Manuskript zur Funktionalanalysis

Karl Scherer
Universität Bonn
Institut für Angewandte Mathematik
Abteilung für Funktionalanalysis und
Numerische Mathematik

Vorwort

Dieses Skript ist aus den Vorlesungen " Funktionalanalysis I " und "Funktionalanalysis II" entstanden, die ich im WS 1998/99 ind SS 1999 gehalten habe. Die Funktionalanalysis ist ein so ausgedehntes Teilgebiet der Analysis, daß im Rahmen einer 2–semestrigen Vorlesung naturgemäß eine Auswahl getroffen werden mußte. Daher wird im Skript des öfteren auf weitere Bücher verwiesen. Auch hier handelt sich nur um eine (kleine) Auswahl aus der umfangreichen Literatur.

[1] H.W.Alt: Funktionalanalysis. Springer 1999.

[2] G.Bachmann – L.Narici: Functional Analysis. Academic Press 1966.

[3] N.Dunford – J.T.Schwartz: Linear Operators.Part I.Interscience, NY1958.

[4] A.Friedman: Foundations of Modern Analysis. Dover Publications 1970 1970.

[5] V.Hutson – J.S.Pym: Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Academic Pess 1980.

[6] A.M.Pinkus: N – widths in approximation theory. Springer 1985.

[7] M.Reed – B.Simon: Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press 1972.

[8] W.Rudin: Functional Analysis. McGraw – Hill 1973.

[9] W.Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw – Hill 1974.

[10] M.Struve: Variational methods. Springer 1990.

[11] D.Werner: Funktionalanalysis.Springer 1995.

[12] K.Yosida: Functional Analysis.Springer 1980.

Danken möchte ich Herrn Michael Meyer, der selbstständig eine erste Latex–Version aus seinen Aufzeichnungen zur Vorlesung angefertigt hat. Diese ist dann von mir korrigiert und sukzessive ergänzt worden. Ferner möchte ich besonders Herrn Dr. W.Pollul für die mehrfache kritische Durchsicht des Manuskripts danken.

Karl Scherer

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

RÄUME

I.1 TOPOLOGISCHE RÄUME

I.1.1 GRUNDLAGEN

I.1.1 Definition: Eine Familie τ von Teilmengen einer Menge X heißt ***Topologie*** für X und (X, τ) ein ***topologischer Raum*** , falls τ den folgenden Axiomen genügt:

1. $\emptyset$, $X \in \tau$
2. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$, $A_i \in \tau$, $i \in I$ für eine beliebige Indexmenge I
3. $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$, $A_k \in \tau$, $1 \leq k \leq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

Die Elemente von τ heißen ***offen(e Teilmengen von X)*** .

Beispiele Die einfachsten Beispiele von Topologien sind:

1. Die chaotische Topologie $\tau := \{\emptyset, X\}$.
2. Die diskrete Topologie $\tau := \{A \mid A \subset X\}$.
3. Sei $X := \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Definiere $A \subset \mathbb{R}$ als offen, wenn zu jedem $x_0 \in A$ ein $h > 0$ existiert, sodaß $(x_0 - h, x_0 + h) \subset A$, d.h. jedes x_0 ist "innerer" Punkt.
Dies liefert die sogenannte ***Standardtopologie*** auf $\mathbb{R}$.

I.1.2 Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sind τ_1 und τ_2 zwei Topologien für X, so heißt τ_1 ***stärker***(feiner) als τ_2 und τ_2 ***schächer***(gröber) als τ_1, falls $\tau_1 \supset \tau_2$. Eine offene Menge, die einen Punkt $x \in X$ enthält, heißt ***offene Umgebung*** von x. Eine Menge heißt ***Umgebung*** von x, wenn sie eine offene Umgebung von x enthält. Eine Menge U heißt Umgebung einer Teilmenge $A \subset X$ wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $A \subset V \subset U$. Ein Punkt x heißt ***Häufungspunkt*** einer Menge $S \subset X$, falls jede Umgebung von x einen von x verschiedenen Punkt aus S enthält. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt ***konvergent gegen*** $\boldsymbol{x} \in X$, wenn jede Umgebung von x für alle bis auf endlich viele Indices $n \in \mathbb{N}$ x_n enthält. Eine Folge heißt ***konvergent***, falls sie gegen ein $x \in X$ konvergiert. Ein Punkt $x \in S \subset X$ heißt ***innerer Punkt*** von S, falls es eine Umgebung U von x mit $U \subset S$ gibt. Das ***Innere*** von S, $\mathrm{int}(S)$, ist die Menge aller inneren Punkte von S. Eine Menge $S \subset X$ heißt ***abgeschlossen*** , falls $X \setminus S$ offen ist. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die eine gegebene Menge $S \subset X$ enthalten, heißt***Abschluß*** von S, bezeichnet mit $\overline{S}$. Der ***Rand*** einer Menge S ist der Durchschitt $\partial S := \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$.

I.1.3 Lemma: Sei (X, τ) topologischer Raum und sei $S \subset X$. Dann gelten

1. Das Innere $\mathrm{int}(S)$ von S ist offen, Der Abschluß $\overline{S}$ von S ist abgeschlossen.
2. Es gilt $\mathrm{int}(S) = S$ genau dann, wenn S offen ist.
3. Es gilt $\overline{S} = S$ genau dann, wenn S abgeschlossen ist.
4. Der Abschluß$\overline{S}$ von S ist gleich S vereinigt mit der Menge seiner Häufungspunkte.

Beweis: 1.: Es gilt nach Definition I.1.2 $\mathrm{int}(S) = \bigcup_{x \in \mathrm{int}(S)} U_x$, wobei $U_x \subset \mathrm{int}(S)$ eine zu x zugehörige offene Umgebung von x ist. Also ist $\mathrm{int}(S)$ offen. Die Abgeschlossenheit von $\overline{S}$ folgt aus dem folgenden Lemma.

2.: Sei S offen und $x \in S$. Dann ist $U = S$ offene Umgebung von x, also $x \in \mathrm{int}(S)$ und damit $\mathrm{int}(S) \supset S$, also $S = \mathrm{int}(S)$.

3.: Es gilt

$$X \setminus \overline{S} = X \setminus \bigcap_{X \setminus V \in \tau, S \subset V} V = \bigcup_{X \setminus V \in \tau, S \subset V} (X \setminus V) = \bigcup_{U \in \tau, S \subset X \setminus U} U = \bigcup_{U \in \tau, X \setminus S \supset U} U \ .$$

Daher ist $\overline{S}$ abgeschlossen. Ist S abgeschlossen, so ist $X \setminus S$ offen und die rechte Seite ist gleich $X \setminus S$, also $S = \overline{S}$.

4.: Es ist zu zeigen, daß die beiden Mengen

$$A := \bigcap_{X \setminus V \in \tau, S \subset V} \quad \text{und} \quad B := S \cup \{x \in X \mid x \ \text{ ist Häufungspunkt von } \ S\} \ .$$

gleich sind. Sei $x \in B$. Dann ist entweder $x \in S$ und in diesem Fall ist offensichtlich $x \in A$, oder x ist Häufungspunkt von S, d.h. jede Umgebung von x enthält einen von x verschiedenen Punkt von S. Dann ist allerdings $x \in V$ für jedes V mit $X \setminus V \in \tau$, $S \subset V$, denn wäre $x \notin V_0$ für ein solches V_0, so wäre $X \setminus V_0$ offene Umgebung von x ohne von x verschiedenen Punkt aus S, da $S \subset V_0$. Also gilt $x \in A$ und $B \subset A$.
Sei umgekehrt $x \notin B$, dann $x \notin S$ und es gibt eine offene Umgebung U von x, die keinen Punkt von S enthält. Dann ist $V = X \setminus U \supset S$ abgeschlossen mit $x \notin V$, also $x \notin A$. $\square$

I.1.4 Lemma: Sei (X, τ) topologischer Raum. Dann gelten:

1. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
2. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
4. ist γ ein System von Teilmengen von X mit den Eigenschaften 1. bis 3., so ist das System τ der Komplemente der Mengen von γ eine Topologie für X und γ ist die Menge der abgeschlossenen Mengen bezüglich τ.

Beweis: 1.: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen. Dann ist $(X \setminus V_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen und es gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus V_i) \in \tau \ .$$

2.: Wie in 1. gilt

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus V_i) \in \tau.$$

3.: Es gelten $X = X \setminus \emptyset$ und $\emptyset = setminus X$.

4.: Folgt unmittelbar aus 1. bis 3.. $\square$

I.1.5 Definition: Ist $Y \subset X$ und τ Topologie für X, so heißt das System

$$\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$$

relative Topologie oder ***Relativtopologie*** auf Y induziert durch (X, τ). Eine Menge $S \subset Y$ heißt ***relativ offen*** , falls $S \in \tau_Y$ und ***relativ abgeschlossen*** , falls $Y \setminus S \in \tau_Y$ ist.

Bemerkung: τ_Y erfüllt offensichtlich die Axiome einer Topologie. Eine Menge $S \subset Y$ ist genau dann relativ abgeschlossen, falls es eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ gibt mit $S = A \cap Y$.

Um eine Topologie einzuführen, ist es zweckmässig als Hilfsmittel oder Vorstufe den Begriff der Basis einer Topologie zur Verfügung zu haben.

I.1.6 Definition: Eine Teilmengen $\beta \subset \tau$ heißt ***Basis*** für τ, falls jede Menge in τ Vereinigung von Elementen von β ist. Eine Teilmengen $\gamma \subset \tau$ heißt ***Subbasis*** für τ, wenn die Menge der endlichen Durchschnitte ihrer Elemente eine Basis ist. Eine Teilmengen $\varrho \subset \tau$ heißt ***lokale Basis*** für den Punkt $x \in X$, falls jede Umgebung von x ein Element von γ enthält, das Umgebung von x ist.

I.1.7 Bemerkung: Jede Menge γ von Teilmengen einer Menge X ist Subbasis einer Topolgie τ auf X . Man verifiziert leicht, daß τ die gröbste Topologie für X ist, in der alle Elemente von γ offen sind.

I.1.2 BEISPIELE TOPOLOGISCHER RÄUME

Einfache Beispiele topologischer Räume sind

1. Sei $X := \mathbb{R}$ mit der Topologie von Beispiel 3. I.1.1 versehen. Eine Basis ist dann die Menge der Intervalle $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
   $\{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Basis einer echt feineren Topologie.

2. Für $X := \mathbb{R}^n$ bildet die Menge aller Kugeln

   $$B_r(x) \ := \ \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\} \quad , \quad \|\cdot\| \ := \ \text{euklidische Norm}$$

   die Basis einer Topologie.

Es gibt Klassen von topologischen Räumen, deren Topologie konkret am Abstandsbegriff orientiert ist. Auf Grund dieser Struktur besitzen sie eine reichhaltigere Theorie, die in späteren Abschnitten eigens studiert wird.

I.1.8 Definition: Eine Menge X heißt ***metrischer Raum*** , falls eine ***Metrik*** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ existiert mit

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

für alle $x, y, z \in X$.

I.1.9 Bemerkung: Ein metrischer Raum M wird zu einem topologischen Raum, wenn man als Basis für die Topologie

$$\beta := \{B_r(x) \mid x \in M, r > 0\}, \qquad B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

wählt. Eine Menge $U \subset M$ ist dann genau dann offen, wenn zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $B_r(x) \subset U$.

I.1.10 Definition: Ein Vektorraum V über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt ***linearer normierter Raum***, falls eine sogenannte ***Norm*** $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ existiert mit

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (positive Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

für alle $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Falls in 1. nur $\|x\| \geq 0$ gilt , so heißt $\| \cdot \|$ ***Seminorm*** auf V.

Ein linearer normierter Raum ist ein metrischer Raum mit Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$. Sie ist eine ***translationsinvariante Metrik*** , d.h. eine Metrik mit der Eigenschaft $d(x-y,0) = d(x,y)$ für alle $x, y \in V$

Wichtige lineare normierte Räume sind:

1. Die Menge der stetigen Funktionen $C(K)$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit Norm
$$\|f\|_\infty \ := \ \|f\|_{\infty,K} \ = \ \sup_{x \in K} |f(x)|.$$
2. Die Menge der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^m(K)$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$: die Ableitungen $D^\alpha f := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ mit
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $|\alpha| \ := \ \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$ sind dann stetig und bilden eine Norm durch
$$\|f\|_{\infty,m,K} \ := \ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{\infty,K} \ .$$
3. Der Raum $C(K)$ mit den L^p-Normen
$$\|f\|_{L^p,K} \ := \ \left(\int_K |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ .$$
4. Die Menge der stetigen Funktionen $C(\Omega)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit den Semi-Normen
$$p_n(f) \ := \ \sup_{x \in K_n} |f(x)| \quad , \quad K_n \ \text{kompakt} \quad , \quad K_n \subset \Omega \ .$$

Bemerkung: Die Funktionen aus $C(\Omega)$ sind i.a. nicht beschränkt.

5. Der Raum $H(\Omega)$ der auf Ω holomorphen Funktionen als Unterraum von $C(\Omega)$ mit den gleichen Semi-Normen wie in 4.

6. Der Raum $\mathcal{S}$ der schnell abfallenden , beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit den Semi-Normen
$$p_{\alpha,N}(f) \ := \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^N |D^\alpha f(x)| < \infty \ ,$$
wobei α, D^α wie oben definiert und $N \in \mathbb{N}$ (siehe [Ü]).

Es gibt eine allgemeine Methode, um auf einem Vektorraum X einer gegebenen abzählbaren Familie $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Semi-Normen eine Metrik zuzuordnen, nämlich
(siehe [Ü])
$$d(f,g) \ := \ \sum_{i=1}^\infty \frac{2^{-i}\ p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} \quad , \quad f,g \in X \ .$$
Die oben aufgeführten drei Beispiele sind alle mit dieser Methode zu behandeln, d.h. sie werden zu metrischen Räumen, die aber nicht normierbar sind (s. Rudin [9], §1.44 - §1.46).

I.1.3 TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME

Eine zentrale Frage betrifft die Kompatibilität von Vektorraumstruktur und topologischer Struktur, wenn X ein Vektorraum ist. Dazu betrachte zunächst stetige Abbildungen. Seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für $S \subset X$, $T \subset Y$ sei $f(S) := \{f(x) \mid x \in S\} \subset Y$ das Bild von S unter f und $f^{-1}(T) := \{x \in X \mid f(x) \in T\}$ das Urbild von T unter f
(beachte: die Schreibweise $f^{-1}(T)$ besagt nicht, daß eine Umkehrabbildung zu f existiert !).

I.1.11 Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ***stetig in*** $x_0 \in X$ falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ in Y eine Umgebung U von x_0 in X gibt, sodaß $f(U) \subset V$. Eine Funktion f heißt ***stetig auf*** $S \subset X$, falls f für alle $x \in S$ stetig ist. Falls die inverse Abbildung f^{-1} existiert und f und f^{-1} auf X bzw. Y stetig sind, heißt f ***Homöomorphismus*** von X auf Y

Diese Definition verallgemeinert die für stetige reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$ übliche Definition mit ε- und δ-Umgebungen.

Bemerkung: Man verifiziert unmittelbar:
Ist $f : X \to Y$ stetig in x_0 und $g : Y \to Z$ stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

I.1.12 Satz: (Charakterisierung der Stetigkeit). Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig auf X;
2. Ist U offen in Y, so ist $f^{-1}(U)$ offen in X;
3. Ist V abgeschlossen in Y, so ist $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in X.

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1.: Sei V Umgebung um $f(x_0) \in Y$. Wegen 2. ist $f^{-1}(V)$ offen und enthält x_0, ist also eine offene Umgebung U um x_0 mit $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V$, d.h. die in 1. gewünschte Umgebung.

1. $\Rightarrow$ 2.: Sei V offen in Y und x_0 beliebig in $f^{-1}(V)$. Nach 1. gibt es eine offene Umgebung U_{x_0} von x_0 mit $f(U_{x_0}) \subset V$. Dann ist $\bigcup_{x_0\in f^{-1}(V)}(U_{x_0}) = f^{-1}(V)$ offen, da die U_{x_0} offen sind, d.h. es gilt 2.

3. $\Leftrightarrow$ 2.: Folgt aus der mengentheoretischen Identität

$$f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S) \ .$$

$\square$

Die folgende Definition wird später u.a. für sog. "schwache Topologien" wichtig.

I.1.13 Definition: Sei X eine Menge und $\big((Y_i, \sigma_i)\big)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $\mathcal{F} = \{ \ (f_i) \mid i \in I \ \}$ eine Menge von Abbildungen $f_i : X \longrightarrow Y_i$. Dann heißt die von

$$\gamma \ := \{ \ U \subset X \mid U = f_i^{-1}(V_i) \ , \ i \in I \ , \ V_i \in \sigma_i \ \}$$

als Subbasis definierte Topologie die $\sigma(X, \mathcal{F})$-***Topologie*** auf X .

I.1.14 VORAUSSETZUNG: Im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und alle auftretenden Vektorräume seien Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Die Forderung nach Kompatibilität von Vektorraumstruktur und topologischer Struktur führt nun zum Begriff des topologischen Vektorraums :

I.1.15 Definition: Ein ***topologischer Vektorraum*** (TVS) ist ein Vektorraum V , versehen mit einer Topologie derart, daß die Vektorraumoperationen $+ : V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ stetig sind, wobei die Produkträume jeweils mit der entsprechenden Produkt-Topologie versehen sind. Hierzu muß die Topologie auf Produkträumen erklärt werden :

I.1.16 Definition: Gegeben seien topologische Räume $(X, \sigma), (Y, \tau)$. Dann ist als Basis der sog. ***Produkt-Topologie*** Π auf $X \times Y$ die Menge

$$\{ \ (U_1, U_2) \mid U_1 \in \sigma, U_2 \in \tau \ \} \ .$$

definiert.

Bemerkung: Sind

$$\begin{array}{rcl} P_X : \Pi & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rl} P_Y : \Pi & \longrightarrow Y \\ (x,y) & \longmapsto y \end{array}$$

die kanonischen Projektionen, so ist nach Bemerkung I.1.7 Π die gröbste Topolgie, in der diese stetig sind.

Man kann leicht zeigen, daß für topologische Vektorräume X, Y $\ X \times Y$ ein topologischer Vektorraum unter der Produkttopologie Π ist. Konkret bedeutet dann die Stetigkeit z.B. der Abbildung $+$, daß, wenn $x = x_1 + x_2 =: f(x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \in X \times X$ gegeben ist, es zu einer Umgebung U von x Umgebungen U_1 von x_1 , U_2 von x_2 gibt mit
$f(U_1, U_2) = U_1 + U_2 \subset U$. Damit gilt nun

I.1.17 Lemma: Seien $(X, \sigma\ ,\ (Y, \tau))$ topologische Vektorräume und $f\ :\ X \longrightarrow Y$ linear. Dann gilt

1. Die Translation definiert für festes $x \in X$ auf $X \times X$ durch $T_x(y) := x + y$ und die Multiplikation $M_\alpha(y) := \alpha y$ für festes $\alpha \in \mathbb{K}$ sind Homöomorphismen.
2. f ist genau dann stetig auf X, wenn es stetig in 0 ist.
3. Sei $E \subset X$. Dann sind äquivalent
   (a) E ist offen.
   (b) Es gibt ein $a \in X$, sodaß $E + a$ offen ist.
   (c) Für alle $a \in X$ ist $E + a$ offen.

Beweis: [Ü].

Folgerung aus 3.: Um die Topologie eines topologischen Vektorraumes zu beschreiben, genügt es, eine Basis von 0-Umgebungen anzugeben.

Es gibt folgende Hierachie von topologischen Räumen (wobei noch keine Vektorraumstruktur vorzuliegen braucht):

I.1.18 Definition: (***Trennungsaxiome***) . Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Definiere die folgenden Eigenschaften:

T_1 Mengen, die aus einem einzigen Punkt bestehen, sind abgeschlossen.

T_2 Zu je zwei Punkten $x \neq y$ gibt es zwei offene disjunkte Umgebungen von x bzw. y .

T_3 Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \notin A$ gibt es offene disjunkte Umgebungen von A und x .

T_4 Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ gibt es offene disjunkte Umgebungen von A und B .

X heißt ***Hausdorff-Raum*** , falls T_1 und T_2 gelten. X heißt ***regulärer Raum***, falls T_1 und T_3 gelten. X heißt ***normaler Raum*** , falls T_1 und T_4 gelten.

Normale Räume sind reguläre Räume und diese sind Hausdorff-Räume. Der Nachweis für letztere Eigenschaft vereinfacht sich für TVS. Dies zeigt

I.1.19 Satz: Ein topologischer Vektorraum X, für den T_1 gilt, ist ein Hausdorff-Raum. Weiterhin impliziert T_2 die Eigenschaft T_1 .

Beweis: Seien $x, y \in V$, $x \neq y$, also $x - y \neq 0$. Wegen T_1 ist $\{0\}$ abgeschlossen, also $X \setminus \{0\}$ offen mit $x - y$ als innerem Punkt. Daher gibt es eine offene Menge $V_{x-y} \subset X \setminus \{0\}$ mit $x - y \in V_{x-y}$. Wegen der Stetigkeit der Addition gibt es Umgebungen V_x und V_{-y} um x bzw. $-y$, sodaß $V_x + V_{-y} \subset V_{x-y} \subset X \setminus \{0\}$. Daher gilt $0 \notin V_x + V_{-y}$, d.h. $z_1 + z_2 \neq 0$ für $z_1 \in V_x$, $z_2 \in V_{-y}$. Also $z_1 \neq -z_2$, sodaß V_x und $-V_{-y}$ die gesuchten Umgebungen sind .
Zum Beweis der zweiten Aussage zeigt man, daß jeder Punkt des Komplementes eines Punktes ein innerer Punkt ist. □

I.1.20 Definition: Ein topologischer Vektorraum heißt ***lokal konvex*** , falls er eine Basis von 0-Umgebungen besitzt, die alle konvex sind. (Eine Menge $W \subset X$ heißt ***konvex***, wenn die Strecke $\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ für alle $x, y \in W$ in W liegt).
Eine Menge $E \subset X$ eines topologischen Vektorraumes X heißt ***beschränkt***, falls für jede 0-Umgebung V eine Zahl $s_{V,E}$ existiert, sodaß $E \subset t \cdot V$ für alle $t > s_{V,E}$. Ein topologischer Vektorraum heißt ***lokal beschränkt*** , falls eine beschränkte 0-Umgebung existiert.

Man kann nun fragen, unter welchen Bedingungen ein TVS zu einem metrischen oder normierten Raum wird. Dazu

Bemerkung: Ein topologischer Vektorraum heißt ***metrisierbar*** , falls seine Topologie durch eine Metrik erzeugt wird. Entsprechend wird der Begriff ***normierbar*** gebildet.

Es gilt folgender Satz (s.Rudin [8]):

I.1.21 Satz:

1. Ein topologischer Vektorraum X ist metrisierbar genau dann, wenn X eine abzählbare Nullumgebungsbasis hat.
2. Ein topologischer Vektorraum X ist normierbar genau dann, wenn X lokal konvex und lokal beschränkt ist.

Bemerkung: Beispiele für metrisierbare, aber nicht normierbare Räume wurden bereits weiter oben genannt.

I.1.4 KOMPAKTHEIT

I.1.22 Definition: Sei (X, τ) topologischer Raum und sei $S \subset X$, und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X, sodaß $S \subset \bigcup_{T \in \mathcal{F}} T$. Dann heißt $\mathcal{F}$ ***Überdeckung*** von S. Falls alle $T \in \mathcal{F}$ offen sind, so heißt $\mathcal{F}$ ***offene Überdeckung*** .
Eine Menge $S \subset V$ heißt ***(überdeckungs-)kompakt*** , falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält. X heißt ***lokal kompakt***, falls jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

I.1.23 Lemma: In einem (X, τ) topologischen Raum sei $T \subset S \subset X$, T abgeschlossen und S kompakt. Dann ist auch T kompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von T. Dann ist $\mathcal{F} \cup \{X \setminus T\}$ eine offene Überdeckung von S. Es existiert eine endliche Teilüberdeckung von S, schneide diese mit $X \setminus T$ und erhalte so eine endliche Teilüberdeckung von T. □

I.1.24 Satz: Seien X , Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Dann ist $f(X)$ kompakt.

Beweis: Sei $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ offene Überdeckung von $f(X)$. Sei $U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$,
$\alpha \in A$. Nach Satz I.1.12 sind die U_α offen in X. Es gibt nun nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ von X. Weiterhin gilt

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} f(U_{\alpha_i}) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) = f(X) \ ,$$

also ist $\{V_{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ endliche Teilüberdeckung von $f(X)$. □

I.1.25 Korollar: Auf einem kompakten topologischem Raum nimmt jede stetige Funktion ihr Infimum und Supremum an.

Beweis: Die Behauptung folgt daraus, daß die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt sind. □

I.2 EINFÜHRUNG IN DIE MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE

I.2.1 MESSBARE FUNKTIONEN, MASSE UND MASSRÄUME

I.2.1 Definition: Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Teilmenge der Potenzmenge von X, $\mathcal{A} \subset P(X)$, heißt ***σ-Algebra***, falls gilt:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}\ ,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Die Mengen aus $\mathcal{A}$ heißen ***meßbare Mengen*** und $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum . Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{R}$ der Potenzmenge von X heißt ***Ring*** , falls für $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cup B \in \mathcal{R}$ und $A \setminus B \in \mathcal{R}$ sind.

Bemerkung: Ein Ring ist noch keine Algebra. Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung, ferner unter abzählbarer Durchschnittsbildung abgeschlossen, denn es gilt

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus A_i), \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Es ist auch $A \setminus B = (X \setminus B) \cap A \in \mathcal{A}$ für $A, B \in \mathcal{A}$.
Für eine gegebene Teilmenge $\mathcal{M}$ der Potenzmenge $P(X)$ eines Raumes X existiert eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ enthält. Sie wird erzeugt durch Abschluß der Operationen 2. und 3. oder durch

$$\mathcal{M}_\sigma = \bigcap \{\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \ \mid \ \mathcal{N} \ \text{ ist } \ \sigma - \text{Algebra}\} \ .$$

I.2.2 Definition: Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume mit σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ ***meßbare Abbildung*** oder meßbar bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls für alle $B \in \mathcal{B}$ die Menge $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist.

Bemerkung: Ist $\mathcal{B}$ die von einem $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Abgebra, so vereinfacht sich diese Bedingung zu: $f : X \to Y$ ist meßbar, falls für alle $B \in \mathcal{M}$ die Menge $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist. Der Test auf einer erzeugenden Menge ist also ausreichend.

Die Verbindung zu topologischen Räumen gibt

I.2.3 Definition: Ist (X, τ) topologischer Raum, so heißt die von τ erzeugte σ-Algebra die **Borel*sche σ-Algebra*** von (X, τ). Ihre Elemente heißen **Borel*mengen***.

Die Borel-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Mengen enthält.

I.2.4 Lemma: Ist $f : X \to Y$ stetig, wobei (X, σ) und (Y, τ) topologische Räume sind, so ist f bezüglich der von σ und τ erzeugten σ-Algebren meßbar.

Beweis: Nach dem Vorbild von Satz I.1.12 .

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist der Fall $Y := \mathbb{K} \in \{\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{C}}\}$. Dann definiert man: $f : X \to \mathbb{K}$ heißt **Borel-*meßbar***, wenn im Falle $Y := \mathbb{R}$ f meßbar ist auf X bezüglich der σ-Algebra, die von der aus der Menge der halboffenen bzw. offenen Intervalle $[-\infty, a)$, (a, b) , $(b, \infty]$ entstehenden Topologie erzeugt wird, und im Falle $Y := \mathbb{C}$ f der bezüglich der Mengen $B_r(z)$ und $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z)}$.

I.2.5 Lemma:

1. f ist genau dann Borel-meßbar, wenn
$$f^{-1}(M) \in \mathcal{A} \text{ für alle } M \in \{(a,b), [-\infty, a), (a, \infty] \mid a, b \in \mathbb{R}\} .$$
2. f ist komplex Borel-meßbar genau dann, wenn $\Re(f)$ und $\Im(f)$ reell Borel-meßbar sind.
3. Seien f , g , $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Borel-meßbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann sind auch folgende Funktionen Borel-meßbar:
$$\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) \quad , \quad \inf_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) \quad , \quad \limsup_{i\to\infty} f_i \quad , \quad \liminf_{i\to\infty} f_i \ ,$$
$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0), \qquad |f(x)| \ ,$$
$$f + g \quad , \quad f \cdot g \quad , \quad \alpha \cdot f \quad , \quad f/g \text{ falls definiert} .$$

Beweis: [Ü].

I.2.6 Definition: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum. Dann heißt $s : X \to \mathbb{R}$ ***einfache Funktion*** , falls s nur endlich viele Werte annimmt, d.h. s hat die Darstellung
$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad , \quad A_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) \quad , \quad 1 \le i \le n \quad ,$$
wobei die ***charakteristische Funktion*** χ_A definiert ist als
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases} \quad .$$

Bemerkung: Einfache Funktionen sind Borel-meßbar.

I.2.7 Lemma: (Approximation meßbarer Funktionen durch einfache Funktionen). Sei $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ meßbar. Dann gibt es eine Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit $0 \le s_1 \le s_2 \le \ dots \le f$, und für alle $x \in X$ gilt $s_i(x) \to f(x)$.
f ist also von unten durch einfache Funktionen approximierbar.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Seien
$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right), \quad F_n = f^{-1}([n, \infty]), \quad 1 \le i \le n2^n .$$

Es gilt $[0,\infty] = \bigcup_{1\leq i\leq n2^n} \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \cup [n,\infty]$, wobei die Vereinigung disjunkt ist. Sei

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n} \ .$$

Die s_n bilden eine monoton steigende Folge und $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, denn für $x \in E_{n,i}$ gilt

$$s_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n} \ ,$$

falls $x \in F_n$ so $s_n(x) = n$, aber es gibt ein n mit $x \in E_{n,i}$. □

I.2.8 Definition: Sei $\mathcal{M}$ ein System von Teilmengen eines Raumes X, dann heißt eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ ***äußeres Maß*** auf $\mathcal{M}$, falls für alle $M, E, F, A_i \in \mathcal{M}$ gilt:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. μ^* ist monoton, d.h. für $E \subset F$ gilt $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$
3. $\mu^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i)$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$($\sigma$-Subadditivität)

I.2.9 Definition: Ist $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum, so heißt $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ***Maß*** , falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ für $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt (σ-Additivität).

$(X,\mathcal{A},\mu)$ heißt dann ***Maßraum*** .

