\|_2^2$ eingesetzt ergibt

$$\|f - g\|_2^2 = \left\| [\hat{f}, \hat{f}] - [\hat{f}, \hat{\phi}] - [\hat{f}, \hat{\psi}] \right\|_{2, [0, 2\pi]}^2. \quad (4.2. 34)$$

Nun gilt auf Grund von (4.2. 33)

$$\hat{f}(v) = A(e^{-iv/2}) \hat{\phi}(v/2), \quad A(z) := \frac{1}{2} \sum_k a_k z^k$$

Damit kann man $[\hat{f}, \hat{f}](v)$ wie im Beweis von Lemma 4.2.2 weiter umformen zu

$$[\hat{f}, \hat{f}](2v) = |A(z)|^2 + |A(-z)|^2, \quad z := e^{-iv}. \quad (4.2. 35)$$

In gleicher Weise folgen

$$\begin{aligned} [\hat{f}, \hat{\phi}](2v) &= A(z) \overline{H(z)} + A(-z) \overline{H(-z)} \\ [\hat{f}, \hat{\psi}](2v) &= A(z) \overline{G(z)} + A(-z) \overline{G(-z)} \end{aligned}$$

Multipliziert man hier nun die erste Gleichung mit $H(z)$, die zweite mit $G(z)$ und addiert sie, so liefert Aussage 4 durch seine dritte Gleichung

$$A(z) = [\hat{f}, \hat{\phi}](2v)H(z) + [\hat{f}, \hat{\psi}](2v)G(z).$$

Analog erhält man

$$A(-z) = [\hat{f}, \hat{\phi}](2v)H(-z) + [\hat{f}, \hat{\psi}](2v)G(-z)$$

und weiter mit den Gleichungen von Aussage 3 folgt

$$|A(z)|^2 + |A(-z)|^2 = |[\hat{f}, \hat{\phi}](2v)|^2 + |[\hat{f}, \hat{\psi}](2v)|^2.$$

Dies setzen wir in (4.2. 35) ein und das erhaltene Resultat weiter in (4.2. 34). Dann folgt $\|f - g\|_2^2 = 0$ und somit die gewünschte Eigenschaft $V_1 = V_0 \oplus W_0$. \square

Korollar 4.2.1 *Es seien die Voraussetzungen an ϕ die gleichen wie im vorigen Satz und $H(z)$ das Symbol der Verfeinerungsgleichung mit Koeffizienten $\{h_k\} \in l_1(\mathbb{Z})$. Dann ist $\psi \in V_1$ mit Symbol der Verfeinerungsgleichung $G(z)$ ein Wavelet genau dann, wenn*

$$G(z) = a(z)\overline{H(-z)} \quad (4.2. 36)$$

gilt, wobei $a(z)$ eine stetige Funktion mit $a(-z) = -a(z)$ und

$$|a(z)| = 1, \quad z = \exp(-iv) \quad (4.2. 37)$$

ist.

BEWEIS: Die erste und die letzte der drei Gleichungen unter Punkt 3. des obigen Satzes liefern für die Grössen $\xi := \overline{H(z)}$ und $\eta := \overline{H(-z)}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} H(z)\xi + H(-z)\eta &= 1 \\ G(z)\xi + G(-z)\eta &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\overline{H(-z)} = \frac{G(-z)}{\det M_{H,G}(-z)}, \quad z = e^{-iv}.$$

Nach dem vorigen Satz ist die Matrix $M_{H,G}$ unitär. Daher folgt (4.2. 36) mit $|a(z)| = 1$ für $|z| = 1$, wobei $a(z) := |\det M_{H,G}(z)|$ gesetzt wurde. Ferner gilt

$$\det M_{H,G}(z) = H(-z)G(z) - H(z)G(-z) = -\det M_{H,G}(-z),$$

d. h. $a(-z) = -a(z)$. Umgekehrt folgt aus den letzten beiden Beziehungen

$$G(z)\overline{H(z)} + G(-z)\overline{H(-z)} = a(-z)G(z)G(-z) + a(z)G(-z)G(z) = 0,$$

d. h.(4.2. 32). Ferner gilt dann

$$|G(z)|^2 + |G(-z)|^2 = |H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1,$$

so daß die beiden Gleichungen aus Aussage 3. des vorigen Satzes erfüllt sind. Damit ist ψ definiert durch (4.2. 28) und (4.2. 36) das gewünschte Wavelet, denn aus (4.2. 36) folgt offensichtlich $G(e^{iv}) \in L_2(-\pi, \pi)$, so dass die Koeffizienten g_k von $G(z)$ in $l_2(\mathbb{Z})$ liegen. \square

Die einfachste Wahl für $a(z)$, mit der (4.2. 36 und (4.2. 37) erfüllt sind, ist – bis auf das Vorzeichen –

$$a(z) = -z.$$

Dies ergibt

$$\sum_k g_k z^k = G(z) = -z\overline{H(-z)} = -z\overline{\sum_l h_l (-z)^l}, \quad g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}} \quad (4.2. 38)$$

Diese spezielle Wahl hat einige Vorteile. Von theoretischer Seite betrachtet übertragen sich viele Eigenschaften der Folge $\{h_k\}$, z. B. ihre endliche Länge direkt auf die Folge $\{g_k\}$. Von der praktischen Seite her betrachtet vereinfacht sich die Implementierung.

4.2.4 Existenz von Wavelets

In den beiden vorangegangenen Unterabschnitten wurde klar, daß die Verfeinerungsgleichung den Schlüssel zur Beschreibung von Wavelets liefert. In diesem Unterabschnitt wollen wir daher die Existenz

und Eindeutigkeit einer Lösung dieser Gleichung untersuchen. Dazu definieren wir zur Folge $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ den Operator

$$f \in L_2(\mathbb{R}) \quad \mapsto (Tf)(x) := \sum_l h_l f(2x - l). \quad (4.2. 39)$$

Die Fourier-Transformation dieses Operators lautet

$$T\hat{f}(v) = \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{v}{2}\right) \sum_l h_l e^{-ivl/2} = H\left(e^{-iv/2}\right) \hat{f}\left(\frac{v}{2}\right), \quad (4.2. 40)$$

wie man sofort aus Relation (4.2. 6) entnimmt. Diese lässt sich nun als

$$\hat{\phi}(v) = T\hat{\phi}(v) \quad (4.2. 41)$$

schreiben, d.h. $\hat{\phi}$ ist Fixpunkt des Operators T . Um die Existenz einer Lösung $\hat{\phi}$ zu zeigen, ist es daher naheliegend, den Operator T iterativ anzuwenden. In Verallgemeinerung dieser schon in (4.2. 8) benutzten Idee gilt dann

$$T^n \hat{f}(v) = \prod_{j=1}^n H\left(e^{-2^{-j}iv}\right) \hat{f}(2^{-n}v). \quad (4.2. 42)$$

Wir zeigen nun

Lemma 4.2.4 *Unter der Voraussetzung $\sum |k|^\delta |h_k| < \infty$ für ein $\delta > 0$ und der Normierungsbedingung $H(1) = 1$ streben die Fourier-Transformationen $T^n \hat{f}(v)$ von $f \in L_1(\mathbb{R})$ unter der Normierungsbedingung $H(1) = 1$ gleichmäßig und absolut auf jedem Kompaktum von \mathbb{R} gegen eine stetige Funktion $F(v)$. Sie ist gegeben durch*

$$F(v) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(e^{-2^{-j}iv}\right) \hat{f}(0)$$

und erfüllt die Gleichung

$$F(v) = H\left(e^{-iv/2}\right) F\left(\frac{v}{2}\right). \quad (4.2. 43)$$

BEWEIS: Beachte zunächst, daß $|\sin x| \leq K_\delta |x|^\delta$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten K_δ gilt. Wegen $H(1) = 1$ gelten dann die Ungleichungen

$$|H(e^{-iv}) - 1| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_n h_n (e^{-inv} - 1) \right| \leq \sum_n |h_n| |\sin v/2| \leq C_\delta |v|^{\min(1, \delta)}$$

mit einer Konstanten C_δ . Setze $d(v) := |v|^{\min(1, \delta)}$, so daß

$$|H(e^{-iv})| \leq 1 + C_\delta d(v) \leq e^{C_\delta d(v)}.$$

Für das N -te bzw. M -te Teilprodukt, $N \geq M$, folgt

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^N H\left(e^{-iv2^{-j}}\right) - \prod_{j=1}^M H\left(e^{-iv2^{-j}}\right) \right| &\leq \left| \prod_{j=1}^M H\left(e^{-iv2^{-j}}\right) \right| \left| 1 - \prod_{j=M+1}^N H\left(e^{-iv2^{-j}}\right) \right| \\ &\leq \exp\left(C_\delta \sum_{j=1}^{N-1} 2^{-j\delta} d(v)\right) \left| 1 - \prod_{j=M+1}^N H\left(e^{-iv2^{-j}}\right) \right| \end{aligned}$$

Die Größe

$$D_{N,M} := \left| 1 - \prod_{j=M+1}^N H(e^{-iv2^{-j}}) \right|$$

mit $N > M$ läßt sich nun abschätzen durch

$$\begin{aligned} D_{N,M} &\leq \left| 1 - H(e^{-iv2^{-M-1}}) \right| + \left| H(e^{-iv2^{-M-1}}) \right| D_{N,M+1} \\ &\leq C_\delta 2^{-(M+1)\delta} d(v) + e^{C_\delta d(v) 2^{-(M+1)\delta}} D_{N,M+1}. \end{aligned}$$

Iterative Anwendung dieser Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} D_{N,M} &\leq C_\delta d(v) \sum_{j=M+1}^N 2^{-j\delta} \exp\left(C_\delta d(v) \sum_{l=M+1}^j 2^{-l\delta}\right) \\ &\leq C_\delta d(v) \sum_{j=M+1}^N 2^{-j\delta} \exp C_\delta d(v) \rightarrow 0, \quad N > M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für alle $|v| \leq R$. Das heißt, daß die Folge $\prod_{j=1}^N H(\exp(-2^{-j}iv))$ auf jedem Kompaktum von \mathbb{C} eine Cauchy-Folge bildet; hieraus folgt der erste Teil der Aussage des Lemmas.

Der zweite Teil, d.h. Gleichung (4.2. 43) folgt direkt aus

$$F(v) = H(e^{-iv/2}) \prod_{j=2}^{\infty} H(e^{2^{-j}iv}) = F\left(\frac{v}{2}\right) H(e^{-iv/2})$$

Die Eindeutigkeit von $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ mit $\hat{\phi} = F$ und $\hat{\phi}(0) = 1$ ist eine direkte Folge des Satzes über die Eindeutigkeit der inversen Fourier-Transformation (Satz 2.4, Teil 3). \square

Bemerkung: Eine einfachere hinreichende Voraussetzung ist, daß die Maske $\{h_n\}$ endlichen Träger hat.

Aus obigem Lemma folgt, daß es höchstens eine Funktion $\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}[F] \in L_1(\mathbb{R})$ gibt, die die Verfeinerungsgleichung (4.2. 2) und die Normierungsbedingung $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ erfüllt. Es folgt aber noch nicht $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, was ja für eine MRA per Definition gefordert wird. Dazu muß die inverse Fourier-Transformation auf F angewandt werden können. Nach der Theorie in den Abschnitten 2.1, 2.2 kann das dadurch geschehen, daß entweder $F \in L_1(\mathbb{R})$ oder $F \in L_2(\mathbb{R})$ gezeigt wird. Ein Kriterium für letzteres gibt

Lemma 4.2.5 (Mallat 1989) *Erfüllt die Maske $\{h_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ die Voraussetzungen des vorigen Lemmas und das Symbol $H(z)$ die Bedingung (4.2. 30), so liegt die Grenzfunktion F in $L_2(\mathbb{R})$ und $\phi := \mathcal{F}^{-1}F \in L_2(\mathbb{R})$ löst die Verfeinerungsgleichung.*

BEWEIS: Um $F(v) \in L_2(\mathbb{R})$ zu zeigen, setze (für $k = 0$ wird das Produkt gleich 1 gesetzt)

$$f_k(v) := \prod_{j=1}^k H(e^{-iv2^{-j}}) \chi_{[-2^k\pi, 2^k\pi]}(v)$$

Dann strebt $f_k(v)$ nach dem vorigen gegen $F(v)$. Weiter gilt unter Ausnutzung der Eigenschaft (4.2. 30) des Symbols $H(z)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_k(v)|^2 dv &= \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left| H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 \left| H(e^{-iv2^{-k}}) \right|^2 dv = \int_0^{2^k\pi} + \int_{-2^k\pi}^0 \\ &= \int_0^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left| H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 \left(\left| H(e^{-iv2^{-k}}) \right|^2 + \left| H(e^{-iv2^{-k}+i\pi}) \right|^2 \right) dv \\ &= \int_0^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} \left| H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 dv = \int_{-2^{k-1}\pi}^{2^{k-1}\pi} \left| H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 dv = \int_{\mathbb{R}} |f_{k-1}(v)|^2 dv \end{aligned}$$

Also gilt $\|f_k\|_2 = \|f_{k-1}\|_2 = \dots = \|f_0\|_2 = 1$ und daher nach dem Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} |F(v)|^2 dv \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k(v)|^2 dv = 1.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Nach dem Satz von Plancherel existiert nun $\phi := \mathcal{F}^{-1}F$ in $L_2(\mathbb{R})$. Anwendung von \mathcal{F}^{-1} auf beide Seiten dieser Gleichung liefert die Behauptung für ϕ . \square

Um nun nach Satz 4.3 und Korollar 4.1 des vorigen Abschnitts Wavelets konstruieren zu können, fehlt noch der Nachweis, daß die Translate von ϕ aus diesem Satz eine ONB bilden, denn aus $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ folgt dies keineswegs automatisch. Zwar haben wir in Lemma 4.3 gezeigt, daß die oben vorausgesetzte Bedingung (4.2. 30) an $H(z)$ notwendig für diese Eigenschaft ist. Jedoch ist sie keineswegs hinreichend, wie das danach folgende Beispiel zeigte.

Um eine Idee für ein hinreichendes Kriterium zu bekommen, untersuchen wir die Folge $\{f_k\}$ aus dem vorigen Lemma genauer. Dazu setzen wir $f_k(v) = \hat{\phi}_k(v)$ und erhalten $\phi_k \in L_2(\mathbb{R})$ durch Anwendung der Fourier-Umkehrtransformation auf $\phi_k \in L_2(\mathbb{R})$. Die Translate dieser ϕ_k bilden aber ein ONS, denn mit der Parseval-Formel folgt

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\mathbb{R}} \phi_k(v)\phi_k(x-n) dv &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_k(v)e^{inv} \overline{\hat{\phi}_k(v)} dv = \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} e^{inv} |f_k(v)|^2 dv \\ &= \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} e^{inv} \left| H(e^{-iv2^{-k}}) \right|^2 \left| \prod_{j=1}^{k-1} H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 dv \\ &= \int_0^{2^k\pi} e^{inv} \left(\left| H(e^{-iv2^{-k}}) \right|^2 + \left| H(-e^{-iv2^{-k}}) \right|^2 \right) \left| \prod_{j=1}^{k-1} H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 dv \\ &= \int_0^{2^k\pi} e^{inv} \left| \prod_{j=1}^{k-1} H(e^{-iv2^{-j}}) \right|^2 dv = \int_{-2^{k-1}\pi}^{2^{k-1}\pi} e^{inv} |f_k(v)|^2 dv \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \phi_{k-1}(x)\phi_{k-1}(x-n) dx \end{aligned}$$

Wendet man dies rekursiv bis $k = 1$ an und anschließend für $k = 0$ nur die ersten beiden Zeilen, so ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_k(x)\phi_k(x-n) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(x)\phi_0(x-n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-\pi,\pi]}|^2 e^{inv} dv = \delta_{0,n},$$

da wir $\hat{\phi}_0(v) = f_0(v) = \chi_{[-\pi,\pi]}(v)$ gesetzt haben.

Die gewünschte Orthonormalität würde einfach durch Grenzübergang aus

$$\begin{aligned} \left| \delta_{0,n} - \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\phi(x-n) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\phi_k(x)\phi_k(x-n) - \phi(x)\phi(x-n)) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{inv} \left(|f_k(v)|^2 - |\hat{\phi}(v)|^2 \right) dv \right| \leq \left| \|f_k\|_2 - \|\hat{\phi}\|_2 \right| \leq \|f_k - \hat{\phi}\| \end{aligned}$$

folgen, wenn wir zeigen könnten, daß die Folge $\{f_k\}$ auch im L_2 -Sinne gegen $\hat{\phi}$ strebt. Das einfachste Kriterium dafür ist ([Mallat89])

$$\inf_{|v| \leq \pi/2} |H(e^{-iv})| =: q > 0. \quad (4.2. 44)$$

Dann wähle δ so klein, daß $|\hat{\phi}(\omega)| \geq 1/2$ für $|\omega| \leq \delta$ gilt. Dies ist möglich, weil $\hat{\phi}(0) = 1$ und $\hat{\phi}$ nach Lemma 4.7 in jedem kompakten Intervall stetig ist. Sei nun j_0 derart, daß $2^{-j_0}|v| \leq \delta$ für $|v| \leq \pi/2$ gilt.

Damit schreibe für jedes $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\chi_{[-2^k\pi, 2^k\pi]}(v)\hat{\phi}(v) &= \prod_{j=1}^{k+j_0} H\left(e^{-iv2^{-j}}\right)\hat{\phi}(2^{-k-j_0}v)\chi_{[-2^k\pi, 2^k\pi]}(v) \\ &= f_k(v)\prod_{j=1}^{j_0} H\left(e^{-iv2^{-k-j}}\right)\hat{\phi}(2^{-k-j_0}v)\end{aligned}$$

und schätze auf $[-2^k\pi, 2^k\pi]$ mit (4.2. 44) ab:

$$|f_k(v)| \leq \frac{|\hat{\phi}(v)|}{q^{j_0} |\hat{\phi}(2^{-k-j_0}v)|} \leq \frac{2}{q^{j_0}} |\hat{\phi}(v)| \equiv C |\hat{\phi}(v)|$$

Daher besitzt $|\hat{f}_k(v)|^2$ eine L_1 -Majorante $C^2 |\hat{\phi}(v)|^2$ und der Satz von der majorisierten Konvergenz ist anwendbar. Das Bewiesene formulieren wir in

Satz 4.2.4 (Mallat 1989) *Erfüllt das Symbol $H(x)$ außer den Voraussetzungen von Lemma 4.2.5 noch das Kriterium (4.64) von Mallat, so bilden die Translate der Funktion Grenzfunktion ϕ eine ONB.*

Es gibt Untersuchungen von A. Cohen (Dissertation, 1990) und W. Lawton (ebenfalls 1990) über exakte Kriterien für die Orthonormalität der Translate von ϕ . Da das Kriterium von Lawton anschaulicher und einfacher ist, sei es hier vorgestellt.

Satz 4.2.5 (Lawton, 1990) *Es sei $H(x) = \left(\sum_{n=0}^N h_n z^n\right)/2$, $z = \exp(-iv)$, das Symbol einer Verfeinerungsgleichung, das (4.2. 30) erfüllt und sei $\phi(v)$ die Limesfunktion nach Satz 4.2.4.*

1. *Es sei dann $A = (A_{lk})$ die $(2N - 1) \times (2N - 1)$ -Matrix mit den Einträgen*

$$A_{lk} := \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N h_n \overline{h_{k-2l+n}}, \quad -N + 1 \leq l, k \leq N - 1$$

wobei h_i für $i \notin \{0, 1, \dots, N\}$ formal zu 0 gesetzt wird. Hinreichend dafür, daß die Translate von ϕ eine ONB ist, daß zum Eigenwert 1 von A nur ein eindimensionaler Eigenraum existiert.

2. *Hinreichend für Bedingung 1 ist, daß der für $f \in C_{2\pi}$ durch*

$$(P_0 f)(v) := \left|H\left(e^{-iv/2}\right)\right|^2 f\left(\frac{v}{2}\right) + \left|H\left(-e^{-iv/2}\right)\right|^2 f\left(\frac{v}{2} + \pi\right)$$

definierte Operator P_0 als einziges invariantes Polynom $t(v)$ nur das Polynom $t(v) = 1$ besitzt, d. h. aus $P_0 t = t$ folgt notwendig $t \equiv 1$.

BEWEIS: Zunächst zeigen wir, daß 1 immer ein Eigenwert von A ist. Dazu sei $\vec{b} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 in der Mitte. Dann folgt

$$\left(A\vec{b}\right)_l = \sum_k A_{lk} \delta_{k,0} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N h_n \overline{h_{n-2l}} = \delta_{l,0} \equiv \beta_l,$$

denn mit $z = \exp(-iv/2)$ folgt

$$\begin{aligned}4 &= \left|\sum h_n z^n\right|^2 + \left|\sum h_n (-z)^n\right|^2 = \sum_{n,l} h_n \overline{h_l} z^{n-l} + \sum_{n,l} h_n \overline{h_l} (-z)^{n-l} \\ &= \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-j}}\right) z^j + \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-j}}\right) (-z)^j = 2 \sum_j \left(\sum_n h_n \overline{h_{n-2j}}\right) z^{2j},\end{aligned}$$

so dass

$$1 = \sum_j \frac{1}{2} e^{-ijv} \sum_n h_n \overline{h_{n-2j}}.$$

Also ist \vec{b} ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Andererseits betrachte den Vektor $\vec{a} = (\alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_{N-1})$ mit $\alpha_l := \int \phi(x) \overline{\phi(x-l)} dx$. Für diesen gilt aufgrund der Verfeinerungsgleichung ($2x - n = u$)

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \sum_{n,m=0}^N h_n \overline{h_m} \int \phi(2x-n) \overline{\phi(2x-2l-m)} dx = \frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^N h_n \overline{h_m} \alpha_{2l+m-n} \\ &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{2} \sum_{n=0}^N h_n \overline{h_{k-2l+n}} \end{aligned}$$

Also gilt auch $A\vec{a} = \vec{a}$ und nach Voraussetzung muß $\vec{a} = \gamma\vec{b}$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$ gelten. Dann folgt aber mit den Umformungen wie in Abschnitt 4.1.2

$$\gamma \delta_{0,l} = \alpha_l = \int \phi(x) \overline{\phi(x-l)} dx = \frac{1}{2\pi} e^{ilv} \sum_k \left| \hat{\phi}(2\pi k + v) \right|^2 dv,$$

so daß $\sum_k \left| \hat{\phi}(v + 2\pi k) \right|^2 = \gamma$ gelten muß. In Satz 4.5 haben wir aber gesehen, daß die Normierung $\int \phi(x) dx = 1$ und die Verfeinerungsgleichung $\hat{\phi}(2\pi k) = \delta_{0,k}$ implizieren, so daß schließlich $\gamma = 1$ und die gewünschte Orthogonalität folgt.

Zu 2.: Wie schon oben benutzt gilt

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{4} \sum_j \sum_n h_n \overline{h_{n-j}} z^j$$

mit $z = \exp(-iv/2)$ und daher für alle trigonometrischen Polynome $f(v) = \sum f_k \exp(-ikv)$

$$|H(z)|^2 f\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_l z^l \sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{l-k}$$

Nach Definition von P_0 folgt damit

$$(P_0 f)(v) = \frac{1}{2} \sum_l e^{-ivl} \sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{2l-k}$$

Für die Fourierkoeffizienten diese trigonometrischen Polynoms ergibt sich also

$$(P_0 f)_l = \frac{1}{2} \sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{2l-k} = \frac{1}{2} \sum_m f_m \sum_n h_n \overline{h_{n-2l+m}}$$

Invarianz von f unter P_0 bedeutet nun, daß $(P_0 f)_l = f_l$ gilt, ist also äquivalent dazu, daß die Koeffizientenfolge $\{f_l\}$ Eigenvektor der Matrix A in 2 ist. Laut Voraussetzung ist aber die Koeffizientenfolge von $f(v) \equiv 1$ die einzige für die dies überhaupt gilt. Daher ist \vec{b} aus 1 der einzige Eigenvektor zum Eigenwert 1. \square

Ein allgemeiner (positiver) Effekt des Kriteriums von Lawton ist, daß es die Orthonormalität der Translate ϕ für „fast alle Symbole $H(z)$ “ mit der Eigenschaft (4.50) liefert. Das soll heißen, daß die Entartung des Eigenwerts 1 der Matrix ein Ausnahmefall ist, der nur unter zusätzlichen Voraussetzungen auftritt.

Die Bedingung 2 von Lawton steht zunächst isoliert da und es ist nicht klar, ob sie notwendig ist. Das Bindeglied dazu liefert folgendes Ergebnis

Satz 4.2.6 (A.Cohen, 1990) *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 erfüllt. Dann bilden die Translate von ϕ ein ONS genau dann, wenn gilt:*

1. *Es existiert eine kompakte Menge K , die kongruent modulo 2π zu $[-\pi, \pi]$ ist, d. h. das Maß von K sei 2π und zu jedem $\xi \in [-\pi, \pi]$ existiert ein $l \in \mathbf{Z}$, so daß $\xi + 2\pi l \in K$.*
2. *Es existiert ein Umgebung um 0, so daß*

$$\inf_{k>0} \inf_{\xi \in K} \left| H\left(e^{-2^{-k}iv}\right) \right| > 0$$

Lawton und Cohen konnten kurz danach die Äquivalenz dieses Kriteriums zu dem in Satz 4.2.5 zeigen (eine ausführliche Darstellung dieses Sachverhalts ist in [Daubechies92], Seiten 192f, zu finden).

Es ist evident, daß 2. eine schwächere Bedingung als das Mallatsche Kriterium ist. Cohen konnte genauer zeigen, daß für 2. hinreichend ist, daß $|H(\exp(-iv))|$ in $[-\pi/3, \pi/3]$ keine Nullstelle hat (das Mallatsche Kriterium fordert dies für $[-\pi/2, \pi/2]$). Bezüglich der Einzelheiten zu obigem Satz sei wieder auf [Daubechies92], S.182-187 verwiesen.

4.3 Konstruktion spezieller Wavelets

4.3.1 Spline-Wavelets und Wavelets vom Paley-Littlewood-Typ

Ist eine Funktion ϕ gegeben, die einen translationsinvarianten Raum $V_0 = S_2(\phi) \subseteq L_2(\mathbb{R})$ erzeugt und deren Translate eine Riesz-Basis bilden, so kann man auf Grund der bisherigen Überlegungen zur Konstruktion von Wavelets wie folgt vorgehen:

- Durch den Übergang $\phi_{\text{ortho}} = \phi_*$ per

$$\hat{\phi}_*(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}}$$

bilde eine ONB aus den Translaten von ϕ_* . Konkret kann man $\phi_*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \phi(x-k)$ ansetzen und die b_k nach Korollar 3.1 aus der Laurent-Entwicklung von

$$\frac{1}{\sum_j c(\phi, \phi)(j)z^j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad c(\phi, \phi)(j) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(x-j)} dx$$

ermitteln. Eine Alternative stellt das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierung-Verfahren dar.

- Berechne dann die Maske von ϕ_* und daraus die Maske des Mutterwavelets (mother wavelet) ψ gemäß Korollar 4.2.1.
- Untersuche das Wavelet auf wünschenswerte Eigenschaften (Kompakter Träger, Glattheit, gutes Approximationsverhalten, ...).

Der erste Teil dieses Programms ist immer durchführbar. Bei dem zweiten geht es darum, das Symbol der Verfeinerungsgleichung für ϕ_* zu finden. Man kann dies direkt auf die Bestimmung des Symbols $H(z)$ von ϕ zurückführen, denn aus obiger Relation leitet man sofort ab

$$H_*(z) = \frac{\hat{\phi}(\omega/2)}{\hat{\phi}(\omega)} = H(z) \frac{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega/2)}}{\sqrt{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}}, \quad z = e^{-i\omega/2}. \quad (4.3.1)$$

Anschließend kann man daraus das Symbol $G(z)$ von ψ gemäß (4.2.38) bestimmen ($-z = e^{-i(\omega/2+\pi)}$):

$$G(z) = -zH_*(-z) = -zH(-z) \sqrt{\frac{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega/2 + \pi)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)}}. \quad (4.3.2)$$

Alternativ kann man statt von der Erzeugenden ϕ von einer gegebenen Maske ausgehen und dann erst ϕ als Lösung der zugehörigen Verfeinerungsgleichung bestimmen derart, daß nach Abschnitt 4.2.4 seine Translate eine ONB bilden.

Zunächst sollen aber Beispiele für das direkte Vorgehen vorgestellt werden. Das einfachste Beispiel, nämlich das **Haar-Wavelet**, ist bereits in Abschnitt 4.2.3 durch (4.2.27) angegeben worden. Es ordnet sich in die allgemeine Theorie mit der speziellen Verfeinerungsgleichung

$$\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) + \chi_{[1/2,1]}(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$$

ein. Aus ihr folgt, daß (4.2.27) ein Spezialfall von (4.2.38) ist. Leider hat das Haar-Wavelet noch große Nachteile: es ist nicht glatt, seine Fourier-Transformierte $\hat{\phi}(\omega) = (1 - e^{-i\omega})/i\omega = e^{-i\omega/2} \text{sinc} \omega/2$ ist nicht gut lokalisiert, d.h. klingt nur schwach in den "Frequenzen ω " ab, und seine Translate liefern auch keine gute Approximation. Die Erklärung für letztere Tatsache folgt später in einem allgemeinen Rahmen.

Es liegt nun nahe, für ϕ eine Splinefunktion höheren Grades mit kompaktem Träger zu nehmen. Die Wahl $\phi = N_{0,k}$ als Erzeugende liefert eine MRA mit den Spline-Räumen $V_j = S_{k,2}^{(h)}$, $h = 2^{-j}$ aus (3.3. 28), d.h. $S_{k,2}^{(h)} = \text{span}\{N_{0,k}(xh - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Nach Lemma 3.3.7 ergibt sich für die Maske $\{h_{j,k}\}$ von $N_{0,k}$ das Symbol

$$H(z) \equiv H_k(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j,k} z^j. \quad (4.3. 3)$$

Entscheidend für die Anwendung obiger Formeln ist aber die Funktion $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega)$, für die wegen $\hat{N}_{0,k}(\omega) = e^{-i\omega/2} \hat{N}_k(\omega)$ nach (3.3. 43) folgende explizite Darstellung gilt:

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = [N_{0,k}, N_{0,k}](\omega) = [\hat{N}_k, \hat{N}_k](\omega) = \frac{z^{1-k}}{(2k-1)!} E_{2k-1}(z), \quad z = e^{-i\omega}. \quad (4.3. 4)$$

Dabei bezeichnet $E_{2k-1}(z)$ das Euler-Frobenius-Polynom vom Grad $2k-2$. Nach Lemma 3.3.6 ist $1/E_{2k-1}(z)$ wohldefiniert in einem Kreisring um den Einheitskreis, so daß die Translate von

$$\hat{\phi}_k(\omega) = \sqrt{\frac{(2k-1)!}{z^{1-k} E_{2k-1}(z)}} \hat{N}_k(\omega) \quad (4.3. 5)$$

eine ONB für $V_0 = S_k^{(1)}$ liefern. Nach (4.3. 2), (4.3. 3) und (4.3. 4) ergibt sich für die Maske $G_k(z)$ des assoziierten Wavelets ψ_k

$$G_k(z) = -z \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sqrt{\frac{(-z)^{k-1} E_{2k-1}(-z)}{E_{2k-1}(z^2)}}, \quad z = e^{-i\omega/2}. \quad (4.3. 6)$$

Benutzt man die in einem Kreisring um $|z|=1$ konvergente Laurent-Entwicklung

$$\sqrt{\frac{(-z)^{k-1} E_{2k-1}(-z)}{E_{2k-1}(z^2)}} = \sum q_l z^l,$$

so kann man dadurch die Koeffizienten $\{g_k\}$ von $G(z)$ ausrechnen und folglich das Wavelet $\psi_k(x) = \sum_l g_l \phi(x-l)$.

Man stellt dann fest, daß $\phi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ beide exponentiell in $|x|$ abklingen. Betrachtet man die Fourier-Transformierten, so verhält sich $\hat{\phi}_k(\omega)$ wegen $[\hat{N}_k, \hat{N}_k](\omega) \geq 2(2/\pi)^k$ nach (3.3. 45) wie $|\omega|^{-k}$ für $|\omega| \rightarrow \infty$, d.h. sie klingt nur polynomial ab. Das Gleiche gilt für $\hat{\psi}(\omega)$, wie man aus der Relation $\hat{\psi}(\omega/2) = G_k(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}(\omega)$ und (4.3. 6) ersehen kann. In der Literatur sind diese Wavelets als **Battle-Lemarie-Wavelets** bekannt ([?]), wobei erwähnt werden sollte, daß die ONB aus Translaten von $\phi = N_{0,k}$ und ihre Eigenschaften bereits 1972 von Ciesielski-Domsta ([CD]) beschrieben wurde.

„Dual“ zur Konstruktion von Spline-Wavelets kann man von einer erzeugenden Funktion ϕ ausgehen, die eine Fourier-Transformierte mit kompaktem Träger besitzt. Dazu betrachten wir zunächst in leichter Verallgemeinerung von Unterabschnitt 4.2.2 Funktionen $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ der Form

$$\hat{\phi} = \chi_{2\pi W}, \quad \text{bzw.} \quad \phi(x) = W(2\pi x), \quad (4.3. 7)$$

wobei $W(x)$ die Transferfunktion nach (2.3. 6) eines kompakten Gebietes $W \subset \mathbb{R}^m$ ist. Hier ergibt sich eine relativ einfache Möglichkeit zur Konstruktion von Orthonormalbasen und darüber hinaus von Wavelets.

Nach Lemma 3.1.3 ist die Orthonormalität der Translate von ϕ äquivalent zur Relation

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](v) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(v + 2\pi k)|^2 = 1. \quad (4.3. 8)$$

Am Ende von Unterabschnitt 3.1.3 haben wir gesehen, daß dies sofort für Fundamentalgebiete W des \mathbb{R}^m folgt, d. h. Gebiete mit den Eigenschaften

1. $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} (k + W) = \mathbb{R}^m$
2. $(k + W) \cap (j + W) = \emptyset$ für $j \neq k$,

denn dann gilt trivialerweise $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\chi_{2\pi W}(v + 2\pi k)|^2 = 1$.

Wavelets können nun direkt ohne Verwendung der allgemeinen Theorie konstruiert werden. Eine MRA ist gegeben durch die Räume $(j = 0, 1, 2, \dots)$

$$W_j = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^m) : \left| \hat{f}(v) \right| = 0 \text{ für } v \notin 2^j \pi W \right\},$$

Als vorteilhafte Eigenschaft wurde in Satz 2.3.4 bewiesen (wähle in (2.3. 21) $\omega = 2\pi 2^n$), daß bei Fundamentalgebieten W die Koeffizienten der Orthogonalentwicklung von $g \in V_0$ nach Translaten von $\phi(x) = W(2\pi x)$

$$\left(g, W(2\pi(2^n \cdot -k)) \right)_2 = g\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

erfüllen, d. h. sie können durch „Sampling“ ermittelt werden. Analog gilt dies für $g \in V_j, j = 1, 2, \dots$. Als orthogonales Komplement W_0 von V_0 in V_1 ergibt sich nach dem Satz von Plancherel

$$W_0 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^m) : \left| \hat{f}(v) \right| = 0 \text{ für } |v| \in 4\pi W \setminus 2\pi W \right\}.$$

Die Elemente ψ aus W_0 lassen sich dann durch Translate von

$$\hat{\psi}(v) = \chi_{\tilde{W}}(v), \quad \tilde{W} := 4\pi W \setminus 2\pi W,$$

darstellen. Dies folgt wieder aus Lemma 3.1.3, denn \tilde{W} ist ein Fundamentalgebiet.

Im Falle einer Raumdimension $m \geq 2$ benötigt man jedoch zum Nachweis von Bedingung (4.3. 8) für die Orthogonalität der Translate mehrere Basis-Wavelets. Man sieht dies am Beispiel $W = [0, 1]^m$, wo $2W \setminus W$ durch $2^m - 1$ verschiedenen Translate von W überdeckt werden muß, um (4.3. 7) für $\hat{\phi}_{0,1} = \chi_{4\pi W}$ zu garantieren.

Es ist nicht unmittelbar klar, wie sich im Fall eines allgemeinen Fundamentalgebiets $W \subset \mathbb{R}^m$ Wavelets konstruieren lassen. Dazu sei bemerkt, daß Zerlegungen des \mathbb{R}^m in Translate von Fundamentalgebiete auch *Pflasterungen* („tilings“) heißen. Es gibt viele Möglichkeiten für Pflasterungen. Erstmals scheinen Littlewood und Paley dieses Prinzip 1935 auf die Fourier-Transformation angewendet zu haben.

Y. Meyer konstruiert Wavelets auf dieser Basis (s.u.) und nennt sie daher **Wavelets vom Littlewood-Paley-Typ**.

Interessanterweise treten sie auch im Limes der kardinalen Interpolation mit Box-Splines (s. [BHR93]) auf, was zur Konstruktion weiterer Wavelets vom Littlewood-Paley-Typ ausgenutzt werden könnte. In diesem Zusammenhang ist die Arbeit [GM92] zu erwähnen. Dort werden „Selbstähnliche Pflasterungen es \mathbb{R}^m “ zur Erzeugung von MRA mit orthonormalen Wavelets vom Haar-Typ verwendet. Außerdem sind allgemeiner Matrix-Transformationen des \mathbb{Z}^m statt Translationen zugelassen. Eine Erweiterung dieser Idee auf Box-Splines findet man in [DGL95].

Den Vorzügen der Wahl von $\hat{\phi}$ in (4.3. 7) stehen wie beim Haar-Wavelet auch erhebliche Nachteile gegenüber. Dies wird im Spezialfall $\phi(x) = \text{sinc}\pi x$ mit $W = [-1/2, 1/2]$ der **Shannon-Wavelets** klar, der bereits am Ende von Unterabschnitt 4.2.2 zur Erläuterung des Wavelet-Prinzips diente (dort wurde das Gebiet $2\pi W$ statt W genommen). Dann ergibt sich nämlich als Verfeinerungsgleichung nach dem Satz von Shannon

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{sinc}((2x - k)\pi) = \phi(2x) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)\pi} \phi(2x - 2k - 1),$$

also keine endliche Summe. Entsprechend besitzt das zugehörige Wavelet $\psi(x)$ keinen kompakten Träger. Seine explizite Form ergibt sich aus (4.2. 27) als Differenz zweier Sinc-Funktionen. Dies bedeutet, daß $\psi(x)$ außerdem nur mäßig in $|x|$ ablingt bzw. ein schlechtes Lokalisierungsverhalten hat.

Allgemein gelten folgende Zusammenhänge zwischen Abkling- bzw. Lokalisierungsverhalten und Glattheit

Bemerkung 4.3.1 (Abklingverhalten):

Ein polynomiales Abklingen von $\hat{f}(v)$ wie $\hat{f}(v)(1 + |v|^k) \in L_2(\mathbb{R})$ der Fourier-Transformierten liegt nach Satz 2.4.4 über die Charakterisierung von Sobolev-Räumen genau dann vor, wenn f k -fach differenzierbar im L_2 -Sinne ist. Wendet man dies auf f statt \hat{f} an, so entspricht einem polynomialem Abklingen von f der Form $f(x)(1 + |x|^k) \in L_2(\mathbb{R})$ eine k -fache Differenzierbarkeit von \hat{f} im L_2 -Sinne. Ergänzend kann man mit Lemma 2.4.10 auch aus einem allgemeineren Abklingverhalten von \hat{f} im Sinne der Besselpotentialräume auf Stetigkeit und Glattheit von f schließen (dahinter steckt der Einbettungssatz von Sobolev).