Bemerkung: Die Eigenschaften eines äußeren Maßes folgen aus denen eines Maßes, denn die σ-Additivität impliziert bereits Monotonie, da für $E \subset F$ dann gilt:

$$\mu(F) = \mu(E\dot{\cup}(F\setminus E)) = \mu(E) + \mu(F\setminus E) \geq \mu(E) \ .$$

σ-Subadditivität folgt ebenfalls, denn ist $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} B_i$, $n > 1$, so sind die B_n disjunkt, und es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Daher gilt wegen der Monotonie

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i<n} B_i\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \ .$$

Der Schritt von einem äußeren Maß zu einem Maß ist wesentlich. Dies zeigt

I.2.10 Lemma: (Stetigkeitseigenschaften von Maßen). Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:

1. Sei $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
2. Sei $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge meßbarer Mengen und $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Beweis: 1.: Sei $B_i = A_i \setminus A_{i-1} \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, $B_0 = A_0 = \emptyset$. Dann ist A die disjunkte

Vereinigung der B_i, $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

2.: Sei $B_i = A_1 \setminus A_i$, dann $B_i \subset B_{i+1}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 \setminus A$. Mit 1. gilt

$$\mu(A_1) = \mu(A_i) + \mu(B_i), \quad \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A) \ .$$

□

Die Konstruktion eines äußeren Maßes ist relativ einfach, da man sich auf Grund seiner Definition auf ein geeignetes Teilsystem $\mathcal{M}$ von X beschränken kann. Dies ist z.B.bei einer Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ der Fall, die σ-additiv ist und $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt. Konkret betrachtet man die Quader in

$$Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j \le b_j, 1 \le j \le n$$

in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern ein Ring und für $A = \bigcup_{i=1}^{m} Q^i$ ist durch

$$\lambda(A) := \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (b_j^i - a_j^i)$$

zunächst nur ein äußeres Maß auf diesem Ring $\mathcal{R}$ definiert.
Die eigentliche Schwierigkeit auf dem Wege zu einem Maß ist nun – wie die folgenden Sätze zeigen – dieses äußere Maß auf die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra fortzusetzen und zu zeigen, daß es damit zu einem Maß wird.

I.2.11 Definition: Sei μ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subset X$ heißt ***μ-meßbar***, falls

$$\mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \text{ für alle } M \subset X \ .$$

I.2.12 Satz: Die Menge $\mathcal{A}$ aller μ-meßbaren Teilmengen von X ist eine σ-Algebra und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$. Offensichtlich gilt für $A \in \mathcal{A}$ auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, daß $A \cup B \in \mathcal{A}$. Wegen $B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(M \cap A) = \mu(M \cap A \cap B) + \mu(M \cap A \cap (X \setminus B))$$

für alle $M \subset X$. Andererseits gilt wegen $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} &\mu(M \cap (X \setminus (A \cap B))) \\ = \ &\mu(M \cap (X \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu(M \cap (X \setminus (A \cap B)) \cap (X \setminus A)) \\ = \ &\mu(M \cap A \cap (X \setminus B)) + \mu(M \cap (X \setminus A)). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für alle $M \subset X$

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(M \cap A) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \\ &= \mu(M \cap A \cap B) + \mu(M \cap A \cap (X \setminus B)) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \\ &= \mu(M \cap (A \cap B)) + \mu(M \cap (X \setminus (A \cap B))) \end{aligned}$$

und damit $A \cap B \in \mathcal{A}$. Daraus folgt auch $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \in \mathcal{A}$. Seien nun $A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset X$ folgt dann induktiv

$$\begin{aligned}\mu(M \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \mu(M \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_n) + \mu(M \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap (X \setminus A_n)) \\ &= \mu(M \cap A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu(M \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(M \cap A_i).\end{aligned}$$

Setze nun $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Weil $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt wegen der Monotonie und σ-Subadditivität von μ

$$\mu(M) = \mu(M \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mu(M \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(M \cap A_i) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \ .$$

Für $n \to \infty$ folgt

$$\mu(M) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M \cap A_i) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap (X \setminus A)) \ . \qquad (*)$$

Wegen der σ-Subadditivität gilt aber $\mu(M) \leq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap (X \setminus A))$, also ist $A = \bigcup_{i\geq 1} \in \mathcal{A}$, und in $(*)$ muß Gleichheit gelten. Daher ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Einsetzen von A in $(*)$ liefert $\mu(A) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$. □

Für den folgenden Hauptsatz dieses Abschnitts benötigen wir noch

I.2.13 Definition: Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ von $(X, \mathcal{A})$ heißt ***endlich***, falls $\mu(X) < \infty$, und σ***-endlich*** , falls X abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem Maß ist. Ein Maß heißt ***vollständig*** , falls für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ - d.h. A ist eine sogenannte μ***-Nullmenge*** - folgt, daß jede Teilmenge von A in $\mathcal{A}$ liegt.

I.2.14 Satz: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $\mathcal{R}_\sigma$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ -Algebra und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Sei für $A \subset X$

$$\mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{R}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\}.$$

Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{R}_\sigma$ und $\mu(A) = \mu^*(A)$ für $A \in \mathcal{R}$. Ist μ σ-endlich, so ist μ^* die eindeutig bestimmte ***Fortsetzung*** von μ und ein Maß auf $\mathcal{R}_\sigma$.

Beweis: Die Eigenschaft $\mu(\emptyset) = 0$ und die Monotonie sind klar. Zum Beweis der σ-Subadditivität seien M_n, $n \in \mathbb{N}$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition von μ^* existieren $A_{nm} \in \mathcal{R}$ mit $M_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{nm}$ und $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) \leq \mu^*(M_n) + \varepsilon/2^n$. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subset \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm}$, also

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) &\leq \mu^*(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm}) = \mu(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm}) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(M_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(M_n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist μ^* ein äußeres Maß. Dann zeige die μ^*-Meßbarkeit aller $A \in \mathcal{R}_\sigma$. Dazu reicht es, $A \in \mathcal{R}$ anzunehmen, da nach Satz I.2.12 die Menge aller μ^*-meßbaren Mengen bereits eine σ-Algebra ist. Wegen der σ-Subadditivität von μ^* gilt für alle $M \subset X$

$$\mu^*(M) \leq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap (X \setminus A)) \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$. Nun gilt

$$M \cap A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A) \text{ und } M \cap (X \setminus A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap (X \setminus A)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus A),$$

also ist

$$\begin{aligned} \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap (X \setminus A)) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(M) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist A nach Definition des Kriteriums von Satz I.2.12 μ^*-meßbar und μ^* ein Maß auf $\mathcal{R}_\sigma$.
Weiter gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ wegen $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$ und andererseits mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$A = (A_1 \cap A) \cup ((A_2 \setminus A_1) \cap A) \cup ((A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A) \cup \cdots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ((A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A)$$

und daher $\mu(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ wegen der Monotonie und der σ-Subadditivität von μ, also $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{R}$.
Sei nun μ σ-endlich und sei ν eine weitere Fortsetzung von μ auf $\mathcal{R}_\sigma$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $B \in \mathcal{R}_\sigma$. Nach Lemma I.2.10 und Satz I.2.12 gilt

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B\big) \quad \text{und} \quad \mu^*(B) = \lim_{n\to\infty} \mu^*\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B\big).$$

Daher genügt es, die Behauptung für $B \subset A$ für ein $A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A) < \infty$ zu zeigen. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \mid B_n \in \mathcal{R}, B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Big\} \\ &= \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n) \mid B_n \in \mathcal{R}, B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Big\}. \end{aligned}$$

Nun ist ν ein Maß auf $\mathcal{R}_\sigma$. Daher folgt $\nu(B) \leq \mu^*(B)$ und analog $\nu(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus B)$, damit insgesamt

$$\mu^*(A) = \nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(A).$$

Daher ist $\nu(B) = \mu^*(B)$. $\square$

Das oben definierte äußere Maß auf dem Ring der Vereinigungen halboffener Quader ist wegen $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [-k, k)^n$ σ-endlich. Das nach dem eben bewiesenen Satz eindeutig definierte Maß auf der zugehörigen Borelschen σ-Algebra $\mathcal{R}_\sigma$ heißt
Lebesgue*sches Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

I.2.2 INTEGRATION

I.2.15 Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f : X \to [0, \infty)$ Borel-meßbar.Dann definiere (falls existiert)

$$\int_X f \; d\mu = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \quad | \quad X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,\ A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \\ \alpha_i \in [0, \infty),\ \alpha_i \leq \inf_{x\in A_i} f(x) \Big\}.$$

I.2.16 Bemerkung: Ist s einfache Funktion auf X, also $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$, $\alpha_i \geq 0$, so gilt [Ü]

$$\int_X s \; d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Deswegen lautet eine äquivalente Definition

$$\int_X f \; d\mu := \sup \left\{ \int_X s \; d\mu \mid s \text{ einfach mit } 0 \leq s \leq f \right\} .$$

Eine Verallgemeinerung lautet: Ist $E \subset X$ meßbar, so definiere

$$\int_E s \; d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \quad , \quad s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Dieses Integral hat folgende Eigenschaften:

I.2.17 Lemma:

1. Sind f und g Borel-meßbar und nichtnegativ mit $f \leq g$, so gilt
$$\int_X f \; d\mu \leq \int_X g \; d\mu.$$
2. Mit $\alpha \in \mathbb{K}$ und $0 \cdot \infty := 0$ gilt
$$\int_X \alpha f \; d\mu = \alpha \int_X f \; d\mu.$$
3. Für Borel-meßbare nichtnegative Funktionen f und g gilt
$$\int_X (f+g) \; d\mu = \int_X f \; d\mu + \int_X g \; d\mu.$$

Beweis: [Ü].

I.2.18 Satz: (**Beppo Levi**) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (nicht strikt) monoton wachsende Folge reellwertiger nichtnegativer meßbarer Funktionen auf $E \in \mathcal{A}$ mit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $\int_E f \; d\mu = \alpha < \infty$. Dann ist f meßbar mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \; d\mu < \infty$ und

$$\int_E f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \; d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \; d\mu \; .$$

Beweis: Nach Lemma I.2.5 ist $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ meßbar und nach Lemma I.2.17 gilt wegen $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \; d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \; d\mu \leq \int_E f \; d\mu \; .$$

Sei s einfach und meßbar mit $0 \leq s \leq f$, $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$. Wähle $\gamma \in (0,1)$ und betrachte $E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \geq \gamma \; s(x)\} \in \mathcal{A}$, dann $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ wegen $f_n \to f$.

Dann gilt

$$\int_{E_n} f_n \ d\mu \overset{I.2.17}{\geq} \int_E \gamma\, s\chi_{E_n} \ d\mu \overset{I.2.17}{=} \gamma \int_E s\chi_{E_n} \ d\mu \overset{I.2.16}{=} \gamma \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \ .$$

Wegen $A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_i \cap E_n)$ folgt mit Lemma I.2.17

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n \ d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \gamma \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\ &\overset{I.2.17}{=} \gamma \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \overset{I.2.17}{=} \gamma \int_E s \ d\mu \to \int_E s \ d\mu, \quad \gamma \to 1. \end{aligned}$$

Anschließend bilde das Infimum der rechten Seite über einfache Funktionen $s \leq f$ und erhalte nach Bemerkung I.2.16

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu \geq \int_E f \ d\mu.$$

□

I.2.19 Korollar: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (f_n) wie oben. Dann gilt

$$\int_E \sum_{n=1}^\infty f_n \ d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n \ d\mu \quad , \quad \text{falls} \quad \int_E \sum_{i=1}^\infty f_n \ d\mu < \infty \ .$$

Beweis: [Ü].

I.2.20 Lemma: (**Fatou**) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein $\sigma-$ endlicher Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen auf $E \in \mathcal{A}$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \ d\mu < \infty$. Dann gilt

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu$$

Beweis: Nach Lemma I.2.5 ist $\liminf_{n\to\infty} f_n$ meßbar. Schreibe

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = \lim_{k\to\infty} g_k$$

mit $g_k = \inf_{n\geq k} f_n$, denn dann sind die g_k monoton wachsend, und es folgt mit dem Satz von Beppo Levi (I.2.18) :

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \ d\mu &= \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \ d\mu \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} \int_E f_n \ d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu. \end{aligned}$$

□

I.2.21 Satz: (Konstruktion von Maßen aus dem Integral). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ Borel-meßbar. Dann bildet $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\varphi(E) = \int_E f \ d\mu$$

ein Maß φ auf $\mathcal{A}$. Weiterhin gilt

$$\int_E g \ d\varphi = \int_E g \cdot f \ d\mu.$$

Beweis: [Ü].

Die Definition I.2.15 gilt nur für nichtnegative Funktionen. Eine Erweiterung auf komplexwertige Funktionen ist

I.2.22 Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $L^1(\mu)$ die Menge aller komplexwertigen Borel-meßbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ mit $\int_X |f| d\mu < \infty$. Solche Funktionen heißen ***integrabel*** . Für diese f definiert man

$$\int_X f \ d\mu = \int_X (\Re f)^+ \ d\mu - \int_X (\Re f)^- \ d\mu + i \int_X (Imf)^+ \ d\mu - i \int_X (Imf)^- \ d\mu$$

I.2.23 Lemma: Seien $f, g \in L^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\alpha g + \beta f \in L^1(\mu)$ und $\int$ ist linear. $L^1(\mu)$ ist also ein Vektorraum und

$$\left| \int_X f \ d\mu \right| \leq \int_X |f| \ d\mu.$$

Es ist also $\|f\|_{L^1} := \int_X |f| \ d\mu$ eine Seminorm auf $L^1(\mu)$.

Beweis: Die Linearität folgt unmittelbar aus Lemma I.2.17 und der obigen Definition. Die behauptete Ungleichung gilt wegen der Dreiecksungleichung für einfache Funktionen, daher (nach Grenzwertbildung) auch für integrable Funktionen. □

I.2.24 Satz: (von **Lebesgue** über ***dominierte Konvergenz***) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mu)$, die punktweise gegen eine Abbildung $f : X \to \mathbb{K}$ konvergiert. Weiterhin gebe es eine integrable Funktion $g \in L^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrabel und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$, insbesondere

$$\int_X f \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \ d\mu.$$

Beweis: Sei

$$g_j := g - \frac{1}{2}|f_j - f| \ .$$

Dann ist $g_j \geq 0$ und

$$\int_X g_j \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu < \infty \ .$$

Da $\lim_{j\to\infty} g_j = g$ folgt nach dem Lemma von Fatou (I.2.20)

$$\begin{aligned} \int_X g \ d\mu &= \int_X \liminf_{j\to\infty} g_j \ d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X g_j \ d\mu \\ &= \int_X g \ d\mu - \frac{1}{2} \limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f| \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu, \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f| \ d\mu = 0 \ .$$

Wegen

$$\int_X |f| \ d\mu \leq \int_X |f_j - f| \ d\mu + \int_X |f_j| \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu + \int_X |f_j - f| \ d\mu$$

ist dann f integrabel. Schließlich folgt die Limesaussage aus

$$\Big|\int_X f_j \ d\mu - \int_X f \ d\mu\Big| \leq \int |f_j - f| \ d\mu \ .$$

□

I.2.25 Definition: Eine Eigenschaft einer Menge A gilt ***μ-fast überall*** , falls $X \setminus A$ Teilmenge einer Nullmenge ist.

I.2.26 Lemma: Es gelten

1. Falls $f = g$ fast überall, so folgt $\int_X f \ d\mu = \int_X g \ d\mu$.
2. Es gilt $\int_X |f| \ d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.
3. Aus $\int_X |f| \ d\mu < \infty$ folgt $0 \leq |f| < \infty$ fast überall.
4. Es gilt $\left|\int_X f \ d\mu\right| = \int_X |f| \ d\mu$ genau dann, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f| = \alpha f$ fast überall, also wenn f fast überall nichtnegativ oder nichtpositiv ist.

Beweis: [Ü].

I.2.27 Lemma: Sei (f_n) Folge von komplexwertigen Borel- meßbaren Funktionen, die auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ punktweise fast überall endlich definiert sind, und $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_X |f_k| \ d\mu\right) < \infty$. Dann konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fast überall und $f \in L^1(\mu)$. Ferner gilt

$$\int_X f \ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \ d\mu.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Korollar I.2.19 .

I.2.3 MEHRFACHE INTEGRALE

Folgende Sachverhalte seien ohne Beweis genannt, man findet sie zum Beispiel in Rudin [9].

I.2.28 Definition: Das ***Produkt*** $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ zweier σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist definiert als die σ-Algebra, die durch $\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ erzeugt wird.

Bemerkung: Im Falle $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit den entsprechenden Borelschen σ-Algebren wird die Borelsche σ-Algebra von $\mathbb{R}^{n+m}$ erzeugt. Dieser Sachverhalt gilt allgemeiner: sind (X, τ), (X, σ) topologische Räume mit abzählbarer Basis und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ die zugehörigen Borelschen σ-Algebren, so ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra des topologischen Produktraums $X \times Y$. Vorstufen zur Integration auf Produkt-Algebren sind.

I.2.29 Satz: (Maß auf Produkträumen) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ bzw. ν. Dann gibt es genau ein Maß $\lambda := \mu \otimes \lambda$ auf $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mit

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad , \quad A \in \mathcal{A}\ , B \in \mathcal{B}\ .$$

Definiere für beliebiges $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und fest $x \in X$, $y \in Y$ Funktionen

$$\varphi(x) := \int_Y \chi_{E_x}\ d\nu \quad , \quad \psi(y) := \int_X \chi_{E^y}\ d\mu\ .$$

Dann gilt

$$\lambda(E) = \int_X \underbrace{\left(\int_Y \chi_E(x,y)\ d\nu\right)}_{\varphi(x)} d\mu = \int_Y \underbrace{\left(\int_X \chi_E(x,y)\ d\mu\right)}_{\psi(y)}\ d\nu\ .$$

I.2.30 Lemma: Ist $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $E_x := \{y \mid (x,y) \in E\}$ der x-***Schnitt*** von E zu $x \in X$, entsprechend $E^y := \{x \mid (x,y) \in E\}$ der y-***Schnitt***, so sind E_x und E^ymeßbare Mengen in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume und $f : X \times Y \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{[0,\infty], \mathbb{C}\}$, eine $\lambda = \mu \otimes \nu$-meßbare Funktion. Für $x \in X$, $y \in Y$ definiere $f_x : Y \to \mathbb{K}$ durch $f_x(y) = f(x,y)$ (halte x fest), entsprechend sei $f^y : X \to \mathbb{K}$ definiert durch $f^y(x) := f(x,y)$.
Dann sind f_x und f^y ν- bzw. μ-meßbar.

Analog betrachte $f : X \times Y \to [0,\infty]$. Definiere zunächst wieder für nichtnegative Funktionen

$$\varphi(x) := \int_Y f_x d\nu \quad , \quad \psi(y) = \int_X f^y\ d\mu.$$

Bemerkung: Der Fall $f(x,y) := \chi_E(x,y)$ entspricht dem vorherigen Satz.

I.2.31 Lemma: Es gilt für $f : X \times Y \to [0,\infty]$

$$\int_X \varphi(x)\ d\mu = \int_{X \times Y} f(x,y)\ d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi(y)\ d\nu\ .$$

Bemerkung: Wenn also eines der Integrale endlich ist, sind es die anderen auch. Daher setze für die Behandlung des allgemeinen Falles $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ voraus, daß $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ oder äquivalent dazu, daß eines der drei Integrale für $|f|$ endlich ist. Dann kann man zunächst zeigen:
die Mengen $M := \{x \in X \mid \int_Y |f_x|\ d\nu = \infty\}$ bzw. $N := \{y \in Y \mid \int_X |f^y|\ d\mu = \infty\}$ sind meßbar mit Maß 0. Daher kann man die Funktionen

$$\varphi(x) := \begin{cases} \int_Y f_x d\nu & x \notin M \\ 0 & x \in M \end{cases} \quad , \quad \psi(y) := \begin{cases} \int_X f^y d\mu & y \notin N \\ 0 & y \in N \end{cases}$$

sinnvoll definieren und zeigen, daß sie meßbar sind.

I.2.32 Satz: (**Fubini**) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ und ν und $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ $(\mu \otimes \nu)$-meßbar und eines der folgenden Integrale endlich

$$\int_X \int_Y f(x,y)\ d\nu\ d\mu\ ,\ \int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\otimes\nu)\ ,\ \int_Y \int_X f(x,y)\ d\mu\ d\nu.$$

Dann gilt

$$\int_X \int_Y f(x,y)\ d\nu\ d\mu\ =\ \int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\otimes\nu)\ =\ \int_Y \int_X f(x,y)\ d\mu\ d\nu\ .$$

Bemerkung: σ-Endlichkeit ist wesentlich. Sei zum Beispiel $X = Y = [0,1]$, μ das Zählmaß und ν die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$, $f(x,y) = \delta_{xy}$. μ ist nicht σ-endlich auf $[0,1]$ und es gilt:

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\ d\mu\ d\nu = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\ d\nu\ d\mu\ .$$

I.2.4 ANWENDUNG AUF LEBESGUE-RÄUME

In Verallgemeinerung von $L^1(\mu)$ auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiere für $0 < p < \infty$ die Räume

I.2.33 Definition:

$$L^p(\mu) := \{\ f \mid f\ \text{ komplexwertig, Borel-meßbar und}$$

$$\|f\|_{L^p}\ :=\ (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty\ \}\ ,$$

und für den Grenzfall $p := \infty$

$$L^\infty(\mu) := \{\ f \mid f\ \text{ komplexwertig, Borel-meßbar, }\ |f| < \infty\ \text{ f.ü. und}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{\ \alpha \mid \mu(\{x \mid |f(x)| \geq \alpha\}) = 0\ \} < \infty\ \}\ .$$

Die Folgenräume sind analog definiert:

I.2.34 Definition:

$$l^p\ :=\ \{\ \xi\ \mid\ \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ komplexwertige Folge mit }\ \|\xi\|_{l^p} < \infty\ \}\ ,$$

wobei

$$\|\xi\|_{l^p}\ :=\ (\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\ )^{\frac{1}{p}}\ ,$$

und für den Grenzfall $p = \infty$

$$l^\infty := \{\ \xi\ \mid\ \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \|\xi\|_{l^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\ \}\ .$$

Wir wollen zeigen, daß die Größen $\|\cdot\|_{L^p}$ Normen definieren. Zum Problem der Definitheit: aus $\|f\|_{L_p} = 0$ folgt nur $f = 0$ fast überall. Daher identifiziere f im Folgenden mit seiner Äquivalenzklasse

$$\mathcal{F}[f] := \{g \in L^p(\mu) \mid g = f \text{ fast überall}\}.$$

Unterscheide also nicht zwischen Funktionen, die fast überall gleich sind. Dann sind die $\|\cdot\|_{L^p}$ definit auf $L^p(\mu)$, betrachtet auf der Menge der Äquivalenzklassen. Es gilt offensichtlich $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha|\|f\|_{L^p}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < p \leq \infty$.

I.2.35 Satz: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gelten

1. die **Hölder-*Ungleichung*:**

$$\left|\int_X f \cdot g \;\, d\mu\right| \leq \int_X |f \cdot g| \;\, d\mu \; leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

für $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

2. **Minkowski-*Ungleichung*:** für $f, g \in L^p(\mu)$ folgt

$$f + g \in L^p(\mu) \qquad \text{und} \qquad \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \ .$$

Beweis: 1.: Für $p = \infty$ folgt $q = 1$, also $|(f \cdot g)(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|$, also $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Sei also $1 < p < \infty$ und $\|f\|_{L^p} > 0$, $\|g\|_{L^q} > 0$. Für $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

denn mit Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten folgt

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \; leq \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$$

wegen der Konkavität des Logarithmus. Mit $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}$ und $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$ folgt

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_{L^q}^q}.$$

Die rechte Seite ist integrabel, also auch die linke, damit $fg \in L^1(\mu)$. Integration ergibt dann

$$\frac{\int |fg| \;\, d\mu}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p \;\, d\mu}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q \;\, d\mu}{\|g\|_{L^q}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

2.: Für $p \in \{1, \infty\}$ folgt die Behauptung aus der punktweisen Dreiecksungleichung. Für $1 < p < \infty$ gilt punktweise

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

also ist $f + g \in L^p(\mu)$. Weiterhin gilt

$$|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Nun sind $|f|, |g| \in L^p(\mu)$ und $|f + g|^{p-1} \in L^q(\mu)$ wegen $q(p - 1) = p$, also gilt nach der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int |f + g|^p \;\, d\mu &\leq \|f\|_{L^p}\||f + g|^{p-1}\|_{L^q} + \|g\|_{L^p}\||f + g|^{p-1}\|_{L^q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int |f + g|^p \;\, d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

$\square$

I.2.36 Korollar: Die L^p sind lineare normierte Räume für $1 \leq p \leq \infty$.

Bemerkung: Für $0 < p < 1$ ist $\|\cdot\|_{L^p}$ keine Norm , jedoch kann man für die Funktion $\Delta_p(f) := \left(\int_X |f|^p \ d\mu\right)$ zeigen

$$\Delta_p(f+g) \leq \Delta_p(f) + \Delta_p(g),$$

und daher ist $d(f,g) := \Delta_p(f-g)$ eine Metrik.

Die Aussage des Korollars gilt in gleicher Weise für die Folgenräume l_p, wobei der Beweis auch direkt geführt werden kann.Im Falle $p = \infty$ führt man außerdem den Unterraum

$$c_o := \{ \ \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty \ | \ \lim_{n\mapsto\infty} \xi_n = 0 \ \} \ .$$

von l^∞ ein. Er ist ein vollständiger normierter Raum unter der Norm von l^∞ .

I.3 METRISCHE RÄUME

I.3.1 GRUNDLAGEN

I.3.1 Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Weiterhin sei $x \in X$. Dann definiere

1. $$dist(x,M) := d(x,M) := \inf_{y\in M} d(x,y)$$

   und

   $$dist(A,B) := d(A,B) := \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$$

   für $A, B \subset X$.

2. Ein $y^* \in M$ heißt ***beste Approximation*** aus M von x, wenn

   $$dist(x,M) = d(x,y^*)$$

   gilt.

I.3.2 Lemma: Für $x, y, x', y' \in X$, $M \subset X$ gelten die Ungleichungen

1. $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$ (4er-Ungleichung) .
2. $|dist(x,M) - dist(x',M)| \leq d(x,x')$.

Beweis: 1.: Mit $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ bzw. $d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$ und $d(x,y) = d(y,x)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} -d(y,y') - d(x,x') & = & -d(y,y') + d(x',y') \quad - d(x',y') - d(x,x') \\ & \leq & d(x',y) - d(x',x) \quad - d(x',y') \\ \leq d(x,y) - d(x',y') & \leq & d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) - d(x',y') = \\ d(x,x') + d(y,y') \ . & & \end{array}$$

2.: Sei o.B.d.A. $dist(x,M) \geq dist(x',M)$ und sei $(y_n)_{n\in \ \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} d(x',y_n) =$

$dist(x', M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |dist(x,M) - dist(x',M)| &= \lim_{n\to\infty}[dist(x,M) - d(x',y_n)] \\ &\leq \lim_{n\to\infty}[d(x,y_n) - d(x',y_n)] \\ &\leq \lim_{n\to\infty}[d(x,x') + d(y_n,y_n)] = d(x,x') \end{aligned}$$

nach dem ersten Teil. □

I.3.3 Lemma: Ein metrischer Raum ist ein normaler Raum, insbesondere also ein Hausdorff-Raum.

Beweis: Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gilt aber $dist(x, B) > 0$ und $dist(y, A) > 0$ für $x \in A$ bzw. $y \in B$, sonst gäbe es einen gemeinsamen Punkt von A und B. Bilde dann die Mengen

$$\tilde{A} := \{x \in X : \ d(x, A) < d(x, B)\}, \qquad \tilde{B} := \{y \in X : \ d(y, BA) < d(y, A)\}.$$

Offenbar sind $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ disjunkt, denn sie sind gleich A, B erweitert um die Punkte, die jeweils näher an A bzw. B liegen. Ferner kann man leicht zeigen, daß $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{B}$ nur aus inneren Punkten bestehen, d.h. beide Mengen sind offen. □

I.3.4 Definition: Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ***folgenstetig*** in $x \in X$, wenn aus $x_n \to x$, d.h. $d(x_n, x) \to 0$, folgt $f(x_n) \to f(x)$.

I.3.5 Lemma: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist folgenstetig in $x \in X$ genau dann, wenn sie im Sinne der durch die Metrik induzierten Topologie stetig ist.

Beweis: $\Leftarrow$ Sei f stetig in x_0. Dann gibt es zu jedem $B_\varepsilon(f(x_0))$ eine Umgebung U von x_0, sodaß $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Nach Bemerkung I.1.9 gibt es zu U ein $B_\delta(x_0)$ mit $B_\delta(x_0) \subset U$, also $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Also ist f folgenstetig.
$\Rightarrow$ Wäre f nicht stetig in x_0, dann gäbe es in jeder Umgebung U von x_0 ein y mit $d(f(x_0), f(y)) \geq \varepsilon_0 > 0$. Wähle $U = B_{1/n}(x_0)$, dann existieren $y_n \in B_{1/n}(x_0)$ mit $d(f(x_0), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$, also $\lim_{n\to\infty} f(y_n) \neq f(x_0)$. □

I.3.6 Definition: Seien (X, d) , (Y, e) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt heißt ***gleichmäßig stetig*** auf X, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$.

I.3.7 Lemma: Ist X kompakter metrischer Raum, so ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig.

Beweis: [Ü].

I.3.8 Definition: Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ in X heißt **Cauchy*folge* -**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, sodaß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $n, m > N(\varepsilon)$. Eine Menge $S \subset X$ heißt ***vollständig*** , falls jede Cauchyfolge in S gegen einen Grenzwert in S konvergiert. Falls X vollständig ist, heißt X ***vollständiger metrischer Raum*** .
Falls X außerdem ein topologischer Vektorraum und die Metrik translationsinvariant ist, so heißt X ein **Fréchet-*Raum***

I.3.9 Lemma:

1. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.
2. Jede Cauchyfolge hat höchstens einen Häufungspunkt.
3. Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so konvergiert die ganze Folge.
4. Ist X vollständig, so ist eine Menge in X abgeschlossen genau dann wenn sie vollständig ist.

Beweis: [Ü].

I.3.10 Satz: Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $T : X \to X$ eine stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. T bildet eine vorgegebene abgeschlossene Menge E in sich ab, d.h. $T(E) \subset E$.
2. T ist auf E d-***kontrahierend*** , d.h. es gibt ein $L \in (0,1)$,, sodaß für alle $x, y \in E$ gilt
$$d(Tx, Ty) \leq L\ d(x, y)\ .$$

Sei $x_0 \in E$. Dann konvergiert $x_n := T^n x_0$ in E. Der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ heißt ***Fixpunkt***, denn es gilt $Tx = x$. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$d(x, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\ d(x_0, x_1)\ .$$

Beweis: Es gilt wegen 1. $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq L\ d(x_n, x_{n-1})$ und daher mit Induktion über n

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n\ d(x_1, x_0), \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für $n > m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=0}^{n-m-1} d(x_{m+k+1}, x_{m+k}) \leq \sum_{k=0}^{n-m-1} L^{m+k}\ d(x_1, x_0) = \frac{L^m - L^n}{1-L}\ d(x_0, x_1)\ .$$

Daher ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von X existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$. Weiterhin gilt

$$d(x, x_m) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{n\to\infty} L^m \frac{1-L^{n-m}}{1-L} d(x_0, x_1) = \frac{L^m}{1-L}\ d(x_0, x_1)\ .$$

und daher wegen $Tx_n = x_{n+1}$

$$d(x, Tx) = \lim_{n\to\infty} d(x, Tx_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L}\ d(x_0, x_1. = 0,\ \text{d.h. } x = Tx.$$

□

I.3.11 Definition: Sei X ein topologischer Raum und $S \subset X$. Ist der Abschluß $\overline{S} = X$, so heißt S ***dicht*** in X. Ist das Innere von $\overline{S}$ leer, so heißt S ***nirgends dicht*** in X. Ein Raum heißt ***separabel*** , falls eine abzählbare Menge S existiert, die dicht in X ist.
Sei nun $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sind dann alle A_k nirgends dicht, so heißt S von ***erster Kategorie*** (oder mager). Im anderen Fall ist wenigstens ein A_{k_0} nicht nirgends dicht, d.h. der Abschluss von A_{k_0} hat ein nichtleeres Inneres, und S heißt von ***zweiter Kategorie*** .

Beispiel: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht in $\mathbb{R}$.
Die Menge $\{ 0, 1, 1/2, 1/3, ... \}$ ist nirgends dicht in $\mathbb{R}$, da kein Punkt des Abschlusses innerer Punkt ist.

I.3.12 Satz: (**Baire*scher Kategoriensatz***). Ein vollständiger metrischer Raum X ist von zweiter Kategorie.

Beweis: Sei also $X = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} A_n$, A_n abgeschlossen und X von erster Kategorie, d.h. $\operatorname{int}(A_n) = A_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $int(A_1)$ leer, $X \setminus \int(A_1)$ ist abgeschlossen und es gibt ein $x_1 \in X \setminus \int(A_1)$. Nach Lemma I.3.3 ist X ein normaler Raum, also gibt es eine Kugel $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset X$ mit $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset$ und $\varepsilon_1 < 1/2$. Dieses Argument rekursiv auf ($B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$) statt X) angewandt liefert $x_n \in B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \setminus A_n$ und Kugeln $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ mit $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset$ und $\varepsilon_n < 1/2^n$. Wegen $x_k \in B_{\varepsilon_N}(x_N)$ für $k \le N$ und $\varepsilon_n \to 0$ ist $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Auf Grund der Vollständigkeit von X existiert also $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Nun ist aber $x \in \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}$ für alle n, und andererseits $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \cap A_n = \emptyset$ also ist $x \notin \bigcup_{n\in \mathbb{N}} A_n = X$. Widerspruch. □

I.3.2 VOLLSTÄNDIGKEIT UND VERVOLLSTÄNDIGUNG

Aus der klassischen Analysis ist bekannt, daß die Räume $\mathbb{R}^n$ vollständig sind. Dort ist auch gezeigt worden, daß der Raum $C(\Omega)$,Ω kompakt, unter der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik vollständig ist. Weitere Standard- Beispiele für Vollständigkeit liefern die Lebesgue - Räume.

I.3.13 Satz: Die in Definition I.2.33 definierten Räume $L^p(\mu)1$, $\le p < \infty$, sind vollständig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Nach Lemma I.3.9 reicht es zu zeigen, daß eine Teilfolge konvergiert, wähle also $(f_{n_k})_{k\in \mathbb{N}}$ mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} < 2^{-k}$, $k \ge 1$. Dann gilt $\sum_{k\ge1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} < \infty$. Definiere

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \qquad \text{sodaß} \quad \|g_j\|_{L^p} \le \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p}.$$

Nach dem Lemma von Fatou (I.2.20) und der Minkowski-Ungleichung (I.2.35) gilt

$$\begin{aligned} \int \lim_{j\to\infty} g_j^p \ d\mu &\le \liminf_{j\to\infty} \int g_j^p \ d\mu = \left(\liminf_{j\to\infty} \|g_j\|_{L^p}\right)^p \\ &\le \left(\sum_{k\in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p}\right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Lemma I.2.19 zeigt nun, daß $\lim_{j\to\infty} g_j(x)$ endlich für fast alle x ist. Nach Definition der g_j ist daher $(f_{n_j}(x))_{j\in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge für fast alle x, also existiert $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x)$ fast überall und ist meßbar. Nach dem Lemma von Fatou (I.2.20) gilt

$$\begin{aligned} \int |f - f_{n_j}|^p \ d\mu &\le \lim_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f_{n_j}|^p \ d\mu = \left(\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_j}\|_{L^p}\right)^p \\ &\le \left(\sum_{k\ge j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p}\right)^p \to 0 \end{aligned}$$

für $j \to \infty$. Daraus folgt auch $f \in L^p(\mu)$ und damit die Behauptung. □

Bemerkung 1: Mit einem modifizierten Argument läßt sich zeigen, daß auch der Raum $L^\infty(\mu)$ vollständig ist.

Bemerkung 2: $\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ definiert auf $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,ist ebenfalls eine Norm, jedoch ist dann $C(\Omega)$ nicht vollständig.

I.3.14 Satz: Sei S die Menge der einfachen Borel-meßbaren Funktionen s, deren Träger in X ein endliches Maß hat. Dann ist S dicht in $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, im Sinne der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$, d.h. zu jedem $f \in S$ gibt es eine Folge $(s_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ in S mit $\|s_n - f\|_{L^p} \to 0$. Für $p = \infty$ gilt dies nicht.

Zum Beweis benötigen wir folgendes

I.3.15 Lemma: Sei $f \in L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$ und seien

$$E_N \ := \ \{ \ x \mid f(x) > N \ \} \quad , \quad E_{1/N} \ := \ \{ \ x \mid f(x) < 1/N \ \} \qquad \text{für} \ \ N \in \ \mathbb{N} \ .$$

Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E_N} f^p \ = \ \lim_{N\to\infty} \int_{E_{1/N}} f^p \ = \ 0 \ .$$

Beweis: Mit

$$R_m \ := \ \{ \ x \ \mid \ 1/(m+1. < |f(x)| < 1/m \ \} \text{ für } m \in \ \mathbb{N} \quad , \quad R_0 \ := \ \{ \ x \ \mid \ 1 < |f(x)|\}$$

gilt für $N \ \in \ \mathbb{N}$:

$$\|f\|^p_{L_p} \ = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{R_m} f^p \ = \ \sum_{m=0}^{N} \int_{R_m} f^p \ + \ \int_{E_N} f^p \ .$$

Da die Reihe über die R_m konvergent ist, folgt der erste Teil der Behauptung für E_N. Der zweite Teil für $E_{1/N}$ folgt analog.

Beweis von Satz I.3.14: Sei $f \in L^p(\mu)$. Nach Definition I.2.22 genügt es, die Behauptung für reellwertiges, nichtnegatives f zu zeigen. Für $N \in \ \mathbb{N}$ sei

$$Q_N \ := \ \{ \ x \ \mid \ 1/N < f(x) < N \ \} \ .$$

Die Funktionenfolge $(f_N)_N \ := \ (f \ \chi_N)_N$, $N \in \ \mathbb{N}$ konvergiert offenbar punktweise gegen f , nach dem Satz von Lebesgue von der dominierten Konvergenz (I.2.24) also in der der L_p -Norm. Für festes N ist

$$\|f\|^p_{L_p} \ = \ \|f^p\|_{L_1} \ \ge \ \int_{Q_N} f^p \ \ge N^{-p} \ \mu(Q_N) \ ,$$

also $\mu(Q_N) \ \le \ N^p \ \|f\|^p_{L_p} \ < \ \infty$.
Mit den Bezeichnungen von Lemma I.2.7 sei s_N eine einfache Funktion mit Träger in Q_N , $s_N \le f_N$, und $\int f_N - \int s_N \le N^{-2p} \ \mu(Q_N)$, also

$$\|f_N - s_N\|_{L_1} \ = \ \int_{Q_N} f_N \ - \ \int_{Q_N} s_N \ \le \ N^{-2p} \ \mu(Q_N) \ \le \ N^{-p} \ \|f\|^p_{L_p} \ .$$

Dies beweist bereits den Fall $p = 1$. Die restlichen Fälle folgen so: $|f - f_n| = 0$ auf Q_N liefert

$$\begin{aligned}\left[\int_{Q_N} |\ f - s_N \ |^p \ \right]^{1/p} \ &\le \ \left[\int_{Q_N} |\ f - f_N \ |^p \ \right]^{1/p} + \ \left[\int_{Q_N} |\ f_N - s_N \ |^p \ \right]^{1/p} \\ &= \ \left[\int_{Q_N} (f_N - s_N)^{p-1} \ (f_N - s_N) \ \right]^{1/p} \\ &\le \ \left[\ N^{p-1} \ \|f_N - s_N\|_{L_1} \ \right]^{1/p} \ \le N^{-1/p} \ \ \|f\|_{L_p} \ .\end{aligned}$$

Ergänzend kann man zeigen:

I.3.16 Satz: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, wobei X lokal kompakt ist. Dann ist die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in X dicht in $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

Beweis: [Ü]

Wichtige " echte "(d.h. nicht normierte) metrische Räume, von denen man die Vollständigkeit zeigen kann, sind die Räume $H(\Omega)$ von holomorphen Funktionen auf einem offenen Gebiet Ω der komplexen Ebene, siehe Rudin [9].

Eine allgemeine Methode, vollständige metrische Räume zu konstruieren, ist die Vervollständigung. Diese wird präzisiert durch

I.3.17 Definition: Sei X ein nicht vollständiger metrischer Raum. Dann definiert man als ***Vervollständigung*** $\tilde{X}$ von X die Menge aller ***Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen*** in X: zwei Cauchyfolgen (x_j) und (x'_j) sind äquivalent, falls $\lim_{j\to\infty} d(x_j, x'_j) = 0$.

I.3.18 Satz:

1. $\tilde{X}$ ist vollständiger metrischer Raum unter der Metrik
$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j) \quad , \quad (x_j \in \tilde{x}\ ,\ y_j \in \tilde{y})\ .$$
2. Die Abbildung J, die jedem $x \in X$ die konstante Folge $(x_j = x)$ zuordnet, ist injektiv und isometrisch, d.h. $\tilde{d}(Jx, Jy) = d(x, y)$.
3. Das Bild $J(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$, speziell kann man $\tilde{x} \in \tilde{X}$ approximieren durch eine Folge (x_n) in X, sodaß $\lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}, Jx_n) = 0$.

Beweis: 1.: Seien $(x_j)_{j\in \mathbb{N}} \in \tilde{x}$, $(y_j)_{j\in \mathbb{N}} \in \tilde{y}$ Cauchyfolgen. Mit der 4er-Ungleichung (Lemma I.3.2) folgt

$$|d(x_j, y_j) - d(x_k, y_k)| \leq d(x_j, x_k) + d(y_j, y_k) \to 0, \qquad j, k \geq n \to \infty.$$

Also ist $(d(x_j, y_j))_{j\in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Zum Beweis der Unabhängigkeit des Limes von der Wahl der Repräsentanten seien $(x'_n)_{n\in \mathbb{N}} \in \tilde{x}$, $(y'_n)_{n\in \mathbb{N}} \in \tilde{y}$ weitere Cauchyfolgen, dann gilt

$$|d(x_j, y_j) - d(x'_j, y'_j)| \leq d(x_j, x'_j) + d(y_j, y'_j) \to 0$$

für $j \to \infty$, also ist der Grenzwert eindeutig. Ferner ist nach Definition der Äquivalenzklasse $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ genau dann, wenn $\tilde{x} = \tilde{y}$. Wegen

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, z_j) \leq \lim_{j\to\infty} (d(x_j, y_j) + d(y_j, z_j)) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z})$$

gilt die Dreiecksungleichung. Zeige die Vollständigkeit von $\tilde{X}$. Sei $\tilde{x}^n$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$ und $(x^n_j)_{n\in \mathbb{N}}$ Repräsentanten aus den $\tilde{x}^n$. Dann gilt $d(x^n_i, x^n_j) \leq \frac{1}{n}$ für $i, j \geq N(n)$. Sei x^∞ die Äquivalenzklasse zur Folge $(x^n_{N(n)})_{n\in \mathbb{N}}$. Es gilt

$$d(x^m_{N(m)}, x^n_{N(n)}) \leq d(x^m_{N(m)}, x^m_k) + d(x^m_k, x^n_k) + d(x^n_k, x^n_{N(n)}) \leq \frac{1}{m} + d(x^n_k, x^m_k) + \frac{1}{n}$$

für $k \geq \max(N(n), N(m))$. Für zunächst $k \to \infty$und dann $m, n \to \infty$ folgt

$$d(x^m_{N(m)}, x^n_{N(n)}) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \tilde{d}(\tilde{x}^m, \tilde{x}^n) \to 0\ ,$$

also ist x^∞ eine Äquivalenzklasse in $\tilde{X}$. Es gilt $\tilde{x}^n \to x^\infty$, denn für $n \to \infty$

$$\tilde{d}(\tilde{x}^n, x^\infty) = \lim_{l\to\infty} d(x_l^n, x_{N(l)}^l) \leq \lim_{l\to\infty} (d(x_l^n, x_{N(n)}^n) + d(x_{N(n)}^n, x_{N(l)}^l)) \to 0 \ .$$

2.: Nachrechnen.

3.: Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Repräsentant von $\tilde{x}$. Setze $\tilde{x}^n = Jx_n = (x_n, x_n, \dots) \in J(X)$. Dann $d(\tilde{x}, \tilde{x}^n) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. □

I.3.3 KOMPAKTHEIT IN METRISCHEN RÄUMEN

I.3.19 Lemma: In einem metrischen Raum ist eine kompakte Menge S abgeschlossen und (metrisch) beschränkt, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $d(x,y) \leq M$ für alle $x, y \in S$.

Beweis: Sei S nicht abgeschlossen, dann gibt es einen Häufungspunkt $x \notin S$ von S. Nach Lemma I.3.3 gibt es dann zu jedem $y \in S$ offene disjunkte Kugeln $B_{r_y}(x)$, $B_{r_y}(y)$, $r_y > 0$. Dann gilt $S \subset \bigcup_{y\in S} B_{r_y}(y)$ und, da S kompakt ist, sogar $S \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(y_i)$. Also ist $\bigcap_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(x) = B_{r^*}(x)$ disjunkt zu S im Widerspruch zur Annahme, daß x Häufungspunkt ist.
Betrachte nun die Überdeckung $\bigcup_{x\in S, n\in\mathbb{N}} B_n(x)$ von S. Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i=1}^n B_{n_i}(x_i)$. Dann ist $S \subset B_M(x_0)$ mit $M = \max_{1\leq i\leq n} d(x_0, x_i) + \max_{1\leq i\leq n} r_i$.
□

I.3.20 Definition: Ein topologischer Vektorraum oder ein metrischer Raum hat die **Heine-Borel-*Eigenschaft*** , falls jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist.

Bemerkung: Lineare normierte Räume können die Heine-Borel-Eigenschaft nur besitzen, wenn sie endlich-dimensional sind (s. nächster Abschnitt). Es gibt aber $\infty-$dimensionale metrische Räume, zum Beispiel $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die die Heine-Borel-Eigenschaft besitzen (siehe Rudin [8]).

Um einen Ersatz für diese Eigenschaft in beliebigen metrische Räume haben, verstärkt man die Voraussetzung der Beschränktheit.

I.3.21 Definition: Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $S \subset X$ heißt ***total beschränkt*** oder ***präkompakt*** , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Kugeln $B_\varepsilon(x_i)$ gibt, die S überdecken.

Bemerkung: Ist S total beschränkt, so ist S auch beschränkt.

In metrischen Räumen kann man Kompaktheit auch über Folgen definieren, Folgenkompaktheit und Kompaktheit stimmen überein.

I.3.22 Definition: Eine Menge $S \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt ***folgenkompakt***, wenn jede unendliche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in S hat.

I.3.23 Satz: Für jede Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist überdeckungskompakt
2. A ist folgenkompakt
3. A ist vollständig und total beschränkt.

I.3.24 Korollar: Falls X selbst vollständig ist, so sind 1. und 2. äquivalent zu der Eigenschaft, daß A ist abgeschlossen und total beschränkt ist.

Beweis: Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes X ist nach 4. von Lemma I.3.9 vollständig. $\square$

Eine Erklärung für die Sprechweise "präkompakt " liefert

I.3.25 Korollar: Ist eine Teilmenge $A \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes total beschränkt, so ist ihre abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ kompakt.

Beweis: $\overline{A}$ ist abgeschlossen und vollständig, das Innere von A ist gemäß Voraussetzung für $\varepsilon > 0$ beliebig mit endlich vielen Kugeln mit Radius ε überdeckbar. Daher wird $\overline{A}$ von Kugeln mit Radius 2ε überdeckt, ist also total beschränkt. Die Behauptung folgt nun mit Korollar I.3.24 . $\square$

Beweis von Satz I.3.23:
1. $\Rightarrow$2: Sei A überdeckungskompakt, aber nicht folgenkompakt. Dann kann man eine unendliche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A ohne eine in A konvergente Teilfolge finden und kein Häufungspunkt dieser Folge kann in A liegen. Daher hat jedes $f \in A$ eine Umgebungskugel mit Radius ε, in der höchstens eines dieser Folgenglieder liegt. Die Vereinigung dieser Kugeln über alle $f \in A$ ist aber eine offene Überdeckung von A und enthält daher nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung. Daher kann A nur endlich viele Elemente enthalten. Widerspruch, also ist A folgenkompakt.

2. $\Rightarrow$ 3. : Lt. Voraussetzung hat jede Cauchyfolge in A eine konvergente Teilfolge in A. Nach Lemma I.3.9 konvergiert dann die ganze Folge, und daher ist A vollständig.
Für ein $\varepsilon > 0$ gebe es nun keine endliche Überdeckung aus ε-Kugeln. Dann kann man eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A finden, sodaß für die zugehörigen ε-Umgebungen gilt $f_n \in A \setminus \bigcup_{i<n} B_\varepsilon(f_i)$, d.h. f_n ist in keiner der ε- Überdeckungen der vorangegangenen f_i. Es muß unendlich viele solcher f_n geben, sonst wäre A bereits endlich überdeckbar. Nach Konstruktion gilt aber $d(f_{n+1}, f_i) \geq \varepsilon$ für $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. $d(f_j, f_i) \geq \varepsilon$ für $j > i$. Also hat die Folge keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.

3. :$\Rightarrow$ 1.: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A ohne endliche Teilüberdeckung. Andererseits gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches System von Kugeln $B_\varepsilon(f_i)$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(f_i)$. Dann kann eine dieser Kugeln durch die Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ nicht endlich überdeckbar sein. Sei dies die Kugel $B_\varepsilon(f_1)$ für $\varepsilon = 1/2$ und setze $B_1 := B_{1/2}(f_{i_1}) \cap A$. Dann ist B_1 durch ein endliches System von Kugeln $B_{1/4}(f_i)$ überdeckbar, aber es gibt eine Kugel $B_{1/4}(f_2)$, die nicht durch die $\{U_i\}_{i\in I}$ endlich überdeckbar ist. Dieses Argument kann man fortführen und man erhält für $\varepsilon = 2^{-k}$ jeweils ein f_{i_k}, sodaß $B_k := B_{2^{-k}}(f_{i_k}) \cap A \subset B_{k-1}$, $B_0 := A$, nicht endlich überdeckbar ist. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist diese wegen $m \geq k$

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, f_{i_k}) + d(f_{i_k}, x_m) \leq 2^{1-k} \qquad \text{für } m \geq k$$

eine Cauchyfolge. Also gibt es wegen der Vollständigkeit von X ein $x \in A$ mit $x_n \to x$, d.h. $d(x, x_m) =: \delta_m \to 0$. Aus den obigen U_i wähle ein U_x und speziell eine Kugel $B_r(x)$ mit $r > 0$, sodaß $x \in B_r(x) \subset U_x$. Dann folgt für m groß genug und für jedes $y \in B_m$

$$d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, f_{i_m}) + d(f_{i_m}, y) \leq \delta_m + \frac{2}{m} \leq r$$

für $m \to \infty$, also $y \in B_r(x)$ für m groß genug. Somit gilt $B_m \subset U_x$ und B_m ist endlich überdeckbar im Widerspruch zur Konstruktion der B_m. $\square$

Es sei nun $C_{\mathbb{K}}(S)$ die Menge der auf einem kompakten metrischen Raum S stetigen, $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen, der mit der Metrik

$$d(f, g) := \sup_{x\in S} |f(x) - g(x)|$$

versehen ist. Nach dem Muster der klassischen Analysis kann man zeigen, daß dieser Raum vollständig ist. Der vorangegangene Satz liefert darüber hinaus

I.3.26 Satz: (**Arzela-Ascoli**). Eine Menge $A \subset C_{\mathbb{K}}(S)$ ist total beschränkt bezüglich der obigen Metrik genau dann, wenn A beschränkt und ***gleichgradig stetig***ist, d.h.

1. $\sup_{f\in A}\sup_{x\in S}|f(x)| \leq C < \infty$
2. $(\sup_{f\in A}|f(x)-f(y)|) \to 0$ für $|x-y| \to 0$.

Beweis: Richtung $\Rightarrow$: Sei $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(f_i)$ durch ε-Kugeln endlich überdeckbar. Zu jedem $f \in A$ gibt es dann ein i_0 mit $\sup_{x\in S}|f(x)-f_{i_0}(x)| \leq \varepsilon$, sodaß

$$\sup_{x\in S}|f(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in S}|f_{i_0}(x)| \leq \varepsilon + \max_{1\leq i\leq n}\sup_{x\in S}|f_i(x)| < \infty$$

und analog durch Einschieben von f_{i_0}

$$|f(x)-f(y)| \leq 2\varepsilon + \max_{1\leq i\leq n}|f_i(x)-f_i(y)|.$$

Dann folgt 2. wegen $|f_i(x)-f_i(y)| \to 0$ gleichmäßig in i für $|x-y| \to 0$.
Richtung $\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Überdecke die Bildmenge aller $f \in A$ durch endlich viele Kugeln $B_\varepsilon(c_i) \subset \mathbb{K}$

$$\bigcup_{f\in A} f(S) \subset \overline{B_C(0)} \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(c_i) \subset \mathbb{K}.$$

mit geeigneten c_i, denn $\overline{B_C(0)}$ ist kompakt (klassische Heine-Borel Eigenschaft). Dann überdecke die kompakte Menge S mit geeigneten Kugeln $K_\varepsilon(x_j)$, also $S \subset \bigcup_{j=1}^m K_\varepsilon(x_j)$, wobei o.B.d.A. $n \geq m$ sei. Betrachte die endliche Menge der Abbildungen $\pi : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ und zu jedem π die Menge

$$A_\pi \quad := \quad \{f \in A \mid f(x_j) \in B_\varepsilon(c_{\pi(j)}), 1 \leq j \leq m\} \subset A\ .$$

Auf Grund der Wahl der $B_\varepsilon(c_i)$ liegt jedes f in einem solchen A_π. Wähle ein $f_\pi \in A_\pi$. Dann gilt für $x \in B_\varepsilon(x_j)$, $f \in A_\pi$, $1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} &|f(x)-f_\pi(x)| \\ &\leq \underbrace{|f(x)-f(x_j)|}_{\text{gleichgr. stetig}} + \underbrace{|f(x_j)-c_{i_j}| + |c_{i_j}-f_\pi(x_j)|}_{<2\varepsilon \text{ wegen } f, f_\pi \in A_\pi} + \underbrace{|f_\pi(x_j)-f_\pi(x)|}_{\text{gleichgr. stetig}} \\ &\leq 2\Big(\varepsilon + 2\sup_{|x-y|\leq\varepsilon}\sup_{f\in A}|f(x)-f(y)|\Big) =: r_\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Es ist also $A_\pi \subset B_{r_\varepsilon}(f_\pi)$ und folglich

$$A \subset \bigcup_\pi A_\pi \subset \bigcup_\pi B_{r_\varepsilon}(f_\pi).$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit gilt $r_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, also $r_\varepsilon \leq \delta$ für jedes $\delta > 0$ falls ε klein genug. Daher ist A durch eine endliche Zahl von δ-Kugeln überdeckbar. □

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli (I.3.26) ist der Existenzsatz von Peano in der Theorie der geöhnlichen Differentialgleichungen. Dieser Satz lautet:

I.3.27 Satz: Gegeben sei das (skalare) ***Anfangswertproblem***

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0\ ,$$

wobei $f(x,y)$ eine stetige Funktion auf dem Rechteck $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x-x_0| \leq c, |y-y_0| \leq d\ \}$ sei mit $M := \max_{(x,y)\in Q} f(x,y)$. Dann besitzt dieses Problem eine stetig differenzierbare Lösung $y(x)$ auf einem Intervall $[x_0, x_0+\delta]$, wobei $\delta := \min(c, d/M)$.

Beweisskizze: Die Grundidee ist folgende: man wähle zu $N \in \mathbb{N}$ eine Folge von Gitterpunkten

$$x_j^N := x_0 + j\ h, \qquad j = 0, \ldots, N; \qquad h = \delta/N,$$

und definiere eine Folge $\{u_j^N\}$ von Näherungen durch

$$u_0^N := y_0, \qquad u_j^N := u_{j-1}^N + h\ f(x_{j-1}^N, u_{j-1}^n), \quad 1 \le j \le N\ . \tag{$*$}$$

Dann sei mit $u^N(x)$ der die Punkte (x_j^n, u_j^n) verbindende Polygonzug bezeichnet. Nun kann man einfach verifizieren

$$|u_j^N - y_0| \le \sum_{i=0}^{j-1} |u_{i+1}^N - u_i^N| = \sum_{i=0}^{j-1} |f(x_i^N, u_i^N)| \le h \cdot N \cdot M \le d,$$

wobei zuletzt die entscheidende Voraussetzung $\delta \le d/M$ benutzt wurde. Weiter kann man für je zwei Punkte $x, x' \in [x_0, x_0 + \delta]$ abschätzen

$$|u^N(x) - u^N(x')| \le |u^N(x) - u_j^N| + |u_j^N - u_{j'}^N| + |u_{j'}^N - u^N(x')|,$$

wobei $x_j^N, x_{j'}^N$ die zu x bzw. x' nächstliegenden Gitterpunkte sein sollen. Dann folgen aus der Vorschrift ($*$) z.B. die Abschätzungen $|u^N(x) - u_j^N| \le |x - x_j^N| \cdot M$ und $|u_j^N - u_{j'}^N| \le |x_j^N - x_{j'}^N| \cdot M$, sodaß insgesamt $|u^N(x) - u^N(x')| \le |x - x'| \cdot M$ folgt. Damit ist die Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit der Folge der Polygonzüge $u^N(x)$ bewiesen. Der Satz von Arzela-Ascoli liefert daher die Existenz einer Teilfolge $u^{N_\nu}(x)$, die gegen eine stetige Funktion $u(x)$ auf $[x_0, x_0 + \delta]$ gleichmässig konvergiert. Von dieser zeigt man, daß sie

$$I(x) := u(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt = 0$$

erfüllt und die Behauptung des Satzes folgt. Dazu dienen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |I(x) \quad &- \quad I(x_j^N)| \le \|u - u^N\| + \int_{x_j^N}^{x} |f(t, u(t))|dt \\ |I((x_j^N)| \quad &\le \quad |u(x_j^N) - u^N(x_j^N)| + \sum_{i=0}^{j-1} (x_{i+1}^N - x_i^N) f(x_i^N, u_i^N) - \int_{x_0}^{x_j^N} f(t, u(t))dt|. \end{aligned}$$

□

Eine L^p-Version von Satz I.3.26 lautet (ohne Beweis):

I.3.28 Satz: (**Fréchet-Kolmogorov**) Für $1 \le p < \infty$ ist $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ präkompakt genau dann, wenn

1. $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p} \le C$
2. $\sup_{f \in A} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \to 0$ für $|h| \to 0$
3. $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p, \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \to 0$ für $R \searrow 0$.

I.3.4 SOBOLEV-RÄUME

Ziel dieses Abschnitts ist es, Vollständigkeit auch für Räume von differenzierbaren Funktionen zu erhalten. Im folgenden sei Ω eine offernen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zunächst gilt:

I.3.29 Lemma: Für beschränktes Ω sind die Räume $C^m(\overline{\Omega})$ der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω vollständig unter der Norm

$$\|f\|_{C^m,\Omega} := \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_{L^\infty} \quad , \quad \partial^s := \partial_{x_1}^{s_1} \dots \partial_{x_n}^{s_n} \quad , \quad |s| := \sum s_n \quad .$$

Beweis: [Ü].

Mit nur wenig mehr Aufwand kann man zeigen:

I.3.30 Lemma: Die **Lipschitz-Hölder-*Räume*** $C^{m,\alpha}(\Omega)$ sind definiert als die Menge aller Funktionen aus $C^m(\Omega)$, für die

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |x-y|^{-\alpha}\ |\partial^s f(x) - \partial^s f(y)| < \infty \qquad , \text{ für alle } |s| = m$$

mit $0 < \alpha \leq 1$ gilt. Sie sind vollständig unter der Norm

$$\|f\|_{C^{m,\alpha},\Omega} = \|f\|_{L^\infty,\Omega} + \sum_{|s|=m} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |x-y|^{-\alpha}\ |\partial^s f(x) - \partial^s f(y)|.$$

Entsprechende Ergebnisse gelten nicht für die L_p-Normen, denn Satz I.3.13 garantiert nicht die Differenzierbarkeit der Grenzfunktionen. Um weiterzukommen, ist zunächst der oben eingeführte Begriff der Vervollständigung (I.3.17) hilfreich.

I.3.31 Definition: Die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ in der Norm

$$\|f\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_{L^p,\Omega} \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

wird mit $H^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet.

Zur Beschreibung der Vervollständigung ist eine Erweiterung des Ableitungsbegriffs notwendig, die im folgenden Lemma vorgestellt wird.

I.3.32 Lemma: Zu jeder Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $(D^s f)_{|s|\leq m} \in L^p(\Omega)$, die miteinander in folgender Beziehung stehen: ist $f = D^0 f$ der Grenzwert der f_n in $L^p(\Omega)$, so ist $D^s f$ die s-te ***schwache partielle Ableitung*** von f, d.h. es gilt

$$\int_\Omega (D^s f)\varphi\ d\mu \ = \ (-1)^{|s|} \int_\Omega f \partial^s \varphi d\mu \quad , \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ , \qquad (*)$$

wobei $C_0^\infty(\Omega) :=$ Menge der C^∞-Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger ist.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{m,p}(\Omega)$. Für jedes $|s| \leq m$ ist $(\partial^s f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$, also gibt es einen Limes $D^s f$ in $L^p(\Omega)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|\partial^s f_k - D^s f\|_{L^p} = 0$. Partielle Integration ergibt

$$\int_\Omega (\partial^s f_k)\varphi\ d\mu = (-1.^{|s|} \int_\Omega (\partial^s \varphi) f_k\ d\mu\ ,$$

da $f_k \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Daraus folgt $(*)$, denn beide Seiten konvergieren für

$k \to \infty$ wegen

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (\partial^s f_k)\varphi \;\, d\mu - \int_\Omega (D^s f)\varphi \;\, d\mu\right| &\leq \int_\Omega |\partial^s f_k - D^s f||\varphi| \;\, d\mu \\ &\leq \|\partial^s f_k - D^s f\|_{L^p,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{L^q,supp(\varphi)}\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölder-Ungleichung) und

$$\left|\int_\Omega (\partial^s \varphi) f_k \;\, d\mu - \int_\Omega (\partial^s \varphi) f \;\, d\mu\right| \leq \|f_k - f\|_{L^p,\Omega} \cdot \|\partial^s \varphi\|_{L^q,supp(\varphi)} \;.$$

□

Bemerkung 1: Die schwache Ableitung $D^s f$ von $f \in L^p(\Omega)$ ist eindeutig definiert, falls sie in $L^p(\Omega)$ existiert, denn gibt es $g \in L^p(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega g\varphi \;\, d\mu = (-1.^{|s|} \int_\Omega f\partial^s\varphi \;\, d\mu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

d.h. g habe dieselben Eigenschaften wie $D^s f$, so gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (g - D^s f)\varphi = 0 \;.$$

Also muß $D^s f = g$ fast überall gelten (s. Lemma I.3.40 unten).