Bemerkung 4.3.2 (exponentielles Abklingen bzw. kompakter Träger):

Ein exponentielles Abklingen von f liefert nach dem Vorigen $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$, während sich daraus umgekehrt nur schnell abfallende Funktionen im Sinne von Definition 2.4.1 ergeben. Den Grenzfall eines kompakten Trägers beschreibt hier der Satz von Paley-Wiener, wonach f einen solchen genau dann besitzt, wenn \hat{f} eine analytische Funktion f vom exponentiellen Typ ist. Dual ist ein solches Abklingverhalten bzw. kompakter Träger von \hat{f} über die inverse Fourier-Transformation durch entsprechende Glattheit von f charakterisiert.

Auf der Grundlage dieser letzten Bemerkung konstruierte nun Y.Meyer eine Erzeugende ϕ , deren Fourier-Transformierte kompakten Träger hat und gleichzeitig beliebig glatt ist, und deren Translate eine ONB bilden. Damit erhielt er Wavelets, die wie die Spline-Wavelets schnell abfallend sind bzw. fast exponentiell abklingen, im Frequenzbereich aber kompakten Träger haben. Diese Konstruktion wollen wir daher jetzt kurz vorstellen. Y.Meyer wählt

$$\hat{\phi}(v) = \begin{cases} 1, & |v| \leq 2\pi/3, \\ e^{iv/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\left(\frac{3|v|}{4\pi} - \frac{1}{4}\right)\right), & 2\pi/3 \leq |v| \leq 4\pi/3, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.3. 9}$$

wobei μ eine glatte Funktion (aus C^k oder C^∞) die außerhalb von $[1/4, 3/4]$ verschwindet, auf diesem Intervall Werte aus $[0, 1]$ annimmt und ferner $\mu(x) + \mu(1 - x) = 1$ erfüllt.

Graphisch ergibt sich, daß sich die Träger von $\hat{\phi}(v)$ und $\hat{\phi}(v \pm 2\pi)$ jeweils auf den Bereichen $(-4\pi/3, 2\pi/3)$ bzw. $(2\pi/3, 4\pi/3)$ überlappen. Da dies die einzige Möglichkeit darstellt, daß sich solche Translate überlappen, hat man also nach Lemma 3.1.3 zum Beweis der Orthonormalität der Translate von ϕ in (4.3. 9) nachzuprüfen, daß $|\hat{\phi}(v)|^2 + |\hat{\phi}(v \pm 2\pi)|^2 = 1$ gilt. Obige Konstruktion liefert dies für jede solche Funktion $\mu(x)$, denn für $-4\pi/3 \leq v \leq -2\pi/3$ gilt

$$x := \frac{3|v|}{4\pi} - \frac{1}{4} \quad y := \frac{3|v + 2\pi|}{4\pi} - \frac{1}{4} = -\frac{3|v|}{4\pi} + \frac{5}{4},$$

so daß $y = 1 - x$ gilt und daher

$$\left| \hat{\phi}(v + 2\pi) \right|^2 = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu(y)\right) \right|^2 = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}(1 - \mu(y))\right) \right|^2 = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu(y)\right) \right|^2.$$

Man hätte in obiger Definition auch $\mu((3|v|/2\pi) - 1)$ verwenden können, und das Resultat wäre das gleiche gewesen. Die Verfeinerungsgleichung von (4.3. 9) lautet nun

$$\hat{\phi}(v) = H(z)\hat{\phi}(v/2), \quad \text{mit} \quad H(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2v + 4\pi l), \quad z = e^{-iv}.$$

Dies kann man einfach nachrechnen. Das zugehörige Wavelet ψ erhält man z.B. nach Formel (4.2. 38) zu Korollar 4.2.1 durch sein Symbol $G(z) = zH(-z)$ (s. Abschnitt 5.2 in Dau[92]). Hieraus kann man

wegen der expliziten Formel für $\hat{\phi}$ die Form des Wavelets berechnen. Man kann aber nach Y.Meyer auch direkt verifizieren (s. Dau[92]), daß gilt

$$\hat{\psi}(v) = \begin{cases} e^{iv/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\left(\frac{3|v|}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)\right), & 2\pi/3 \leq |v| \leq 4\pi/3, \\ e^{iv/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\left(\frac{3|v|}{4\pi} - \frac{1}{4}\right)\right), & 4\pi/3 \leq |v| \leq 8\pi/3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.3.2 Konstruktionsprinzipien für Wavelets

Bei einem Vergleich der Battle-Lemarie- und Meyer-Wavelets fällt auf, daß letztere wie ihre Erzeugenden ϕ noch eine Fourier-Transformierte mit kompaktem Träger besitzen, während bei den Battle-Lemarie-Wavelets dies schon für die eigentliche Erzeugende ϕ_k in (4.3. 5)– deren Translate eine ONB liefern– nicht mehr gilt, wenn sie auch exponentiell abklingt.

Die Frage ist nun, ob man eine Erzeugende mit kompaktem Träger und vorgegebener Glattheit finden kann, deren Translate eine ONB bilden. Die Lösung dieses Problems gelang I. Daubechies [Daubechies88], indem sie solche der Glattheit C^α (s. Bemerkung 2.4.3) für beliebiges $\alpha > 0$ konstruierte. Offen scheint noch die Frage zu sein, ob (dual zu den Meyer-Wavelets) C^∞ – Glattheit möglich ist. In jedem Fall kann dann nach Bemerkung 4.3.2 deren Fourier-Transformierte als analytische Funktion keinen kompakten Träger haben (vergl. auch Korollar 2.3.1).

Vor einer Beschreibung der Konstruktion von I. Daubechies zeigen wir zunächst, daß das Bestehen einer Verfeinerungsgleichung mit endlicher Maske notwendig und hinreichend dafür ist, daß ihre Lösung einen kompakten Träger besitzt. Die Notwendigkeit regelt

Lemma 4.3.1 *Sei ϕ eine Funktion aus $L_2(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \phi = [a, b]$ und $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ eine weitere Funktion, die die Identität*

$$\psi(x) = \sum_{l=N_1}^{N_2} g_l \phi(2x - l) \quad (4.3. 10)$$

mit Koeffizienten $\{g_l\} \in l_2(\mathbb{Z})$ erfüllt. Dann gilt $g_l \neq 0$, $N_1 \leq l \leq N_2$ genau dann, wenn

$$\text{supp } \psi = \left(\frac{a + N_1}{2}, \frac{b + N_2}{2} \right).$$

Ist ϕ Lösung der Verfeinerungsgleichung, so gilt insbesondere

$$\phi(x) = \begin{cases} \neq 0, & x \in [0, N] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Leftrightarrow h_l = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq l \leq N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Der Beweis von Teil 1 folgt direkt aus

$$\text{supp } \psi = \bigcup_{l=N_1}^{N_2} \text{supp } \phi(\cdot - l) \subset \bigcup_{l=N_1}^{N_2} \left(\frac{a+l}{2}, \frac{b+l}{2} \right) = \left(\frac{a+N_1}{2}, \frac{b+N_2}{2} \right),$$

wobei Gleichheit gilt, wenn alle $g_l \neq 0$ sind.

Teil 2 ist eine direkte Folge der obigen Beziehung mit $a = 0$ und $b = N$, denn es muß $N_1 = (a + N_1)/2$ und $b = (b + N_2)/2$ gelten. \square

Im Zusammenhang mit diesem Lemma führen wir noch ein

Definition 4.3.1 *Ist eine Verfeinerungsgleichung der Form (4.3. 10) mit Maske $\{g_l\}_{N_1}^{N_2}$ gegeben, so heißt $N_2 - N_1 - 1$ Länge der Maske. Insbesondere heißt die Maske endlich, falls beide Zahlen N_1, N_2 endlich sind.*

Zum Beweis der Hinlänglichkeit zeigen wir im Hinblick auf Bemerkung 4.3.2, daß die Fourier-Transformierte sogar eine analytische Funktion von einem bestimmten exponentiellen Typ ist. Dazu liefert der Satz von Paley–Wiener aus Abschnitt 2.5 einen relativ kurzen Beweis.

Satz 4.3.1 (Deslauriers-Dubuc,1987) *Ist die endliche Reihe*

$$H(e^{-iv}) = \sum_{n_1}^{n_2} h_j e^{-ijv}, \quad \sum_{n_1}^{n_2} h_j = 1$$

gegeben, so ist $\prod_{j=1}^{\infty} H(e^{2^{-j}iv})$ die Fourier-Transformierte einer Funktion mit Träger $[n_1, n_2]$.

BEWEIS: Wir betrachten die Funktion $F(v) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(e^{-iv2^{-j}})|$. Nach Lemma 4.2.4 wissen wir, daß sie auf $(-\infty, \infty)$ wohl definiert und $f := \mathcal{F}^{-1}F \in L_2(\mathbf{R})$ gilt. Wir schätzen jetzt ihr Wachstum auch für komplexe v ab.

Zunächst beachte man, daß wegen $\prod_{j=1}^{\infty} e^{2^{-j}idv} = e^{idv}$ für jedes $d \in \mathbf{Z}$ und $\mathcal{F}^{-1}(F(\cdot)e^{id\cdot})(x) = f(x+d)$ die Aussage äquivalent dazu ist, daß $\mathcal{F}^{-1}F_1$ den Träger $(-n, n)$, $n := (n_2 - n_1)/2$, besitzt, wobei $F_1(v)$ wie $F(v)$ durch $H_1(e^{iv}) := e^{(n_1+n_2)v/2}H(e^{iv})$ definiert ist und o.B.d.A. $n_2 > n_1$ angenommen werden kann. Zur Abschätzung von $H_1(v)$ beachten wir

$$|H_1(e^{iv})| \leq 1 + |H_1(v) - 1| \leq 1 + \sum_{j=n_1}^{n_2} |h_j| |e^{-i(j-n_1/2-n_2/2)v} - 1|$$

wobei $\sum_{l=0}^n h_l = 1$ ausgenützt wurde. Dann gilt mit $v := u + iw$, $u, w \in \mathbf{R}$, und $b := j - n_1/2 - n_2/2$

$$|e^{ibv} - 1| \leq |e^{ibu} - 1| + |e^{ibu}| |1 - e^{-bw}| \leq |bu/2| + |bw|e^{|bw|}.$$

Dies liefert mit nur von n_1, n_2 und der Folge $\{h_l\}$ abhängigen Konstanten C, C_1

$$|H_1(e^{iv})| \leq C e^{n|\operatorname{Im}v|} \min\{1, C_1|v|\}.$$

Im Falle $|v| \leq 1$ erhält man daraus

$$|F(v)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + CC_1 2^{-j}) \prod_{j=1}^{\infty} e^{n2^{-j}|\operatorname{Im}v|} \leq e^{CC_1} e^{n|\operatorname{Im}v|},$$

wobei $1 + CC_1 2^{-j} \leq e^{CC_1 2^{-j}}$ benützt wurde.

Im anderen Falle wählt man j_0 mit $2^{j_0} \leq |v| \leq 2^{j_0+1}$ und schätzt ab

$$|F(v)| \leq \left| \prod_{j=1}^{j_0+1} \prod_{j=j_0+2}^{\infty} \right| \leq C^{j_0+1} \prod_{l=1}^{\infty} (1 + CC_1 |v| 2^{-j_0-1-l}) \prod_{j=1}^{\infty} e^{n2^{-j}|\operatorname{Im}v|}$$

Dann benützt man $C^{j_0+1} \leq |v|^\alpha$ mit $\alpha := \log C / \log 2$ und $1 + CC_1 |v| 2^{-j_0-1-l} \leq e^{CC_1 2^{-j}}$ wie oben und erhält mit einer weiteren Konstanten \tilde{C}

$$|F(v)| \leq \tilde{C} |v|^\alpha e^{n|\operatorname{Im}v|}.$$

Damit ist der Satz von Paley–Wiener (Satz 2.3.1) auf $F_1(v)$ mit $\sigma = n$ anwendbar und ergibt $\operatorname{supp} \hat{F}_1 \subset (-n, n)$ □

Für Anwendungen der Wavelets, z.B. in der Signalverarbeitung oder als Ansatzfunktionen zur Lösung von Differentialgleichungen, sind neben einem kompakten Träger und Glattheit vor allem die Approximationseigenschaften der Räume V_j der entstehenden MRA wichtig. Diese Fragen haben wir zwar schon in Kapitel 3 über translationsinvariante Räume studiert, indem wir entsprechende Kriterien an die erzeugende Funktion ϕ von $S_2(\phi)$ aufgestellt haben, jetzt aber wollen wir weitere Kriterien dazu

unter der Voraussetzung ableiten, daß bereits Wavelets vorliegen. Damit erhalten wir umgekehrt Konstruktionsprinzipien für Wavelets bzw. MRA's.

Wir beginnen mit der Charakterisierung der Approximationsgüte. In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß die Fehlerabschätzung mit Hilfe von Quasiinterpolanten entscheidend davon abhängt, bis zu welchem Grad Polynome im Raum $S_2(\phi)$ enthalten sind. Diese Eigenschaft ist bei Wavelets mit der der *verschwindenden Momente* äquivalent, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 4.3.2 (Verschwindende Momente) *Ein Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ hat verschwindende Momente bis zur Ordnung n , falls gilt*

$$\int x^\alpha \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq n. \quad (4.3. 11)$$

Es gilt nun

Lemma 4.3.2 *Es sei die Erzeugende ϕ von $S_2(\phi)$ schnell abfallend (siehe Definition 2.4.1) und seine Translate seien eine ONB für $S_2(\phi)$. Es sei ferner $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ dazu orthogonal und $x^\alpha \psi \in L_2(\mathbb{R})$ für $0 \leq \alpha \leq n$. Dann folgt aus der Einbettung $\Pi_n \subset S_2(\phi)$, daß $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ verschwindende Momente bis zur Ordnung n hat.*

BEWEIS: Zunächst erhält man aus der Voraussetzung die punktweise Konvergenz von

$$x^\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} a_k^{(\alpha)} \phi(x - k) \quad (4.3. 12)$$

mit gewissen Koeffizienten $a_k^{(\alpha)} \in l_2(\mathbb{Z})$. Durch Bildung des Skalarprodukts von $g_N(x)$ mit $\phi(x - j)$ und N groß genug schließt man auf

$$a_k^{(\alpha)} := \int x^\alpha \phi(x - k) dx.$$

Dann zeigt man

$$|a_k^{(\alpha)}| \leq C_m K_{|\alpha|}, \quad (4.3. 13)$$

mit einer nur von $|\alpha|$ abhängigen Konstanten $K_{|\alpha|}$, wobei C_m die Konstante aus (2.4. 1) in Abschnitt 2.4 ist. Aus (2.4. 1) folgt nämlich

$$|a_k^{(\alpha)}| \leq C_m \int_{\mathbb{R}} |x^\alpha| (1 + |x - k|)^{-m} dx.$$

und dieses Integral spalte man auf in

$$\int |x^\alpha| (1 + |x - k|)^{-m} dx = \int_{|x| \leq |k|/2} + \int_{|k|/2 \leq |x| \leq 2|k|} + \int_{|x| \geq 2|k|} := I_1 + I_2 + I_3.$$

Dann beachte, daß $|x| \leq |x - k|$ bzw. $|x| \leq 2|x - k|$ für I_1 bzw. I_3 gilt. Die Wahl $m = |\alpha| + 2$ ergibt dann jeweils konvergente Integrale. Das mittlere Integral I_2 schätzt man direkt ab mit der gleichen Wahl von m (bei $d > 1$ noch Übergang zu radialen Koordinaten).

Die Konvergenz in (4.3. 12) ist nun gleichmäßig auf jedem Kompaktum, speziell auf $B_M := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M\}$. Aus (4.3. 12) und $\psi \perp S_2(\phi)$ folgt daher

$$\begin{aligned} \int_{B_M} x^\alpha \psi(x) dx &= \int_{B_M} \left(\sum_{|k|} a_k^{(\alpha)} \phi(x - k) \right) \psi(x) dx \\ &= \sum_{|k|} a_k^{(\alpha)} \int_{B_M} \phi(x - k) \psi(x) dx = \sum_{|k|} a_k^{(\alpha)} \int_{B_M^c} \phi(x - k) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

wobei B_M^C das Komplement zu B_M bezeichnet. Nun gilt aber nach (4.3. 13)

$$\sum_{|k|} |a_k^{(\alpha)}| |\phi(x-k)| \leq C_M K_{|\alpha|} \sum_{|k|} |\phi(x-k)| \leq C_M K_{|\alpha|} \sum_{|k|} (1+|x-k|)^{-m},$$

und die letztere Summe ist periodisch in x mit Periode 1. Daher ist leicht zu sehen, daß sie gleichmäßig in x beschränkt ist und es folgt mit einer weiteren Konstanten K

$$\left| \int_{B_M} x^\alpha \psi(x) dx \right| \leq K \int_{B_M^C} |\psi(x)| dx, \quad \rightarrow 0, M \rightarrow \infty.$$

Nun impliziert aber $x^\alpha \psi \in L_2(\mathbb{R})$, daß

$$\left| \int_{B_M^C} x^\alpha \psi(x) dx \right| \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

Bemerkung 4.3.3 Man kann dieses Lemma auch unter der schwächeren Voraussetzung $x^\alpha \phi \in L_2(\mathbb{R})$ für $0 \leq \alpha \leq n$ an ϕ beweisen, der Beweis dazu benötigt jedoch Distributionentheorie (vergl. [Mallat98]).

Aus der Momentenbedingung (4.3. 11) kann man wiederum eine Bedingung an das Symbol der Erzeugenden ϕ ableiten.

Lemma 4.3.3 Es sei $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ Erzeugende einer MRA, deren Translate eine ONB bilden, und $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ das zugehörige Wavelet gemäß Korollar 4.2.1. Gilt dann $x^l \psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ für $0 \leq l \leq n$ und die Momentenbedingung (4.3. 11), so impliziert dies für das Symbol $H(z)$ von ϕ die Bedingung

$$H(z) = ((1+z)/2)^{n+1} L(v), \quad z = e^{-iv}. \quad (4.3. 14)$$

mit $L(v) \in C^n$, d.h. $H(z)$ hat eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = -1$.

BEWEIS: Nach Lemma 2.4, Teil 4 gilt

$$\int p(x) \psi(x) e^{-ivx} dx = p(iD) \int \psi(x) e^{-iv} dx$$

für alle Polynome p vom Grad $\leq n$, denn Integral und Ableitung sind vertauschbar, weil das Integral auf der linken Seite nach Voraussetzung absolut konvergiert. Damit folgt, daß $\hat{\phi}(v) \in C^n$ gilt und $D^l \psi(v)|_{v=0} = 0$ für $0 \leq l \leq n$ nach (4.3. 11), d.h. $\hat{\psi}(v)$ hat eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $v = 0$. Nun gelten nach Abschnitt 4.2 die Relationen

$$\hat{\phi}(v) = H(e^{-iv/2}) \hat{\phi}(v/2), \quad \hat{\psi}(v) = G(e^{-iv/2}) \hat{\phi}(v/2),$$

so daß wegen $\hat{\phi}(0) \neq 0$ auch die Symbole $H(z), G(z)$ in einer Umgebung von 0 n -mal stetig differenzierbar sind. Ferner hat $G(z)$ eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = 1$, da $\hat{\psi}(v)$ eine solche bei $v = 0$ hat. Nach Formel (4.2. 36) von Korollar 4.1 gilt aber

$$G(z) = a(v) \overline{H(-z)}, \quad z = \exp(-iv)$$

mit $|a(v)| = 1$. Es muß dann $H(z)$ eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = -1$ besitzen und (4.3. 14) folgt. \square

Man kann nun diese beiden Aussagen zu einem Ringschluß mit folgendem Lemma vervollständigen.