Bemerkung 2: Existiert $\partial^s f$ als stetige Funktion auf Ω, so stimmt sie mit der schwachen Ableitung in $L^p(\Omega)$überein, die Umkehrung gilt aber nicht . Dies begründet den Namen schwache Ableitung. Man führt nun ein

I.3.33 Definition: Der **Sobolev-*Raum*** $W^{m,p}(\Omega)$ der Ordnung (m,p), $1 \leq p < \infty$, ist definiert als die Menge aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, für die sämtliche schwache Ableitungen $D^s f$, $|s| \leq m$, in L^p existieren. Er wird versehen mit der Norm

$$\|f\|_{m,p,\Omega} \;:=\; \sum_{|s|\leq m} \|D^s f\|_{L^p,\Omega} \;.$$

Obiges Lemma zeigt dann, daß jedes Element in $H^{m,p}(\Omega)$ mit einem Element in $W^{m,p}(\Omega)$ eindeutig identifiziert werden kann. Im Folgenden soll die Gleichheit beider Räume gezeigt werden, wobei der Einfachheit halber nur der Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ betrachtet wird.

I.3.34 Definition: (***Faltung***) Seien f, g meßbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Die Funktion

$$F(x) \;:=\; (g^* f)(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) \;\, dy$$

heißt Faltung, falls sie existiert.

I.3.35 Lemma:

1. Sind $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert ihre Faltung in $L^p(\mathbb{R}^n)$, speziell gilt $\|g^* f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}$.
2. Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so ist $F = g^* f$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. g wirkt glättend auf f. In diesem Fall heißt g ***Kern*** und es gilt $\partial_i F = (\partial_i g)^* f$.
3. Besitzt f eine schwache Ableitung $D^s f$ auf $\mathbb{R}^n$ und ist $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so besitzt F eine klassische Ableitung $\partial^s F$ und es gilt $\partial^s F = \partial^s(g^* f) = g^* D^s f$.

Beweis: 1.: Es ist $\frac{p}{q}+1=p$ für $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|g^*f\|_{L^p}^p &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^{\frac{1}{q}}|g(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|\ dy\right|^p\ dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^{\frac{q}{q}}\ dy\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^{\frac{p}{p}}|f(y)|^p\ dy\right)\ dx\\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(y+x)|^p\ dy\ dx \le \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1}\|f\|_{L^p}^p<\infty.
\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini (I.2.32) sichert dabei die Existenz aller beteiligten Integrale.
2.: Sei $F(x)=(g^*f)(x)$ und x fest. Betrachte

$$\frac{F(x+he_j)-F(x)}{h}=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{g(x-y+he_j)-g(x-y)}{h}f(y)\ dy.$$

Für $h\to 0$ konvergiert der Integrand fast überall gegen $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}g\right)(x-y)\cdot f(y)$. Eine Majorante für den Integranden ergibt sich durch

$$\left|\frac{g(x-y+he_j)-g(x-y)}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x-y}^{x-y+he_j}\frac{\partial}{\partial x_j}g(t)\ dt\right|\le\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}g\right\|_{L^\infty},$$

denn für $G(y)=|f(y)|\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty}\cdot\chi_{supp(g)}(x-y)$ gilt, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|G(y)|\ dy &= \left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\cdot\chi_{supp(g)}(x-y)\ dy\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{supp(g)}(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\ ,
\end{aligned}$$

d.h. G ist Majorante. Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}F\right)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}g(x-y)\right)f(y)\ dy\ .$$

Dieses Argument läßt sich induktiv auf die höheren Ableitungen anwenden.
3.: Es gilt

$$\begin{aligned}
(g^*D^sf)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}(D^sf)(y)g(x-y)\ dy=(-1.^{|s|}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\partial_y^sg(x-y)\ dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}f(y)\partial_x^sg(x-y)\ dy=\partial^s(g^*f)(x)
\end{aligned}$$

nach dem zweiten Teil. □

I.3.36 Definition: Sei $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=1$. Dann heißt $\varphi_\varepsilon:=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ **Dirac-*Kern*** und die Familie $(I_\varepsilon f;x):=(\varphi_\varepsilon^*f)(x)$ eine **Dirac-*Folge***.

Bemerkung: Insbesondere wähle im folgenden Lemma φ mit $supp(\varphi)=B_1(0)$. Dann ist $supp(\varphi_\varepsilon)=B_\varepsilon(0)$.

I.3.37 Lemma: Für $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|I_\varepsilon f-f\|_{L^p,\mathbb{R}^n}=0\ .$$

Beweis: Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-u)\ du = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(v)\ dv = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\ du = 1$ gilt mit der Substitution $u = x - \varepsilon v$

$$\begin{aligned} f(x) - I_\varepsilon f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(v)\ dv - \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi_\varepsilon(x-u)\ du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-\varepsilon v))\varphi(v)\ dv. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma I.3.35 ist dann

$$\begin{aligned} \|f - I_\varepsilon f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-\varepsilon v))\varphi(v)\ dv \Big|^p\ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(v) \|f(\cdot) - f(\cdot - \varepsilon v)\|_{L^p}^p\ dv\ . \end{aligned}$$

Weiter folgt, falls ein $r > 0$ fest gewählt wird,

$$\begin{aligned} \|f - I_\varepsilon f\|_{L^p}^p &\leq \left(\int_{|v|\leq r} + \int_{|v|>r} \right) \varphi(v) \|f(\cdot) - f(\cdot - \varepsilon v)\|_{L^p}^p\ dv \\ &\leq \underbrace{\int_{|v|\leq r} \varphi(v)\ dv}_{\leq 1} \cdot \sup_{|v|\leq r} \|f(\cdot) - f(\cdot + \varepsilon v)\|_{L^p}^p + \underbrace{\int_{|v|>r} \varphi(v)\ dv}_{\to 0 \text{ für } r \text{ groß genug}} \cdot 2\|f\|_{L^p}^p\ . \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung aus dem folgenden Lemma. □

I.3.38 Lemma: Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p} = 0\ .$$

Beweis: Nach Satz I.3.16 existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$ . . Dann gilt mit $g_{k,h}(x) := f_k(x+h) - f(x)$

$$\begin{aligned} &\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p} \\ &\leq \|f(\cdot + h) - f_k(\cdot + h)\|_{L^p} + \|f_k(\cdot + h) - f_k(\cdot)\|_{L^p} + \|f(\cdot) - f_k(\cdot)\|_{L^p} \\ &\leq 2\|f - f_k\|_{L^p} + \|\chi_{supp(g_{k,h}}\|_{L^p} \|g_{k,h}\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Nun wähle man k genügend groß, sodaß der erste Term $< \varepsilon$ wird, und danach $h > 0$ klein genug. Dann wird auch der zweite Term $< \varepsilon$, da f_k gleichmäßig stetig für festes k ist. □

Damit kann man auch Satz I.3.16 verschärfen zu

I.3.39 Korollar: Ist Ω offen in $\mathbb{R}^n$, so ist die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $C_0^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω dicht in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Beweis: Man definiere

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : dist\ (x, \partial\Omega) > \delta\}, \qquad D_\delta := \Omega_\delta \cap B_{1/\delta}(0).$$

Ist dann χ_δ die charakteristische Funktion von D_δ, so definiere

$$(T_{\varepsilon\delta} f)(x) := \varphi_\varepsilon^* (\chi_\delta \cdot f)(x) := \int_{D_\delta} \varphi_\varepsilon^*(x-y) f(y)\ dy\ .$$

Diese Funktion liegt in $C_0^\infty(\Omega)$ und hat Träger in $B_\varepsilon(D_\delta) \subset \Omega$. Nun lasse bei δ fest und Anwendung von Lemma I.3.37 $\varepsilon \to 0$ streben, sodaß $(T_{\varepsilon\delta} f) \ \to\ \chi_\delta\ f$ im L_p−Sinne und anschließend $\delta \to 0$, sodaß $\chi_\delta \; f \;\; \to \;\; f$, ebenfalls im L_p-Sinne. Zusammen folgt daraus die Behauptung. $\square$

Das folgende Lemma garantiert die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung:

I.3.40 Lemma: Aus $g \in L^p(\Omega)$ und $\int_\Omega g \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt $f = 0$ fast überall.

Beweis: Sei E eine beliebige beschränkte und meßbare Menge mit $\overline{E} \subset \Omega$ und $\overline{E}$ kompakt. Ist χ_E die charakteristische Funktion zu E, so betrachte $\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^* \chi_E \in C_0^\infty(\Omega)$. Es ist $\int_\Omega g \cdot \psi = 0$. Wegen $\chi_E \in L^q$ gilt $\|\varphi_\varepsilon^* \chi_E - \chi_E\|_{L^q} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und somit über

$$0 \;-\; \int_E g \;=\; \int_\Omega g \cdot \psi_\varepsilon \;-\; \int_\Omega g\chi_E = \int_\Omega g(\varphi_\varepsilon^* \chi_E - \chi_E)$$

und Hölder-Ungleichung

$$\Big| \int_E g \Big| = \Big| \int_\Omega g(\psi - \chi_E) \Big| \le \|g\|_{L^p(\Omega)} \; \|\varphi_\varepsilon^* \chi_E - \chi_E\|_{L^q} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Also ist $\int_E g = 0$ für jede solche Menge E. Speziell betrachte nun $E_+ := \{x \in \Omega \mid |x| \le R, g(x) > 0\}$ für festes $R > 0$. Dann gilt $g(x) \le 0$ fast überall für $|x| \le R$ nach Definition des Lebesgue-Integrals. Betrachte analog $E_- := \{x \in \Omega \mid |x| \le R, g(x) < 0\}$. Insgesamt folgt dann $g(x) = 0$ fast überall für $x \in \Omega$, $|x| \le R$ und somit die Behauptung. $\square$

I.3.41 Satz: Für $1 \le p < \infty$ sei I die Abbildung, die jeder Äquivalenzklasse $\tilde{f} \in H^{m,p}(\Omega)$ von Cauchyfolgen $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Element $f := D^0 f$ mit $\lim_{k\to\infty} g_k = f$ in $L^p(\Omega)$ zuordnet.
Dann ist I eine lineare, surjektive und isometrische Abbildung von $H^{m,p}(\Omega)$ auf $W^{m,p}(\Omega)$.

Beweis: Lemma I.3.32 zeigt die Existenz von I und $I\tilde{f} \in W^{m,p}(\Omega)$. Die Linearität von I ist klar.
Die Isometrie folgt aus

$$\|\tilde{f}\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k\| = \lim_{k\to\infty} \sum_{|s|\le m} \|\partial^s g_k\|_{L^p,\Omega} = \sum_{|s|\le m} \|D^s f\|_{L^p,\Omega} = \|f\| \; .$$

Zur Surjektivität (hier nur für $\Omega = \mathbb{R}^n$): Konstruiere zu jedem $f \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge $\{g_k\}$ bezüglich $\|\cdot\|_{m,p}$, die in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Dies leistet $g_k := (I_{1/N} f_k)(x)$ mit Dirac-Kern φ, f_k wie in Korollar I.3.39 und geeignetem $N = N_k$, denn $I_{1/N} f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit Lemma I.3.35 und Lemma I.3.37 folgt dann

$$\begin{aligned} \|\partial^s I_{1/N} f_k - D^s f\|_{L^p} &\le \|\partial^s(\varphi_{1/N}^* f) - \partial^s f\|L^p + \|\partial^s f_k - D^s f\|_{L^p} \\ &= \|\varphi_{1/N}^* \partial^s f - \partial^s f\|_{L^p} + \|\partial^s f_k - D^s f\|_{L^p} \to 0 \; , \end{aligned}$$

indem man zuerst k und dann $N = N_k$ groß genug wählt.

I.4 LINEARE NORMIERTE RÄUME (LNR)

I.4.1 GRUNDLAGEN

Lineare normierte Räume, im folgenden oft mit "LNR" abgekürzt, sind spezielle metrische Räume mit Vektorraum - Struktur. Daher läßt sich eine reichhaltigere Theorie aufbauen, insbesondere eine schlagkräftige Theorie stetiger linearer Operatoren.

I.4.1 Definition: Eine Teilmenge $S \subset X$ eines LNR X heißt ***beschränkt*** , falls es eine abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(x)} = \{y \in X \mid \|y - x\| \;\le r\}$ gibt mit $S \subset \overline{B_r(x)}$.

Bemerkung: Beschränktheit im Sinne von $\|\cdot\|$ ist im allgemeinen nicht äquivalent zur Beschränktheit im Sinne einer Metrik. Natürlich sind beide Begriffe gleich, wenn die Metrik durch eine Norm erzeugt wird. Ist d eine Metrik, so erzeugt die sog. geschränkte Metrik $d^* := \frac{d}{1+d}$ die selbe Topologie wie d, und bezüglich d^* sind alle Teilmengen beschränkt.

I.4.2 Definition: Ein vollständiger linearer normierter Raum heißt **Banach*raum***. Zwei lineare normierte Räume X, Y heißen ***isomorph*** , falls es eine lineare bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt, die zusammen mit ihrer Inversen stetig ist. Eine solche Abbildung heißt ***Isomorphismus*** . Sie heißt ***Isometrie*** , falls die Norm unter dieser Abbildung A invariant ist, d.h. $\|Ax\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$.
Zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ auf einem linearen normierten Raum heißen ***äquivalent*** , falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodaß für alle $x \in X$gilt:

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha \ .$$

I.4.3 Lemma: Zwei äquivalente Normen auf X liefern die gleiche Topologie. Eine Menge $A \subset X$ ist beschränkt bzw. abgeschlossen bzw. kompakt bzw. vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$ genau dann, wenn sie diese Eigenschaft bezüglich $\|\cdot\|_\beta$ hat.

Beweis: Sei $U \subset X$ offen bezüglich $\|\cdot\|_\beta$, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es einen Ball $B^\beta_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|x-y\|_\beta < \varepsilon\} \subset U$. Dann ist auch

$$B^\alpha_{\varepsilon/c_1}(x) = \{y \in X \mid \|x-y\|_\alpha < \varepsilon/c_1\} = \{y \in X \mid c_1\|x-y\|_\alpha < \varepsilon\} \subset U \ ,$$

also ist U auch offen bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$. Hieaus folgt auch die andere Richtung. □

I.4.4 Lemma: Auf einem endlichdimensionalen Unterraum M eines Banachraums X sind alle Normen äquivalent. In jeder Norm ist M ein Banachraum, insbesondere ist M abgeschlossen in X.

Beweis: Sei $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von M. Dann hat jedes $x \in M$ eine Darstellung der Form $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ ist eine Norm auf M. Ist $\|\cdot\|_*$ eine andere Norm, so gilt

$$\|x\|_* \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|_* \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_*\right)}_{=:c_2}\|x\|_\infty \ .$$

Nehmen wir nun an, daß die umgekehrte Ungleichung nicht gilt, also kein c_1 existiert mit $c_1\|x\|_\infty \leq \|x\|_*$ für alle x. Dann existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x^N \in M$ mit $\|x^N|_* < N^{-1}$ aber $\|x^N\|_\infty = 1$ und daher eine Teilfolge $\ltimes_k \to \infty$ mit $x_i^{N_k} \to \xi_i$, $1 \leq i \leq n$. Speziell können wir es so einrichten, daß ein i_0 mit $|x_{i_0}^{N_k}| = 1$ und $|\xi_{i_0}| = 1$ existiert. Sei $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. Dann ist

$$\|x\|_* \leq \|x - x^{\varepsilon_k}\|_* + \|x^{\varepsilon_k}\|_* \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_*\right) \max_{1\leq i\leq n}|\xi_i - x_i^{\varepsilon_k}| + N_k^{-1} \to 0$$

für $k \to \infty$. Also ist $x = 0$ und $\xi_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$ im Widerspruch zu $|\xi_{i_0}| = 1$. □

I.4.5 Lemma: (Kriterium für Vollständigkeit) Ein LNR ist vollständig, also ein Banachraum, genau dann, wenn jede absolut summierbare Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. es gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < \infty$, auch summierbar ist, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ konvergiert.

Beweis: $\Rightarrow$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar und X vollständig. Sei $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn

$$\|s_n - s_m\| = \| \sum_{k=m+1}^{n} x_n\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \to 0 \ ,$$

da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist. Also existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$.
$\Leftarrow$ Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wähle induktiv eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodaß $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Dann bilde

$$y_{n_{k+1}} := \sum_{j=1}^{k} (y_{n_{j+1}} - y_{n_j}) - y_{n_1},$$

setze $x_j := y_{n_{j+1}} - y_{n_j}$. Dann gilt $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} < \infty$. Also folgt nach Voraussetzung $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^N x_j = x$, also existiert

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_{k+1}} = y_{n_1} + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} x_j = y_{n_1} + x \ .$$

Nach Lemma I.3.9 konvergiert dann die ganze Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

I.4.6 Satz: In einem LNR X gilt die Heine-Borel-Eigenschaft (I.3.20) genau, wenn X endlichdimensional ist.

Zum Beweis benötigen wir folgendes

I.4.7 Lemma: (”***Fast orthogonales Element***” ; **F. Riesz**) Sei Y ein abgeschlossener linearer echter Teilraum eines LNR X. Dann gibt es für jedes $\theta \in (0,1)$ ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ derart, daß $dist(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| \geq \theta$ ist.

Beweis: Sei $x \in X\backslash Y \neq \emptyset$, dann ist $dist(x,Y) > 0$, denn andernfalls wäre x Häufungspunkt von Y und Y wäre nicht abgeschlossen. Zu $\theta \in (0,1)$ existiert wegen $1/\theta > 1$ ein $y_0 \in Y$ mit $\|x - y_0\| < dist(x,Y)/\theta$. Dann setze $x_0 = \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$. Es gilt $\|x_0\| = 1$ und für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &= \frac{1}{\|x-y_0\|}\|x - \underbrace{(y_0 + \|x-y_0\| y)}_{\in Y}\| \geq \frac{1}{\|x-y_0\|} dist(x,Y) \\ &> \frac{\theta}{dist(x,Y)} dist(x,Y) = \theta. \end{aligned}$$

$\square$

Beweis zu Satz I.4.6 Sei X endlichdimensional. Wähle einen Isomorphismus $X \simeq \mathbb{R}^n$. Dann ist nach Lemma I.4.3 und I.4.4 Kompaktheit in X äquivalent zu Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$. Es hat aber $\mathbb{R}^n$ die Heine-Borel-Eigenschaft.

Sei andererseits X unendlichdimensional. Wähle $x_1 \in X$ und $X_1 := \mathrm{span}(x_1)$. Wende Lemma I.4.7 auf $Y := X_1$ an und erhalte ein x_2 mit $dist(x_2, X_1.) \geq \frac{1}{2}$, also $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Dann bilde $X_2 := \mathrm{span}(x_1, x_2)$ und erhalte durch erneute Anwendung von Lemma I.4.7 ein x_3 mit $\|x_3 - x_i\| \geq \frac{1}{2}$, $i \in \{1,2\}$. Induktiv ergibt sich eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ für $i \neq j$, die keine Teilfolge besitzt, die Cauchyfolge ist, also auch keine konvergente Teilfolge . Es gilt also nicht die Folgenkompaktheit für X. $\square$

Bemerkung: Die Aussage dieses Satzes hat zwar negativen Charakter, gibt aber andererseits den Anstoß zur Entwicklung einer verfeinerten Konvergenztheorie in LNR, z.B. für die schwache Konvergenz (s.unten).

Eine Abschwächung des Kompaktheitsbegriffs liefert folgende wichtige Anwendung in der Approximationstheorie :

I.4.8 Lemma:

1. Sei M eine lokal kompakte (I.1.21) Teilmenge eines LNR X , d.h. für jede abgeschlossene beschränkte Kugel $\overline{B_r(x)}$ ist der Durchschnitt $M \cap \overline{B_r(x)}$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $f \in X$ mindestens eine bester Approximation aus M .
2. Jeder endlichdimensionale Unterraum M von X ist lokal kompakt.

I.4.9 Korollar: In jedem endlichdimensionalen Unterraum M eines LNR X gibt es zu jedem $f \in X$ ein Element bester Approximation in M .

Beispiel: $X := C[a,b]$, $M := span\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, Raum der Polynome höchtens n-ten Grades.

Beweis zu Lemma I.4.8 :
1.: Es gibt eine Folge $(g_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ in M , sodaß

$$\|f - g_n\| \to dist(f, M) = \inf_{h\in M} d(f, h) \ .$$

O.B.d.A. können wir $\|f - g_n\| \leq 2\ dist(f, M)$ annehmen, sodaß

$$\|g_n\| \leq \|g_n - f\| + \|f\| \leq 2dist(f, M) + \|f\| \ .$$

Also ist (g_n) Folge in $B_r(0) \cap M$ für $r := 2\ dist(f, M) + \|f\| < \infty$. Lt. Voraussetzung gibt es dann eine Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\ \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} g_{n_k} = g^* \in M$. Es ist g^* Element bester Approximation, denn

$$\|f - g^*\| = \lim_{k\to\infty} \|f - g_{n_k}\| = dist(f, M) \ .$$

2.: Alle Normen auf $B_r(0) \cap M$ sind äquivalent. Insbesondere gibt es einen Isomorphismus von $B_r(0)\cap M$ auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, falls M endlichdimensional ist. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine entsprechende Basis. Dann ist Kompaktheit in $B_r(0) \cap M$ äquivalent zu Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$ und dort äquivalent zur Abgeschlossenheit und Beschränktheit (Heine-Borel).

I.4.2 GLEICHMÄSSIG KONVEXE RÄUME

I.4.10 Definition: Ein linearer normierter Raum X und seine Norm heißen ***gleichmäßig konvex***, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon \geq 0$ existiert, sodaß für alle $f, g \in X$ mit $\|f\| = \|g\| = 1$ und $\frac{1}{2}\|f + g\| \geq 1 - \delta_\varepsilon$ folgt: $\|f - g\| \leq \varepsilon$.

Bemerkung 1: Man zeigt leicht, daß diese Definition äquivalent ist zu:
Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$, so gilt

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2} \|f_n + g_n\| = 1 \implies \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - g_n\| = 0 \ ,$$

(dh., wenn die Normen der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken von f_n und g_n gegen 1 konvergieren, so konvergieren die Abstände von f_n und g_n gegen 0 .)

Bemerkung 2: Jeder Prähilbertraum ist gleichmäßig konvex, und zu $\varepsilon > 0$ ist
$\delta_\varepsilon := 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ das kleinste δ_ε in der Definition und heißt der Konvexitätsmodul.

Der Beweis folgt leicht aus der Parallelogrammgleichung (I.5.3) und der isometrischen Isometrie von $span\{\, x, y\}$ zum euklidischen $\mathbb{R}^2$ für linear unabhängige x, y .

I.4.11 Satz: Sei X ein normierter Vektorraum mit gleichmäßig konvexer Norm. Dann hat jede vollständige und konvexe Menge A zu jedem $f \in X$ genau einen Punkt bester Approximation

Beweis: Reduziere das Problem auf $f = 0$ durch Betrachtung der Menge $B := f - A = \{f - g \mid g \in A\}$. Dann ist auch B vollständig und konvex. Es ist $dist(f, A) = \inf_{g\in A} \|f - g\|$ äquivalent zu $\inf_{h\in B} \|h - 0\|$.
Eindeutigkeit: Sei $d = \inf_{h\in B} \|h\| > 0$, für $d = 0$ kann nur $h_0 = 0$ beste Approximation sein. Sei $\|h_1\| = \|h_2\| = d$. Dann haben $H_i = h_i/d$ Norm $\|H_i\| = 1$, $i \in \{1, 2\}$, und $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}d \cdot (H_1 + H_2) \in B$. Dann

$$1 \le \frac{1}{2d}\|h_1 + h_2\| \le \frac{1}{2}\|H_1 + H_2\| \le \frac{1}{2}(\|H_1\| + \|H_2\|) = \frac{1}{2d}(\|h_1\| + \|h_2\|) = 1,$$

d.h. $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ ist auch beste Approximation, also $1 = \frac{1}{2}\|H_1 + H_2\| \ge 1 - \delta$ für jedes $\delta > 0$, also $\|H_1 - H_2\| \to 0$ im Widerspruch zur Annahme $H_1 \ne H_2$.
Existenz: Sei $C = \{g/d \mid g \in B\}$ für $d > 0$, dann ist zu zeigen $1 = \inf_{f\in C} \|f\|$. Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\, \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 1$ und $\frac{1}{2}(f_n + f_m) \in C$ für alle $m, n \in\, \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 \le \left\|\frac{1}{2}(f_n + f_m)\right\| \le \frac{1}{2}(\|f_n\| + \|f_m\|) \to 1$$

für $m, n \to \infty$, also $\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{2}\|f_n + f_m\| = 1$. Normiere f_n zu $g_n := f_n/\|f_n\|$. Dann ist $\|g_n\| = 1$ und $\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{2}\|g_n + g_m\| = 1$. Mit gleichmäßiger Konvexität folgt $\|g_n - g_m\| \to 0$ für $m, n \to \infty$, also ist $(g_n)_{n\in\, \mathbb{N}}$ Cauchyfolge, damit auch (f_n), also $f_n \to f^* \in C$, da C vollständig ist. □

I.4.12 Satz: Die Räume $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sind gleichmäßig konvex für $1 < p < \infty$.

Beweis : Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt wegen der Konvexität von $t \mapsto t^p$ für $0 \le a, b \le 1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2}(a^p + b^p) \ge \left(\frac{1}{2}(a + b)\right)^p.$$

Definiere für $\alpha \in (0, 1)$, $z \in \mathbb{C}$

$$\rho(\alpha) := \inf_{|z|\le 1, |1-z|\ge\alpha} \left(\frac{\frac{1}{2}(1 + |z|^p) - |\frac{1}{2}(1 + z)|^p}{|z - 1|^p}\right) \cdot \varepsilon\ . \tag{$*$}$$

Dann ist $\rho(\alpha) > 0$, denn

$$\frac{1 + |z|^p}{2} - \left|\frac{1 + z}{2}\right|^p \ge \frac{1^p + b^p}{2} - \left(\frac{1 + b}{2}\right)^p \ge 0\ ,$$

wobei Gleichheit nur für $|z| = 1$ eintritt; dies ist wegen $|1 - z| \ge \alpha > 0$ aber ausgeschlossen. Weiterhin wird das Infimum auf einer kompakten Menge angenommen. Sei nun für $f, g \in L^p(\Omega)$ $z = g(x)/f(x)$ falls $0 \ne |f(x)| \ge |g(x)|$, dann folgt für $\left|1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right| \ge \alpha$ nach Multiplikation von $(*)$ mit $|f(x)|^p$

$$\frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} - \left|\frac{f(x) + g(x)}{2}\right|^p \ge \rho(\alpha)|f(x) - g(x)|^p \cdot \varepsilon\ . \tag{$**$}$$

Vertausche die Rollen von $f(x)$ und $g(x)$, dann folgt die Gültigkeit von $(**)$ für alle

$$x \in M_\alpha := \{x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| \ge \alpha \max(|f(x)|, |g(x)|)\}\ .$$

Für $x \in \Omega \setminus M_\alpha$ gilt

$$\frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} - \left|\frac{f(x) - g(x)}{2}\right|^p \geq 0 \ .$$

Integration über Ω liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p}{2} \quad - \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p \quad &\geq \ \rho(\alpha)\int_{M_\alpha} |f-g|^p \\
&= \ \rho(\alpha)\|f-g\|_{L^p}^p - \rho(\alpha)\cdot \underbrace{\int_{\Omega\setminus M_\alpha} |f-g|^p}_{\leq 2\alpha^p \int_{\Omega\setminus M_\alpha} \max(|f(x)|,|g(x)|)^p} \\
&\geq \ \rho(\alpha)\|f-g\|_{L^p}^p - \rho(\alpha)2\alpha^p(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).
\end{aligned}$$

Seien nun $\|f\|_{L^p} \leq 1$,$\|g\|_{L^p} \leq 1$, $\|\frac{1}{2}(f+g)\|_{L^p} > 1 - \delta_\varepsilon$. Aus der vorherigen Ungleichung folgt

$$1 - (1 - \delta_\varepsilon) \geq \frac{\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p}{2} - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p \geq \rho(\alpha)(\|f-g\|_{L^p}^p - 4\alpha^p) \ ,$$

also

$$\|f-g\|_{L^p}^p \leq \frac{\delta_\varepsilon + \rho(\alpha)4\alpha^p}{\rho(\alpha)} = \frac{\delta_\varepsilon}{\rho(\alpha)} + 4\alpha^p \ .$$

Wähle $4\alpha^p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und δ_ε so, daß $\frac{\delta_\varepsilon}{\rho(\alpha)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

Bemerkung: $C(\Omega)$ und $L^1(\Omega)$ sind nicht gleichmäßig konvex [Ü].

I.4.3 STETIGE LINEARE OPERATOREN

Betrachte lineare Operatoren $T : X \to Y$, $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lineare normierte Räume.

I.4.13 Satz: (Stetigkeitskriterium) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ lineare normierte Räume. Für eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ sind äquivalent:

1. T ist stetig in allen $x \in X$
2. T ist stetig in $x = 0$
3. T ist ***beschränkt*** , d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodaß
$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \ \text{ für alle } \ x \in X$$
4. Es gilt
$$\|T\| := \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y < \infty \ .$$

Beweis : 1. $\Rightarrow$ 2.: Ist klar.

2. $\Rightarrow$ 3.: Wegen $T(0) = 0$ ist $V := \{y \mid \|y\|_Y \leq 1\}$ eine Nullumgebung von $T(0)$. Da f stetig in 0 ist, gibt es ein $c > 0$, sodaß für $U := \{x \mid \|x\| \leq c\}$ gilt: $T(U) \subset V$, also

$$\|T(x)\|_Y \leq 1 \ \text{ für alle } \ x \in X \ \text{ mit } \ \|x\|_X \leq c \ ,$$

und daher für alle $x \in X$, $x \neq 0$

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{c} \ \|T(\frac{cx}{\|x\|}\| \leq \frac{1}{c} \ \|x\| \ =: C \ \|x\| \ ,$$

3. $\Rightarrow$ 4. : Ist klar, insbesondere ist $\|T\|$ kleinste obere Schranke in 3.

4. $\Rightarrow$ 3. : Ist ebenfalls klar.

3. $\Rightarrow$ 1.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$, dann $\|x_n - x\|_X \le \varepsilon$ für $n \ge N_\varepsilon$, also

$$\|Tx_n - Tx\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \le C\|x_n - x\|_X \le C\varepsilon.\varepsilon$$

□

Bemerkung: Seien X, Y LNR und sei $L(X,Y)$ der lineare Raum aller stetigen Abbildungen $X \to Y$. Der nachfolgende Satz zeigt, daß die unter 4. des vorangegangenen Satzes definierte Größe $\|T\|$ eine Norm für $L(X,Y)$ ist. Sie heißt deswegen auch ***Operator-Norm*** von T . Genauer gilt:

I.4.14 Satz: Sind X, Y, Z LNR, so ist $L(X,Y)$ ein LNR mit Norm

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \ .$$

Ist Y ein Banachraum , so gilt dies auch für $L(X,Y)$. Sind $A \in L(X,Y)$ und $B \in L(Y,Z)$, dann ist $BA \in L(X,Z)$ und es gilt

$$\|BA\|_{L(X,Z)} \ \le\ \|B\|_{L(Y,Z)}\ \|A\|_{L(X,Y)} \ .$$

Im Spezialfall $A, B \in L(X) \ =: \ L(X)$ besagt dies, daß $L(X)$ eine Algebra unter der Multiplikation $(A,B) \mapsto AB$ ist. Ist X Banachraum, so heißt $L(X)$ **Banach*algebra*** .

Beweis: Die Eigenschaft einer Norm von $\|T\|$ ist einfach zu zeigen. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\|BA\|_{L(X,Z)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|B(Ax)\|_Z \le \sup_{\|x\|_X=1} (\|B\|_{L(Y,Z)}\|Ax\|_Y) \\ &\le \sup_{\|x\|_X=1} (\|B\|_{L(Y,Z)}\|A\|_{L(X,Y)}\|x\|_X).\end{aligned}$$

Zur Vollständigkeit: Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge von Operatoren in $L(X,Y)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} \le \varepsilon \ \text{ für } \ m, n \ge N_\varepsilon \ .$$

Sei $x \in X$. Wegen

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \le \|T_n - T_m\|_{L(X,Y)}\|x\|_X \le \varepsilon\|x\|_X \quad \text{für} \quad m, n \ge N_\varepsilon$$

ist $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in Y , besitzt also einen Limes in Y, d.h. die T_n konvergieren punktweise. Definiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann ist T linear, wie man leicht zeigt. Für genügend großes $m_x \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)x\|_Y = \|T_n x - T_m x\|_Y &\le \|T_n x - T_{m_x} x\|_Y + \|T_{m_x} - Tx\|_Y \\ &\le \|T_n - T_m\|_{L(X,Y)}\|x\|_X + \varepsilon\|x\|_X \\ &\le \varepsilon\|x\|_X + \varepsilon\|x\|_X \ = \ 2\,\varepsilon\|x\|_X \ .\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Konvergenz in der Operatornorm $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ impliziert die punktweise Konvergenz der Operatoren. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Beispiele:

1. Der Inklusionssoperator: Sei Y ein linerer Teilraum eines NRW X, sei $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf Y , $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf X und $In \ : \ (Y, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ die Inklusion. In ist genau dann stetig, wenn ein $C > 0$ existiert mit $\|x\|_2 \le C\|x\|_1$ für alle $x \in X$, d.h. die Norm $\|\cdot\|_1$ ist ***stärker*** als $\|\cdot\|_2$, bzw. die durch $\|\cdot\|_1$ erzeugte Topologie ist ***feiner*** als die durch $\|\cdot\|_2$ erzeugte. Man sagt, daß Y ***stetig eingebettet*** in X ist. Ein Beispiel bilden $X = C([0,1])$, $Y = C^1([0,1])$, dann gilt $Y \subset X$ und $\|f\|_X = \|f\|_\infty$, $\|f\|_Y = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

2. Allgemeiner sind dieLipschitz-Hölder-Räume $C^{k,\alpha}(\Omega)$, Ω kompakt in $\mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, stetig eingebettet in $C^{k,\beta}(\Omega)$, $\alpha < \beta < 1$ und $C^{k+1}(\Omega)$ stetig eingebettet in $C^{k,\beta}(\Omega)$.

3. Ferner ist der Sobolev-Raum $W^{m+1,p}(\Omega)$ stetig eingebettet in $W^{m,p}(\Omega)$.

   Folgende Fragen drängen sich auf: Wann kann $W^{m_1,p}(\Omega)$ stetig in $W^{m_2,q}(\Omega)$ eingebettet werden (Sobolev-Einbettung)? Wann kann $W^{m,p}(\Omega)$ in $C^{k,\alpha}(\Omega)$ eingebettet werden?

   Antwort: Der Sobolevsche Einbettungssatz besagt, daß letzteres im Falle $m - \frac{n}{p} > k + \alpha$ gilt. Wenn also die Regularität im Sinne der schwachen Ableitung gleich m ist, braucht sie im klassischen Sinne nur gleich $m - \frac{n}{p} < m$ zu sein. Es heißt $m - \frac{n}{p}$ **Sobolev-*Zahl*** . Hinreichend für erstere Einbettung ist z.B. die dazu konsistente Bedingung $m_1 - \frac{n}{p_1} > m_2 - \frac{n}{p_2}$.

4. Ist $X = \mathbb{R}^n$,$Y = \mathbb{R}^m$, so ist jede lineare Abbildung als $m \times n$- Matrix darstellbar. Dies führt zu Matrixnormen (siehe Vorlesung Praktische Mathematik).

5. Ist X endlichdimensional und Y ein beliebiger LNR , so ist jeder lineare Operator $T \in L(X, Y)$ stetig. Denn alle Normen auf X sind äquivalent, also insbesondere zu $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\| := \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ und es folgt

$$\|Tx\|_Y = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i T b_i\right\|_Y \quad leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|Tb_i\|_Y \leq (\max_{1\leq i\leq n} \|Tb_i\|)\|x\| \; .$$

6. ***Stetige lineare Funktionale*** , d.h. $Y := \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Allgemein bezeichnet $L(X, \mathbb{K}) =: X^*$ den ***konjugierten Raum*** bzw. ***Dualraum*** , die Menge der stetigen linearen Funktionale auf X. Da dieser Fall besonders wichtig ist, wird er weiter unten in einem eigenen Unterabschnitt behandelt.

7. ***Integraloperatoren*** : ***Faltung*** $Tg(f) = g^* f$ für $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n) = X$, dann ist $Tg : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig nach Lemma I.3.35 .

8. ***Differentialoperatoren*** : $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ ist stetig von $C^k([a, b]) \to C([a, b])$ in der Norm $\|f\|_{C^k([a,b])} := \sum_{i=1}^k \; |D^i f\|_\infty$. Die Stetigkeit folgt aus der Einbettung unter 2.. Wählt man die Norm unpassend, zum Beispiel $\|\cdot\|_\infty$, so ist dies eine zu schwache Norm.

Ein einfaches aber sehr wichtiges Invertierbarkeit linearer Operatoren auf LNR liefert

I.4.15 Satz: Sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

1. T^{-1} ist auf $T(X)$ eindeutig definiert und stetig
2. Es ist $(\inf_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y)^{-1} < \infty$
3. Es gibt eine Konstante $m > 0$, sodaß

$$\|Tx\|_Y \geq m\|x\|_X \quad \text{für alle} \;\; x \in X$$

Gilt eine der drei Aussagen, so ist

$$\|T^{-1}\|_{L(T(Y,X))} \;=\; (\inf_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y)^{-1} \; .$$

Beweis: 3. ⇒ 1. oder 2. ⇒ 1.: Es gilt (man lese die folgende Kette rückwärts):

$$\begin{aligned} \|T^{-1}\|_{L(T(X),X)} &= \sup_{y\in T(X),\|y\|=1} \|T^{-1}y\| = \sup_{\|Tx\|=1,x\in X} \|x\| = \sup_{0\neq z\in X} \frac{\|z\|}{\|Tz\|} \\ &= \frac{1}{\inf_{0\neq z\in X} \frac{\|Tz\|}{\|z\|}} \leq \frac{1}{m} < \infty \; . \end{aligned}$$

1. $\Leftrightarrow$ 3., 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Man lese diese Kette vorwärts unter der Annahme $\|T^{-1}\|_{L(T(X),X)} < \infty$.
$\square$

Bemerkung: 1.:Aus diesem Lemma folgt mit Lemma I.4.15 leicht:
Ist $T \in L(X,Y)$ invertierbar und $S \in L(X)$ mit $\|S-T\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, so ist auch S invertierbar und $\|S^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|S-A\|}$. Die Menge der invertierbaren Operatoren ist also offen.

2.: Die Stetigkeit von T^{-1} ist von praktischer Wichtigkeit bei der Lösung von $Tx = y$, denn wenn statt y nur eine Näherung $\tilde{y} = y + \Delta y$ gegeben ist, stellt sich die Frage, wie sich $\tilde{x}$ in $T\tilde{x} = \tilde{y}$ (falls existent) zu x verhält (relativer Fehler):

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \;=\; \frac{\|T^{-1}(\Delta y)\|}{\|x\|} \;\le\; \frac{\|T^{-1}\|\|\Delta y\|}{\|y\|}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \;\le\; \|T^{-1}\|\|T\|\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}.$$

Der Ausdruck $\operatorname{cond} T := \|T^{-1}\|\|T\|$ heißt ***Kondition*** des Operators T und ist immer ≥ 1 wegen $1 = \|I\| \le \|T\|\|T^{-1}\|$.

Falls ein Operator nicht zu weit von der Identität abweicht, ist eine konkrete Darstellung der Inversen möglich:

I.4.16 Lemma: (**Neumann-*Reihe***) Sei $A \in L(X)$ und sei $\limsup_{m\to\infty} \|A^m\|^{(1/m)} < 1$. Dann ist $I - A$ invertierbar, $(I-A)^{-1}$ ist stetig, und es gilt (Konvergenz in Operatornorm)

$$(I-A)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A^n \;.$$

$\|(I-A)^{-1}$ kommutert mit allen Operatoren aus $L(X.X)$, die mit A kommutieren.

Beweis: [Ü].

I.4.17 Satz: Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius ρ. Sei X Banachraum und $A \in L(X)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ A^n$, falls $\limsup_{m\to\infty} \|A^m\|^{1/m} < \rho$, gegen einen Operator $f(A) \in L(X)$.

Bemerkung: $f(z)$ heißt ***Symbol*** der Operatorfunktion $f(A)$. Die dadurch definierte Abbildung $f \mapsto f(A)$ bildet später die Grundlage für einen Operatorenkalkül, d.h. man möchte mit Operatoren rechnen können wie mit Zahlen. Die Neumann-Reihe bildet den Spezialfall der Potenzreihe $(1-z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ für $|z| < 1$.

Beweis: Die Folge der Partialsummen ist eine Cauchyfolge, denn wegen $\|A^m\| \le (\rho-\varepsilon)^m$ für $m \ge n \ge N_\varepsilon$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} a_k A^k\right\| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k|\|A^k\| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k|(\rho-\varepsilon)^k \to 0 \;\text{ für }\; m,n\to\infty \;.$$

Da $L(X)X$ Banachraum ist, gilt $f(A) \in L(X)$. $\square$

Die Konvergenz in diesem Satz betraf die Konvergenz in der Operatornorm. Ein hinreichendes Kriterium für die punktweise Konvergenz einer Operatorenfolge ist

I.4.18 Lemma: Sei $(T_k)_{k\in\,\mathbb{N}}$ Folge in $L(X,Y)$ mit $\|T_k\| \le M < \infty$, $k \in\ \mathbb{N}$. Auf einer dichten Teilmenge $D \subset X$ existiere $\lim_{n\to\infty} T_k x$, $x \in D$, und Y sei vollständig. Dann existiert $Tx := \lim_{k\to\infty} T_k x$ auch für alle $x \in X$ und $T \in L(X,Y)$, $\|T\| \le M$ und T ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $Z = \operatorname{span} D$. Dann ist Z dichter Teilraum in X und $\lim_{k\to\infty} T_k x$ existiert für alle $x \in Z$. Sei $x \in X$ beliebig, zu $\varepsilon > 0$ wähle $z \in Z$ mit $\|z - x\| < \varepsilon$. Dann gilt für $m \geq n$ groß genug

$$\begin{aligned}\|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n x - T_n z\| \\ &\leq \|T_m\|\ \|x - z\| + \|T_n z - T_m z\| + \|T_m\|\ \|x - z\| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

also ist $T_n x$ Caychyfolge, wegen der Vollständigkeit von Y also konvergent. Offensichtlich ist T linear. Wegen

$$\|Tx\| \leq\ |Tx - T_m x\| + \|T_m x\|\ \leq \|Tx - T_m x\| + M\|x\| \to M\|x\|$$

für $m \to \infty$ ist $\|Tx\| \leq M$, also T stetig. □

I.4.4 DUALRÄUME

In diesem Unterabschnitt werden ihrer Bedeutung wegen die wichtigsten Dualräume vorgestellt und ihre Elemente bestimmt. Konkret liefert dies einen Darstellungssatz für die entsprechenden stetigen lineare Funktionale.

1. Lebesgue-Räume:

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ der Maßraum erzeugt durch die σ - Algebra A der Lebesgue-meßbaren Mengen in Ω, wobei Ω ein offenes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ sei, das entweder $\mu-$ endlich oder $\sigma-$endlich sei. Die Lebesgue-Räume $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ waren in Definition I.2.33 definiert worden.

Im Falle $p = \infty$ und $\Omega = \textit{kompakt}$ betrachtet man ferner den Raum $C(\Omega)$ der auf Ω stetigen Funktionen.

Kandidaten für die Dualräume der Räume $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ gewinnt man durch folgende Überlegung :
Für gegebenes $g \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, definiere

$$(Tg)(f) := \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)\ dx, \quad \text{für} \quad f \in L^p(\Omega) = X, \quad 1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Die Hölder-Ungleichung (unter Beachtung des Falles der Gleichheit) zeigt dann, daß Tg stetiges lineares Funktional in X^* darstellt mit Norm $\|Tg\|_{L^p(\Omega)^*} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$. Insbesondere ist der Operator $T : g \mapsto T_g$ eine lineare, isometrische Abbildung des Raumes $L^q(\Omega)$ in den Dualraum von $L^p(\Omega)$. Ferner ist T als Isometrie injektiv. Diese Überlegungen gelten für alle $p, 1 \leq p \leq \infty$, speziell im Falle $p = \infty$ wird $L^1(\Omega)$ in den Dualraum von $L^\infty(\Omega)$ und damit auch in denjenigen von C(Ω) eingebettet. Es heißt deswegen q auch der ***konjugierte Index*** zu p.
Die Frage ist nun, ob Gleichheit gilt bzw. ob T surjektiv ist.

I.4.19 Satz: Sei $1 < p < \infty$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist der Operator

$$g \in \mathrm{L^q}(\Omega) \mapsto \mathrm{Tg} \in (\mathrm{L^p}(\Omega))^* \quad : \quad (\mathrm{Tg})(\mathrm{f}) := \int_\Omega \mathrm{f(x)\overline{g}(x)}\ d\mu \quad , \quad (\mathrm{f} \in \mathrm{L^p}(\Omega))$$

ein isometrischer Isomorphismus von $\mathrm{L^q}(\Omega)$ auf $(\mathrm{L^p}(\Omega))^*$, d.h.: Zu jedem Element $L \in \mathrm{L^p}(\Omega)^*$ gibt es genau ein $g \in \mathrm{L^q}(\Omega)$ mit $L(f) = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)\ d\mu$ für alle $f \in \mathrm{L^p}(\Omega)$.

Es bleibt noch die Surjektivität von T zu zeigen. Dazu beginne mit

I.4.20 Lemma: Zu jedem Element $L \in \mathrm{L^p}(\Omega))^*$ mit $\|L\| = 1$ existiert genau ein Element $f^* \in \mathrm{L^p}(\Omega)$ mit $L(f^*) = \|f^*\|_{L_p} = 1$.

Bemerkung: Das Element f^* heißt ***peaking-element*** oder ***Extremalelement*** zu $L \in \mathrm{L^p}(\Omega))^*$, weil bei ihm die Norm von L angenommen wird.

Beweis: Es muß eine Folge $\{f_n\}$ in $\mathrm{L^p}(\Omega)$ existieren mit $\|f_n\|_{L_p} = 1$ und $\lim_{n\mapsto\infty} |L(f_n)| = 1$ (es bezeichne $\|f_n\|$ die Norm $\|f_n\|_{L_p(\Omega)}$). Durch Multiplikation mit geeigneten (komplexen) Zahlen können wir auch $\lim_{n\mapsto\infty} L(f_n) = 1$ annehmen. Es sei nun $\{f_n\}$ keine Cauchyfolge. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so daß für eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$ gilt $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Aus der gleichmäßigen Konvexität der L_p-Norm nach Satz I.4.12 folgt dann $\|(f_{n_{k+1}} + f_{n_k})/2\| \leq 1 - \delta$ für ein festes $\delta > 0$ (denn diese Normen streben nur gegen 1 wenn $f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \mapsto 0$). Dies ergibt aber einen Widerspruch zu $\lim_{n\mapsto\infty} L((f_{n_{k+1}} + f_{n_k})/2) = 1$ wegen $|L((f_{n_{k+1}} + f_{n_k})/2)| \leq \|L\|(1-\delta)$. Also muß $\{f_{n_k}\}$ eine Cauchyfolge sein mit Grenzwert $f^* \in \mathrm{L^p}(\Omega)$. Klarerweise gilt $L(f^*) = 1, \|f^*\|_{L_p} = 1$, weil Norm und Funktional stetige Abbildungen auf $\mathrm{L^p}(\Omega)$ sind. Die Eindeutigkeit von f^* folgt so: sind f_1, f_2 zwei solche Elemente mit $\|f_1 - f_2\|_{L_p} \geq \varepsilon' > 0$, so muß $\|(f_1 + f_2)/2\|_{L_p} \leq 1 - \delta'$ mit $\delta' > 0$ gelten und daher $1 = |L((f_1 + f_2)/2)| \leq (1-\delta')\|L\| = 1 - \delta'$, ein Widerspruch. □

Beweis von Satz I.4.19: Mit Hilfe der im vorangegangenen Lemma gefundenen Funktion f^* in $\mathrm{L^p}(\Omega)$ bilde

$$g^*(x) := \begin{cases} |f^*(x)|^{p-2} f^*(x) & , \quad f^*(x) \neq 0 \\ & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $g^* \in \mathrm{L^q}(\Omega)$ wobei konjugierter Index zu p ist, denn $|g^*| = |f^*|^{p-1}$ und $q(p - 1. = qp(1 - 1/p) = p$. Die Behauptung ist nun, daß das durch Tg^* gebildete Funktional das gewünschte Element in $(\mathrm{L^p}(\Omega))^*$ liefert. Betrachtet man nämlich die Wirkung auf das Extremalelement, so stellt man fest

$$Tg^*(f^*) = \int_{x\in\Omega: f^*\neq 0} |f^*(x)|^{p-2} f^*(x) \overline{f^*}(x)\, d\mu = \int_\Omega |f^*|^p = 1 = L(f^*),$$

d.h. das vorgegebene Funktional L stimmt mit Tg^* für f^* überein.
Der Beweis von Satz I.4.19 wird dann komplett mit dem folgenden Lemma, das zeigt, daß beide Funktionale dann auf ganz $\mathrm{L^p}(\Omega)$ übereinstimmen.

I.4.21 Lemma: Sei $1 < p < \infty$. Sind zwei Elemente $L_1, L_2 \in \mathrm{L^p}(\Omega)^*$ gegeben mit $\|L_1\| = \|L_2\| = 1$ und $L_1(w) = L_2(w)$ für ein $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{p,\Omega} = 1$, so muß $L_1 = L_2$ gelten.

Beweis: Falls die Behauptung nicht gilt, existiert $\widehat{u} \in \mathrm{L^p}(\Omega), \widehat{\mathrm{u}} \neq 0$ mit $L_1(\widehat{u}) - L_2(\widehat{u}) = 2$. Mit dem gegebenen w bilde dann $u := \widehat{u} + \alpha\, w$, derart daß $L_1(u) = 1$ und somit $L_2(u) = -1$ gelten. Für beliebiges $t > 0$ folgt dann $L_1(w + t\cdot u) = 1 + t$ und $L_2(w - t \cdot u) = 1 + t$, sodaß wegen $\|L_1\| = \|L_2\| = 1$ sich

$$1 + t \leq \|w + t\cdot u\|_{p,\Omega} \quad , \qquad 1 + t \leq \|w - t \cdot u\|_{p,\Omega}$$

ergibt. Dies wird nun zum Widerspruch geführt.
Für $2 < p < \infty$ geschieht dies so: für n groß genug setze

$$E_n := \{x \in \Omega : w(x) \geq u(x)/n \text{ f.ü.}\} \quad , \quad E_n^C := \{x \in \Omega : w(x) < u(x)/n \text{ f.ü.}\}.$$

Es folgt

$$\|w \pm t\cdot u\|_{L_p}^p \leq \int_{E_n} |w(x)|^p |1 \pm t \cdot \frac{u(x)}{w(x)}|^p\, dx + \int_{E_n^C} |u(x)|^p |t + \frac{1}{n}|^p\, dx\ . \tag{$*$}$$

Taylor-Entwicklung von $(1 + y)^p$ um den Punkt $y = 0$ ergibt für $x \in E_n$

$$(1 \pm t \cdot u(x)/w(x))^p - (1 \pm pt \cdot u(x)/w(x)) \leq C_1 |t \cdot u(x)/w(x)|^2 \leq C_1 (tn)^2,$$

falls $0 < t < 1/n$, und daher für diese t

$$|(1 + t \cdot u(x)/w(x)|^p + |(1 - t \cdot u(x)/w(x)|^p \leq 2 + 2C_1(tn)^2$$

mit einer festen von x, t unabhängigen Konstanten. Damit folgt aus (+)

$$2(1+t)^p \leq \|w + t \cdot u\|_{L_p}^p + \|w - t \cdot u\|_{L_p}^p \leq 2 \int_{E_n} |w(x)|^p [1 + C_1(tn)^2] \, dx + (t + \frac{1}{n})^p \|u\|_{L_p}^p .$$

Dividiere dies durch 2, benutze auf der linken Seite die Bernoulli- Ungleichung und beachte $\|w\|_{L_p} = 1$; dann folgt für $0 < t < 1/n$

$$1 + pt \leq 1 + C_1(tn)^2 + (t + 1/n)^p \|u\|_{L_p}^p \quad \text{bzw. } pt \leq C_1(tn)^2 + (2/n)^p \|u\|_{L_p}^p .$$

Mit $nt = n^{-p/2}, n \mapsto \infty$ führt dies im Falle $p > 2$ zu einem Widerspruch zur Anfangsannahme $u \neq 0$ bzw. $L_1 \neq L_2$. □

Der Fall $1 < p \leq 2$ dieses Lemmas kann mittels der sogenannten **Clarkson-*Ungleichung*** bewiesen werden. Wir geben hier einen unabhängigen Beweis, der zugleich Satz I.4.19 um den Fall $p = 1$ ergänzt.

I.4.22 Satz: Der Operator T von Satz I.4.19 ist im Falle $1 \leq p \leq 2$ auch ein isometrischer Isomorphismus von $\mathrm{L^q}(\Omega)$ auf $(\mathrm{L^p}(\Omega))^*$ bzw. es gilt
$\mathrm{L^p}(\Omega)^* \simeq \mathrm{L^q}(\Omega)$ für $1/q + 1/p = 1$.

Beweis: Zunächst gelte $vol(\Omega) < \infty$. Sei $L \in \mathrm{L^p}(\Omega)^*$. Wegen $\mathrm{L^p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$ ist L auch ein stetiges Funktional auf $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (I.5.14)) gibt es dann ein Element $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ mit

$$L(u) = \int_\Omega f(x) u(x) \, d\mu \qquad \text{für alle } \; u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad . \qquad (*)$$

Wir zeigen, daß sogar $f \in \mathrm{L^q}(\Omega)$ gilt. Da $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dicht in $\mathrm{L^p}(\Omega), 1 \leq \mathrm{p} < 2$ ist, folgt dann die Eindeutigkeit von f auch als Element in $\mathrm{L^q}(\Omega)$.
Sei zunächst $1 < p < 2$. Dann definiere zu $R > 0$

$$f_R(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad \text{falls} \quad |f(x)| \leq R \\ 0 & , \quad \text{falls} \quad |f(x)| > R \end{cases}$$

und wähle $u^* := |f|^{q/p} \, sign(f)$. Dann ist $u^* \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ wegen $vol(\Omega) < \infty$, und es gilt in $(*)$ wegen $1 + q/p = q(1/q + 1/p) = q$

$$\int_\Omega |f_R|^q d\mu = L(u^*) \leq \|L\|_p \; \|u^*\|_{p,\Omega} = \|L\|_p \; \Big(\int_\Omega |f_R|^q d\mu \Big)^{1/p}$$

für $1 < p \leq 2$. Hieraus schließen wir $\|f_R\|_q \leq \|L\|_p$ für jedes $R > 0$. Nach Grenzübergang $R \to \infty$ folgt mit dem Satz von Lebesgue über majordominierte Konvergenz (I.2.24) auch $\|f\|_q \leq \|L\| p$.
Damit ist gezeigt, daß die Abbildung $L \in (\mathrm{L^p}(\Omega))^* \mapsto \mathrm{f} \in \mathrm{L^q}(\Omega)$ die gleichen Eigenschaften wie T in I.4.19 besitzt. Es fehlt noch der Fall $p = 1$, für den wir $\mathrm{L}^1(\Omega) \subset \mathrm{L^p}(\Omega), 1 < \mathrm{p} < 2$ beachten. Daher gilt $(\mathrm{L^p}(\Omega))^* \subset (\mathrm{L}^1(\Omega))^*$, sodaß nach dem Vorigen zu $L \in (\mathrm{L}^1(\Omega))^*$ für jedes solche p ein $f_q \in \mathrm{L^q}(\Omega), 1/\mathrm{p} + 1/\mathrm{q} = 1$ existiert mit

$$L(u) = \int_\Omega u(x) f_q(x) \, d\mu \quad \text{für alle} \quad u \in \mathrm{L}^1(\Omega) \; .$$

Nach dem obigen Eindeutigkeitsargument muß $f_q = f$ unabhängig von q sein, und für dieses f muß $\|f\|_q \leq \|L\|_1$ für jedes $q \geq 2$ gelten. Dann muß aber auch $\|f\|_\infty \leq \|L\|_1$ erfüllt sein, denn andernfalls gäbe es zu $\delta > 0$ eine meßbare Menge $A \subset \Omega$ mit $|f(x)| \geq \|L\|_1 + \delta$ für $x \in A$, sodaß

$$\mu(A)^{1/q} (\|L\|_1 + \delta) \leq \|f\|_q \leq \|L\|_1$$

gelten würde, was für $q \to \infty$ einen Widerspruch ergibt.
Damit ist der Satz im Fall $vol(\Omega) < \infty$ bewiesen. Der allgemeine Fall läßt sich darauf zurückführen durch die Zerlegung $\Omega = \bigcup \Omega_j$ in disjunkte Gebiete Ω_j mit $vol(\Omega_j) < \infty$ und Anwendung des Bisherigen auf die Ω_j. $\square$

2) Räume stetiger Funktionen:

Die Bestimmung des Dualraums von $\mathrm{C}(\Omega)$, was dem übrig bleibendem Falle $p = \infty, q = 1$ der Lebesgue-Räume entspricht, ist komplizierter. Man führt ein

I.4.23 Definition: Es sei $\mathcal{B}$ die von den offenen Mengen in Ω erzeugte $\sigma-$ Algebra der Borel-Mengen in Ω. Auf $\mathcal{B}$ sei ein sog. ***komplexes*** oder ***signiertes*****Borel-*****Maß*** ν definiert, d.h. eine Abbildung $\nu : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}(bzw.\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \quad , \quad B_i \in \mathcal{B} \;\text{ paarweise disjunkt} .$$

(Es braucht also nicht $\nu(B) \geq 0$ für $B \in \mathcal{B}$ zu gelten). Zu ν man definiert als neues (positives) Mass das sog. ***Variationsmaß***

$$|\nu|(B) := \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{m} |\nu(B_i)| \;\Big|\; m \in \mathbb{N} \;,\; B_i \in \mathcal{B} \;\text{ disjunkt} \;,\; \bigcup_{i=1}^{m} B_i = B \Big\} .$$

Ein Maß ν heisst ***reguläres***, falls für $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\inf\{|\nu|(U \backslash K) \;\mid\; K \subset B \subset U \;,\; K \;\text{ kompakt} \;,\; U \;\text{ offen in }\; \Omega \;\} = 0 .$$

Damit kommt man schliesslich zu folgendem Raum:

I.4.24 Definition: Der Raum der ***regulären*** **Borel-*****Maße mit beschränkter Variation*** ist definiert durch

$$rca(\Omega) := \{\nu \;\mid\; \nu \;\text{ reguläres Borel-Maß}\} \;\;,\;\; \|\nu\|_{var} := |\nu|(\Omega) < \infty\} .$$

Es ist $\|\nu\|_{var}$ eine Norm für den Raum $rca(\Omega)$ und es gilt:

I.4.25 Satz: (**Riesz-Radon**) Es ist

$$\nu \in rca(\Omega) \mapsto T\nu \in (C(\Omega))^* \quad : \quad (T\nu)(g) := \int_{\Omega} g(x)\; d\nu \quad , \quad \big(g \in C(\Omega)\big)$$

ein isometrischer Isomorphismus von $rca(\Omega)$ auf $(C(\Omega))^*$.

Im Falle $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kann man den Raum $rca(\Omega)$ und damit den Dualraum von $C[a, b]$ etwas einfacher durch den Raum $NBV[a, b]$ der normalisierten Funktionen von beschränkter Variation beschreiben. Es gilt:

I.4.26 Korollar:

$$(C[a,b])^* \simeq NBV[a,b] := \{g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \mid \mathrm{g(a) = 0}, \quad \mathrm{Var(g; [a, b])} < \infty\} \ ,$$

wobei

$$Var(f;[a,b]) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \ \ , \ \ a = a_0 < a_1 < \cdots a_m = b \right) \ .$$

3) Folgenräume :

Bei den Folgenräumen liegen die Verhältnisse einfacher. Den Dualraum von $\mathrm{l^p}$ beschreibt folgender Operator $T \quad (1/p + 1/q = 1)$:

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ l^q & \longrightarrow & (l^p)^* \\ T(a_n)_{n\in\mathbb{N}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} & := & \displaystyle\sum_{k\in\ \mathbb{N}} b_k a_k \ \ , \ \ ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \ ) \end{array}$$

I.4.27 Satz: Der obige Operator T ist im Falle $1 \leq p < \infty$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathrm{l^q}$ auf $(\mathrm{l^p})^*$. Im Falle $p = \infty$ und $q = 1$ ist T ein isometrischer Isomorphismus von $\mathrm{l^1}$ auf $(\mathrm{c_o})^*$.

Dieser Satz läßt sich auch direkt ohne Anwendung von Satz I.4.22 beweisen.

4) Distributionen:

Ein weiterer bekannter Dualraum ist die Menge $\mathcal{S}'$ der ***temperierten Distributionen***

$$\mathcal{S}' \ := \ \{ \ L \mid L \ \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } \ \mathcal{S} \ \}$$

.

Die Menge $\mathcal{L}$ der ***langsam wachsenden Funktionen*** liefert eine Teilmenge von $\mathcal{S}'$. Sie ist definiert als Menge der auf $\mathbb{R}^n$ meßbaren Funktionen f, für die gilt:

$$f(x)\Big(1 + |x|^2\Big)^{-k} \in L_p(\mathbb{R}^n), \qquad \text{für ein festes } k \in \ \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq p \leq \infty.$$

Speziell sind $L_p(\mathbb{R}^n)$ für beliebiges $1 \leq p \leq \infty$ und die Menge aller Polynome in $\mathcal{S}'$ enthalten. Für $f \in \mathcal{L}$ ist

$$L_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \qquad (\phi \in \mathcal{S})$$

wohldefiniert und stetig auf $\mathcal{S}$, d.h. L_f ist eine temperierte Distribution. Ferner ist die Abbildung $f \to L_f$ linear und bijektiv (dies kann man analog zu Korollar I.3.41 zeigen).

I.5 (PRÄ)-HILBERTRÄUME (H-RÄUME)

I.5.1 ORTHOGONALITÄT

(Prä)-Hilberträume besitzen wegen der Existenz eines Skalarprodukts die reichhaltigste Theorie in der Funktionalanalysis.