Lemma 4.3.4 Es gelte $\{|kh_k|\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$ für die Maske einer erzeugenden Funktion $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\int \phi(x) dx = 1$. Hat das Symbol $H(z)$ dann eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = -1$ und gilt $H(1) = 1$, so erfüllt ϕ die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung n .

BEWEIS: Nach Lemma 4.2.4 und Satz 4.2.1, wonach $\int \phi(x)dx = 1$ sein muß, gilt gleichmäßig und absolut

$$\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(e^{-iv2^{-j}}\right), \quad |v| \leq M,$$

für jedes $M > 0$.

Hat nun $H(z)$ eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = -1$, so hat $H(e^{-iv/2})$ eine solche bei $v = 2\pi$ wegen $e^{i\pi} = -1$ und allgemeiner bei $v_j = 2\pi + 4j\pi$, d.h. $\hat{\phi}$ hat eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $2\pi \bmod 4\pi$. Dies ergibt die Punkte $\dots, -2\pi, 2\pi, 6\pi, 10\pi, \dots$ als Nullstellen. Als nächstes beachte $H(e^{-iv_j/4}) = H(-1)$ für $w_j = 4\pi + 8j\pi$, so daß nach obiger Formel $\hat{\phi}$ eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $v = 4\pi \bmod 8\pi$ hat. Dies ergibt die Nullstellen $\dots, -4\pi, 4\pi, 12\pi, \dots$. Fährt man so sukzessive fort, erhält man Nullstellen an allen Punkten $2\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, d.h. die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung n . \square

Damit kommen wir zu folgenden Äquivalenzsatz

Satz 4.3.2 ("Vanishing Moments") *Es sei die stetige schnell abfallende Funktion ϕ mit $\int \phi(x)dx = 1$ Erzeugende einer MRA, deren Translate eine ONB bilden. Sie erfülle eine Skalierungsgleichung mit Maske $\{kh_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$ und für das zugehörige Wavelet $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ gelte $x^l \psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ für $0 \leq l \leq n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. Die Polynome aus Π_n sind punktweise als Linearkombinationen von Translaten von ϕ darstellbar
2. Es gilt die Momentenbedingung

$$\int x^\alpha \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq n$$

3. Das Symbol von ψ hat eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = 1$
4. Das Symbol von ϕ hat eine $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $z = -1$
5. Es gelten die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung n

BEWEIS: Es fehlt lediglich die Richtung 5. \rightarrow 1. Sie ist schon in allgemeinerem Rahmen in Abschnitt 3.2.2 gezeigt worden, aber der Bequemlichkeit halber sei hier nochmals ein vereinfachter Beweis gegeben. Für $0 \leq j \leq n$ und x fest definiert man die Funktionen $g_j(y) := (x-y)^j \phi(x-y)$. Die Poisson-Summutationsformel in der Form von Korollar 2.2.1 ist daher anwendbar und ergibt

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (x-l)^j \phi(x-l) = \sum_l \hat{g}_j(2\pi k) = \sum_l e^{-i2\pi kx} \int_{\mathbb{R}} u^j \phi(u) e^{-i2\pi ku} du.$$

Weiter gilt mit $t = 2\pi k$

$$\int_{\mathbb{R}} u^j \phi(u) e^{-i2\pi ku} du = (it)^{-j} \int_{\mathbb{R}} \phi(u) (\partial/\partial t)^j e^{-itu} du = (it)^{-j} (D^j \hat{\phi})(-2\pi k),$$

so daß aus den Strang-Fix Bedingungen

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (x-l)^j \phi(x-l) = \delta_{0,j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq j \leq n$$

folgt. Im Falle $j = 0$ besagt dies gerade $f(x) \equiv 1 \in S_2(\phi)$. Schreibt man dann für $j \geq 1$ diese Gleichung als

$$x^j \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \phi(x-l) + \sum_{r=1}^j \binom{j}{r} x^r \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} (x-l)^{j-r} \phi(x-l) = 0,$$

so kann man sukzessive für $j = 1, 2, \dots, n$ auf $x^j \in S_2(\phi)$ schließen. \square

4.3.3 Konstruktion der Daubechies–Wavelets mit kompaktem Träger

Als notwendige Bedingung dafür, daß die Translate von ϕ eine ONB bilden, wurde in Lemma 4.2.2 an das Symbol $H(z)$ von ϕ die Beziehung

$$|H(x)|^2 + |H(-x)|^2 = 1, \quad z = e^{-iv}. \quad (4.3. 15)$$

aufgestellt. Nach Lemma 4.3.1 wissen wir außerdem, daß $H(z)$ bis auf einen monomialen Faktor als trigonometrisches Polynom zu wählen ist, um einen kompakten Träger für ϕ zu erhalten. Da ferner die Räume V_j der damit erzeugten MRA Polynome eines vorgegebenen Grades besitzen sollen, macht man nach Lemma 4.3.3 für das Symbol von $H(z)$ den Ansatz

$$H(e^{-iv}) = \left(\frac{1 + e^{-iv}}{2} \right)^N L(v) = e^{-iNv/2} (\cos v/2)^N L(v), \quad (4.3. 16)$$

mit einem trigonometrisches Polynom $L(v)$ und einem vorgegebenen $N = 0, 1, \dots$. Um Beziehung (4.3. 15) näher zu untersuchen, setzen wir dann

$$M(v) := |H(e^{-iv})|^2 = (\cos v/2)^{2N} |L(v)|^2, \quad (4.3. 17)$$

Wir setzen nun weiter voraus, daß die Koeffizienten von $H(z)$ und somit diejenigen von $H(z)^2$ reell sind. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $e^{-i\mu v}$ können wir die Form $|H(z)|^2 = |\sum_{k=-m}^m a_k e^{-ikv}|^2$ erreichen, so daß $|H(e^{-ikv})|^2$ und folglich $|L(v)|^2$ Cosinus-Polynome sind. Man kann daher $|L(v)|^2$ als ein Polynom $P_N(y)$ von $y := \sin^2 v/2$ schreiben und erhält aus (4.3. 15) als Bedingung an das Polynom P

$$1 = M(v) + M(v + \pi) = (1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y), \quad 1 - y = \cos^2 v/2. \quad (4.3. 18)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sollen nun charakterisiert werden. Dies geschieht mit

Satz 4.3.3 *Es gelten folgende Aussagen :*

1. Sind $p_1(x), p_2(x)$ zwei teilerfremde Polynome, so gilt

$$p_1(x)A(x) + p_2(x)B(x) = 1 \quad (4.3. 19)$$

mit zwei weiteren Polynomen $A(x), B(x)$.

2. Sind $p_1(x), p_2(x)$ Polynome vom Grad n_1, n_2 so kann man in (4.3. 19) Polynome $A^*(x), B^*(x)$ vom Grad $\leq n_2 - 1$ bzw. vom Grad $\leq n_1 - 1$ finden und diese sind eindeutig bestimmt.

3. Das Polynom

$$P_N^*(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k$$

ist eine spezielle Lösung von (4.3. 18), und zwar das eindeutig bestimmte Polynom niedrigsten Grades $N - 1$. Die allgemeine Lösung von (4.3. 18) hat die Form

$$P(y) = P_N^*(y) + y^N R(y) \quad (4.3. 20)$$

wobei $R(y)$ ein Polynom mit der Eigenschaft $R(1 - y) = -R(y)$ ist.

BEWEIS:zu a): Er benützt den Euklidischen Algorithmus. O.B.d.A. kann man $\text{grad } p_1 \geq \text{grad } p_2$ annehmen und erhält

$$p_1(x) = a_2(x)p_2(x) + b_2(x), \quad \text{grad } a_2 = \text{grad } p_1 - \text{grad } p_2$$

Ebenso folgt

$$p_2(x) = a_3(x)p_3(x) + b_3(x), \quad \text{grad } b_3 < \text{grad } b_2$$

und iterativ weiter (mit $b_1 := p_2$) für $i = 2, 3, \dots$,

$$b_{i-1}(x) = a_{i+1}(x)b_i(x) + b_{i+1}(x), \quad \text{grad } b_{i+1} < \text{grad } b_i. \quad (4.3. 21)$$

daher muß diese Iteration einmal stoppen und es gilt $b_{n+1} = 0$ für ein gewisses n , d.h.

$$b_{n-1}(x) = a_{n+1}(x)b_n(x).$$

Hieraus schliesst man, daß b_n Teiler von b_{n-1} ist, und dann sukzessive aus (4.3. 21) für $i = n-1, n-2, \dots$, daß b_n ein Teiler von sowohl p_1 als auch p_2 ist. Da p_1, p_2 teilerfremd sein sollen, folgt daraus, daß b_n eine Konstante $\neq 0$ sein muß.

Nun geht man rückwärts und erhält

$$\begin{aligned} b_n &= -a_n b_{n-1} + b_{n-2} = -a_n(b_{n-3} - a_{n-1}b_{n-2}) + b_{n-2} \\ &= (1 + a_n a_{n-1})b_{n-2} - a_n b_{n-3} \equiv c^{(2)}b_{n-2} - d^{(2)}b_{n-3}. \end{aligned}$$

Hier wieder (4.3. 21) eingesetzt in b_{n-2} erhält man $b_n = c^{(3)}b_{n-3} - d^{(3)}b_{n-4}$ usw. bis schließlich

$$b_n = c^{(n-2)}b_2 - d^{(n-2)}b_1 = c^{(n-2)}(p_1 - a_2 p_2) - d^{(n-2)}p_2$$

folgt, d.h. wegen $b_n = \text{const.}$ die Behauptung.

Beweis zu b): Gilt a) mit gewissen $A(x), B(x)$, so schreibe man $A(x) = C(x)p_2(x) + A^*(x)$, wobei $\text{grad } A \geq n_2 = \text{grad } p_2$ und $\text{grad } A^* < n_2$ gilt. Mit diesem $C(x)$ setze man $B^*(x) = C(x)p_1(x) + B(x)$ und es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= p_1(x)[C(x)p_2(x) + A^*(x)] + p_2(x)[B^*(x) - C(x)p_1(x)] \\ &= p_1(x)A^*(x) + p_2(x)B^*(x) \end{aligned} \quad (4.3. 22)$$

und daraus $\text{grad } B^* < n_1 = \text{grad } p_1$. Die Eindeutigkeit folgt nun so: wären $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$ ein weiteres Paar solcher Polynome, so wäre ebenfalls (4.3. 23) erfüllt und Subtraktion ergibt

$$0 = p_1(x)[A^*(x) - \tilde{A}(x)] + p_2(x)[B^*(x) - \tilde{B}(x)].$$

Dies liefert aber einen Widerspruch, denn die Nullstellen von $p_2(x)$ müssten dann alle in denen von $A^* - \tilde{A}$ enthalten sein, was wegen $\text{grad } p_2 = n_2 > \text{grad } A^* - \tilde{A}$ nicht sein kann.

Beweis zu c): Wir wenden Teil b) auf die Polynome $p_1(x) = (1-x)^N, p_2(x) = x^N$ an. Dann implizieren die Eindeutigkeit von $A^*(x), B^*(x)$ und

$$1 = (1-x)^N A^*(x) + x^N B^*(x) = x^N A^*(1-x) + (1-x)^N B^*(1-x),$$

daß $B^*(x) = A^*(1-x)$ gilt. Dies setzen wir in obige Gleichung ein, lösen nach A^* auf und entwickeln nach Taylor und erhalten

$$\begin{aligned} A^*(x) &= (1-x)^{-N} [1 - x^N A^*(1-x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{k} x^k [1 - x^N A^*(1-x)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^k + R_0(x) := P_N^*(x) + R_0(x) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $R_0(x)$. Dieses enthält Potenzen, die sämtlich höher als x^N sind. Da aber A^* vom Grad $N-1$ sein soll, muß es gleich $P_N^*(x)$ sein und das oben angegebene Polynom $P_N^*(x)$ ist eine Lösung von (4.3. 18).

Die Lösungen $P(x)$ mit höherem Grad können als $P(x) = P_N^*(x) + \tilde{R}(x)$ mit einem Polynom $\tilde{R}(x)$ geschrieben werden. Dann folgt

$$0 = (1-x)^N \tilde{R}(x) + x^N \tilde{R}(1-x).$$

Auflösung nach $\tilde{R}(x)$ ergibt $\tilde{R}(x) = -x^N R(x)/(1-x)^N \equiv x^N R(x)$ und man sieht, daß $R(1-y) = -R(y)$ gelten muß. □

Bemerkung 4.3.4 Teil a) und b) dieses Satzes bilden einen Spezialfall des Satzes von Bezout.

Mit obigem Satz erhält man alle Lösungen $M(v) = (1 - y)^N P(y)$, $y = \sin^2 v/2$ der Gleichung (4.3. 17) durch die Wahl eines Polynoms $P(y)$ in (4.3. 20). Um nun das Symbol $H(z)$, $z = E^{-iv}$ zu bestimmen, müssen wir noch die "Wurzel" aus $M(v)$ in (4.3. 17) ziehen. Dies geht immer unter der lt.(4.3. 17) vorausgesetzten Eigenschaft $M(v) \geq 0$, wie der folgende Satz von F.Riesz zeigt

Satz 4.3.4 (F.Riesz 1911) Ist $M(v)$ ein positives trigonometrisches Cosinus-Polynom vom Grad m , so gibt es ein komplexes Polynom $H(z)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten, so daß für $z = E^{-iv}$ gilt

$$M(v) := |H(z)|^2, \quad H(z) = (1/2) \sum_{j=0}^m h_j z^j. \tag{4.3. 23}$$

BEWEIS: Er sei hier nur skizziert, Näheres ist G.Polya –G.Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (1964, Bd.II, Kapitel VI, Aufgaben 11,40,41) zu entnehmen .

Man schreibt $M(v) = e^{-imv} Q(e^{-iv})$, wobei $Q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{2m} z^{2m}$ ein komplexes Polynom vom Grad $2m$ ist. Die Koeffizienten müssen die Eigenschaft $a_j = \overline{a_{2m-j}}$ erfüllen, damit $M(v)$ reell ist, und genügen daher der Relation $Q(z) = z^{2m} \overline{Q}(z^{-1})$. Man kann also $Q(z)$ folgendermaßen in Nullstellen zerlegen

$$Q(z) = c \cdot z^r \prod_{\mu=1}^k (z - \xi_\mu) \prod_{\nu=1}^l (z - z_\nu)(z - \overline{z_\nu}^{-1}) \quad , c \neq 0$$

Hier bezeichnen ξ_μ die Nullstellen mit $|\xi_\mu| = 1$ auf dem Einheitskreis und $z_\nu, \overline{z_\nu}^{-1}$ diejenigen außerhalb (es gilt ja $\xi_\mu = \overline{\xi_\mu}^{-1}$!). Nun hat jede Nullstelle von $Q(z)$ auf dem Einheitskreis die gleiche Multiplizität wie die entsprechenden von $M(v)$, deren Multiplizität gerade ist wegen $M(v) \geq 0$. Also kann man weiter schreiben $\prod_{\mu=1}^k (z - \xi_\mu) = \prod_{\mu=1}^{k/2} (z - \xi_\mu)^2$ und unter Beachtung von $|e^{iv} - \overline{z_\nu}^{-1}| = |e^{-iv} - \overline{z_\nu}|/|z_\nu|$ somit

$$M(v) = |M(v)| = |c| \cdot \left| \prod_{\mu=1}^{k/2} (e^{iv} - \xi_\mu)^2 \prod_{\nu=1}^l (e^{iv} - z_\nu)(\overline{z_\nu} - e^{-iv})/|z_\nu| \right|$$

Daraus folgt schon die Darstellung $M(v) = |H(z)|^2$ mit einem (i. a. komplexen) Polynom $H(z)$ vom Grad $\leq m$. Im vorliegenden Fall eines Cosinus-Polynoms $M(v)$ muss für die Koeffizienten von $Q(z)$ schärfer gelten $a_j = a_{2m-j}$, so daß die Nullstellen ξ_μ und z_ν paarweise konjugiert auftreten , d. h. es sind $\xi_\mu, \overline{\xi_\mu}$ und $z_\nu, \overline{z_\nu}, 1/z_\nu, 1/\overline{z_\nu}$ alle Nullstellen. Entsprechend numeriert kann man sie zusammenfassen und erhält z. B. im zweiten Produkt Faktoren der Form

$$|(e^{iv} - z_\nu)(\overline{e^{iv} - z_\nu})(\overline{z_\nu} - e^{-iv})(e^{-iv} - \overline{z_\nu})/|z_\nu|^2| = |e^{i2v} - 2e^{iv} \operatorname{Re} z_\nu + |z_\nu|^2|/|z_\nu|^2.$$

Daher kann in diesem Fall $H(z)$ als Polynom mit reellen Koeffizienten angenommen werden. □

Bemerkung 4.3.5 Im "homogenen " Fall $R(x) = 0$ ist für $M^*(v) := (1 - y)^N P_N^*(x)$ die Voraussetzung $M(v) \geq 0$ erfüllt, insbesondere auch die zusätzliche Bedingung (4.2. 44) des Satzes 4.2.4 von Mallat, so daß nach Korollar 4.2.1- speziell Relation (4.2. 38)- daraus Wavelets berechnet werden können. Diese bilden den Standard-Fall der **Daubechies-Wavelets**.

Dazu sei weiter formuliert

Korollar 4.3.1 Sollen mit einer endlichen Maske

$$H(z) := \frac{1}{2} \sum_{l=0}^m h_l z^l$$

Wavelets mit N verschwindenden Momenten konstruiert werden, d.h. Linearkombinationen von ihnen stellen Polynome vom Grad $N - 1$ exakt dar, so muß $M \geq 2N - 1$ sein. Gleichheit erhält man bei der Wahl $R(y) = 0$ in (4.3. 20) bzw. $P(y) = P_N^*(y)$. in diesem Fall gilt $P_N^*(1 - \cos v) = |L(v)|^2$ in (4.3. 16).

Bemerkung 4.3.6 *Zu beachten ist, daß die Zerlegung von Satz 4.3.4 nicht eindeutig bestimmt ist. Je nachdem wie man die einzelnen Faktoren zusammenfasst, erhält man verschiedene $L(v)$ bzw. $H(z)$. Dies kann man ausnützen, um möglichst günstige $H(z)$ zu erhalten.*

Eine Möglichkeit besteht darin, von jedem Paar $z_\nu, 1/z_\nu$ diejenige Nullstelle zu wählen, die innerhalb des Einheitskreises liegt. Dies führt zu stark asymmetrischen Erzeugenden ϕ und Wavelets ψ . Ein anderes Prinzip, nach dem dies geschehen kann, besteht daher in der Forderung, daß $H(z)$ sich möglichst ähnlich wie ein Filter mit linearer Phase verhält, d. h. man wählt unter den nach (4.3. 23) möglichen Zerlegungen $H(z)$ so, daß es möglichst gut die Beziehung

$$H(e^{-iv}) = e^{-ilv} |H(e^{-iv})| \quad (4.3. 24)$$

für ein $l \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Ein solcher Filter verhält sich stabiler gegenüber Phasenverzerrungen, was bei einer Reihe von Anwendungen wünschenswert ist. Seine Koeffizienten besitzen außerdem die vorteilhafte Symmetrie-Eigenschaft $h_n = h_{2l-n}$. Dies ist aber bei orthogonalen Wavelets mit kompaktem Träger, wie sie gerade durch die beiden vorangegangenen Sätze über (4.3. 20) und (4.3. 23) geliefert werden sollen, aus prinzipiellen Gründen mit Ausnahme des Haar-Wavelets nicht möglich.