I.5.1 Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt ***Sesquilinearform*** , falls für $x, x', y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (Symmetrie)
2. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (Homogenität)
3. $(x + x', y) = (x, y) + (x', y)$ (Additivitätt)

Die Sesquilinarform heißt ***positiv semidefinit***, falls $(x, x) \geq 0$ gilt und ***positiv definit*** oder ***Skalarprodukt*** , falls zusätzlich

$$(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

gilt. In diesem Fall heißt $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ ***Prähilbertraum(Prä-H-Raum)*** oder ***Innerer-Produkt-Raum***. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt **Hilbert*-raum (H-Raum)*** Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen ***orthogonal***, und wir schreiben $x \perp y$, falls $(x, y) = 0$. Zwei Teilmengen M, N von X heißen orthogonal, wenn für alle $a \in A$, $b \in B$ $a \perp b$ ist. Sind $x \in X$ und $M \subset X$, so schreiben wir $x \perp M$ statt $\{x\} \perp M$ und $M \perp x$ statt $M \perp \{x\}$.

I.5.2 Lemma: Sei $(\cdot,\cdot)$ positiv semidefinit und sei

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}\ .$$

Dann gelten die

1. **Cauchy-Schwarz*sche Ungleichung***

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

und die

2. ***Dreiecksungleichung***

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit, so gilt Gleichheit in beiden Ungleichungen genau dann, wenn $y = \lambda x$ für ein $\lambda \geq 0$.

Beweis: Es sei $x \neq 0, y \neq 0$, anderfalls ist nichts zu beweisen. Es gilt

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{\alpha^2} + \frac{\|y\|^2}{\beta^2} - \frac{2}{\alpha\beta}\Re(x, y)$$

für $\alpha, \beta > 0$, also

$$2\Re(x, y) \leq \frac{\beta}{\alpha}\|x\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}\|y\|^2.$$

Mit $\alpha = \|x\|$, $\beta = \|y\|$ folgt $\Re(x, y) \leq \|x\|\|y\|$. Ersetzen von x durch $\overline{(x, y)}x$ ergibt

$$|(x, y)|^2 \leq |(x, y)|\|x\|\|y\|\ .$$

Falls $(x, y) \neq 0$ folgt 1., für $(x, y) = 0$ ist 1.trivial. Falls $(\cdot,\cdot)$ positiv definit ist, so gilt in den bisherigen Ungleichungen überall Gleichheit genau dann, wenn dies in der ersten der fall ist, also $y = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit 1. folgt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\ .$$

□

I.5.3 Lemma: (***Parallelogrammgleichung*** . Ein linearer normierter Raum X ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn die Norm für alle $f, g \in X$ die Gleichung

$$\|f+g\|^2 \ + \ \|f-g\|^2 \ = \ 2 \ \left[\ \|f\|^2 \ + \ \|g\|^2 \ \right]$$

erfüllt. In diesem Fall ist das Skalarprodukt

$$(f,g) \quad = \quad \frac{1}{4} \ \left[\ \|f+g\|^2 \ - \ \|f-g\|^2 \ \right] \qquad \text{für} \ \ \mathbb{K} = \mathbb{R} \ \ ,$$

$$(f,g) \quad = \quad \frac{1}{4} \ \left[(\|f+g\|^2 \ - \ \|f-g\|^2) \ + \ i \ (\|if+g\|^2 \ - \ \|if-g\|^2) \ \right] \qquad \text{für} \ \ \mathbb{K} = \mathbb{C} \ \ .$$

Beweis: [Ü].

Mit diesem Lemma kann man das Problem der Bestimmung der besten Approximation aus einer abgeschlossenen, konvexen Teilmenge A von X aus Abschnitt I.3 genauer untersuchen. Zunächst gilt der grundlegende

I.5.4 Satz: Sei X ein Prähilbertraum und A eine abgeschlossene, konvexe nichtleere Teilmenge. Dann gilt:

1. Ist $\in X$, so ist $y^* \in A$ genau dann eine beste Approximation von x in A , wenn
$$\Re(x-y^*, y^*-y) \geq 0 \ \text{ für alle } \ y \in A \ .$$
2. Ist A vollständig, also z.B wenn X ein Hilbertraum ist, so gibt es zu jedem $x \in X$ genau eine beste Approximation von x in A .

Beweis: 2.: Folgt bereits aus dem allgemeineren Satz I.4.11, jedoch sei hier wegen der Bedeutung des Satzes ein eigener einfacher Beweis gegeben.
Sei $\{x_n\}$ eine Minimalfolge in A zu x, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \|x-x_n\| = dist(x,A) := d$. Dann setze $x := x - x_n, y := x - x_m$ und wende die Parallelogrammregel an. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|^2 &= 2\|x-x_n\|^2 + 2\|x_m - x_n\|^2 - \|2x - (x_m + x_n)\|^2 \\ &= 2\Big(\|x-x_n\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 - 2\|x - (x_m+x_n)/2\|^2\Big) \end{aligned}$$

Nun ist $(x_m + x_n)/2 \in A$, weil A konvex ist. Dies liefert $\|x - (x_m+x_n)/2\|^2 \geq d^2$, sodaß

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq 2\Big(\|x-x_n\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 - 2d^2\Big) \qquad \to 0, \quad m,n \to \infty \ ,$$

d.h. $\{x_n\}$ ist Cauchyfolge. Weil A abgeschlossen ist, existiert $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in A$. Wegen $\|x - x^*\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x^*\|$ folgt $\|x - x^*\| \leq d$, d.h. x^* ist beste Approximation.
Sind x^*, y^* zwei beste Approximationen, so folgt analog wie oben

$$\|x^* - y^*\|^2 \leq 2\Big(\|x - x^*\|^2 + \|x - y^*\|^2 - 2d^2\Big) = 0 \ .$$

Beweis der Charakterisierung: Die Richtung $\Leftarrow$ folgt aus

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x-y^*\|^2 + 2\Re(x-y^*, y^*-y) + \|y^*-y\|^2 \\ &\geq \|x-y^*\|^2, \quad \text{falls} \quad \Re(x-y^*, y^*-y) \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Richtung $\Rightarrow$: Zu $t \in [0,1]$ setze $y_t = (1-t)y^* + ty \in A$, $y \in A$. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} \|x-y^*\|^2 &\leq \|x-y_t\|^2 = (x-y^*+t(y^*-y), x-y^*+t(y^*-y)) \\ &= \|x-y^*\|^2 + 2t \ \Re(x-y^*, y^*-y) + t^2\|y^*-y\|^2 \end{aligned}$$

notwendig $\Re(x-y^* \ , \ y^*-y) \geq 0$, wenn $t \to 0$. □

Beispiel (*einseitige Approximation*): Betrachte für nichtnegatives $f \in C([0,1])$

$$\inf\{ \parallel f - p \parallel_\infty \;\mid\; p \;\text{ Polynom } n\text{-ten Grades mit } f(x) \geq p(x) \;\} \;.$$

Die Menge der zulässigen Approximationen ist hier offenbar abgeschlossen und konvex.

Der Fall eines linearen Teilraums A ist besonders wichtig. Es gilt

I.5.5 Korollar: Sei X ein Prähilbertraum , A ein linearer Unterraum von X und $g^* \in A$. Dann ist g^* genau dann eine beste Approximation von f in A, wenn $f - g^* \in A^\perp$ ist.
g^* ist dann eindeutig bestimmt.
Ist A vollständig, so gibt es genau ein solches $g^* \in A$ bester Approximation.

Beweis: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt die Behauptung aus Satz I.5.4 , da mit g , $g^* \in A$ auch $g^* - g \in A$ ist. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt sie aus der zusätzlichen Gleichung

$$\Im(f - g^*, g^* - g) = -\Re i(f - g^*, g^* - g) = -\Re(f - g^*, -i(g^* - g)) = 0$$

für alle $g \in A$, da mit g^* , $g \in A$ auch $i(g^* - g) \in A$ ist.

Bemerkung: Diese Korollar läßt sich auch leicht direkt beweisen.

Diese Aussage motiviert

I.5.6 Definition: Die ***orthogonale Projektion*** oder ***Orthogonalprojektion*** von X auf A . P von einem Prähilbertraum X auf einen linearen Teilraum A ist definiert durch

$$Pf - f \in A^\perp \;.$$

Bemerkung: Man zeigt leicht:

1. Es gibt höchtens eine Orthogonalprojektion von X auf A .
2. Ist P Orthogonalprojektion von X auf A ,so ist P linear und $\mathcal{R}(P) = A$.
3. P ist genau dann Orthogonalprojektion von X auf A , wenn für jedes $x \in X$ gilt:

   Px ist die beste Appr$\hat{o}$ximation von x in A .

I.5.7 Definition: Sind A und B orthogonale Teilmengen, so bilden sie eine direkte Summe, die wir in diesem Fall mit $A \bigcirc\!\!\!\!\perp B$ bezeichnen. Die Menge aller $z \in X$, die orthogonal zu A sind, heißt das ***orthogonale Komplement*** zu A , und wir bezeichnen sie mit $A^\perp$.

I.5.8 Lemma: Sei A abgeschlossener linearer Teilraum eines Hilbertraumes X . Dann ist das orthogonale Komplement $A^\perp$ zu A wieder ein linearer abgeschlossener Teilraum, und es gilt $X = A \bigcirc\!\!\!\!\perp A^\perp$, X ist also direkte Summe zweier orthogonaler Unterräume und es gilt $A^{\perp\perp} = A$.

Beweis: $A^\perp$ ist offensichtlich linearer Unterraum. Er ist auch abgeschlossen, denn ist $(x_m)_{m\in\,\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $A^\perp$, also $x_m \perp A$, $m \in \mathbb{N}$ und $x = \lim_{m\to\infty} x_m$, so gilt für $y \in A$ (Stetigkeit des Skalarprodukts)

$$|(x,y)| = |(x - x_m, y)| \leq \|x - x_m\|\|y\| \to 0$$

für $m \to \infty$, also $(x,y) = 0$, damit $x \in A^\perp$. Also ist $A^\perp$ abgeschlossen. Sei $z \in X$ beliebig, dann existiert die orthogonale Projektion Pz auf A und $z - Pz \perp A$, also

$y := z - Pz \in A^\perp$. Dann gilt $z = y + Pz$. Die Summe ist direkte Summe, falls diese Zerlegung eindeutig ist. Sei dazu $z = w + y = w' + y'$ mit $w, w' \in A$, $y, y' \in A^\perp$. Dann folgt $0 = (w - w') + (y - y')$ bzw. $A \ni w - w' = y' - y \in A^\perp$, also $w - w' = 0 = y' - y$.
Wegen $A \perp A^\perp$ folgt weiter $A \subset A^{\perp\perp}$. Sei nun $y \in A^{\perp\perp}$. Bilde $y - Py \in A^\perp$, d.h. $(y, y - Py) = 0$. Ferner gilt $(Py, y - Py) = 0$ wegen $Py \in A$. Insgesamt also $(y - Py, y - Py) = 0$, sodaß $y = Py \in A$ und damit $A \supset A^{\perp\perp}$. □

Bemerkung: Ist der Unterraum A nicht abgeschlossen, so kann man leicht zeigen, daß noch $(\overline{A})^\perp = A^\perp$ gilt. Es gilt dann in diesem Falle die Zerlegung $X = \overline{A} \bigoplus A^\perp$.

I.5.9 Lemma: Sei A abgeschlossener linearer Teilraum eines Hilbertraumes X , $A \neq \{o\}$. Für die orthogonale Projektion $P : X \to A$ gelten

1. $P^2 = P$
2. $\|P\| = 1$
3. $I - P$ ist orthogonale Projektion auf $A^\perp$.
4. $\mathcal{N}(P) = A^\perp \quad , \quad \mathcal{N}(I - P) = A$.
5. $X = \mathcal{N}(P) \bigoplus \mathcal{R}(P)$.

Beweis: 1.: Es ist $\|P^2 y - Py\| = \|Pg - g\| = 0$ wegen $g := Py \in A$.
2.: Für $f \in X$ mit $\|f\| = 1$ gilt

$$1 = \|Pf + (f - Pf)\|^2 = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2 + 2\Re(Pf, f - Pf) = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2 \geq \|Pf\|^2 .$$

Daraus folgt, wobei das Supremum für $f \in A$ auch angenommen wird,

$$\sup_{\|f\|=1} \|Pf\| \leq 1.$$

3.: Es gilt $((I - P)f - f, g) = -(Pf, g) = 0$ für alle $g \in A^\perp$.
4.: Sei $x \in \mathcal{N}(P)$. Dann ist $(x, g) = (x - Px, g) = 0$ für alle $g \in A$, also $x \in A^\perp$.
Ist $x \in A^\perp$ und $x \notin \mathcal{N}(P)$, so gilt einerseits $Px \neq 0$ und im Widerspruch dazu

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, -Px) + (-Px, -Px) = (x - Px, -Px) = 0 .$$

Der Rest der Behauptung folgt hieraus mit Lemma I.5.8 aus

$$\mathcal{N}(I - P) = A^{\perp\perp} = A \quad , \quad X = A^{\perp\perp} \bigoplus A = \mathcal{N}(P) \bigoplus \mathcal{R}(P) .$$

□

Die Berechnung von P erfolgt im einfachsten Fall, wenn $A = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ endlichdimensional ist, φ_i linear unabhängig, $1 \leq i \leq n$, aus $Pf \perp A$. Dazu setze an $Pf = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$ mit noch zu berechnenden, von f abhängigen Koeffizienten α_j, die aus $(P_n f - f, \varphi_i) = 0$ bestimmt werden. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Die Matrix $G := \{G_{i,j}\}$ mit $G_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)$ heißt **Gram*sche Matrix***. Die effektivste Wahl für eine Basis (φ_i) ist eine Orthonormalbasis, denn dann ist die Gramsche Matrix die Einheitsmatrix.

Im endlich-dimensionalen Falle kann eine solche durch das bekannte Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren konstruiert werden. Im Folgenden beschäftigen wir uns daher allgemeiner mit Orthonormalsystemen und deren Konvergenzeigenschaften in (Prä)-Hilberträumen. Den bekanntesten Fall bildet die Orthonormalbasis der Funktionen $(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ in $L^2(-\pi,\pi)$, denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ijx}\ dx = \delta_{jk}.$$

Bei Restriktion auf reellwertige Funktionen erhält man die Orthonormalbasis aus den trigonometrischen Funktionen $(sin\ kx)_{k\in\ \mathbb{N}}$ und $(cos\ kx)_{k\in\ \mathbb{N}}$.

I.5.2 ORTHONORMALSYSTEME

In diesem Unterabschnitt werden die wesentlichen Aussagen über allgemeine Orthonormalsysteme in Hilbert-Räumen zusammengestellt.

I.5.10 Definition: Eine Teilmenge $S \subset X$ eines Prähilbertraumes X heißt ***Orthonormalsystem*** , falls jedes $s \in S$ Norm 1 hat und alle $s, t \in S$, $s \neq t$, orthogonal zueinander sind. S heißt ***vollständiges*** oder ***totales Orthonormalsystem*** in X, falls $S^\perp = \{0\}$, d.h. aus $x \in X$, $x \perp S$ folgt $x = 0$.

I.5.11 Lemma: Sei $(\varphi_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge in einem Hilbertraum X. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n\varphi_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$. In diesem Fall gilt die **Parseval*sche Identität***

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n\varphi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 \ .$$

Die Reihe bleibt bei beliebiger Umordnung konvergent mit gleichem Grenzwert.

Beweis: Es gilt

$$\left\|\sum_{i=n}^m \alpha_i\varphi_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=n}^m \alpha_i\varphi_i \ \ , \ \ \sum_{j=n}^m \alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{i,j=n}^m \alpha_i\overline{\alpha_j}\delta_{ij} = \sum_{i=n}^m |\alpha_i|^2 \ .$$

Damit folgt die Äquivalenz der Konvergenzbedingungen. Wähle $n = 1$, dann folgt die Parsevalsche Identität mit $m \to \infty$. Sei $z = \sum_{i=1}^\infty \alpha_{i_n}\varphi_{i_n}$ eine Umordnung von $y = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i\varphi_i$. Beide Reihen sind wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^2$ wohldefiniert. Es gilt

$$\|z - y\|^2 = (z - y, z - y) = (z, z) - (z, y) - (y, z) + (y, y) = 2\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^2 - 2\Re(y, z) \ .$$

Weiterhin gilt für eine beliebige Umordnung

$$\left(\sum_{j=1}^m \alpha_{i_j}\varphi_{i_j}, \sum_{k=1}^m \alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{j,k=1}^m \alpha_{i_j}\overline{\alpha_k}(\varphi_{i_j}, \varphi_k) = \sum_{j=1}^m |\alpha_{i_j}|^2.$$

Dies angewandt auf $y_m := \sum_{j=1}^m \alpha_{i_j}\varphi_{i_j}$, $z_m := \sum_{k=1}^m \alpha_k\varphi_k$ zeigt mit $y_m \to y$, $z_m \to z$ für $m \to \infty$

$$2\Re(y, z) = 2\sum_{j=1}^\infty |\alpha_{i_j}|^2 \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2$$

und damit $z - y = 0$.
Die letzte Behauptung folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts. □

Dieses Ergebnis kann auf überabzählbare Orthonormalsysteme ausgedehnt werden.

I.5.12 Satz: Sei S ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum X und $f \in X$. Dann ist die Menge der $\varphi \in S$ mit $(f, \varphi) \neq 0$ höchstens abzählbar. Ferner gilt für $f, g \in X$

$$\sum |(f,\varphi)\overline{(g,\varphi)}| \leq \|f\| \; \|g\| \; ,$$

wobei die Summe über die abzählbar vielen φ mit $(f, \varphi) \neq 0$ zu nehmen ist. Die spezielle Reihe $\mathcal{F}[f] = \sum_{\varphi \in S}(f,\varphi)\varphi$ heißt **Fourier-*Orthogonalreihe*** und es gilt die **Bessel-*Ungleichung***

$$\sum_{\varphi \in S} |(f,\varphi)|^2 \leq \|f\|^2 \; .$$

$\mathcal{F}[f]$ ist eindeutig definierte orthogonale Projektion von X auf $\overline{\text{span}(S)}$. Dabei ist $\overline{\text{span}(S)}$ erklärt als der Abschluß aller endlichen Linearkombinationen in S bezüglich der Norm in X .

Beweis: Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &\leq \big(f - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i, f - \sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)\varphi_j\big) \\
&= (f,f) - \sum_{j=1}^{n}\overline{(f,\varphi_j)}(f,\varphi_j) - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\overline{(f,\varphi_i)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\sum_{j=1}^{n}\overline{(f,\varphi_j)}(\varphi_i,\varphi_j) \\
&= (f,f) - \sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)\overline{(f,\varphi_j)},
\end{aligned}$$

also

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |(f,\varphi_i)|^2.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ und A_N die Zahl aller $\varphi \in S$ mit $|(f,\varphi)| \geq \frac{1}{N}$. Dann ist $A_N < \infty$ wegen

$$\|f\|^2 \geq \sum_{\{ \;\varphi \;|\; |(f,\varphi)| \geq \frac{1}{N} \;\}} |(f,\varphi)|^2 \geq \frac{A_N}{N^2} \; .$$

Also ist die Zahl aller φ mit $(f,\varphi) \neq 0$ abzählbar und $\sum |(f,\varphi)\overline{(g,\varphi)}|$ eine abzählbar Reihe. Wegen $\sum_{\{ \;\varphi \;|\; (f,\varphi)\neq 0 \;\}} |(f,\varphi)|^2 \leq \|f\|^2$, $\sum_{\{ \;\varphi \;|\; (g,\varphi)\neq 0 \;\}} |(g,\varphi)|^2 \leq \|g\|^2$ konvergiert auch diese Reihe nach der Hölder-Ungleichung mit $p = q = 2$:

$$\sum |(f,\varphi)\overline{(g,\varphi)}| \leq \Big(\sum |(f,\varphi)|^2\Big)\Big(\sum |\overline{(g,\varphi)}|^2\Big) \; .$$

$\mathcal{F}[f]$ ist eine lineare orthogonale Projektion auf X mit $\mathcal{F} = \overline{span(S)}$, denn $\mathcal{F}[f]$ ist wohldefiniert für $f \in X$ und $\mathcal{F}$ ist offensichtlich linear. Falls $f, \psi \neq 0$, $\psi \in S$, folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$(\mathcal{F}[f],\psi) = (\sum(f,\varphi)\varphi,\psi) = \sum(f,\varphi)(\varphi,\psi) = (f,\psi) \; ,$$

also $(\mathcal{F}[f] - f) \perp S$ bzw. $(\mathcal{F}[f] - f, g) = 0$ für alle $g \in S$. Durch Grenzübergang folgt auch $(\mathcal{F}[f] - f) \perp \overline{\text{span}(S)}$. □

I.5.13 Satz: Sei S ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. S ist eine orthonormale Basis für X, d.h. die Fourier-Orthogonalreihe $\mathcal{F}[f]$ konvergiert gegen f.
2. span(S) ist dicht in X, d.h. für jedes $f \in X$ existiert eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus S und Zahlen α_j, sodaß $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j$.
3. S ist ein vollständiges System bezüglich X, d.h. $S^\perp = \{0\}$.
4. Für jedes $f \in X$ gilt die **Parseval*sche Identität***
$$\|f\|^2 = \sum_{\{\ \varphi\ \mid\ (f,\varphi)\neq 0\ \}} |(f,\varphi)|^2 \ .$$

Beweis: 1.$\Rightarrow$ 2. : Ist klar.

2. $\Rightarrow$ 3.: Sei span(S) dicht in X. Daher gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in span(S) mit $f_n \to f$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt für $f \in S^\perp$
$$0 \le (f,f) = \lim_{n\to\infty} |(f, f-f_n)| \le \lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|\|f\| = 0 \ ,$$
also $f = 0$.

3. $\Rightarrow$ 1. : $\mathcal{F}$ ist orthogonale Projektion auf $\overline{span(S)}$, also $f - \mathcal{F}[f] \perp S$. Damit ist $f = \mathcal{F}[f]$ wegen $S^\perp = \{0\}$.

1. $\Rightarrow$ 4.: Wegen $\|f\|^2 = \|\mathcal{F}[f]\|^2 = \sum_{\{\ \varphi\ \mid\ (f,\varphi)\neq 0\ \}} |(f,\varphi)|^2$ folgt die Behauptung mit Lemma I.5.11 .

4. $\Rightarrow$ 1.: Gilt die Parsevalsche Identität, dann konvergiert die Reihe $\sum_{\{\ \varphi\ \mid\ (f,\varphi)\neq 0\ \}}(f,\varphi)\varphi$ für alle $f \in X$. Durch Grenzübergang in der Besselschen Ungleichung folgt dann
$$0 \le (f-\mathcal{F}[f], f-\mathcal{F}[f]) = (f,f) - \sum_{\{\ \varphi\ \mid\ (f,\varphi)\neq 0\ \}} |(f,\varphi)|^2 = 0 \ ,$$

Beispiele:

1. Sei $X = L^2([-\pi,\pi])$ mit Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\ dx$. Dann gilt wie schon erwähnt $\langle e^{ikx}, e^{ijx}\rangle = \delta_{kj}$. Es heißt $\widehat{f(k)} = \langle f, e^{ikx}\rangle$ der k-te **Fourier-*koeffizient*** und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ die **Fourier-*reihe*** von f. Mit Hilfe des Approximationssatzes von Weierstraß kann man die Voraussetzungen 2. oder 3. von Satz I.5.13 verifizieren. Die Fourierreihe konvergiert daher immer in $\|\cdot\|_{L^2}$ für $f \in L^2([-\pi,\pi])$ und $(\hat{f}(k)) \in l^2$.
2. Orthogonalpolynome in $L^2_w([-1,1])$ mit Skalarprodukt
$$\langle f,g\rangle_w := \int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dw(x)$$
für eine Gewichtsfunktion $w > 0$ und entsprechender Norm. Gewichtsfunktionen sind zum Beispiel
   (a) $w(x) = 1$ - Legendre-Polynome,
   (b) $w(x) = (1-x^2)^\alpha\ ,\ \alpha > -1$ - Jacobi-Polynome,
   (c) $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ - Tschebyscheff-Polynome.
3. Der Raum $X = L^2_w(\mathbb{R})$ mit Skalarprodukt $\langle f,g\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)g(x)$ liefert das Orthogonalsystem der Hermite-Polynome.

4. Der Raum $X = L^2_w(0,\infty)$ mit Skalarprodukt $\langle f,g\rangle_w = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)$ liefert das Orthogonalsystem der Laguerre-Polynome.

5. Wavelets: Dies sind Orthonormalsysteme für Räume der Form

$$V_j := \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}}, \qquad \varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\ ,$$

   wobei φ eine feste L^2-Funktion ist, die *Erzeugende* der Räume V_j heißt. Man fordert außerdem sinnvollerweise

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j \quad \text{liegt dicht in} \quad L_2(\mathbb{R}^d)\ , \tag{$*$}$$

   d.h. die Räume V_j bilden eine *Multi-Resolution -Ananlysis* für $Ł_2(\mathbb{R}^d)$. Dann werden die V_j zerlegt in

$$V_j = V_{j-1} \bigoplus W_{j-1} = \cdots = V_0 \bigoplus W_0 \bigoplus W_1 \bigoplus \ldots W_{j-1}\ ,$$

   die sogenannten Wavelet-Räume W_i sind also die orthogonalen Komplemente jeweils zu den V_i. Für sie werden nun Orthonormalbasen der Form

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \qquad \text{mit} \quad \psi \in W_0$$

   konstruiert, d.h. ψ ist *Erzeugende* der Wavelets. Zusammen mit der Forderung $(*)$ entsteht so eine Orthonormalbasis für ganz $Ł_2(\mathbb{R}^d)$.

Die Bestimmung und Charakterisierung von solchen ψ bildet den Kern der Theorie der Wavelets. Der einfachste Fall wurde bereits 1910 von A.Haar betrachtet, nämlich $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}$. Das zugehörige Wavelet ist die *Haar-Funktion* $\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2},1]}$.
In all den oben aufgelisteten Fällen ist das zugrundeliegende Orthonormalsystem vollständig und daher ist Satz I.5.13 anwendbar, d.h. die entsprechenden Fourier-Orthogonalreihen einer Funktion konvergieren gegen sie (im Sinne des jeweiligen Hilbertraums).

Bemerkung: Jeder Hilbert-Raum besitzt ein vollständiges bzw.totales Orthonormalsystem. Dies folgt mit dem Zornschen Lemma (II.3.2), denn ein solches System ist maximal im Sinne dieses Lemmas.

I.5.3 SATZ VON RIESZ, ADJUNGIERTE ABBILDUNGEN

I.5.14 Satz: (***Darstellungssatz von* F.Riesz**) . Sei X ein Hilbertraum und F stetiges lineares Funktional auf X, also $F \in X^*$. Dann gibt es genau ein $f \in X$ mit $F(x) = (x,f)$ für alle $x \in X$ und es ist

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| = \|f\|.$$

Beweis: Eindeutigkeit: Seien f_1, f_2 zwei solche Elemente. Dann gilt für alle $x \in X$

$$0 = (x,f_1) - (x,f_2) = (x, f_1 - f_2)\ .$$

Für $x := f_1 - f_2$ folgt $0 = (f_1 - f_2, f_1 - f_2)$, also $f_1 = f_2$.
Existenz: Sei o.B.d.A. $F \neq 0$. $\mathcal{N}(F)$ (s. Definition I.5.18) ist abgeschlossen, weil F stetig ist. Es gibt ein Element $g \in \mathcal{N}(F)^\perp$, $g \neq 0$, denn $X = \mathcal{N}(F) \bigoplus \mathcal{N}(F)^\perp$ nach Lemma I.5.8 . Andererseits ist

$$F(F(g)\cdot x - F(x)\cdot g) = F(g)F(x) - F(x)F(g) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in X\ ,$$

also $F(g)\cdot x - F(x)\cdot g \in \mathcal{N}(F)$ und daher $(F(g)\cdot x - F(x)\cdot g, g) = 0$, folglich

$$F(x) = \frac{F(g)}{(g,g)}(x,g) = \left(x, \frac{\overline{F(g)}}{(g,g)}g\right) =: (x,f)\ .$$

Weiterhin gilt die Ungleichungskette (mit Gleichheit für $x = f/\|f\|$)

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |Fx| = \sup_{\|x\|=1} |(x,f)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\cdot\|f\| = \|f\|\ .$$

□

I.5.15 Definition: Seien nun X, Y, Hilberträume und $T \in L(X,Y)$. Die ***adjungierte Abbildung*** $T^* : Y \to X$ von T ist definiert durch: Für $y \in Y$ ist T^*y definiert durch

$$(x, T^*y)_X = (Tx, y) \text{ für alle} x \in X\ .$$

I.5.16 Satz:

1. T^* ist wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator auf $L(Y^*, X^*)$ mit Norm $\|T^*\| = \|T\|$ und $T^{**} = T$.
2. Sind $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt
$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* \quad , \quad (\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^* \quad .$$
3. Ist Z ein weiterer Hilbertraum uns $S \in L(Y,Z)$, so ist
$$(ST)^* = T^*S^*\ .$$

Beweis:1.: Sei $f(x) = (Tx,y)_Y$. Es ist f ein stetiges lineares Funktional auf X für festes y, denn $|f(x)| \leq \|Tx\|\ \|y\| \leq \|T\|\ \|x\|\ \|y\|$, also $\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \|T\|\ \|y\|$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (I.5.14) gilt $f(x) = (x, g_y)$ mit einem $g_y \in X$, sodaß $T^*y = g_y$. T^* ist linear, denn

$$(x, T^*(y + \alpha\tilde{y})) = (Tx,y) + (Tx, \alpha\tilde{y}) = (x, T^*y) + \overline{\alpha}(x, T^*\tilde{y})\ .$$

Weiterhin

$$(x, (\alpha T)^*y) = (\alpha Tx, y) = \alpha(Tx,y) = \alpha(x, T^*y) = (x, \overline{\alpha}T^*y)\ .$$

Mit $U := T^*$ gilt für alle $x \in X$

$$(y, T^{**}x) = (y, U^*x) = (Uy, x) = \overline{(x, T^*y)} = \overline{(Tx,y)} = (y, Tx)\ .$$

Für die Norm gilt

$$\|T^*y\|^2 = (T^*y, T^*y) = (TT^*y, y) \leq \|y\|\ \|TT^*y\| \leq \|y\|\ \|T\|\ \|T^*y\|\ ,$$

und damit $\|T^*y\| \leq \|T\|\ \|y\|$ und $\|T^*\| \leq \|T\|$. Gleichheit gilt wegen $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$.

2.: Leichte Übung.

$$(x, (ST)^*z) = (STx, z) = (Tx, S^*z) = (x, T^*S^*z)\ .$$

□

Als Anwendung beschreibe Bild bzw. Wertebereich und Kern von Operatoren:
Sei $T \in L(X,Y)$. Dann definiere als

I.5.17 Definition: Seien X, Y LNR und $T \in L(X, Y)$. Dann heißt

$$\mathcal{R}(T) := \{y \in Y \mid \text{ gibt es ein } x \in X \text{ mit } y = Tx\}$$

das ***Bild*** oder der ***Wertebereich*** von T und

$$\mathcal{N}(T) := \{x \in X \mid Tx = 0\} \ .$$

der ***Kern*** von T .

I.5.18 Lemma: Es bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathcal{N}(T^*) & = & \mathcal{R}(T)^{\perp} & , & \mathcal{N}(T) & = & \mathcal{R}(T^*)^{\perp} \quad , \\ \overline{\mathcal{R}(T)} & = & \mathcal{N}(T^*)^{\perp} & , & \overline{\mathcal{R}(T^*)} & = & \mathcal{N}(T)^{\perp} \quad . \end{array}$$

Beweis: Die erste Relation folgt aus

$T^*y = 0 \Longleftrightarrow (x, T^*y) = 0$ für alle $x \in X \Longleftrightarrow (Tx, y) = 0$ für alle $x \in X \Longleftrightarrow y \perp \mathcal{R}(T)$.