Diese Sachverhalte sind in [Chui92a], Abschnitt 5.5, ausführlich dargestellt. In [Daubechies92], Abschnitt 8.1 ist weiter beschrieben, wie man die Mehrdeutigkeit der Zerlegung (4.3. 23) ausnützen kann, um (4.3. 24) möglichst gut zu erfüllen. Man erhält dann die sogenannten **Symmlets**. Strategien zur Wahl von $H(z)$ anhand von (4.3. 20) und (4.3. 23) sind ferner beschrieben in [Daubechies92], Abschnitt 6.4. Abschließend sei bemerkt, daß die praktische Berechnung der zu $H(z)$ gehörenden Erzeugenden ϕ über die Unterteilungsalgorithmen aus Abschnitt 4.4.3 erfolgt.

4.3.4 Glattheit der Daubechies- Wavelets

Um die Glattheit von ϕ zu untersuchen, erinnern wir nochmals an Lemma 2.4.10 in Abschnitt 2.4, wo – als eine Variante des Satzes 2.4.4 für Sobolev- Räume – gezeigt worden war, daß aus $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(v)| (1 + |v|)^\alpha dv < \infty$ mit $\alpha \geq 0$ und $\alpha - n > 0$ mit $n \in \mathbb{Z}_+$ sowohl $\phi \in C^n$ als auch die Hölderstetigkeit $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^{\alpha-n}$ folgt; d. h. per Definition gilt $\phi \in C^\alpha$. Ein erster Blick auf $\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^{\infty} H(e^{-2^{-j}iv})$ in (4.3. 16) zeigt nun

$$\hat{\phi}(v) = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-2^{-j-1}iNv} \cos^N(2^{-j-1}v) L(2^{-j}v) = e^{iNv/2} \left[\text{sinc}\left(\frac{v}{2}\right) \right]^N \prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v),$$

wobei

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j}x) = \text{sinc}x$$

benutzt wurde. Der Faktor $[\text{sinc}(v/2)]^N$ hat für $|v| \rightarrow \infty$ bereits das Abklingverhalten $|v|^{-N}$; es ist allerdings noch notwendig, das Anwachsen von $\prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v)$ zu kontrollieren. Wir folgen dazu der Darstellung in [Daubechies92]; die Voraussetzungen seien wie in Lemma 4.2.4.

Lemma 4.3.5 *Gilt*

$$q := \sup_v |L(v)| < 2^{N-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0,$$

so folgt $\phi \in C^\alpha$, d.h. es gilt $\phi \in C^\alpha$ für jedes $\alpha < N - 1 - \log_2 q$.

BEWEIS: Wegen $H(1) = 1$ muß $L(0) = 1$ sein, also $|L(v)| \leq 1 + c|v|$ wegen der Periodizität von $L(v)$. Für $|v| \leq 1$ folgt

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v) \right| \leq \sup_{|v| \leq 1} \prod_{j=1}^{\infty} e^{2^{-j}C|v|} \leq e^C.$$

Im Falle $|v| \geq 1$ wähle $J \in \mathbb{N}$, so daß $2^{J-1} \leq |v| \leq 2^J$. Dann folgt mit genügend kleinem $\gamma > 0$, daß

$$\left| \hat{\phi}(v) \right| \leq C_3 (1 + |v|)^{-N} \left| \prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v) \right|$$

und weiter

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}v) \right| &\leq \prod_{j=1}^J |L(2^{-j}v)| \prod_{j=1}^{\infty} |L(2^{-j-J}v)| \leq q^J e^C \leq 2^{J(N-\alpha-1-\gamma)} C_1 \\ &\leq (1 + |v|)^{N-\alpha-1-\gamma} C_2 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die obige Abschätzung von $\hat{\phi}(v)$ ein, so folgt

$$\left| \hat{\phi}(v) \right| \leq C_3 (1 + |v|)^{-N} C_2 (1 + |v|)^{N-\alpha-1-\gamma} \leq C_4 (1 + |v|)^{-\alpha-1-\gamma}$$

und daher $\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\phi}(v) \right| (1 + |v|)^{\alpha} dv < \infty$, d.h. nach der obigen Bemerkung $\phi \in C^{\alpha}$. \square

Man kann diese Beweismethode noch verfeinern.

Lemma 4.3.6 *Es seien $H(z)$ und $L(v)$ wie bisher gegeben und ferner*

$$q_j := \sup_v \left| \prod_{k=0}^{j-1} L(2^{-k}v) \right|$$

definiert, sowie $K_j := (1/j) \log_2 q_j$ und $K := \inf_j K_j$. Dann gilt schärfer $\lim_{j \rightarrow \infty} K_j = K$ und weiter $\phi \in C^{\alpha}$ falls $\alpha < N - 1 - K$ gilt.

BEWEIS: Es sei zunächst $j > j_0$ bei festem j_0 und $j = n \cdot j_0 + r$ mit $0 \leq r < j_0$ gesetzt. Durch Zusammenfassen von je j_0 Faktoren erhält man

$$\begin{aligned} q_j &= \sup_v \left| \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{j_0-1} L(v 2^{-k j_0 - l}) \prod_{l=0}^r L(v 2^{-k n - l}) \right| \\ &\leq (q_{j_0})^n \sup_v \left| \prod_{l=0}^r L(v 2^{-k n - l}) \right| \leq (q_{j_0})^n \cdot q_1^r \end{aligned}$$

und weiter

$$K_j = \frac{\log q_j}{j \log 2} \leq \frac{n \cdot \log q_{j_0} + r \cdot \log q_1}{j \log 2} \leq K_{j_0} + \frac{1}{j} C_{j_0}.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle man nun $j_0 = j_0(\epsilon)$ so groß, daß $K_{j_0} \leq K + \epsilon$ nach Definition von K . Dann folgt aus dem Vorigen

$$K_j \leq K + \epsilon + \frac{1}{j} C_{j_0(\epsilon)}.$$

Wird $j > j_2(\epsilon)$ mit geeignetem j_2 gewählt, so ergibt sich $K_j \leq K + 2\epsilon$ für diese j und somit die erste Aussage.

Es sei nun $K_{\rho} < N - 1 - \alpha$ für ein $\rho = 1, 2, \dots$ (dies ist speziell der Fall, wenn $\alpha < N - 1 - K$). Dann fassen wir je ρ Terme im Produkt $\prod_{l=1}^{\infty} L(v 2^{-l})$ zusammen und schreiben

$$\prod_{l=1}^{\infty} L(v 2^{-l}) = \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\rho-1} L(v 2^{-1-j\rho-k}) \equiv \prod_{j=0}^{\infty} L_{\rho}(v 2^{-1-j\rho})$$

Damit können wir die gleiche Technik wie im vorigen Lemma jetzt auf $L_\rho(v)$ anwenden mit dem Faktor 2^ρ statt 2. Dies ergibt nach Voraussetzung an K_j wie oben

$$\left| \hat{\phi}(v) \right| \leq C(1 + |v|)^{-N+K_\rho} \leq C(1 + |v|)^{-\alpha-1-\gamma}$$

□

Zur Illustration wenden wir die Kriterien dieser beiden Lemmata auf das Polynom $P_N^*(y)$ aus dem vorangegangenen Unterabschnitt anwenden. Wir wissen danach bereits, daß

$$P_N^*\left(\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)\right) = |L_N^*(v)|^2, \quad H(e^{-iv}) = \left(\frac{1 + e^{-iv}}{2}\right)^N L_N^*(v) \quad (4.3. 25)$$

ein Symbol $H(z)$ mit einer Erzeugenden ϕ liefert, deren Translate eine ONB bilden. Wir benötigen im Folgenden einige Eigenschaften von $P_N^*(y)$, die mit elementaren Mitteln gezeigt werden können.

Lemma 4.3.7 Für das Polynom P_N^* in Satz 4.3.3 gelten

1. $x^{-N+1}P_N^*(x)$ ist monoton fallend in $x \geq 0$.
2. $P_N^*(x) \leq 2^{N-1} \max(1, 2x)^{N-1}$, $0 \leq x \leq 1$.

BEWEIS: Die erste Aussage folgt sofort aus

$$x^{-N+1}P_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} x^{-N+1+k}.$$

Die zweite Aussage ergibt sich wie folgt: Aus $x^N P_N^*(1-x) + (1-x)^N P_N^*(x) = 1$ erhält man durch Einsetzen von $x = 1/2$ den Wert $P_N^*(1/2) = 2^{N-1}$. Damit folgt $P_N^*(x) \leq P_N^*(1/2) = 2^{N-1}$ für $0 \leq x \leq 1/2$. Im Falle $x \geq 1/2$ folgt mit der ersten Aussage

$$P_N^*(x) \leq x^{N-1} \left[2^{N-1} P_N^*\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 4^{N-1} x^{N-1}.$$

□

Hieraus ergibt sich für das Beispiel in (4.3. 25) zunächst

$$\begin{aligned} \sup_{|v| \leq \pi} |L_N^*(v)| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \right|^{1/2} < \left(2^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} 2^{-n} \right)^{1/2} \\ &= \left[2^{N-1} P_N^*\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{1/2} = 2^{N-1} \end{aligned}$$

Lemma 4.3.5 kann dann wegen $q < 2^{N-1}$ nur für $\alpha = 0$ angewendet werden, d. h. ϕ ist stetig. Dies folgt jedoch bereits aus $\hat{\phi} \in L_1(\mathbb{R})$ und ist nicht das optimal Erreichbare. Anwendung von Lemma 4.3.6 mit $l = 2$ liefert bereits eine bessere Aussage: Wegen

$$\sin^2 v = (1 - \cos v)(1 + \cos v) = 2(1 - \cos v) \left(1 - \frac{1-v}{2} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{v}{2} \right) \left[1 - \sin^2 \left(\frac{v}{2} \right) \right].$$

können wir schreiben

$$q_2 = \sup_{|v|} |L_N^*(v)L_N^*(2v)| = \sup_{0 \leq y \leq 1} \sqrt{P_N^*(y)P_N^*(4y(1-y))}, \quad y = \sin^2 \left(\frac{v}{2} \right)$$

Nun ist $4y(1-y)$ für $y \leq 1/2$ monoton steigend und für $y \geq 1/2$ monoton fallend; das Maximum ist 1. Daher folgt

$$\left| P_N^*(y)P_N^*(4y(1-y)) \right| \leq \left| P_N^*\left(\frac{1}{2}\right) \right| \left| P_N^*(1) \right| \leq 2^{N-1} 4^{N-1} = 2^{3(N-1)}.$$

Im Falle $y \geq 1/2 - \sqrt{3}/4$ gilt $4y(1-y) \leq 1/2$ und daher analog

$$|P_N^*(y)P_N^*(4y(1-y))| \leq |P_N^*(1)| \left| P_N^*\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2^{N-1}4^{N-1} = 2^{3(N-1)}.$$

Im Falle $1/2 \leq y \leq 1/2 + \sqrt{2}/4$ folgt wegen $y^2(1-y) \leq 4/27$ für $x > 0$ mit Teil 2 von Lemma 4.3.7 schließlich

$$\begin{aligned} |P_N^*(y)P_N^*(4y(1-y))| &\leq 4^{N-1}2y^{N-1}(4y(1-y))^{N-1} \leq 4^{N-1}(16y^2(1-y))^{N-1} \\ &\leq 2^{6(N-1)}\left(\frac{4}{27}\right)^{N-1} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man nach Wurzelziehen $q_2 \leq 2^{4(N-1)}\sqrt{27}^{-N+1}$ und daher

$$K_2 \leq (N-1)(2 - (3/4)\log_2 3).$$

Wegen $K < N - 1 - \alpha$ bzw. $\alpha < N - 1 - K$ folgt dann $\alpha = \mu(N-1)$ mit $\mu = (3\log_2 3)/4 - 1 \approx 0,1887218754$, d. h. eine Lipschitzstetigkeit mit dem Exponenten α .

Die Eigenschaft $\lim_{j \rightarrow \infty} K_j = K$ in Lemma 4.3.6 ist wichtig im Hinblick auf das folgende Lemma, das zeigt, daß asymptotisch gesehen der Wert von K die optimale Glattheit von $\hat{\phi}$ bestimmt.

Lemma 4.3.8 *Seien $H(z)$ und $L(z)$ wie vorher gegeben und die Translate der Erzeugenden ϕ liefere eine ONB. Dann gibt es eine Folge $\{\xi_l\}$ mit $|\xi_l| \leq 2^{l+1}\pi$ und*

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} L(2^{-j}\xi_l) \right| \geq C(1 + |\xi_l|)^K$$

mit K aus dem obigen Lemma und von l unabhängiger C .

Der Beweis benutzt die notwendige Bedingung nach A. Cohen (Satz 4.11). Wir gehen darauf nicht weiter ein, sondern verweisen an dieser Stelle auf [Daubechies92], Lemma 7.1.3.

Für die Konstante K kann man unter Zusatzbedingungen scharfe Abschätzungen angeben. Es gilt

Lemma 4.3.9 *Es sei $H(x) = ((1+z)/2)^N L(v)$, $z = \exp(-iv)$ und es gelte $|L(v)| \leq |L(2\pi/3)|$ für $|v| \leq 2\pi/3$ und $|L(v)L(2v)| \leq |L(2\pi/3)|^2$ für $2\pi/3 \leq |v| \leq \pi$. Dann gilt für die durch H erzeugte Lösung ϕ der Skalierungsgleichung $|\hat{\phi}(v)| \leq C(1 + |v|)^{-N+K}$ mit $K = \log_2 |L(2\pi/3)|$; dieses Abklingverhalten ist optimal.*

Bezüglich eines Beweises sei auf Lemma 7.1.7 in [Daubechies92] verwiesen. Die Idee dahinter beruht auf der Beobachtung, daß $y^* = 3/4 := \sin v^*/2$ Fixpunkt der Abbildung $y \mapsto 4y(1-y)$ ist, woraus

$$|L_N(2v^*)|^2 = P_N^*(4y^*(1-y^*)) = P_N^*(y^*) = (L(v^*))^2, \quad v^* = 2\pi/3.$$

Insbesondere kann man die Voraussetzungen des Lemmas für $P_N^*(x)$ nachweisen. Das Resultat ist die asymptotische Abschätzung

$$|L_N^*(v)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N + (\log_2 |P_N^*(3/4)|)/2}.$$

Für $P_N^*(3/4)$ kann man eine asymptotisch optimale Abschätzung mittels Lemma 4.3.7 angeben und erhält

Satz 4.3.5 *Die Polynome $P_N^*(y)$ aus (4.3. 25) liefern eine Lösung $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ der Verfeinerungsgleichung 4.2. 2 mit einer $C^{(N-1)\alpha}$ -Glattheit, wobei $\alpha = \alpha(N)$ sich für $N \rightarrow \infty$ dem Wert $1 - (\log_2 3)/3 \approx 0,2075$ annähert.*

Dieses Ergebnis ist für kleine N nicht scharf. Dazu werden in [Daubechies92] außerdem noch zwei weitere Zugänge zur Untersuchung der Glattheit von ϕ dargestellt. Der erste besteht wie der vorige in einer Abschätzung des Abklingverhaltens von $\hat{\phi}$, diesmal in der L_1 - oder L_2 -Norm (Littlewood-Paley-Abschätzungen). Dies liefert für die ersten zehn Erzeugenden aus P_N^* , $N = 2, 3, \dots, 10$ noch erheblich bessere Ergebnisse als die Methode der invarianten Zyklen, z. B. (alle Werte mit drei Nachkommastellen angegeben)

N	2	3	4	6	8	10
α	0,500	0,915	1,275	1,888	2,417	2,902

also sogar $\alpha/(N - 1) > 0.3$ für diese N !

Die zweite Methode benutzt keine Fourieranalysis, sondern Überlegungen aus der Theorie der Lösungen von Verfeinerungsgleichungen und liefert die exakten Werte

N	2	3	4
α	0,550	1,088	1,618

Einzelheiten können wir hier nicht angeben (vergl. [Daubechies92])

4.4 Praktische Aspekte einer MRA

4.4.1 Zerlegungs- und Rekonstruktions-Algorithmen

Ein allgemeines Approximationsproblem lautet folgendermaßen:

Gegeben sei eine Funktion f . Die Aufgabe ist es nun, eine Approximation \tilde{f} aus einem der Räume V_J zu berechnen. Dabei soll J den kleinstmöglichen Wert haben, so daß ein vorgegebenes Kriterium für die Güte der Approximation gerade noch erfüllt ist (Im Limes $J \rightarrow \infty$ ist dies wegen (R5) stets möglich).

Die praktische Lösung hängt allerdings sehr davon ab, welche Informationen man über f hat. Einiges dazu werden wir im Unterabschnitt 4.4.3 ausführen. Eine der Schwierigkeiten besteht darin, daß man den Wert von J nicht kennt. Dazu hat man einen Algorithmus zu entwickeln, mit dessen Hilfe man effizient sowohl J als auch die Approximation selbst erhält. Die Grundidee ist einfach: Man startet mit einer (im Allgemeinen groben) Approximation aus V_0 . Unter Benutzung der Wavelet-Zerlegung

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j = V_j \oplus W_j$$

verfeinert man die Approximation, indem man solange schrittweise zu V_1, V_2, \dots, V_J übergeht, bis das Kriterium erfüllt ist. Schematisch sieht das dann so aus:

$$\begin{array}{ccccccccccc} V_0 & \rightarrow & V_1 & \rightarrow & V_2 & \rightarrow & \cdots & V_{J-1} & \rightarrow & V_J \\ & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \nearrow \\ W_0 & & W_1 & & W_2 & & \cdots & W_{J-1} & & \end{array}$$

Grundidee des Zerlegungs- und des Rekonstruktions-Verfahrens

Dieses „hierarchische Prinzip“ ist bei den verschiedensten Aufgabenstellungen bis hin zur Lösung von Operatorgleichungen (z. B. DGLen) anwendbar. Für die praktische Anwendung ist es wichtig, für den Übergang von V_j nach V_{j+1} einen effizienten Algorithmus zu finden. Wie wir im Folgenden zeigen werden, kann eine MRA genau dies leisten. Eine andere Interpretation rührt von der Signal- bzw.

Bildverarbeitung her, für die das Konzept der MRA ursprünglich entwickelt wurde: Gegeben sei eine Approximation $s_n(x)$ eines Signals $s(x)$. Diese wird zunächst aufgespalten in

$$s_n(x) \equiv \sum_k c_k^n \phi_{n,k}(x) = \underbrace{s_{n-1}(x)}_{V_{n-1}} + \underbrace{t_{n-1}(x)}_{W_{n-1}}, \quad (4.4. 1)$$

wobei wie schon früher vereinbart $\phi_{n,k}(x) := 2^{n/2} \phi(2^n x - k)$ gesetzt wurde. Dies weiter fortführend erhält man

$$s_n(x) = \underbrace{t_{n-1}(x)}_{W_{n-1}} + \underbrace{t_{n-2}(x)}_{W_{n-2}} + \cdots + \underbrace{t_{n-M}(x)}_{W_{n-M}} + \underbrace{s_{n-M}(x)}_{V_{n-M}}. \quad (4.4. 2)$$

Gemäß der Definition der W_j als Räume, die durch Skalierung entstehen, bedeutet dies eine Zerlegung nach immer größeren Details. I. a. wird man nur so lange zerlegen wollen, bis man bei der nächsten Zerlegung ein „Bild“ s_{n-M-1} erhält, das keine wesentliche Information mehr liefert.

In der Sprache der Filter hat man nacheinander immer größere Details aus dem Bild gefiltert, und zwar durch sukzessive Anwendung von Hochpassfiltern, da nach dem Sampling-Theorem grobe Details und niedrige Frequenzen einander entsprechen.