Die zweite folgt aus der ersten, wenn man T^* statt T nimmt und $T = (T^*)^*$ beachtet. Die dritte ebenfalls aus der ersten, da nach Lemma I.5.8

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \left(\overline{\mathcal{R}(T))}^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{R}(T))^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}(T^*)\right)^{\perp} \ .$$

Die vierte Relation folgt analog aus der zweiten. $\square$

Eine Folgerung ist

I.5.19 Korollar: Sei $T \in L(X, Y)$ mit abgeschlossenem Wertebereich $\mathcal{R}(T)$. Dann ist die Gleichung $Tu = f$ genau dann lösbar, wenn $f \perp \mathcal{N}(T^*)$.

I.5.20 Definition: Sei T stetig, d.h. $T \in L(X)$. Dann heißt T

1. ***normal***, falls $TT^* = T^*T$
2. ***selbstadjungiert*** oder **hermite*sch*** , falls $T^* = T$
3. ***unitär***, falls $T^*T = Id = TT^*$.

I.5.21 Lemma:

1. $T \in L(X)$ ist normal genau dann, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in X$.
2. $U \in L(X)$ ist unitär genau dann, wenn U surjektiv und $(Ux, Uy) = (x, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

Beweis: 1.: $\Rightarrow$ Für jedes $x \in X$ ist

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) = (x, TT^*x) = (T^*x, T^*x = \|T^*x\|^2 \ .$$

$\Leftarrow$ Aus der Parallelogrammgleichung I.5.21 folgt

$$(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y) \qquad (x, y \in X) \ .$$

Für $x \in X$ folgt daraus für alle $y \in X$

$$\big((T^*T - TT^*)x, y\big) = (T^*Tx, y) - (TT^*x.y) = (Tx, Ty) - (T^*x, T^*y) = 0 \ ,$$

also $TT^*x = T^*Tx$.

2.: Mit $UU^* = Id$ gilt $U(U^*x) = x$ für alle $x \in X$, also ist U^*x Urbild zu x, U ist also surjektiv. Aus $U^*U = Id$ folgt

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y) \ .$$

Umgekehrt folgt aus $(Ux, Uy) = (x, y)$ für alle x, y zunächst

$$(y, U^*Ux) = (Uy, Ux) = (y, x) \ ,$$

also $U^*U = Id$. Daher ist U injektiv , also bijektiv, d.h. U ist invertierbar auf X . Es ist $U^{-1} = U^*$, denn ist $y \in X$ und $x := U^{-1}y$, so ist für alle $z \in X$

$$(z, U^*y) = (z, U^*Ux) = (Uz, Ux) = (z, x) \ ,$$

also $U^*y = x = U^{-1}y$.

Bemerkung: In Abschnitt II.2 werden wir den Begriff der Selbstadjungiertheit auf abgeschlossene (i.a. unbeschränkte) Operatoren verallgemeinern.

I.5.4 ANWENDUNG AUF FOURIERTRANSFORMATION

Sei S der Raum der schnell abfallenden Funktionen auf $\mathbb{R}$, also $f \in C^\infty$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|(1 + |x|^2)^N < \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$ (vgl. [Ü]). Nun definiert man die **Fourier*transformation*** für $f \in S$ durch

$$\widehat{f(v)} := \mathcal{F}[f](v) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ivx} \ dx$$

und zeigt die Rechenregeln [Ü]

$$\begin{aligned}
D^\alpha(\mathcal{F}[f])(v) &= \mathcal{F}[(-ix)^\alpha f(x)](v) \ , \\
\mathcal{F}[D^\alpha f](v) &= (iv)^\alpha \mathcal{F}[f](v) \ , \\
\mathcal{F}[g * f](v) &= \widehat{f(v)}\widehat{g(v)} \ , \\
\mathcal{F}[f(\cdot - h)](v) &= e^{-ivh}\widehat{f(v)} \ , \\
\mathcal{F}[f(a\cdot)](v) &= \frac{1}{a}\mathcal{F}[f(\cdot)](\frac{v}{a}) \qquad (a > 0) \ , \\
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f(v)}g(\lambda v)e^{ivx}dv &= \int_{\mathbb{R}} f(x + \lambda v)\widehat{g(v)}dv \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \ .
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}[f] \in C^\infty$ wegen der ersten Formel und $\mathcal{F}[f] \in S$. Geht man in der vorletzten Rechenregel zum Grenzwert $\lambda \to 0$ über, so folgt

$$g(0) \int_{\mathbb{R}} \widehat{f(v)}e^{ivx} \ dv = f(x) \int_{\mathbb{R}} \widehat{g(v)}dv \ .$$

Wählt man hierin $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, so folgt wegen $\widehat{g(v)} = \sqrt{2\pi}g(v)$ und $\int_{\mathbb{R}} g(x) \ dx = \sqrt{2\pi}$ die **Fourier-*Umkehrformel***

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{ixy} \ dy \ .$$

Die Fouriertransformation bildet also S bijektiv auf sich selbst ab.

Definiere nun

$$\varphi_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \ g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \ .$$

Dann liefert φ_σ eine Dirac-Folge, und es gilt nach Lemma I.3.37 $\lim_{\sigma\to 0} \|\varphi_\sigma * f - f\|_{L^p} = 0$. Daraus folgt, daß S dicht in L^p ist, $1 \leq p < \infty$, denn für $f \in L^p(\mathbb{R})$ kann man leicht zeigen, daß $\varphi_\sigma * f$ wieder in S liegt.

Der Rieszsche Darstellungssatz (I.5.14) wird nun benutzt, um die Fourier-Transformation auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ fortzusetzen.

I.5.22 Satz: **(Plancherel)** Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann existiert

$$\mathcal{F}[f](v) = \lim_{N\to\infty} \int_{|x|<N} f(x)e^{-ivx} \ dx$$

in L^2 und stimmt mit der Fouriertransformation auf S überein. Die inverse Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}[h](x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[h](-x) \ .$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R})$, d.h. es gilt

$$2\pi(f,g) = (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g])$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Beweis: Sei für $N \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_N[f] := \int_{|x|<N} f(x)e^{-ivx} \ dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_N(x)f(x)e^{-ivx} \ dx \ ,$$

wobei $\chi_N(x) := \chi_{\{x\in\mathbb{R}||x|<N\}}$. Definiere für $g \in S$ das lineare Funktional

$$L_N(g) := (\mathcal{F}_N[f], g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\chi_N f](x)\overline{g(x)} \ dx.$$

Mit der letzten Rechenregel, der Hölder-Ungleichung und wegen $2\pi(f,g) = (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g])$ für $f, g \in S$ folgt

$$|L_N(g)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_N(x)f(x)\mathcal{F}[\overline{g}](x) \ dx\right| \le \|f\|_{L^2}\|\mathcal{F}[\overline{g}]\|_{L^2} \ = \ \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}. \qquad (1.)$$

Damit kann man L_N eindeutig auf ganz $L_2(\mathbb{R})$ ausdehnen durch

$$L_N(h) := \lim_{k\to\infty}(\mathcal{F}_N[f], g_k), \quad \text{falls} \quad \lim_{k\to\infty} g_k = h \in L^2(\mathbb{R}), \ g_k \in S \ ,$$

da S dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt (Korollar I.3.39). Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Folge $(g_k)_{k\in \mathbb{N}}$, denn für $h = \lim_{k\to\infty} \tilde{g}_k$ gilt mit 1.

$$|(\mathcal{F}_N[f], g_k) - (\mathcal{F}_N[f], \tilde{g}_k)| \le \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}\|g_k - \tilde{g}_k\|_{L^2} \to 0$$

für $k \to \infty$. Weiterhin folgt $\|L_N\| \ leq\sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$.
Nach dem Darstellungssatz von Riesz (I.5.14) gilt dann

$$(u_N, g) = L_N(g) = (\mathcal{F}_N[f], g), \quad g \in L^2(\mathbb{R})$$

mit einem Element $u_N \in L^2(\mathbb{R})$. Dieser Satz liefert auch

$$\|L_N\| = \|u_N\| = \|\mathcal{F}_N[f]\| \le \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2} \ . \qquad (2.)$$

Betrachte nun L_N für $N \to \infty$. Zunächst gilt für $g \in S$

$$\lim_{N\to\infty} L_N(g) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_N(x)f(x)\mathcal{F}[\overline{g}](x) \ dx = (f, \overline{\mathcal{F}[\overline{g}]}) \ , \qquad (3.)$$

d.h. der Grenzwert existiert für $g \in S$. Wegen 2. ist nach der Cauchy-Schwartzschen Ungleicung und Satz I.4.13 $L(g) := \lim_{N\to\infty} L_N(g)$ ein linearer beschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ mit $\|L\| \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (I.5.14) gibt es ein $u \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|u\| \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$, sodaß $L(g) = (u, g)$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R})$. Mit 3. folgt $L(g) = \lim_{N\to\infty} L_N(g) = (f, \overline{\mathcal{F}[\overline{g}]})$ für $g \in S$ und weiterhin

$$(u - \mathcal{F}_N[f], g) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi_N(x))f(x)\mathcal{F}[\overline{g}](x)\ dx \leq \sqrt{2\pi}\|f(1 - \chi_N)\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Weil S dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, kann man hier nach Grenzübergang $g = u - \mathcal{F}_N[f]$ einsetzen und erhält

$$\|u - \mathcal{F}_N[f]\|_{L^2}^2 \leq \|f(1 - \chi_N)\|_{L^2}\|u - \mathcal{F}_N[f]\|_{L^2}.$$

Damit folgt die erste Aussage des Satzes. Zum Beweis der Umkehrformel beachten wir, daß mit 3. bereits

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)g(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[g](x)\ dx \tag{4.}$$

für $g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt. Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x)g(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[\mathcal{F}[g]](x)\ dx = 2\pi \int_R f(-x)g(x)\ dx,$$

also $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = f(-x)$ und damit die Umkehrformel, da S dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt. Die letzte Formel folgt durch Einsetzen von $g = \overline{\mathcal{F}[h]}$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$ in 4., denn dies liefert

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](x)\overline{\mathcal{F}[h]}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}[h]}] = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{h(x)}\ dx\ .$$

$\square$

Am Schluss sei noch die Erweiterung der Fourier-Transformation auf langsam wachsende Funktionen als Spezialfall temperierter Distributionen erwähnt, die bereits in Abschnitt I.4.4 vorgestellt wurden.
Man definiert die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'$ durch

$$u \in \mathcal{S}' : \quad \mathcal{F}[u](\phi) := u(\mathcal{F}[\phi]) \qquad (\phi \in \mathcal{S})\ .$$

Dies geht, weil $\mathcal{F}[\phi] \in \mathcal{S}$ für $\phi \in \mathcal{S}$. Im Falle $u \in \mathcal{L}$ bedeutet es

$$\mathcal{F}[u](\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathcal{F}[\phi](x)\ dx\ .$$

Als Anwendung betrachte die Fourier-Transfomation von Polynomen. Es zeigt

$$\mathcal{F}[1](\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[\phi](x)\ dx = (2\pi)^n\ \phi(0) := \delta(\phi),$$

daß die Delta-Distribution die Fourier-Transfomation von $u(x) = 1$ ist. Allgemeiner gilt für Polynome $P_\alpha(x) := (-ix)^\alpha$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}[P_\alpha](\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} P_\alpha(x)\mathcal{F}[\phi](x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[D^\alpha\phi](x)\ dx(2\pi)^n\ (D^\alpha\phi)(0) := D^\alpha\delta(\phi).$$

I.5.5 ANWENDUNG AUF ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Der zentrale Satz ist der Satz von Lax-Milgram. Wir stellen ihn in einer allgemeineren Fassung von Babuska-Aziz vor.

I.5.23 Satz: (**Babuska-Aziz** 1972) Es seien X, Y Hilbert-Räume und $a(x,y) : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit folgenden Eigenschaften:

1. $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ für ein $C > 0$;
2. es gilt $q := \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} \frac{a(x,y)}{\|x\|\|y\|} > 0$;
3. zu jedem $y \in Y, y \neq 0$ gibt es ein $u \in X$ mit $a(u,y) \neq 0$.

Dann existiert zu jedem $f \in Y$ genau ein $x \in X$, sodaß gilt

$$a(x,y) = (f,y) \qquad \text{für alle} \qquad y \in Y.$$

Die Abbildung $f \in Y \mapsto x =: Af \in Y$ ist linear, bijektiv und erfüllt

$$q\|Af\| \leq \|f\| \qquad \text{und} \qquad C\|Af\| \geq \|f\|.$$

Beweis: Für festes $x \in X$ setze $\Lambda(y) := a(x,y)$, dann ist Λ ein lineares Funktional auf Y, welches wegen 1. stetig ist: $\|\Lambda y\| \leq C\|x\|\ \|y\|$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (I.5.14) gibt es ein eindeutig bestimmtes $h \in Y$ mit $\Lambda(y) = (h,y)_Y$, sodaß

$$a(x,y) = (h,y)_Y := (Sx,y)_Y \ . \tag{+}$$

Die Abbildung $S : X \mapsto Y$ ist dadurch wohldefiniert und linear.

1. Stetigkeit von S : Aus 1.folgt

$$\|Sx\|^2 = (Sx,Sx) \overset{(+)}{=} a(x,Sx) \overset{1.}{\leq} C\|Sx\|\|x\|, \quad \text{also} \qquad \|Sx\| \leq C\|x\| \ . \tag{$*$}$$

2.Injektivität und Stetigkeit von S^{-1} auf $S(X)$: Für $f \in S(X) \subset Y$ gilt $f = Sx$ mit $x \in X$ und nach 2. weiter

$$q\|x\|_X \leq \sup_{y\in Y} \frac{a(x,y)}{\|y\|_Y} = \sup_{y\in Y} \frac{(Sx,y)}{\|y\|_Y} = \|Sx\| = \|f\| \ . \tag{$**$}$$

Daher ist S injektiv und S^{-1} stetig auf $S(X)$ nach Satz I.4.15 .

3. Surjektivität von S : Aus $(**)$ folgt die Abgeschlossenheit von $S(X)$: Ist (x_n) eineFolge in X und $y \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} Sx_n = y$, so ist
$\|x_k - x_l\| \leq 1/q\ \|S(x_k - x_l)\| = \|Sx_k - Sx_l\| \longrightarrow 0 \quad (k,l \to \infty)$. (x_n) ist also eine Cauyfolge und Konvergiert daher gegen ein $x \in X$. Wegen der Stetigkeit von S folgt $Sx = y$.
Nach 3. und Lemma I.5.8 ist $Y = S(X) \bigoplus S(X)^\perp = S(X)$. Wegen

$$\begin{aligned} S(X)^\perp &= \{y \in Y \mid (Su,y)_Y = 0 \text{ für alle } u \in X\} \\ &= \{y \in Y \mid \quad a(u,y) = 0 \text{ für alle } u \in X\} = \{0\} \ . \end{aligned}$$

ist S also surjektiv.

Bemerkung: Die Bedingungen des Satzes I.5.23 sind auch notwendig. Ferner kann man $f \in Y$ durch $F \in Y^*$ ersetzen, insbesondere gilt:
Die Abbildung $S : X \mapsto Y^*$ definiert durch

$$(Sx)(y) := a(x,y) \qquad \text{für alle} \qquad y \in Y$$

ist ein Isomorphismus von X auf Y .

I.5.24 Korollar: (**Lax-Milgram**) Die Aussage des obigen Satzes gilt speziell im Falle $Y = X$ unter den Voraussetzungen

1. $|a(x,y)| \ \le\ C\|x\|\|y\|$ für ein $C > 0$;
2. a ist X***-elliptisch***, d.h. es gibt ein $q > 0$ mit

$$a(x,x) \ \ge\ q\|x\|^2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in X \ .$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \le i,j \le n$, sowie $g \in\ C(\partial\Omega)$. Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, welche das Randwertproblem

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\ a_{ij}\partial_j u) = f \quad \text{in} \quad \Omega \quad , \quad u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \tag{$*$}$$

löst (**Dirichlet-*Problem***) Unter der Annahme, daß die die Randwerte angebende Funktion g auf $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ fortgesetzt werden kann, können wir durch Übergang von u zu $u - g$ das Problem transformieren zu

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = f - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j g) \quad \text{in} \quad \Omega \quad , \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \ .$$

Wir brauchen also nur das Problem $(*)$ für homogene Randwerte zu behandeln. Zur Abkürzung sei $e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j g$. Um zunächst notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit zu erhalten, multiplizieren wir die Differentialgleichung mit sogenannten *Testfunktionen* $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Partielle Integration ergibt

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i v - vf \right) = 0 \qquad \text{für alle} \quad v \in C_0^\infty(\Omega) \ . \tag{$**$}$$

Die Idee, aus dieser Formel umgekehrt eine Lösung der Differentialgleichung zu gewinnen, besteht darin, $(**)$ als L^2-Bilinearform zu betrachten und dazu den Raum der Testfunktionen geeignet zu einem Hilbertraum zu erweitern. Gleichzeitig wird der Lösungsbegriff dahingehend abgeschwächt, daß man die Lösung u statt in $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ in dem dazu dualen Raum, d.h. in dem gleichen Hilbertraum sucht. Da die partiellen Ableitungen der Testfunktionen auftreten, liegt es nahe, diesen Raum als den Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^{1,2}(\Omega)$ zu nehmen. Er wird mit $H_0^{1,2}(\Omega)$ bezeichnet und ist ein Unterraum des Sobolevraums $H^{1,2}(\Omega)$, dessen Elemente die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ in einem schwachen Sinne erfüllen, der noch genauer präzisiert werden kann.

Wir nennen daher $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ eine ***schwache Lösung*** des Problems $(*)$, falls

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i v - vf \right) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt. Die Existenz einer solchen Lösung zu beweisen, ist nun genau ein Problem der Form wie im Satz von Lax-Milgram (I.5.24). Um diesen anwenden zu können, setzen wir voraus, daß die Matrix (a_{ij}) ***elliptisch*** ist, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0 \quad \text{für} \quad x \in \Omega \quad \text{und} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

Entsprechend nennen wir in diesem Fall das Problem $(*)$ ein ***elliptisches Randwertproblem***. In [Ü] wird gezeigt, daß dann die Bilinearform

$$a(v,w) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \partial_i v \ a_{ij}\partial_j w \qquad (v,w \in H_0^{1,2}(\Omega))$$

die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram (I.5.24) für $X = H_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllt.

I.5.25 Korollar: Es existiert ein $u \in H_0^{1,2}$, sodaß für alle $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^n \partial_i v \; e_i + vf \right) \; .$$

Beweis: Zur Anwendung des Satzes von Lax-Milgram (I.5.24) muß man noch zeigen, daß das Funktional

$$Fv := \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^n \partial_i v \; e_i + vf \right)$$

stetig auf $H_0^{1,2}(\Omega)$ ist, d.h. es gilt $|F(v)| \;\leq\; \|F\| \|v\|_{H^{1,2}}$. Dies folgt aber einfach mit der Hölder-Ungleichung.

Bemerkung: Falls die Sesquilinearform $a(x,y)$ symmetrisch ist, kann man diese Gleichungen auch aus folgendem ***Variationsproblem*** erhalten:

I.5.26 Lemma: Es sei $a(x,y)$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf dem Hilbert-Raum X. Dann löst $x \in X$ das Variationsproblem

$$J(y) := \frac{1}{2} a(y,y) - (f,y) \quad \longrightarrow \quad \min_{y \in X}!$$

genau dann, wenn es $a(x,y) = (f,y)$ für alle $y \in X$ erfüllt.

Beweis: Einfach.

Eine (klassische) Lösung des Dirichlet- Problems löst also obige Variationsaufgabe (**Dirichlet*sches Prinzip***) . Die Existenz der Lösung (in $H_0^{1,2}(\Omega)$) wird aber erst durch den Satz I.5.23 garantiert.

Kapitel II

FUNDAMENTALSÄTZE DER BANACHRAUMTHEORIE

II.1 PRINZIP DER OFFENEN ABBILDUNG

Wir beginnen mit einem Satz über ***gleichmäßige Beschränktheit*** von linearen Operatoren (***uniform boundedness principle***).

II.1.1 Satz: (**Banach**) Seien X, Y lineare normierte Räume, X Banachraum und $(T_a)_{a\in A}$ eine Familie von sublinearen Operatoren, d.h.

$$\|T_a(x+y)\| \leq \|T_a x\| + \|T_a y\| \text{ und } T_a(\beta x) = \beta T_a x$$

für alle $x, y \in X$, $\beta \in \mathbb{K}$, $a \in A$.

$$\text{Sei } B = \{x \in X \mid \sup_{a\in A} \|T_a x\| \leq c_x < \infty\}$$

die Menge aller Punkte mit gleichmäßig beschränktem $T_a x$. Ist B von zweiter Kategorie in X, so ist $B = X$ und

$$\sup_{a\in A} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_a x\| = \sup_{a\in A} \|T_a\| \leq C < \infty\ .$$

Beweis: Sei $E_n := \{x \in X \mid \sup_{a\in A} \|T_a x\| \leq n\}$. Dann sind die B_n offenbar abgeschlossen und es ist $B = \bigcup_{n\in\ \mathbb{N}} E_n$. Lt. Voraussetzung ist B, also mindestens ein E_{n_0} in dieser Darstellung nicht nirgends dicht, enthält also eine offene Kugel in X. Speziell gibt es eine Kugel $B_r(x_0)$, die ganz in E_{n_0} liegt. Dann gilt $x' + x_0 \in E_{n_0}$ für $x' \in B_r(0)$. Daher

$$\|T_a x'\| = \|T_a(x' + x_0 - x_0)\| \leq \|T_a(x' + x_0)\| + \|T_a x_0\| \leq 2n_0.$$

Für beliebiges $x \in X$ setze $x' = \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}$, dann ist $x' \in B_r(0)$. Damit folgt

$$\|T_a x\| = \left\|T_a\left(\frac{2}{r}\|x\|x'\right)\right\| = \frac{2}{r}\|x\|\ \|T_a x'\| \leq \frac{4n_0}{r}\|x\|\ ,$$

also $\sup_{a\in A} \|T_a x\| < \infty$ für jedes $x \in X$, also $B = X$. Weiter folgt

$$\sup_{a\in A} \|T_a\| = \sup_{a\in A} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_a x\| \leq \sup_{a\in A} \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{4n_0}{r}\|x\| = \frac{4n_0}{r} < \infty\ .$$

□

Für $B := X$ ergibt der Satz von Baire (I.3.12) dann unmittelbar

> **II.1.2 Korollar:** Sei X ein Banachraum, Y ein NLR und $(T_a)_{a\in A}$ eine Familie von Operatoren in $L(X,Y)$, und sei $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n x < \infty$ für alle $x \in X$.
> Dann gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Anwendung auf gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen:
Sei $f \in C_{2\pi}$, d.h. eine stetige 2π-periodische Funktion, und $\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx$ der $k-$te Fourierkoeffizient von f. Für die Partialsummen der Fourier-Reihe gilt

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(x-u)\ du, \quad D_n(u) := \frac{sin\ (n+1/2)x}{sin\ x/2} .$$

Mit dieser Darstellung kann man für die Norm des Operators
$S_n : f \in C_{2\pi} \mapsto S_n(f) \in C_{2\pi}$ zeigen

$$\|S_n\|_\infty = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u)|\ du = \frac{4log\ n}{\pi^2} + \mathcal{O}(1) \quad , \quad n \mapsto \infty .$$

Nach obigem Korollar kann dann nicht $\|S_n f - f\|_{L^\infty} \to 0$, d.h. nicht gleichmäßige Konvergenz für jedes $f \in C_{2\pi}$ gelten [Ü]. Anderseits gilt $\|S_n f - f\|_{L^2} \to 0$ für alle $f \in L_{-\pi,\pi}$ [Ü].

> **II.1.3 Satz:** Sei X ein Banachraum, Y ein NLR und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in $L(X,Y)$, die punktweise gegen die Abbildung T konvergiert.
> Dann ist $T \in L(X,Y)$, die Folge der Normen $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Beweis: T ist offenbar linear. Nach Satz II.1.3 gibt es ein $c > 0$ mit
$\|A_n x\| \leq \|A_n\|\|x\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.
Für $n \to \infty$ folgt hieraus: $\|T\| \leq c$.
Durch Wahl einer geeigneten Teilfolge folgt mit II.1.3 sogar $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

> **II.1.4 Satz:** (**Banach-Steinhaus**) Seien X, Y Banachräume und sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L(X,Y)$. Dann existiert $Tf := \lim_{n\to\infty} T_n f$ für jedes $f \in X$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
>
> 1. Die Folge $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $f \in S$, wobei $S \subset X$ dicht ist.
> 2. Die Folge der Normen $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
>
> T ist dann linear und stetig, und $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Beweis: $\Rightarrow$ 1. Ist klar.

2.: folgt aus Satz II.1.3 .

$\Leftarrow$: Folgt aus Lemma I.4.18 .

Die Zusatzaussage folgt aus Satz II.1.3 . □

Anwendung auf Konvergenz von Quadraturformeln:
Seien $I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$ und $I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_{i,n}\ f(t_{i,n})$ Quadraturformeln für $f \in C[a,b]$ mit Stützstellen $t_{i,n}$ und Gewichten $a_{i,n}$, die jeweils Polynome vom Grad n exakt integieren. Wählt man in obigem Satz $T_n(f) = I_n(f)$ und S als Menge aller Polynome , so folgt trivialerweise die Konvergenz von $I_n(p)$ gegen $I(p)$ für jedes Polynom p. Die Menge aller Polynome ist nach dem Satz von Weierstraß dicht in $C[a,b]$, also ist Bedingung 1. des obigen Satzes erfüllt. Bedingung 2. liefert dann unter Beachtung von $\|T_n\| = \sum_{i=0}^n |a_{i,n}|$

das Konvergenzkriterium

$$\lim_{n\mapsto\infty} I_n(f) = I(f) \ \text{ für alle } \ f\in C[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \sup_n \sum_{i=0}^n |a_{i,n}| \ < \infty \ .$$

II.1.5 Definition: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt ***offen*** , falls sie offene Mengen in offene Mengen abbildet.

II.1.6 Satz: (***von der offenen Abbildung***). Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T eine offene Abbildung.

Beweis: Geschieht in mehreren Schritten.
Schritt i): Es gibt ein $\delta > 0$, sodaß $\quad K_\delta(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$ Zunächst gilt $Y = \bigcup_{n\in\,\mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))}$, da T surjektiv ist. Nach dem Kategoriensatz von Baire (I.3.12) ist Y von zweiter Kategorie, es gibt also ein n_0 und eine offene Kugel $K_r(w_0) \subset Y$ mit $K_r(w_0) \subset \overline{T(B_{n_0}(0))}$. Dann gibt es für $w \in K_r(0)$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_{n_0}(0) \subset X$ mit $w + w_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Nun existiert $x_0 \in X$ mit $w_0 = Tx_0$, sodaß mit $z_n := (x_n - x_0)/(n_0 + \|x_0\|)$ gilt

$$\|z_n\| \ < \ \frac{\|x_n + x_0}{n_0 + \|x_0\|} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} T(z_n) \ = \ \frac{w}{n_0 + \|x_0\|} \ .$$

Durchläuft nun w ganz $K_r(0)$, so durchläuft $\frac{w}{n_0+\|x_0\|}$ die ganze Kugel $K_\delta(0)$ mit $\delta = \frac{r}{n_0+\|x_0\|}$, und es gilt $w \in \overline{T(B_1(0))}$, sodaß i) bewiesen ist.

Schritt ii): Zeige $K_{\delta/3}(0) \subset T(B_1(0))$ als Verschärfung von i) :
Für $y_0 \in K_\delta(0)$ folgt die Existenz eines $x_0 \in B_1(0)$ mit $y_0 - Tx_0 \in K_{\delta/2}(0)$, daher $2(y_0 - Tx_0) \in K_\delta(0)$. Die gleiche Aussage gilt dann für $y_1 = 2(y_0 - Tx_0)$ und sukzessive Anwendung dieses Arguments liefert für $k = 1, 2, \ldots$ Punkte $y_k \in K_\delta(0) \subset Y$ und $x_k \in B_1(0) \subset X$ mit $y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k)$. Dann gilt $T(2^{-k}x_k) = \ 2^{-k}y_k - 2^{-(k+1)}y_{k+1}$, also

$$\lim_{m\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^m 2^{-k}x_k\right) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} (y_0 - 2^{-(m+1)}y_{m+1}) \ = \ y_0 \ .$$

Andererseits ist wegen

$$\sum_{k=0}^m \|2^{-k}x_k\| \ \le \ \sum_{k=0}^m 2^{-k} \ \le \ 2 \ < \ \infty$$

$\left(\sum_{k=0}^m 2^{-k}x_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Die Vollständigkeit von X liefert nun die Existenz eines Grenzwerts $x = \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}x_k$ mit $\|x\| < 3$. Mit der Stetigkeit von T folgt dann

$$Tx = \lim_{m\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^m 2^{-k}x_k\right) = y_0 \in K_\delta(0).$$

Damit schließt man, daß $K_\delta(0) \subset T(B_3(0))$ gilt, also $K_{\delta/3}(0) \subset T(B_1(0))$.

Schritt iii): Zeige damit, daß T offen ist. Dazu sei $U \subset X$ offen. Es genügt zu zeigen, daß zu jedem $x_0 \in U$ derart daß $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt, ein $\rho > 0$ existiert mit $K_\rho(Tx_0) \subset T(B_\varepsilon(x_0)) \subset T(U)$. Dazu beachte, daß nach ii) $y - Tx_0 \in \varepsilon T(B_1(0))$ gilt, wenn $\|y - Tx_0\| < \varepsilon\delta/3$ ist. Für jedes $y \in K_\rho(Tx_0)$ mit $\rho = \varepsilon\delta/3$ folgt daher $y \in T(B_\varepsilon(x_0))$. $\square$

II.1.7 Korollar: (***Satz von der beschränkten Inversen***) . Existiert in obigem Satz zusätzlich die Inverse T^{-1} auf Y, dann ist T^{-1} auch stetig.

Beweis: Die Abbildung T^{-1} ist nach Satz I.1.2 genau dann stetig, wenn für $S := T^{-1}$ gilt: Ist M offen in X, so ist $S^{-1}(M) = T(M)$ offen in Y. $\square$

II.1.8 Korollar: Sei X ein Banachraum bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Gilt $\|f\|_1 \le C\|f\|_2$ für alle $f \in X$ und ein $C > 0$, so gibt es auch ein $c > 0$ mit $\|f\|_1 \ge c\|f\|_2$.

Beweis: $Id : X_{\|\cdot\|_2} \to X_{\|\cdot\|_1}$ ist offenbar stetig und bijektiv. Die Behauptung folgt daher aus dem vorigen Korollar. □

II.2 ABGESCHLOSSENE ABBILDUNGEN

II.2.1 Definition: Sei $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen linearen normierten Räumen X, Y mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) \subset X$. Der ***Graph*** von T , $\Gamma(T)$, ist definiert als

$$\Gamma(T) := \{ \ (x, y) \in X \times Y \ \mid \ y = Tx\} = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T) \ \}.$$

II.2.2 Lemma: Der Produktraum $X \times Y$ ist wieder ein LNR unter der Norm

$$\|(f, g)\|_{X\times Y} \ := \ \|f\|_X + \|g\|_Y \ .$$

$X \times Y$ ist genau dann vollständig, wenn X und Y dies sind.