Andererseits ist das ursprüngliche Signal $s(x)$ häufig mit Rauschen oder sonstigen Artefakten behaftet, deren Spektrum üblicherweise nur hohe Frequenzen enthält. Dann wird man zur Entfernung (oder zumindest Unterdrückung) dieser Störungen auch einen Tiefpassfilter verwenden. Das Endergebnis stellt somit i.a. einen Bandpassfilter dar (zu diesen Begriffen siehe Abschnitt 2.3.2). Verfeinerte und allgemeinere Filterungsmethoden entstehen, indem man die Wavelet-Koeffizienten *aller* Skalen ihrer Größe nach „filtert“, d.h. nur die dem Betrage nach kleinsten vernachlässigt.

Man kann nun (4.4. 2) auf zwei Arten lesen, von links nach rechts oder von rechts nach links. Die erste Lesart entspricht einer Analyse: Von $s(x)$ ausgehend ist die Zerlegung zu bestimmen. Die zweite Lesart entspricht einer Synthese: Die einzelnen Bestandteile der Zerlegung werden wieder zum ursprünglichen Signal zusammengesetzt.

Analyse bzw. Zerlegungs-Verfahren ('decomposition algorithm'). Bei dem Zerlegungsverfahren geht man von $s_n(x)$ aus und berechnet (in der angegebenen Reihenfolge) $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-M}$. Dabei charakterisieren die einzelnen Funktionen immer gröbere Details.

Synthese bzw. Rekonstruktions-Verfahren ('reconstruction algorithm'). Bei diesem Verfahren geht man von der größten Approximation s_{n-M} aus und verbessert sie indem man (wieder in der angegebenen Reihenfolge) $t_{n-M}, t_{n-M+1}, \dots, t_{n-1}$ hinzunimmt, d.h. mehr und mehr Details.

Im Folgenden sollen dafür effiziente Algorithmen angegeben werden. Dabei wird die *Synthese* mit den Verfeinerungsgleichungen (4.2. 2) für ϕ und (4.2. 28) von ψ durchgeführt. Für die *Analyse* verwendet man dagegen Zerlegungsformeln des Typs

$$\phi_{1,l}(x) = \sum_k a_{k,l} \phi_{0,k}(x) + b_{k,l} \psi_{0,k}(x). \quad (4.4. 3)$$

Die Koeffizienten $a_{k,l}, b_{k,l}$ seien dabei in $l_2(\mathbf{Z}^d)$ und eindeutig bestimmt. Eine solche Formel setzt nur voraus – allgemeiner als die Zerlegungsformel (4.2. 13) –, daß V_{j+1} die direkte Summe von V_j und W_j ist. Sie gilt daher sowohl für Prewavelets als auch für *echte* Wavelets. Im letzteren Fall, auf den wir uns hier beschränken, sind sie außer durch die obigen Verfeinerungsgleichungen noch durch die Orthonormalitätseigenschaften von ϕ, ψ festgelegt. Es folgt dann aus (4.4. 3)

$$a_{k,l} = (\phi_{1,l}, \phi_{0,k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{1,l}, \sum_\nu h_\nu \phi_{1,2k+\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{h}_{l-2k}.$$

Eine analoge Identität erhält man für die $b_{k,l}$, so daß im Falle von Wavelets gilt

$$\phi_{j,l}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_k \bar{h}_{l-2k} \phi_{j-1,k}(x) + \bar{g}_{l-2k} \psi_{j-1,k}(x) \right). \quad (4.4. 4)$$

Bei der Analyse wird nun mit Hilfe des Wavelets ψ eine Darstellung der $t_j(x) \in W_j$ als

$$t_j(x) = \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(x), \quad j = n-2, n-3, \dots, n-M \quad (4.4. 5)$$

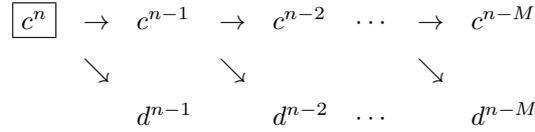
gesucht. Das Zerlegungsverfahren soll also – ausgehend von den Koeffizienten c_l^n – die neuen Koeffizienten d_k^j so bestimmen, daß (4.4. 2) erfüllt ist. Dies geschieht durch sukzessive Bestimmung der Zerlegung $s_j(x) = s_{j-1}(x) + t_{j-1}(x)$. Dazu liefert (4.4. 4)

$$\begin{aligned} s_j(x) &= \sum_l c_l^j \phi_{j,l}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l c_l^j \sum_k \left(\bar{h}_{l-2k} \phi_{j-1,k}(x) + \bar{g}_{l-2k} \psi_{j-1,k}(x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \phi_{j-1,k}(x) \sum_l \bar{h}_{l-2k} c_l^j + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \psi_{j-1,k}(x) \sum_l \bar{g}_{l-2k} c_l^j. \end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser Darstellung mit derjenigen von $s_{j-1}(x) + t_{j-1}(x)$ folgt

$$\begin{aligned} c_k^{j-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \bar{h}_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \bar{g}_{l-2k} c_l^j \end{aligned} \quad (4.4. 6)$$

Man kann die Koeffizienten der Zerlegung (4.4. 2) also nach folgendem Schema berechnen.



Schema des Zerlegungs-Verfahrens

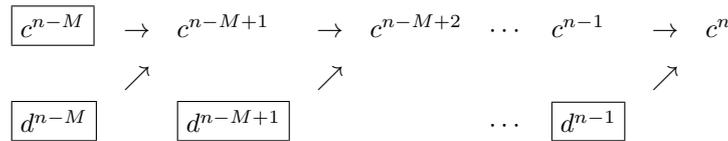
Nun betrachten wir das Rekonstruktionsverfahren. Bei ihm ist aus den Koeffizientenfolgen $c^{n-M}, d^{n-M}, \dots, d^{n-1}$ – vgl. (4.4. 1) – rückwärts die Koeffizientenfolge c^n in (4.4. 2) zu berechnen. Dazu geht man von den Skalierungsgleichungen (4.2. 2) und (4.2. 28) für ϕ und ψ aus; aus diesen folgt

$$\begin{aligned}
 s_{j-1}(x) + t_{j-1}(x) &= \sum_l c_l^{j-1} \phi_{j-1,l}(x) + \sum_l d_l^{j-1} \psi_{j-1,l}(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l c_l^{j-1} \sum_k h_k \phi_{j,2l+k}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l d_l^{j-1} \sum_k g_k \phi_{j,2l+k}(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \phi_{j,k}(x) \sum_l \left(c_l^{j-1} h_{k-2l} + d_l^{j-1} g_{k-2l} \right)
 \end{aligned}$$

und damit die Rekonstruktionsformel

$$c_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \left(c_l^{j-1} h_{k-2l} + d_l^{j-1} g_{k-2l} \right) \tag{4.4. 7}$$

Das Rekonstruktionsverfahren läuft also nach folgendem Schema ab:



Schema des Rekonstruktionsverfahrens

Bei beiden Schemata sind die Folgen markiert, von denen ausgegangen wird.

Berechnungs-Komplexität. Wir gehen davon aus, daß die Länge der Folge c^j gleich $l_j = \#c^j < \infty$ sei, und dies auch für die Filterfolgen $\{h_k\}$ und $\{g_k = (-1)^k h_{1-k}\}$ zutrefte. Für jede Berechnung der Faltung benötigt man dann höchsten f Punktoperationen, wobei f ein Vielfaches der Filterlänge ist. In (4.4. 6) fallen dann bei der j -ten Stufe l_j dieser Faltungen an. Dabei erhält man aus der Folge c^j erhält man neben d^{j-1} die Folge c^{j-1} , die von der Länge $l_{j-1} = \#c^{j-1} \approx l_j/2$ ist. Daher fallen in der nächsten Stufe nur etwa halb so viele Faltungen an. Insgesamt werden also etwa

$$2f(l_n + l_{n-1} + \dots + l_{n-M}) \approx f \cdot l_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^M} \right) \approx 2f \cdot l_n$$

Punktoperationen benötigt, denn für die Folgen d^j fällt noch einmal der gleiche Aufwand an. Die Anzahl der Operationen ist also *proportional* der Zahl l_n der anfangs gegebenen Koeffizienten c^n . Beim Rekonstruktionsverfahren fängt man mit zwei Folgen der Länge l_{n-M} an; in den folgenden Schritten hat man es dann mit Folgen mit geometrisch anwachsender Länge zu tun (bzw. die Länge verdoppelt sich jeweils). Es ist intuitiv klar, daß auch bei diesem Verfahren die Zahl der Punktoperationen proportional zu l_n ist.

Wir wollen es bei dieser kurzen Betrachtung belassen, der Interessierte kann sich z.B. in [Louis94] (S. 129ff) genauer informieren. Eine Bemerkung erscheint allerdings wichtig: Algorithmen deren Aufwand linear in der Zahl der Eingangsdaten ist gehören zu den schnellsten Algorithmen überhaupt ¹

¹Schnellere Algorithmen sind im Allgemeinen nicht mehr deterministisch, sondern beruhen auf statistischen Überlegungen. Üblicherweise bezeichnet man Algorithmen, die von der Ordnung $\mathcal{O}(n \log n)$ sind, noch als schnell – bekanntestes Beispiel ist die schnelle Fouriertransformation

4.4.2 Zum Problem der Ausgangs-Approximation.

Es bleibt noch zu diskutieren, wie man eine Anfangsapproximation wählt. Üblicherweise befindet man sich in der Situation, daß man die zu approximierende Funktion nur an diskreten Stellen, sagen wir an den Stellen $k2^{-n}$ kennt; d. h. die Abtastrate $h = 2^{-n}$ ist vorgegeben. Die einfachste Wahl ist dann natürlich

$$s(x) = s_n(x) = \sum_k c_k^n \phi(2^n x - k), \quad c_k^n = f(k2^{-n}) \quad (4.4. 8)$$

mit einer geeigneten Funktion ϕ , die die Forderung

$$\phi(l) = \delta_{0,l} \quad (4.4. 9)$$

erfüllt, denn dann wird durch $s(x)$ die wünschenswerte Interpolations-Eigenschaft

$$s(2^{-n}l) = \sum_k f(2^{-n}k) \phi(l - k) = f(2^{-n}l) \quad (4.4. 10)$$

trivialerweise erfüllt – sofern die Abtastwerte zuverlässig sind –.

Für orthogonale $\phi(2^n x - k)$, also bei Verwendung von Wavelets, ist Bedingung (4.4. 9) jedoch nicht erfüllt. Das Beste was man erreichen kann ist, daß ϕ bei 0 gut lokalisiert ist. Dann kann man sich leicht überlegen – man ersetze dazu die Summe in (4.4. 10) über k durch eine Summe über $|k - l| \leq r$ mit einem gewissen r – daß Bedingung (4.4. 8) i.a. nur bis zu einem gewissen n ausreichend genau erfüllt ist. Wichtiger aber ist es zu untersuchen, welchen Fehler man mit dem Sampling- Ansatz (4.4. 8) gegenüber der besten Approximation der Funktion s durch Funktionen aus V_n macht. Man hat also zu überlegen, wie gut

$$f(2^{-n}k) \approx (f, \phi_{k-n}), \quad \phi_{k,n}(x) = 2^{n/2} \phi(2^n x - k),$$

erfüllt ist. Dazu macht man eine Taylorentwicklung um den Punkt $x_{n,k} = k2^{-n}$

$$\begin{aligned} (f, \phi_{k,n}) &= 2^{n/2} \int_{\mathbf{R}} f(x) \phi(2^n x - k) dx = 2^{-n/2} \int_{\mathbf{R}} f(2^{-n}(u+k)) \phi(u) du \\ &= 2^{-n/2} f(x_{n,k}) \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx + 2^{-3n/2} f'(x_{n,k}) \int_{\mathbf{R}} (x - x_{n,k}) \phi(x) dx \\ &\quad + 2^{-5n/2} \int_{\mathbf{R}} (x - x_{n,k})^2 f''(\eta(x)) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

mit $\eta = \eta(x, k, n)$. Im Falle der Entwicklung bis zum konstanten Glied erhält man

$$(f, \phi_{k,n}) = 2^{n/2} f(2^n k) + \mathcal{O}(2^{3n/2})$$

wenn die $\int \phi(x) dx = 1$ vorausgesetzt wird und f' beschränkt ist. Verschwindet $\int x \phi(x) dx$, (das erste Moment also), so ist die Fehlerordnung $\mathcal{O}(2^{5n/2})$ (sofern f'' beschränkt ist). Es ist dann klar, dass die Fehlerordnung mit steigender Zahl der verschwindenden Momente größer wird (vergl. hierzu die Sätze 2.2 und 2.23 in Kapitel 2, wo dies in einem wesentlich allgemeineren Rahmen gezeigt wird.)

Daubechies konstruierte nun spezielle Wavelets (die sogenannten *Coiflets*), die einerseits einen möglichst kleinen Träger und andererseits eine vorgegebene Anzahl von verschwindende Momenten haben. Wir gehen nicht weiter darauf ein und verweisen dazu auf [BCR91]. Dort wird auch gezeigt, dass die obigen Überlegungen zur Entwicklung effektiver Algorithmen für die Anwendung auf Integral- und Pseudodifferentialoperatoren führen.

Die weitere Verwendung der Orthogonal-Projektion als Approximation läuft nach dem oben angegebenen Schema ab. Man fängt mit

$$c_k^n = (f, \phi_{k,n}) = \left(f, 2^{n/2} \phi(2^n \cdot -k) \right)_2,$$

also den Entwicklungskoeffizienten der Funktion f nach der ONB von V_n . Ihre „schnelle“ Berechnung führt man mit Hilfe es oben angegebenen Zerlegungsverfahrens durch. Aus (4.4. 2) und der Orthogonalität der W_j folgt dann – man vergleiche dies mit (4.2. 20) –

$$s_n \equiv P_n f = \sum_{j=n-M}^{n-1} Q_j f + s_{n-M}, \quad Q_j f \equiv t_j$$

und im Vergleich mit (4.4. 5) zeigt sich

$$t_j(x) = \sum_k (f, \psi(2^j \cdot -k)) \psi(2^j x - k), \quad d_k^j = (f, \psi(2^j \cdot -k)).$$

Die Koeffizienten d_k^j sind also die Koeffizienten der Wavelet-Basis der Stufe j . Wie schon gesagt ist der Berechnungsaufwand einmal proportional zur Länge der Filterfolge $\{h_k\}$, zum anderen zur Anzahl der verwendeten Entwicklungskoeffizienten c_k^n . Die Zwischenapproximationen sind keine Orthogonalprojektionen, sondern sie sind nur für verschiedene j zueinander orthogonal. Der durch den Abbruch entstehende Approximations-Fehler muß natürlich noch untersucht werden, ebenso die Fehler bei der Berechnung der Skalarprodukte.

Für den Standpunkt, daß die Anzahl der verschwindenden Momente für den Erfolg bei der Anwendung ausschlaggebend ist, gibt es eine Reihe von Argumenten.

Das erste Argument kommt durch die Betrachtung der Wavelet-Entwicklung einer Funktion $F(x) \in L_2$ – also im Fall \mathbb{R}^2 eines Bildes – zustande: es sei gegeben durch

$$F(x) = \sum_{j,k} (F, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}, \quad (4.4. 11)$$

wobei die $\psi_{j,k} = 2^{J/2} \psi(2^J x - k)$ ein ONS bilden (diese Entwicklung wurde schon in Unterabschnitt 4.2.2 diskutiert). Ist $F \in C^{M-1}$ und gilt die Momenten -Bedingung (4.3. 11) für ψ , so liefert Taylor-Entwicklung von $F(x)$ mit $|x - 2^{-J} k| \leq \delta/2$

$$F(x) = F(2^{-J} k) + F'(2^{-J} k)(x - 2^{-J} k) + \dots + (x - 2^{-J} k)^M R_F(x)$$

und daher für genügend großes J bzw. genügend kleines $\delta > 0$ ($u = 2^J x - k$)

$$\begin{aligned} |(F, \psi_{j,k})| &= \left| 0 + \int (x - k2^{-J})^M R_F(x) \psi(2^J x - k) 2^{J/2} dx \right| \\ &\leq \left(\max_{x \in \text{supp} \psi_{j,k}} |R_F(x)| \right) 2^{-J(M-1/2)} \int |u|^M |\psi(u)| du. \end{aligned} \quad (4.4. 12)$$

Bei Anwendungen in der Datenkompression besteht ein allgemeines Prinzip darin, nur diejenigen Koeffizienten der Wavelet-Entwicklung (4.4. 11) zu speichern, deren absoluter Wert über einem gewissen Level τ liegt. Dieses Prinzip (bzw.verfeinerte Varianten davon) kann man an Hand der Darstellung des Fehlers in (4.2. 21) rechtfertigen.

Je schneller nun die Koeffizienten abfallen, desto effizienter ist diese Speicherung, weil dann weniger Koeffizienten benötigt werden. Zu beachten ist dabei die tatsächlich vorhandene Glattheitsordnung von $F(x)$, denn diese beeinflußt die Größe des Restglieds in (4.4. 12). Daher bringt die Wahl eines zu großen M unnötigen Aufwand .

Ausführlichere Betrachtungen dazu findet man in [BCR91]. In der Signal- oder Bildverarbeitung kann das obige Prinzip wie folgt veranschaulicht werden: bei festem M werden nach (4.4. 12) für große J nur solche Koeffizienten $(F, \psi_{j,k})$ gespeichert, wo $|R_F(x)|$ groß in der Nähe von $k2^{-J}$ ist, d. h. F oder eine seiner Ableitungen hat dort eine Singularität. Auf diese Weise werden die wesentlichen Einzelheiten des Bildes gespeichert. Bei den praktischen Anwendungen wird dieses Prinzip allerdings noch erheblich

verfeinert (Stichworte sind *Wavelet-Pakete* und *Best Basis*). Dazu besteht eine umfangreiche Literatur, siehe z. B. den Artikel von D.L. Donoho in [CMP94] und [Wickerhauser], Kapitel 7.

Eine andere Begründung für die Wahl eines großen M liefern approximationstheoretische Betrachtungen. Danach ist die Momenten-Bedingung (4.3. 11) äquivalent dazu, daß der Grad des durch Linearkombinationen von $\phi_{j,k}$ oder $\psi_{j,k}$ erzeugten Polynomraums gleich M ist (exakte Begründung durch die Strang-Fix Theorie). Da Polynome im wesentlichen glatte Konturen beschreiben, bedeutet die Wahl eines großen M , daß die Approximation mit solchen Linearkombinationen einen möglichst guten "Tiefpassfilter" liefern soll.

Diese letzte Forderung kann noch dahingehend modifiziert werden, daß sich die Produkte $\prod_{j=1}^n H(e^{-2^{-j}iv})$ möglichst wie ideale Tiefpassfilter verhalten sollen. Am Beispiel des Signals $f(x) = \sum f_l \phi(x-l)$ mit $\hat{f}(v) = \sum f_l e^{-ilv} \hat{\phi}(v)$ und des Produkts $H(e^{-iv})H(e^{-i2v})H(e^{-i4v})$ bedeutet dies, daß sich in

$$\left(\sum f_l e^{-ilv} \right) H(e^{-iv/2}) H(e^{-iv/4}) H(e^{-iv/8}) \hat{\phi}(v/8)$$

der Faktor nach der Summe sich in etwa so verhalten soll wie der ideale Tiefpassfilter $\chi_{-\pi,\pi}(v)$. Dies führt dann dazu, daß $H(e^{-iv})$ möglichst "flach" bei $v = \pi$ sein sollte, bzw. $H(z)$ möglichst hoch faktorisierbar in $(1+z)^M$. Details findet man im Buch von I. Daubechies (S.245-247).

4.4.3 Unterteilungsalgorithmen

Die Verfeinerungsgleichung (4.2. 2), der die Erzeugende ϕ jeder MRA genügt, kann man noch in anderer Weise zur effektiven Berechnung eines Elementes

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^n \phi(2^n x - k) \in V_n$$

benützen. Dies wurde bereits (im Anschluss an Lemma 3.3.7 zum Beweis der Verfeinerungsgleichung für kardinale B-Splines) kurz für den Fall der kardinalen Splines dargestellt. Auch im allgemeinen Fall gibt es – wegen der Inklusion $V_n \subseteq V_{n+1}$ – für $s(x) \in V_n$ eine Darstellung

$$s(x) = \sum_l c_l^{n+1} \phi(2^{n+1} x - l). \quad (4.4. 13)$$

Die neuen Koeffizienten erhält man dabei auf einfache Weise aus den alten, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_l c_l^n \phi(2^n x - l) &= \sum_l c_l^n \sum_k h_k \phi(2^{n+1} x - 2l - k) && \text{mit } k' := 2l + k \\ &= \sum_{k'} \phi(2^{n+1} x - k') \sum_l c_l^n h_{k'-2l}, && \text{d. h.} \end{aligned}$$

$$c_k^{n+1} = \sum_l c_l^n h_{k-2l}. \quad (4.4. 14)$$

Man kann diese Formel nun rekursiv anwenden und erhält die allgemeine Darstellung

$$s(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{n+N} \phi(2^{n+N} x - l), \quad (4.4. 15)$$

dabei ist N beliebig. Die Koeffizienten c_l^{n+N} können mit Hilfe von (4.4. 10) iterativ berechnet werden. Dies ist das Prinzip der *Unterteilungsalgorithmen*.

Erfüllt ϕ gewisse Voraussetzungen (die z. B. dann erfüllt sind, wenn ϕ ein B-Spline ist, so kann man zeigen, daß die Folge der Koeffizienten $\{c_l^{n+N}\}$ der immer weiter „verfeinerten“ Darstellung (4.4. 15) gegen $\{s(2^{-n-N}l)\}$ strebt. Dies ergibt einen sehr effizienten Algorithmus, wenn man die Kurve $s(x)$

global berechnen will. Um sich das plausibel zu machen nehme man $n = 0$ an und gehe davon aus, daß die Koeffizienten c_l^N die Funktionswerte $s(2^{-N}l)$ genügend (d. h. bis auf eine vorzugebende Toleranz) genau approximieren. Geht man von K Koeffizienten aus, so muß man insgesamt $2^N K$ Koeffizienten auf dem feinsten Gitter berechnen. Hat die Folge $\{h_k\}$ die Länge $L < \infty$, so ist die Zahl der für den Übergang von c_l^j nach c_l^{j+1} notwendigen Multiplikationen höchstens gleich $2^{j+1}K$. Die Gesamtzahl der Rechenoperationen ist also höchstens gleich K mal der Gesamtzahl der zu berechnenden Koeffizienten. Um die Konvergenz von $\{c_l^N\}_{l \in \mathbb{Z}}$ gegen $\{s(2^{-N}l)\}$ zu verstehen müssen wir einige der Grundlagen der Theorie der Unterteilungsalgorithmen darstellen. Weitergehende Einzelheiten findet man in [Cava91]. Dort wird die Theorie sehr allgemein behandelt und der multivariate Aspekt in den Vordergrund gestellt. Ferner sei wegen des engen Zusammenhangs mit den Wavelets auf die Arbeiten [DLa91] und [DLa92] verwiesen.

Es sei nunmehr $\{h_l\}_{l \in I}$ eine Folge endlicher Länge, eine sogenannte *Maske*. Dann definiere man auf dem Folgenraum $l_\infty(\mathbb{Z})$ den Operator

$$\begin{aligned} S : l_\infty(\mathbb{Z}) &\rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{c} &\rightarrow (S\mathbf{c})_\alpha := \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{\alpha-2l} c_l \end{aligned} \quad (4.4. 16)$$

und damit iterativ das Unterteilungsverfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^0 &:= \mathbf{c} := \{c_l\}_{l \in \mathbb{Z}} \\ \mathbf{c}^N &:= S\mathbf{c}^{N-1}, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.4. 17)$$

Dieses Verfahren heißt konvergent für $\mathbf{c} \in_\infty(\mathbb{Z})$, falls eine stetige Funktion $f_{\mathbf{c}}$ auf \mathbb{R} existiert, so daß in der l_∞ -Norm $\|\cdot\|_\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\mathbf{c}}(2^{-n}l) - c_l^n\|_\infty = 0 \quad (4.4. 18)$$

gilt. Um diesen Typ von Konvergenz von Folgen gegen eine Funktion genauer zu untersuchen, geht man von der Folge $\{c_l^0\}_{l \in \mathbb{Z}}$ zu einer stückweise linearen Funktion $f_{\mathbf{c}}^0(x)$ (dem sogenannten *Kontrollpolygon*) über. Dieses ist definiert als

$$f_{\mathbf{c}}^0(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^0 N_2(x-l) \quad (4.4. 19)$$

mit

$$N_2(x) := \begin{cases} 1 - |x-1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definiere man allgemeiner

$$f_{\mathbf{c}}^n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^n N_2(2^n x - l), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.4. 20)$$

so daß

$$f_{\mathbf{c}}^n(2^{-n}l) = c_l^n \quad (4.4. 21)$$

gilt. Mit anderen Worten: die Folge $\{c_l^n\}$ wird jetzt dem feineren Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}$ zugeordnet. Man bezeichnet $f_{\mathbf{c}}^n$ daher als Kontrollpolygon zum Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}$. Mit dem bereits in Abschnitt 4.2.4 definierten Operator

$$(Tf)(x) := \sum_l h_l f(2x-l). \quad (4.4. 22)$$

folgt

$$\begin{aligned} (Tf_{\mathbf{c}}^0)(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^0 T(N_2(\cdot - l))(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l^0 \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} h_{\beta} N_2(2x - 2l - \beta) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_2(2x - j) \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j-2l} c_l^0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (Sc^0)_j N_2(2x - j) \end{aligned}$$

und nach Induktion

$$(T^n f_{\mathbf{c}}^0) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S^n \mathbf{c}^0)_j N_2(2^n x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^n (2^n x - j) = f_{\mathbf{c}}^n(x). \quad (4.4. 23)$$

Durch den Operator T wird also die Frage nach der Konvergenz der Folgen c^n auf die Frage der Konvergenz der stückweise linearen Funktionen $f_{\mathbf{c}}^n$ bzw. auf das Iterationsverhalten von T zurückgeführt. Dazu haben wir in Abschnitt 4.2.4 die Konvergenz der Fouriertransformierten $T^{\hat{n}} f(v)$ in $L_2(\mathbb{R})$ und damit auch die Konvergenz der Funktionen $f_{\mathbf{c}}^n$ in $L_2(\mathbb{R})$ bewiesen. Im Hinblick auf die angestrebte Konvergenz der „Kontrollpunkte“ sind wir jedoch im Sinne von (4.4. 16) an der Konvergenz der $T^n f$ im L_{∞} -Sinne interessiert. Zur Untersuchung der Konvergenz der c_j^n betrachten wir zunächst den Spezialfall

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} := \{d_l := \delta_{l,0}\}_{l \in \mathbb{Z}}. \quad (4.4. 24)$$

Satz 4.4.1 Die Maske $\{h_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ sei endlich und die zugehörige Verfeinerungsgleichung (4.2. 2) besitze als Lösung eine stetige Funktion ϕ mit kompaktem Träger (die nach Lemma 4.2.4 bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist). Ferner gelte für die Translate von ϕ eine L_{∞} -Stabilitätsbedingung, d. h.

$$\|\mathbf{c}\|_{\infty} = \sup_l |c_l| \leq D \left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \phi(\cdot - l) \right\|_{\infty} \quad (4.4. 25)$$

mit einer Konstanten D für alle Folgen $\mathbf{c} \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$. Dann konvergieren die Kontrollpunkte

$$\delta_{\alpha}^n := (S^n \mathbf{d})_{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$ gegen die Werte $\phi(2^{-n}\alpha)$, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} |\phi(2^{-n}\alpha) - \delta_{\alpha}^n| = 0.$$

Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\delta}^n(x) - \phi(x)\|_{\infty} = 0$$

für Folgen $f_{\delta}^n(x)$.

Bemerkung 4.4.1 Einen Existenzsatz für die Lösung von (4.2. 2) haben wir – wie schon erwähnt – in Abschnitt 4.2.4 bewiesen. Dort haben wir auch gezeigt, daß bei einer endlichen Maske der Träger von ϕ notwendigerweise kompakt sein muß.

BEWEIS: Wir wissen nach Bemerkung 4.2.1, daß bei Annahme der Normierung $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ die Translate von ϕ eine Zerlegung der Eins bilden:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \phi(x - \alpha) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es sei dann $\text{supp } \phi \subseteq [-R, R]$ für ein $R > 0$ nach Voraussetzung. Dann können wir für festes $x \in \mathbb{R}$ mit dem aus Abschnitt 2.1 bekanntem Stetigkeitsmodul $\omega(\phi; t)$ abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \phi(x) - \sum_{\alpha} \phi(2^{-n}\alpha) \phi(2^n x - \alpha) \right| &= \sum_{|\alpha - 2^n x| \leq R} \frac{\phi(x) - \phi(2^{-n}\alpha)}{\phi(2^n x - \alpha)} \\ &\leq \sum_{|\alpha - 2^n x| \leq R} \omega(\phi; 2^{-n}R) |\phi(2^n x - \alpha)| \\ &\leq 2R \omega(\phi; 2^{-n}R) \|\phi\|_{\infty} \end{aligned} \quad (4.4. 26)$$

abschätzen, denn die Menge $\{\alpha \in \mathbb{Z} : |\alpha - 2^n x| \leq R\}$ hat höchstens $2R$ Elemente. Nun gilt aber für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi(x) = \phi_\delta^n(x) = \sum_{\alpha} \delta_\alpha^n \phi(2^n x - \alpha) \quad (4.4. 27)$$

wie man durch Induktion leicht sieht. In der Tat gilt $\phi(x) = \phi_\delta^0(x)$ nach Definition von $\delta_\alpha^0 = \delta_\alpha$ und Fourier-Transformation zeigt

$$\hat{\phi}_\delta^n(v) = T\hat{\phi}_\delta^{n-1}(v) = H(e^{-iv/2})\hat{\phi}_\delta^{n-1}\left(\frac{v}{2}\right) = H(e^{-iv/2})\hat{\phi}\left(\frac{v}{2}\right) = \hat{\phi}(v)$$

nach Induktionsannahme. Aus(4.4. 24) und (4.4. 25) ergibt sich zusammen

$$\left\| \sum_{\alpha} [\delta_\alpha^n - \phi(2^{-n}\alpha)]\phi(2^n \cdot -\alpha) \right\|_{\infty} \leq 2R\|\phi\|_{\infty} \omega(\phi; 2^{-n}R)$$

und daraus mit der Stabilitätsvoraussetzung

$$\sup_{\alpha} |\phi(2^{-n}\alpha) - \delta_\alpha^n| \leq 2R \cdot D\|\phi\|_{\infty} \omega(\phi; 2^{-n}R). \quad (4.4. 28)$$

Daraus folgt die behauptete Konvergenz der δ_α^n für $n \rightarrow \infty$. Die Konvergenz der Folgen $f_\delta^n(x)$ folgt durch eine analoge Abschätzung, denn $f_\delta^0(x) = N_2(x)$ erfüllt wie ϕ die Bedingung $\sum_l N_2(x-l) = 1$. \square

Mit diesem Satz haben wir die Konvergenz eines – wie schon bemerkt – sehr effizienten Algorithmus zur Berechnung von ϕ gezeigt. Interessant sind aus diesem Grunde auch Abschätzungen zur Konvergenzgeschwindigkeit, die man in [Cava91] finden kann.

Die Konvergenz einer allgemeinen Folge von Kontrollpunkten kann nun auf den Fall der δ_α^n zurückgeführt werden. Dazu schreiben wir

$$c_l^0 = c_l = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} c_\beta \delta_{l-\beta, 0}$$

für eine endliche Folge $\{c_l\}$ und erhalten

$$(S^n \mathbf{c})_\alpha := \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} (S^n \boldsymbol{\delta} \cdot \beta)_\alpha,$$

wobei $\boldsymbol{\delta} \cdot \alpha$ die Folge $\{\delta_{l-\beta}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ für festes β bezeichnet. Durch Induktion zeigt man

$$(S^n \boldsymbol{\delta} \cdot \beta)_\alpha = (S^n \boldsymbol{\delta})_{\alpha - 2^n \beta},$$

denn für $n = 0$ stimmt dies trivialerweise – S^0 ist die Identität – und ferner gilt

$$\begin{aligned} (S^{n+1} \boldsymbol{\delta} \cdot \beta) &= \sum_l h_{\alpha-2l} (S^n \boldsymbol{\delta} \cdot \beta)_l = \sum_l h_{\alpha-2l} (S^n \boldsymbol{\delta})_{l-2^n \beta} \\ &= \sum_{\gamma} (S^n \boldsymbol{\delta})_{\gamma} h_{\alpha-2\gamma-2^{n+1}\beta} = (S^{n+1})_{\alpha-2^{n+1}\beta}. \end{aligned}$$

Dies in die Formel für $S^n \mathbf{c}$ eingesetzt ergibt

$$(S^n \mathbf{c})_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} c_\beta (S^n \boldsymbol{\delta})_{\alpha - 2^n \beta} \quad (4.4. 29)$$

Damit zeigen wir nun

Satz 4.4.2 *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt für alle Folgen $\mathbf{c} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ die Konvergenzaussage*

$$\sup_{\alpha} \|c_\alpha^n - s_{\mathbf{c}}(2^{-n}\alpha)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (4.4. 30)$$

wobei $c_\alpha^n = (S^n \mathbf{c})_\alpha$ und $s_{\mathbf{c}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi(x-j)$.

BEWEIS: Es gilt $s_c(2^{-n}\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi(x - j)$ und daher mit (4.103)

$$\begin{aligned} |c_\alpha^n - s_c(2^{-n}\alpha)| &= \left| \sum_{\beta} c_\beta [(S^n \delta)_{\alpha - 2^n \beta} - \phi(2^{-n}\alpha - \beta)] \right| \\ &\leq \|c\|_\infty \sum_{\beta} \left\| (S^n \delta)_{\alpha - 2^n \beta} - \phi(2^{-n}\alpha - \beta) \right\| \\ &\leq 2RD \| \phi \|_\infty \|c\|_\infty \omega(\phi; 2^{-n}R). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Am Schluss bemerken wir noch, daß mit Satz 4.4.2 die Konvergenz im Sinne von (4.4. 16) gezeigt wurde. Eine anschaulichere Interpretation ergibt sich, wenn man die Parameter n und α so koppelt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = x \in \mathbb{R}$$

für festes x gilt. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von ϕ aus (4.4. 28) sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\alpha_n}^n = s_c(x).$$

4.4.4 MRA und diskrete Filterungsverfahren

Analyse und Synthese bzw. Zerlegungs- und Rekonstruktionsverfahren beruhen auf diskreten Faltungen, die als Filter interpretiert werden können. Dabei kann wie schon bemerkt die Bildung der c_k^{j-1} innerhalb einer MRA als ein Tiefpassfilter und die der d_k^{j-1} als ein Hochpassfilter angesehen werden.

Wir wollen nun algebraischen Aspekt der Zerlegungs- und Rekonstruktionsverfahren genauer untersuchen. Dazu stellen wir den "Decomposition Algorithmus" in (4.4. 6) durch die Operatoren

$$\mathbf{c}^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{H} \mathbf{c}^j, \quad (H\mathbf{f})_k := \sum_n h_{n-2k} f_n, \quad (4.4. 31)$$

und

$$\mathbf{d}^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{G} \mathbf{c}^j, \quad (G\mathbf{f})_k := \sum_n g_{n-2k} f_n \quad (4.4. 32)$$

dar. Sie sind wie die Symbole $H(z), G(z)$ in den vorangegangenen Abschnitten den Masken $\{h_k\}, \{g_k\}$ zugeordnet und (formal) für beliebige Zahlenfolgen $\{f_n\}$ definiert. Falls diese endlich sind –was bei den Anwendungen die Regel ist– kann man sie als Matrizen darstellen.

Bemerkung 4.4.2 *Im Folgenden nehmen wir für alle auftretenden Masken, z.B. $\{h_k\}, \{g_k\}$ an, daß sie in $l_1(\mathbb{Z})$ liegen, und für die Koeffizientenfolgen, daß sie in $l_2(\mathbb{Z})$ liegen. Dann sind alle Operationen vom obigen Typ wohldefinierte Abbildungen von $l_2(\mathbb{Z})$ in $l_2(\mathbb{Z})$, insbesondere gilt*

$$\| \{H\mathbf{f}\}_k \|_{l_2} \leq \| \{h_k\} \|_{l_1} \| \{f_k\} \|_{l_2}.$$

Dies folgt aus der Young-Ungleichung (1.4. 5), die auch für Zahlenfolgen gilt.

Betrachtet man die f_n als Samples (Abtastwerte), so sind diese Operationen als *Filterungen* interpretierbar. Wegen ihrer Faltungsstruktur (Summe) heissen sie auch *Quadraturfilter*. Um ihre Wirkungsweise klarer herauszustellen, führen wir noch die Operation *Subsampling* durch

$$(S_\downarrow \mathbf{c})_k := c_{2k} \quad (4.4. 33)$$

ein. *Subsampling* (oder *Downsampling*) ist also ein Filter, der durch Streichen der Komponenten mit ungeraden Indizes entsteht. Die beiden Operationen (4.4. 31) und (4.4. 32) können dann als übliche Faltung zwischen den Zahlenfolgen $\{f_n\}$ und den "Filterfolgen" $\{h_n\}$ bzw. $\{g_n\}$ dargestellt werden,

worauf jeweils die Operation S_\downarrow folgt. Der gesamte Prozess wird als *Subbandcoding* bezeichnet,² denn aus der Folge ("Band") \mathbf{c}^j entstehen dadurch die "Subbands" \mathbf{c}^{j-1} und \mathbf{d}^{j-1} .

Zur Darstellung des Rekonstruktionsverfahrens verwendet man die zu H, G adjungierten Operationen H^*, G^* (in komplexer Schreibweise):

$$(H^* \mathbf{f})_l := \sum_n \overline{h_{l-2n}} f_n, \quad (4.4. 34)$$

$$(G^* \mathbf{f})_l := \sum_n \overline{g_{l-2n}} f_n. \quad (4.4. 35)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies tatsächlich die adjungierten Operationen sind: für jede endliche Folge $\{\eta\}_k$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} (\{Hf\}_k, \{\eta\}_k) &= \sum_k \overline{\eta_k} \sum_n h_{k-2n} f_n = \sum_n f_n \left(\sum_k \overline{h_{k-2n}} \eta_k \right) \\ &= \sum_n f_n \overline{(H^* \eta)_n} \equiv (\{f\}_n, \{H^* \eta\}_n). \end{aligned}$$

Um H^*, G^* näher zu beschreiben, führt man die weitere Filter-Operation des *Upsampling* ein:

$$(S_\uparrow f)_n := \begin{cases} f_p, & n = 2p \\ 0, & n = 2p + 1. \end{cases} \quad (4.4. 36)$$

Upsampling bringt also die Filterfolge $\{f\}_l$ durch Auffüllen mit Nullen auf die doppelte Länge, so daß der Umkehrprozess gerade durch das *Supersampling* von oben gegeben ist. Ein Blick auf die Definitionen von H^*, G^* zeigt nun, daß diese Filter durch *Upsampling* mit anschließender diskreter Faltung mit den Filterfolgen $\{h\}_l$ bzw. $\{g\}_l$. (Um dies einzusehen, bezeichne $(S_\uparrow f)_m := \tilde{f}_m$. Dann verifiziert man sofort, daß $\sum_m \overline{h_{l-m}} \tilde{f}_m = \sum_n \overline{h_{l-2n}} f_n$ gilt.)

Bemerkung 4.4.3 *Statt von Supersampling bzw. von Upsampling kann man auch von Restriktion bzw. Prolongation sprechen. Mit dieser Sichtweise lassen sich beide Operationen noch erheblich verallgemeinern und treten dann u.a. bei der Beschreibung von Mehrgitterverfahren ('multigrid methods') auf, vergl. hierzu beispielsweise [?], Abschnitte 3.4f. und 3.5f.*

In Abschnitt 4.4.1 wurde herausgestellt, daß ein Rekonstruktionsschritt die Umkehrung eines Zerlegungsschritts ist. Diesen Sachverhalt wollen wir nun anhand der obigen Operatoren ausdrücken. Dazu schreiben wir (4.4. 31), (4.4. 32) kompakter als

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{H} \\ \overline{G} \end{pmatrix} \mathbf{c}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{j-1} \\ \mathbf{d}^{j-1} \end{pmatrix},$$

und den Rekonstruktionsschritt als

$$\mathbf{c}^j = \frac{1}{\sqrt{2}} [\overline{H}^* \mathbf{c}^{j-1} + \overline{G}^* \mathbf{d}^{j-1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{H}^*, \overline{G}^*) \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{j-1} \\ \mathbf{d}^{j-1} \end{pmatrix}.$$

Kombiniert man diese beiden Relationen, so folgt

$$\mathbf{c}^j = \frac{1}{2} (\overline{H}^* (\overline{H} \mathbf{c}^j) + \overline{G}^* (\overline{G} \mathbf{c}^j)) = \frac{1}{2} (\overline{H}^* \overline{H} + \overline{G}^* \overline{G}) \mathbf{c}^j,$$

also die Gleichung

$$(H^* H + G^* G) = 2 Id. \quad (4.4. 37)$$

²"Coding" heißt in der Elektrotechnik das Aufzeichnen der Amplituden der einzelnen Frequenzen. Sie werden durch die $\{f_n\}$ als angenäherte Fourier-Koeffizienten dargestellt.

Anhand der Filterfolgen ausgedrückt heißt dies

$$2 \cdot f_n = \sum_k \overline{h_{n-2k}} (H\mathbf{f})_k + \sum_k \overline{g_{n-2k}} (G\mathbf{f})_k = \sum_k \sum_m [\overline{h_j} h_{n-2k} + \overline{g_{n-2k}} g_{m-2k}] f_m,$$

also per Koeffizientenvergleich

$$\sum_k [\overline{h_{n-2k}} h_{m-2k} + \overline{g_{n-2k}} g_{m-2k}] = 2\delta_{n,m}. \quad (4.4. 38)$$

Im Falle, daß die Translate von ϕ orthonormiert sind, gilt die weitere Eigenschaft

$$2\delta_{0,k} = 2 \int \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx = 2 \sum_i \sum_j h_i \overline{h_j} \int \phi(2x-i) \overline{\phi(2x-2k-j)} dx = \sum_i h_i \overline{h_{i+2k}}. \quad (4.4. 39)$$

Man kann auch zeigen, daß dies mit $|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1$ (vergl. (4.2. 30)) äquivalent ist. In analoger Weise gilt auch

$$2\delta_{0,k} = 2 \int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = 2 \sum_i \sum_j g_i \overline{g_j} \int \phi(2x-i) \overline{\phi(2x-2k-j)} dx = \sum_i g_i \overline{g_{i+2k}}. \quad (4.4. 40)$$

Die Orthogonalität der Zerlegung $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $V_0 \perp W_0$ liefert schließlich

$$0 = (\phi_{0,k}, \psi_{0,l}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_\nu h_\nu \phi_{1,2k+\nu}, \sum_\mu g_\mu \phi_{1,2l+\mu} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\nu h_\nu \overline{g_{\nu-2l}}. \quad (4.4. 41)$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$H G^* = 0 = G H^*.$$

Diese Gleichungen zeigen zusammen mit (4.4. 37) eine (logische) Analogie zu den schon früher hergeleiteten Relationen für die Symbole $H(z)$, $G(z)$ in Satz 4.2.3.

Es ist auch lehrreich, die Prozesse (4.4. 6) der Zerlegung und (4.4. 7) der Rekonstruktion mit Hilfe der z -Transformation zu beschreiben. Führt man formal

$$c^j(z) := \sum_k c_k^j z^k \quad d^j(z) := \sum_k d_k^j z^k \quad (4.4. 42)$$

ein, so lautet die z -Transformation der Zerlegungsformeln (4.4. 6)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}c^{j-1}(z^2) &= \overline{H(z)}c^j(z) + \overline{H(-z)}c^j(-z) \\ \sqrt{2}d^{j-1}(z^2) &= \overline{G(z)}c^j(z) + \overline{G(-z)}c^j(-z). \end{aligned} \quad (4.4. 43)$$

Zum Beweis führen wir zusätzlich die Koeffizienten

$$b_i := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \overline{h_{l-i}} c_l^{j-1}$$

ein. Dann folgt aus (4.4. 6) für $|z| = 1$ unter Beachtung von $z\bar{z} = 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}c^{j-1}(z^2) &= \sqrt{2} \sum_i b_{2i} z^{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_i b_i z^i + \sum_i b_i (-1)^i z^i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_l \overline{h_{l-i}} \bar{z}^{l-i} c_l^j z^l + \sum_i \sum_l \overline{h_{l-i}} (-\bar{z})^{l-i} c_l^j (-z)^l \right) \\ &= \overline{H(z)}c^j(z) + \overline{H(-z)}c^j(-z), \end{aligned}$$

d.h. die erste Relation in (4.4. 43) . Der Beweis der zweiten verläuft genauso.

Um die Wirkungsweise des Rekonstruktionsverfahrens klarer herauszustellen, verwenden wir in ihm andere Filter :

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{2} \sum_k \tilde{h}_k z^k, \quad \tilde{G}(z) = \frac{1}{2} \sum_k \tilde{g}_k z^k, \quad (4.4. 44)$$

Die Rekonstruktionsformel (4.4. 7) lautet dann

$$\tilde{c}_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l \left(c_l^{j-1} \tilde{h}_{k-2l} + d_l^{j-1} \tilde{g}_{k-2l} \right).$$

Die z -Transformation dieser Formel lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{c}^j(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k z^k \left(\sum_l \tilde{h}_{k-2l} z^{-2l} c_l^j z^{2l} + \sum_l \tilde{g}_{k-2l} z^{-2l} d_l^j z^{2l} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\tilde{H}(z) c^{j-1}(z^2) + \tilde{G}(z) d^{j-1}(z^2) \right) \end{aligned} \quad (4.4. 45)$$

Die Frage ist nun, wann dies eine Rekonstruktionsformel darstellt. Dazu wenden wir die z -Transformation (4.4. 43) auf (4.4. 45) an und erhalten

$$\tilde{c}^j(z) = \left(\overline{H(z)} \tilde{H}(z) + \overline{G(z)} \tilde{G}(z) \right) c^j(z) + \left(\overline{H(-z)} \tilde{H}(z) + \overline{G(-z)} \tilde{G}(z) \right) c^j(-z). \quad (4.4. 46)$$

In diesem Ausdruck enthält der zweite Term die *Aliasing*-Effekte: $c^j(-z)$ mit $z = \exp(-iv)$ liefert eine Verschiebung der Fourierreihe $\sum_l c_l^j \exp(-ilv)$ um die Frequenz π . Dies entspricht genau dem Aliasing, das nach dem Shannonschen Abtasttheorem zu erwarten ist, wenn man mit halber Nyquist-Rate (bzw. mit doppeltem Zeitabstand) abtastet – denn danach liefert die Verschiebung um π die fehlenden Abtastwerte zur exakten Darstellung. Also muß sinnvollerweise

$$\overline{H(-z)} \tilde{H}(z) + \overline{G(-z)} \tilde{G}(z) = 0 \quad (4.4. 47)$$

gelten. Will man eine exakte Rekonstruktionsformel erhalten, so zeigt (4.4. 46), daß man noch

$$\overline{H(z)} \tilde{H}(z) + \overline{G(z)} \tilde{G}(z) = 1 \quad (4.4. 48)$$

fordern muß. Diese beiden Relationen charakterisieren die sogenannten **perfect reconstruction filter**. Im Spezialfall $H(z) = \tilde{H}(z)$ und $G(z) = \tilde{G}(z)$ geht Relation (4.4. 47) in (4.2. 32) für Wavelets über und (4.4. 48) in (4.2. 30), so daß in diesem Fall Formel (4.4. 45) exakt wird, d. h. $\tilde{c}^j(z) = c^j(z)$.

Es sei noch erwähnt, daß aus ihnen auch wieder Relationen für die Filter selbst folgen, nämlich aus (4.4. 47) folgt

$$1 = \sum_l \tilde{h}_l z^l \sum_k h_k z^{-k} + \sum_l \tilde{g}_l z^l \sum_k g_k z^{-k} = \sum_j z^j \sum_l \left(h_l \tilde{h}_{j+l} + g_l \tilde{g}_{j+l} \right)$$

Sie werden später zu den **biorthogonalen** Wavelets führen (nach [CDF92]).

Auf diesem Wege kann man die Konstruktion von Wavelets auf anderem Wege – nämlich über diskrete Faltungen (Filter) von Folgen – nochmals motivieren bzw. einführen. Ferner ist damit die Verbindung zum Filter- Design in der Elektrotechnik (siehe etwa [Bracewell65]) gegeben. Mehr dazu findet der interessierte Leser in [Daubechies92] (Abschnitt 5.6), und wesentlich umfangreicher in [SN96], [Wickerhauser]. Wickerhauser baut seinen Zugang ganz darauf auf und behandelt speziell in Kapitel 5ff. Wavelets und biorthogonale Wavelets. Dort findet man auch ausführliche Anleitungen zur Implementation von Algorithmen auf Wavelet-Basis.

Literaturverzeichnis

- [Achieser93] D. Achieser *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Akademie-Verlag, (Berlin 1953)
- [Achilles] D.Achilles, *Die Fouriertransformation in der Signalverarbeitung*, Springer, Berlin 1985, (isbn 3-540-08362-6)
- [Adams] R.A.Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975, (isbn=0-12-044150-0)
- [AU96] A. Aldroubi - M.A. Unser(eds.), *Wavelets in Medicine and Biology*, CRC Press, 1996 (isbn=0-8493-9483-X)
- [Benedetto93] J.Benedetto - M.W.Frazier(eds.), *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Raton 1994 , isbn=3-540-90356-9,
- [Bla98] C.Blatter, *Wavelets- Eine Einführung*, Vieweg, 1998, (isbn 1-56881-095-4)
- [Boor78] C.de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer, Berlin 1978 , isbn=3-540-90356-9,
- [Boor90] C.de Boor, *Splinefunktionen*, Birkhäuser, Basel 1990, isbn=3-7643-2514-3
- [BHR93] C.de Boor - K. Höllig - S.Riemenschneider, *Box Splines*, Springer, New York 1993, isbn=0-387-94101-0
- [Bracewell65] R.N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, New York 1965, isbn= 0-07-007015-6
- [BGG98] S.Burrus - R. Gopinath - H.Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall 1998. isbn=0-13 -489600-9
- [Cava91] A.S.Cavaretta - W.Dahmen - C.A.Micchelli, *Stationary subdivision*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1991, (Memoires of the American Mathematical Society, Vol.89) isbn=0-8218-2507-0
- [Chui92a] C.Chui, *Wavelet Analysis and its Applications 1: An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York 1992, isbn= 0-12-174584-8
- [Chui92b] C.Chui(ed.), *Wavelet Analysis and Applications 2: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York 1992, isbn= 0-12-174590-2
- [CMP94] C.Chui - L.Montefusco - L.Puccio (eds.), *Wavelets: Theory, Algorithms and Applications*, Academic Press, New York 1994. isbn= 0-12-174575-9
- [Constantinecu74] F.Constantinecu, *Distributionen und ihre Anwendung in der Physik*, Teubner, Stuttgart 1974. isbn= 3-519-02042-4
- [Crandal] , R.Crandal, *Projects in Scientific Computation*, Springer, New York 1994.
- [DKO97] W.Dahmen - A.Kurdil - P.Oswald(eds.), *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, New York 1997.
- [Daubechies92] I.Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia 1992. isbn= 0-89871-274-2

- [Donoghue69] W.F.Donoghue, *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York 1969.
- [Hardy34] G.H.Hardy - J.E.Littlewood - G.Polya, *Inequalities*, 2te Auflage, Cambridge University Press, Cambridge 1988, isbn= 0-521-35880-9
- [Heuser86] H.Heuser, *Funktionalanalysis* Teubner, Stuttgart 1986.
- [HW] H.Hernandez - G.Weiss, *A first course in wavelets* CRC Press, 1996.
- [Kaiser94] G.Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhauser, Boston 1994. isbn=3-7643-3711-7
- [Krabs] W.Krabs, *Mathematical foundations of Signal Theory*, heldermann, Berlin 1995. isbn=3-88538-406-X
- [Louis94] A.K.Louis - P. Maaß- A.Rieder, *Wavelets*, Teubner, Stuttgart 1994, isbn= 3-519-02094-7
- [Mallat98] S.Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York 1998. isbn 0-12-466605-1
- [Marr] D.Marr, *Vision: a computational investigation into the human representation and processing of visual information*, Freeman, San Francisco 1982. isbn= 0-7167-1284-9
- [Meyer90a] Y.Meyer, *Ondelettes et Opérateurs 1: Ondelettes*, Hermann, Paris 1990.
- [Meyer90b] Y.Meyer, *Ondelettes et Opérateurs 1: Opérateurs*, Hermann, Paris 1990.
- [Meyer90] Y.Meyer, *Wavelets and Operators*, Hermann, Paris 1990. Cambridge University Press, Cambridge 1992, isbn=0-521-42000-8.
- [Meyer93] Y.Meyer, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia 1993.
- [Nikolskij75] S.M.Nikolskij, *Approximation of Functions in Several Variables and Embedding Theorems*, Springer, Berlin 1975, isbn=3-540-06442-7
- [Papoulis] A.Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York 1977, isbn=0-07-048460-0
- [NRC] W.H.Press - S.A.Teukolsky - W. T.Vetterling - P.F.Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge 1992,
- [NRC] W.H.Press - S.A.Teukolsky - W. T.Vetterling - P.F.Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, isbn= 0-521-43108-5
- [Reed75] M.Reed - B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press 1972. isbn=0-12-585001-8
- [Rudin91] W.Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York 1991. isbn= 0-07-054236-8
- [Runge] C.Runge, *Theorie und Praxis der Reihen*. Göschen, Leipzig 1904.
- [Schumaker81] L.L.Schumaker, *Spline Functions I: Basic Theory*. J.Wiley, New York 1981. isbn=0-471-76475-2
- [Stein71] E.M.Stein - G.Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton 1971. isbn= 0-691-08078-X
- [SN96] G.Strang - T.Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley- Cambridge Press, 1996. isbn= 0-9614088-7-1
- [Timan63] A.F.Timan, *The Theory of Functions of One Real Variable*. Pergamon Press, Oxford 1963.

[Wickerhauser] M.V.Wickerhauser, *Adaptive Wavelet-Analysis: Theorie und Software*. Vieweg, Braunschweig 1996, isbn=3-528-06688-1

Zeitschriftenartikel

- [AUE93] A. Aldroubi - M.A. Unser - M.Eden, A family of polynomial spline wavelet transforms. Signal Process., 1993 **30**(2), 141-162.
- [BCR91] , G.Beylkin - R.R.Coifman - V.Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms. Communications on Pure and Applied Mathematics 1991 (**43**), 141-183.
- [BVR94] C.de Boor - R.A.DeVore - A.Ron, Approximation From Shift Invariant Subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$, Transactions of the American Mathematical Society, 1994(**361**), 787-806.
- [CW90] C.K.Chui - J.Z. Wang, On compactly supported spline wavelets and a duality principle, Trans. Amer. Math. Soc. 1991,
- [CD] Z.Ciesielki - J.Domsta, Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^M(I^d)$. Studia Math. 1972 (**41**), 211- 224.
- [Cohen90] A.Cohen, Analyses Multirésolution et Filtres miroir en Quadrature. Annales de l'Institute Henri Poincaré en l'Analyse nonlinéaire 1990, (**7**), 439-459.
- [CDF92] A.Cohen - I.Daubechies - J.C.Feauveau, Biorthogonal Wavelets of compactly supported wavelets. Comm. Pure Appl.Math., 1990, (**45**), 485-560.
- [DGL95] S.Dahlke - K.H.Gröchenig - V.Latour, Biorthogonal Box Spline Wavelet Bases, in *Surface Fitting, Vol. II* (A. LeMehaute - C.Rabut - L.L.Schumaker, eds.), Vanderbilt University Press 1997.
- [Dah97] W.Dahmen, Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations. Acta Numerica (**6**)(1997), 55-228.
- [Daubechies88] I.Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics 1988, **41**(7), 909-996.
- [DLa91] I.Daubechies - J.V. Lagarias, Two-scale difference equations I: Existence and global regularity of solutions. SIAM J.Math.Anal. 1991, **22**, 1388-1410.
- [DLa92] I.Daubechies - J.V. Lagarias, Two-scale difference equations II: Local regularity, infinite products of matrices and fractals, SIAM J.Math.Anal. 1992, **23**(4), 1031-1079.
- [GM92] K.Gröchenig - R. Madych, Multiresolution Analysis, Haar bases, and self-similar tilings of \mathbb{R}^2 . IEEE Trans. Inform. Theory 1992, **38**, 556-568.
- [Graps95] A.Graps, An Introduction to Wavelets, IEEE Transactions on Computer Science and Engineering 1995, **2**(2).
- [Haar] A.Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Math. Annalen 1910 **69**, 331-371.
- [Jawerth94] B.Jawerth - W.Sweldens, An Overview of Wavelets Based on MultiResolution Analysis, SIAM Review 1994, **36**
- [JS91] K.Jetter - J.Stöckler, Algorithms for cardinal interpolation using box splines and radial basis functions. Numerische Mathematik 1991, **60**,
- [JT93] K.Jetter, Multivariate Approximation from the cardinal interpolation point of view. in *Approximation Theory VII*, E.W.Cheney - C.K. Chui - L.L. Schumaker, eds. Academic Press, New York 1993, 131-161.

- [JM91] R.Q.Jia - C.A. Micchelli, Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. in *Curves and Surfaces*, P.J.Laurent - A. Le Méhauté - L.L. Schumaker, eds. Academic Press, New York 1991, 209-246.
- [Lawton91] W.M.Lawton, Necessary and sufficient conditions for the existence of orthonormal wavelet bases. *Journal of Mathematical Physics* 1991, **32**, 57-61.
- [Mallat89] S. Mallat, Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of $L_2(\mathbb{R})$. *Transaction of the American Mathematical Society* 1989, **315**, 69-87.
- [Micchelli79] C.A. Micchelli, Infinite Spline Interpolation. Research Report des IBM T.J. Watson Research Center, 1979.
- [CQ38] W.Quade - L. Collatz, Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl*, 1938, 383-429.
- [Scha95] R.Schaback, Multivariate Interpolation and approximation by translates of a basis function. in *Approximation and Interpolation, Approximation Theory VIII*, E.W.Cheney - C.K.Chui - L.L.Schumaker, eds. World Scientific, Singapore 1995, 491-514.
- [Schoenberg71] I.J.Schoenberg, Cardinal Interpolation and Spline Function IV. The exponential Euler Splines. in *Proceedings Oberwolfach ISNM 20*, Butzer et. al., eds. Birkhäuser, Basel 1971,
- [Schoenberg73] I.J.Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*, SIAM, Philadelphia 1973. issn= 0163-9439
- [Whitt] E.T.Whittaker, On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. *Proc.Roy.Soc.Edinburgh* 1915, *35*.