Beweis: Einfach

Für Banachräume X , Y sei im folgenden $X \times Y$ mit dieser Norm versehen.

II.2.3 Definition: Seien X , Y LNR und $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, $\mathcal{D}(A) \subset X$, linear. A heißt ***abgeschlossen***, wenn $\Gamma(A)$ abgeschlossen ist.

II.2.4 Lemma: Sei $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ linear.

1. Ist A stetig, dann ist A abgeschlossen, wenn $\mathcal{D}(A) = X$ oder $\mathcal{D}(A)$ abgeschlossen in X ist.
2. A ist abgeschlossen genau dann, wenn aus $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, folgt: $x \in \mathcal{D}(A)$, $y = Ax$.

Beweis: Einfach.

Aussage 2. zeigt, daß die Abgeschlossenheit eines Operators i.a. leichter nachzuprüfen ist als seine Stetigkeit, da man hier aus $x_n \in \mathcal{D}(T) \to x \in X$ *allein* folgern muß, daß sowohl $\lim_{n\to\infty} Tx_n$ existiert als auch gleich Tx ist.

Beispiel: Der Differentialoperator $A = d/dt$, definiert auf $\mathcal{D}(A) := C^1[a, b]$ versehen mit der Supremumsnorm, ist bezüglich dieser Norm unbeschänkt aber abgeschlossen. Aus $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \to g(x)$ folgt nämlich $\int_a^x g(t)dt = \lim_n \int_a^x f_n'(t)dt = f(x) - f(a)$ und damit $g(x) = f'(x)$.

II.2.5 Satz: (***vom abgeschlossenen Graphen***). Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist T beschränkt genau dann, wenn T abgeschlossen ist.

Beweis: $\Rightarrow$ Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\Gamma(T)$. Dann $x_n \to x$, $Tx_n = y_n$ impliziert $y_n \to y = Ty$ wegen der Stetigkeit von T und damit $(x, Tx) \in \Gamma(T)$. Also ist $\Gamma(T)$ abgeschlossen.
$\Leftarrow$: Nach dem vorigen Lemma ist $X \times Y$ ein Banachraum. Aus der Abgeschlossenheit von $\Gamma(T)$ und der Linearität von T folgt daher, daß $\Gamma(T)$ selbst ein Banachraum ist. Betrachte die Restriktionsabbildungen $T_1 : (x, Tx) \mapsto x$ und $T_2 : (x, Tx) \mapsto Tx$ auf $\Gamma(T)$. Beide

Abbildungen sind offenbar stetig. Es existiert T_1^{-1} auf X und bildet auf ganz $\Gamma(T)$ ab, also ist T_1^{-1} stetig nach Korollar II.1.7 . Dann ist aber auch $T = T_2 \circ T_1^{-1}$ stetig. □

II.2.6 Lemma:

1. Existiert A^{-1}, so ist A^{-1} wieder abgeschlossen (sogar für nichtlineare A).
2. Ist $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ abgeschlossen, so ist $\mathcal{D}(A)$ ein Banachraum und A stetig unter der Graphennorm $\|f\|_{\Gamma(A)} := \|f\|_X + \|Af\|_Y$.

Beweis: 1.: $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\} = \{(A^{-1}y, y) \mid y \in Y\} \simeq \Gamma(A^{-1})$.

2.: Im Beweis des Satzes vom abgeschlossenen Graphen (II.2.5)wurde bereits gezeigt, daß $\mathcal{D}(A)$ ein Banachraum unter der Graphennorm ist. Die Stetigkeit von A als Abbildung $A : \mathcal{D}(A)_{\|\cdot\|_{\Gamma(A)}} \to Y$ folgt trivial aus $\|Af\| \leq \|f\|_{\Gamma(A)}$. □

Bemerkung: Mit Hilfe dieser Lemmas folgt der Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7)
umgekehrt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (II.2.5) (Skizze: T stetig $\Rightarrow$ T abgeschlossen (s.u.) $\Rightarrow$ T^{-1} abgeschlossen $\Rightarrow$ T^{-1} beschränkt).

II.2.7 Definition: Seien X, Y Banachräume und $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ linear, $\mathcal{D}(A) \subset X$. Dann heißt A ***abschließbar*** bezüglich X und Y, falls sich der Abschluß $\overline{\Gamma(A)}$ in $X \times Y$ darstellen läßt als Graph $\Gamma(\overline{A})$ eines linearen Operators $\overline{A}$ mit $\mathcal{D}(\overline{A}) \subset X$ und Bild in Y. Dann ist $\overline{A}$ abgeschlossen und heißt ***Abschluß*** von A.

II.2.8 Satz: (Abschließbarkeit). Seien X, Y Banachräume und $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ linear, $\mathcal{D}(A) \subset X$. Dann ist A abschließbar genau dann, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} Ax_n =: y$ folgt $y = 0$. In diesem Fall gilt für die Restriktion des Abschlusses $\overline{\Gamma(A)}$ in $X \times Y$ auf X

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \big\{x \in X \mid x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in \mathcal{D}(A), \lim_{n\to\infty} Ax_n \text{ existiert in } Y\big\}.$$

Auf $\mathcal{D}(\overline{A})$ läßt sich $\overline{A}$ definieren als $\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von A, d.h. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\overline{A}) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$ und $\mathcal{D}(\overline{A}) \subset \mathcal{D}(S)$ für jede andere abgeschlossene Fortsetzung S mit $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(S)$.

Beweis: $\Rightarrow$ Sei A abgeschlossen (bzw. der Abschluß eines abschließbaren Operators) und sei $\overline{A}$ wie oben auf $\mathcal{D}(\overline{A})$ definiert. Dann ist $\Gamma(A) = \Gamma(\overline{A})$ und es implizieren $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ per Definition von $\overline{A}$ als linearem Operator, daß $y := \overline{A}(0) = 0$.

$\Leftarrow$: Sei das Kriterium erfüllt. Bilde $\mathcal{D}(\overline{A})$ und $\overline{A}$ wie beschrieben. Dann bleibt zu zeigen, daß $\overline{A}$ wohldefiniert, linear und abgeschlossen ist. In diesem Fall ist $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A})$ und daher $\mathcal{D}(\overline{A})$ als Restriktion von $\overline{\Gamma(A)}$ auf X der kleinste Abschluß.

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergente Folgen in $\mathcal{D}(A)$. Dann gilt mit $Ax_n \to y$ und $Ax'_n \to y'$

$$y - y' = \lim_{n\to\infty}(Ax_n - Ax'_n) = \lim_{n\to\infty} A(x_n - x'_n) = 0$$

nach Voraussetzung, also $y = y'$. Die Linearität von $\overline{A}$ ist offensichtlich. Zur Abgeschlossenheit von $\overline{A}$ zeige $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$. Sei dazu $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{D}(\overline{A})$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in X$ und $\lim_{n\to\infty} \overline{A}z_n = w \in Y$. Dann ist $w = \overline{A}z$ zu zeigen. Es gilt $z_n = \lim_{k\to\infty} z_{n,k}$ mit $z_{n,k} \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{k\to\infty} Ax_{n,k} = \overline{A}z_n$. Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein k_n, sodaß $\|z_n - z_{n,k_n}\| < \frac{1}{n}$ und $\|\overline{A}z_n - Az_{n,k_n}\| < \frac{1}{n}$. Dann folgt aber auch $z = \lim_{n\to\infty} z_{n,k_n}$ und $w = \lim_{n\to\infty} Az_{n,k_n} = \overline{A}z$. □

Ein Beispiel eines nicht abschließbaren Operators ist das ***Punktfunktional***

$$Af \ := \ f(0) \quad , \quad \mathcal{D}(A) \ := \ C(-1,1) \subset X : \ = \ L_1(-1,1) \quad , \quad Y \ := \mathbb{R} \ ,$$

der nicht in X abgeschlossen werden kann.

Abschließbarkeit von partiellen Differentialoperatoren:
Sei Ω offen in $\mathbb{R}^d$, $c_\alpha \in C^k(\Omega)$. Dann betrachte

$$(Af)(x) := \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha(x)\partial^\alpha f(x) \tag{$*$}$$

und suche die Abschließung von A in $L_p(\Omega)$ auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(A) := \{ \ f \in L_p(\Omega) \cap C^k(\Omega) \ \mid \ Af \in L_p(\Omega) \ \} \ .$$

II.2.9 Lemma: Der obige partielle Differentialoperator hat einen Abschluß in $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ bezgl. der L_p -Norm.

Beweis: Man prüft die Bedingungen des vorigen Satzes nach. Sei also $\|f_n\|_p \to 0$ für $\{f_n\} \in \mathcal{D}(A)$ und $\lim_{n\to\infty} \|Af_n - g\|_p = 0$ für $g \in L_p$ und zeige $g = 0$ f.ü. Dies sieht man anhand der Formel

$$\int_\Omega (Af_n)(x)\varphi(x) \ dx = \int_\Omega (Af_n)(x) \sum_{|\alpha|\le k} (-1.^{|\alpha|}(x)\partial^\alpha(c_\alpha(x)\varphi(x)) \ dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ ,$$

die $\int_\Omega g(x)\varphi(x)) \ dx = 0$ impliziert und damit $g = 0$ f.ü. für $p < \infty$. □

Die Frage nach dem Aussehen des Abschlusses eines Differentialoperators der obigen Form ist nicht so einfach zu beantworten. Man kann zeigen
(s. A.Friedman [4], Übungsaufgabe 4.75):

$$W^{k,p}(\Omega) = \cap_{|\alpha|\le k} S_\alpha, \qquad S_\alpha = \text{Abschluß von } \ \partial^\alpha \text{ in } L_p(\Omega) \ .$$

I.a. ist der Abschluß von Operatoren des allgemeinen Typs $(*)$ aber größer als der Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$. Dies hängt auch von eventuellen Randbedingungen ab. Ein Beispiel dafür liefert die Anwendung des Satzes von Lax-Milgram (I.5.24), wo der Abschluß eines elliptischen Differentialoperators unter Dirichlet-Randbedingungen bestimmt wird.

Im Hilbert-Raum läßt sich die Theorie der abgeschlossenen Operatoren weiter ausbauen und speziell die Frage nach der Abschließbarkeit genau beantworten. Hilfreich ist dabei die Erweiterung des Begriffs des adjungierten Operators.

II.2.10 Definition: Seien X, Y Hilberträume und sei $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, wobei $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Falls für $y \in Y$ ein $z \in X$ existiert mit

$$(Ax, y)_Y = (x, z)_X \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathcal{D}(A),$$

so setze $A^*y := z$. A^* heißt ***adjungierter Operator***. $\mathcal{D}(A)$ ist definiert als der lineare Raum aller dieser y .

II.2.11 Lemma: Sei A wie oben definiert. Dann gilt

1. A^* ist wohldefiniert.
2. A^* ist linear, falls A linear ist.
3. A^* ist abgeschlossen.
4. Falls A^{-1} existiert und $\overline{\mathcal{D}(A^{-1})} = Y$, so gilt $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Beweis: 1.: Seien $z_1, z_2 \in X$ mit $(Ax, y) = (x, z_1) = (x, z_2)$. Dann gilt $(x, z_1 - z_2) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. Ist $\mathcal{D}(A) = X$, so wähle $x = z_1 - z_2$ und erhalte $z_1 = z_2$. Im allgemeinen Fall wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to z_1 - z_2$, dann gilt
$0 = \lim_{n\to\infty}(x_n, z_1 - z_2) = \|z_1 - z_2\|^2$.

2.: Folgt leicht aus 1.

3.: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{D}(A^*)$ mit $y_n \to y \in Y$, $A^*y_n = z_n \to z \in X$. Nun folgt $z = A^*y$ wegen $(Ax, y_n) = (x, A^*y_n) = (x, z_n)$ und daher
$(Ax, y) = \lim_{n\to\infty}(Ax, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x, z_n) = (x, z)$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. □

Der folgende Satz (s. Yosida [12],Kapitel VII] characterisiert abschließbare Operatoren

II.2.12 Satz: Sei A wie oben. Dann ist A abschließbar mit Abschluß $\overline{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{D}(A^*)$ dicht in Y liegt. In diesem Fall gilt $\overline{A} = A^{**}$. Speziell ist A abgeschlossen genau dann, wenn $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = Y$ und $A = A^{**}$.

Bei der Verallgemeinerung der für stetige Operatoren bereits eingeführten Begriffe "symmetrisch " bzw. " hermitesch " muß man Abstufungen vornehmen, um die Abgeschlossenheit und Definitionsbereiche der beteiligten Operatoren mit zu berücksichtigen. Folgende Definitionen sind üblich:

II.2.13 Definition: Seien X, Y Hilberträume und $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, $\mathcal{D}(A) \subset X$.

1. A ist ***hermitesch*** , falls $(Ax, y) = (x, Ay)$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(A)$.
2. A ist ***symmetrisch*** , falls neben 1. noch $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ ist.
3. A ist ***selbstadjungiert*** , falls neben 2. noch $A = A^*$ bzw. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ gilt.

Im falle symmetrischer Operatoren läßt sich Satz ergänzen durch

II.2.14 Satz: Sei A symmetrisch und linear. Dann gelten:

1. A ist abschließbar.
2. $$A \prec \overline{A} = A^{**} \prec A^* \quad ,$$
   d.h. $\overline{A}$ ist Fortsetzung von A und A^* von $\overline{A}$.
3. Ist X Banachraum und $\mathcal{D}(A) = X$, so ist A beschränkt
   (***Satz von* Hellinger-Toeplitz**) .

Beweis: 1.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{D}(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} Ax_n =: y$. Nach dem Kriterium von Satz II.2.8 ist $y = 0$ zu zeigen. Dazu sei $v \in \mathcal{D}(A)$ Die Symmetrie von A liefert
$$0 = \lim_{n\to\infty}(x_n, Av) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n, v) = (y, v) \ .$$
Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in X ist, kann man y beliebig gut durch die v approximieren und dies impliziert $(y, y) = 0$ bzw. $y = 0$.

2.: Wegen $(y, Ax) = (y, Ax)$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(A)$ und $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ gilt $A^*x = Ax$ nach Lemma II.2.11 d.h. A^* ist Fortsetzung von A. Da A^* nach demselben Lemma abgeschlossen ist, ist es Fortsetzung von $\overline{A}$.

3.: Es ist per Definition $\mathcal{D}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}(A)} = X$, also A abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (II.2.5) folgt die Behauptung.

Bemerkung: Die letzte Aussage des Satzes erklärt insbesondere, warum für symmetrische Operatoren i.a. $\mathcal{D}(A) \neq X$ gilt, denn sie treten meistens als Differentialoperatoren auf, die abgesclossen aber unbeschränkt sind.
Der Satz zeigt ferner, daß Symmetrie hinreichend für die Abgeschließbarkeit von A ist bzw. nach Satz II.2.12 dafür, daß $\mathcal{D}(A^*)$ dicht in Y ist. Jedoch braucht noch nicht $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ zu gelten, d.h. Selbstadjungiertheit zu gelten.

Ein Kriterium für selbstadjungierte Operatoren gibt

II.2.15 Satz: Ein symmetrischer und linearer Operator A ist selbstadjungiert, falls entweder $\mathcal{D}(A) = X$ oder $\mathcal{R}(A) = X$ gilt. Für einen selbstadjungierten Operatoren A gilt
$A = \overline{A} = A^*$. Ferner ist die Inverse A^{-1} wieder selbstadjungiert, falls sie existiert.

Beweis: Im Falle $\mathcal{D}(A) = X$ ist ein symmetrischer Operator nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz (II.2.14) beschränkt. Wegen $(Ax, y) = (x, Ay)$ für alle $x, y \in X$ gilt weiter $\mathcal{D}(A^*) = X$, also $A^* = A$, d.h. A ist selbstadjungiert.
Im Falle $\mathcal{R(A)} = \mathcal{X}$ daß nach dem vorigen Satz $A \prec A^*$ gilt und so nur $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$ zu zeigen ist. Sei also $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Setze $z := A^*y$. Wegen $\mathcal{R(A)} = \mathcal{X}$ gibt es $w \in \mathcal{D}(A)$ mit $z = Aw$ und wegen $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ gilt $Aw = A^*w$. Es folgt

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, Aw) = (x, A^*w) = (Ax, w) \quad , \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(A) \ ,$$

sodaß $y = w \in \mathcal{D}(A)$, d.h. $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$ gilt.
Falls die Inverse A^{-1} existiert, ist sie abgeschlossen nach Lemma II.2.6 und hermitesch wegen $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$. Es ist also noch $\overline{\mathcal{D}(A^{-1})} = X$ zu zeigen. Wäre dem nicht so, so wäre $\mathcal{R(A)} = \mathcal{D(A^{-\infty})N\wr\sqcup} = \mathcal{X}$ und es gäbe $y \perp \overline{\mathcal{R(A)}}, y\mathbb{N}ot = 0$. Damit wäre aber $(Ax, y) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$, somit nach Definition $A^*y = 0$ und damit A^* nicht invertierbar, Widerspruch!. □

Bemerkung: In der Quantenmechanik verlangt man aus physikalischen Gründen die Selbstadjungiertheit (vergl. Reed-Simon [7]). Ist der Operator symmetrisch, so sieht man leicht, daß bereits $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ gilt. Selbstadjungiertheit zu zeigen ist aber i.a. eine nicht- triviale Aufgabe und hängt insbesondere von der Art der Randbedingungen des Operators A ab.

Beispiel 1: Der ***Impulsoperator*** eines Teilchens ist in der Quantenmechanik der Operator $(Ax)(t) := (id/dt)x(t)$ auf dem Sobolev-Raum

$$\mathcal{D}(A) = W_2^1(-\infty, \infty) \subset L_2(-\infty, \infty) = X.$$

Es ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in X und durch partielle Integration verifiziert man leicht

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x'(t)}{i}\overline{y(t)}dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}\frac{y'(t)}{i}dt} == \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$$

für $x, y \in \mathcal{D}(A)$. Also ist A hermitesch und $A^*y = Ay$ auf $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$. Für $y(t) \in X = L_2(-\infty, \infty)$ setze nun $y^*(t) := i\int_{-\infty}^t y(s)ds$. Dann gilt $Ay^* = y$ bzw. $\mathcal{R}(A) = X$ und nach Satz II.2.15 die Selbstadjungiertheit von A .

Beispiel 2: Der Operator $(Ax)(t) \ := \ (id/dt)x(t)$ sei diesmal auf

$$\mathcal{D}(A) := \{ \ x(t) \in W_2^1(0,1) \mid x(0) = x(1) = 0 \ \}$$

definiert. Wie im vorigen Beispiel zeigt man durch

$$(Ax, y) = \int_0^1 \frac{x'(t)}{i}\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{\frac{y'(t)}{i}}dt = (x, Ay) \qquad (y \in W_2^1(0,1) \ , \ x \in \mathcal{D}(A) \ ,$$

daß der Operator symmetrisch ist und $W_2^1(0,1) \subset \mathcal{D}(A^*)$ gilt. Ist $w := A^*y$ für $y \in \mathcal{D}(A^*)$, so erhält man ebenfalls mit partieller Integration

$$(Ax, y) := \int_0^1 x(t)\overline{w(t)}dt = -\int_0^1 x'(t)\overline{\int_0^t w(s)dsdt} = (Ax, i\int_0^t w(s)ds) \ ,$$

woraus man $y(t) = i\int_0^t w(s)ds \in W_2^1(0,1)$ schließt, also insgesamt $W_2^1(0,1) = \mathcal{D}(A^*)$. Es ist dann aber $\mathcal{D}(A)\mathbb{N}ot = \mathcal{D}(A^*)$, d.h. A nicht selbstadjungiert.

Die Abhängigkeit von Randbedingungen liefert der Impulsoperator. Weitere Beispiele: Wir setzen $T_k = T$ für $k = 1, \cdots, 4$ und

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(T_1) & := & \{\ f \in C[0,1] \ \mid \ f' \in L_2(0,1)\ \} \ (\ = W_2^1(0,1)\ ) \\ \mathcal{D}(T_2) & := & \{\ f \in \mathcal{D}(T_1) \ \mid \ f(0) = f(1)\ \} \\ \mathcal{D}(T_3) & := & \{\ f \in \mathcal{D}(T_1) \ \mid \ f(0) = f(1) = 0\ \} \\ \mathcal{D}(T_4) & := & \{\ f \in \mathcal{D}(T_1) \ \mid \ f(0) = 0\ \} \end{array}$$

Man kann zeigen: $T_1^* \ = \ T_3$, $T_2^* \ = \ T_2$, $T_3^* \ = \ T_1$, insbesondere, daß T_2 selbstadjungiert, T_3 symmetrisch, und T_1 nicht symmetrisch ist.

Ein weiteres Kriterium für die Selbsadjungiertheit liefert

II.2.16 Satz: (**Friedrichs**) Es sei A symmetrisch und nach unten halbbeschränkt im Sinne, daß

$$(Ax, x) \geq \|x\|^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Dann gibt es eine selbstadjungierte Fortsetzung von A mit der gleichen Eigenschaft.

Bezüglich der Beweise dieser beiden Sätze sei z.B. auf Yosida [12] verwiesen.

Bemerkung: Die Beziehungen (I.5.18) zwischen Nullraum und Wertebereich eines stetigen Operators und seinem Adjungierten gelten auch für abgeschlossene selbstadjungierte Operatoren A, d.h. es gelten

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{N}(T^*) & = & \mathcal{R}(T)^\perp \\ \overline{\mathcal{R}(T)} & = & \mathcal{N}(T^*)^\perp \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{N}(T) & = & \mathcal{R}(T^*)^\perp \\ \overline{\mathcal{R}(T^*)} & = & \mathcal{N}(T)^\perp \ . \end{array}$$

II.3 SATZ VON HAHN-BANACH UND FOLGERUNGEN

II.3.1 Satz: (**Hahn-Banach**) Sei M ein linearer Unterraum eines rellen LNR X, und sei p ein sublineares Funktional auf X, d.h. es gilt

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \text{ und } \ p(\alpha x) = \alpha p(x) \ \text{ für alle } \ x, y \in X \ , \ \alpha \geq 0 \ .$$

Sei $F: M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf M mit $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M$. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{F}$ auf ganz X mit

$$\tilde{F}(x) = f(x) \ \text{ für } \ x \in M \ \text{ und } \ \tilde{F}(x) \leq p(x) \ \text{ für alle } \ x \in X \ .$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $M \neq X$ und sei $x_1 \in X \setminus M$. Setze dann $M_1 \ = \ M \bigoplus \text{span}\{x_1\} \supset M$. Dann gilt

$$F(x) + F(y) = F(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y)$$

und damit

$$F(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - F(y)$$

für $x, y \in M$. Mit festem $y \in M$ kann man dann abschätzen

$$\sigma = \sup_{x \in M} (F(x) - p(x - x_1)) \leq p(y + x_1) - F(y) < \infty \ .$$

Für σ gilt dann $F(x) - \sigma \leq p(x - x_1)$, aber auch $F(y) + \sigma \leq p(y + x_1)$. Definiere nun ein Funktional F_1 auf M_1 durch

$$F_1(x + tx_1) \ := \ F(x) + t\sigma \ .$$

Dann ist F_1 linear und $F_1|_M \ = \ F$. Ferner gilt für $t > 0$ nach dem Vorigen

$$F_1(x \pm tx_1) = t\left[F\left(\frac{x}{t}\right) \pm \sigma\right] \leq t \cdot p\left(\frac{x}{t} \pm x_1\right) = p(x \pm tx_1) \ .$$

Daher folgt $F_1(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M_1$. Falls $X \neq M_1$. Wähle nun $x_2 \in X \setminus M_1$ und erhalte M_2 und F_2.

In einem zweiten Schritt zeigen wir, daß es eine maximale Fortsetzung gibt. Dazu verwenden wir sogenannte ***transfinite Induktion***, zu deren Erklärung wir einige Begriffe und Sätze der Mengenlehre benötigen.

$(\mathcal{M}, \preceq)$ heißt eine eine ***geordnete Menge*** , wenn M eine Menge und $\preceq$ ist eine Relation auf M ist mit

1. $a \preceq a$ für alle $a \in \mathcal{M}$;

2. aus $a \preceq b$ und $b \preceq a$ folgt $b = a$ für alle $a, b \in \mathcal{M}$;

3. aus $a \preceq b$ und $b \preceq c$ folgt $a \preceq c$ für alle $a, b, c \in \mathcal{M}$.

Sei $(\mathcal{M}, \preceq)$ eine geordnete Menge
$\mathcal{M}$ heißt ***total geordnet*** , falls für alle $a, b \in \mathcal{M}$ entweder $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt.
Eine ***obere Schranke*** einer teilweise geordneten Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ ist ein Element $s \in \mathcal{M}$ mit $a \preceq s$ für alle $a \in \mathcal{N}$.
Ein Element $m \in \mathcal{M}$ heißt ***maximal*** , falls aus $m \preceq a$ für $a \in \mathcal{M}$ folgt $a = m$.
Ein Element $m \in \mathcal{M}$ heißt ***kleinstes Element*** , falls aus $m \preceq a$ für $a \in \mathcal{M}$ folgt $a = m$.
$\mathcal{M}$ heißt ***wohlgeordnet*** , falls jede nichtleere Teilmenge von $\mathcal{M}$ ein kleinstes Element besitzt.

Das Auswahlaxiom ist ein Axiom der Mengenlehre, ohne das die Mathematik sehr "klein" wäre (Details s. J.Dugundji Topology, Kapitel II ; N.Dunford-J.T. Schwartz [3]I.2).
Aus der Mengenlehre ist der folgende Satz bekannt:

II.3.2 Satz: Folgende Aussagen sind Äquivalent:

a) Das ***Auswahlaxiom :***
Zu jeder nichtleeren Familie $\{A_\iota\}_{\iota \in J}$ von nichtleeren Teilengen Gibt es einer Menge S , die genau aus einem Element von jedem A_ι besteht. (Man kann also gleichzeitig aus jeder der Mengen $\{A_\iota\}$ ein Element auswählen. Anders formuliert: $\prod_{\iota \in J} A_\iota \ \neq \ \emptyset$.

b) Das ***Lemma von* Zorn :**
Ist $\mathcal{M}$ teilweise geordnet und hat jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ eine obere Schranke, so besitzt $\mathcal{M}$ wenigstens ein maximales Element.

c) Der ***Wohlordnungssatz :***
Jede Menge kann wohlgeordnet werden (d.h. Für jede Menge existiert eine Ordnung , mit der sie wohlgeordnet ist).

Sei nun $\mathcal{M}$ die Menge aller linearen Funktionale g, die Fortsetzung von F sind, d.h. $\mathcal{D}(g) \supset M$, $g(x) = f(x)$ für alle $x \in M$ und für die $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(g)$ gilt. Diese Menge ist teilweise geordnet durch

$$g \preceq f \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}(g) \supset \mathcal{D}(f) \ .$$

Ist nun $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge, so ist offenbar $\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N$ eine obere Schranke. Daher exitiert ein maximales Element $\widehat{F}$, und $\mathcal{D}(\widehat{F}) = X$, da andernfalls $\widehat{F}$, wie oben gezeigt, eine echte Fortsetzung hätte, also nicht maximal wäre. □

Bemerkung: Die zentrale Bedeutung des Satzes von Hahn-Banach wird im folgenden überdeutlich werden. Der Beweis des Satzes kann nicht ohne das Auswahlaxiom gezeigt werden, denn der Satz von Hahn-Banach ist äquivalent zum Auswahlaxiom!

II.3.3 Satz: Sei M ein linearer Unterraum eines LNR X und sei p eine Seminorm, d.h. Für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ und } p(\alpha x) \leq |\alpha| p(x) \ .$$

Dann gibt es zu jedem linearen Funktional F auf M mit $|F(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in M$ eine Fortsetzung $\tilde{F}$ auf ganz X mit $|\tilde{F}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Für alle y , $z \in X$ gilt $p(y) \leq p(y-z) + p(z)$ und $p(z) \leq p(z-y) + p(y)$ gilt $|p(x-y)| \leq p(x-y)$ und daher $p(x) \geq 0$ für beliebiges $x \in X$. Ist X reellwertig, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Hahn-Banach (II.3.1), denn es gilt

$$\pm \tilde{F}(x) = \tilde{F}(\pm x) \leq p(\pm x) = |p(x)| = p(x) \ .$$

Ist X komplex, so beachte

$$F(x) = ReF(x) + i\ ImF(x) = ReF(x) - i\ ReF(ix) =: R(x) - iR(ix) \ .$$

Dann ist $R(x)$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf M mit $|R(x)| \leq |F(x)| \leq p(x)$ und nach dem Satz von Hahn-Banach (II.3.1) gibt es eine Fortsetzung $\tilde{R}$ auf X mit $|\tilde{R}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Definiere nun gemäß obiger Formel $\tilde{F}(x) = \tilde{R}(x) - i\tilde{R}(ix)$. Es ist $\tilde{F}$ $\mathbb{R}$-lineares Funktional mit $\tilde{F}(ix) = i\tilde{F}(x)$ für alle $x \in X$, also auch $\mathbb{C}$-linear. Ferner ist $\tilde{F}$ Fortsetzung von F. Wähle zu $x \in X$ ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = 1$ und $|\tilde{F}(x)| = \gamma\tilde{F}(x)$. Dann gilt (weil $|\tilde{F}(x)|$ reell ist)

$$|\tilde{F}(x)| = \gamma\tilde{F}(x) = \tilde{F}(\gamma x) = Re\tilde{F}(\gamma x) = R(\gamma x) \leq p(\gamma x) = p(x) \ .$$

□

II.3.4 Satz: (***Fortsetzungssatz von* Hahn-Banach**) Sei $M \subset X$ Unterraum eines LNR X und sei F stetiges lineares Funktional auf M mit

$$\|F\|_M = \sup_{\|x\|=1, x \in M} |F(x)| < \infty.$$

Dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{F}$ mit

$$\|\tilde{F}\|_X = \sup_{\|x\|=1, x \in X} |\tilde{F}(x)| = \|F\|_M.$$

Beweis: Es gilt $|F(x)| \leq \|F\|_M \|x\| =: p(x)$. Offensichtlich ist $p(x)$ eine Seminorm. Der Satz von Hahn-Banach (II.3.1) liefert also eine Fortsetzung $\tilde{F}$ von F mit $|\tilde{F}(x)| \leq p(x) = \|F\|_M \|x\|$ für alle $x \in X$. □

II.3.5 Korollar: Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum eines LNR X und sei $x \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $f \in X^*$ mit

$$f(x) = 1 \quad \text{und} \quad f(m) \;=\; 0 \;\text{ für alle } m \in M \;.$$

Beweis: Auf $\widetilde{M} \;:=\; M \bigoplus \mathbb{K}x$ ist F , definiert durch $F(m + \alpha x \;:=\; \alpha$ offenbar ein stetiges lineares Funktional. Die nach dem Fortsetzungssatz (II.3.4) existerebde Fortsetzung f erfüllt dann die Behauptung. □

II.3.6 Korollar: Sei X LNR und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $f \in X^*$ mit $f(x) = \|x\|$ und $\|f\|_{X^*} = 1$. Speziell können Punkte in X mittels eines stetigen linearen Funktionals getrennt werden, d.h. zu $x_1 \neq x_2$ gibt es ein $f \in X^*$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Beweis: Sei $M := \text{span}\{x\} = \mathbb{K} \cdot x$. Setze $F(y) := \alpha\|x\|$ für $y = \alpha \cdot x \in M$. Dann gilt $F(x) = \|x\|$, also $\|F\|_M = 1$. Nach dem Fortsetzungssatz (II.3.4) existiert eine Fortsetzung $f \in X^*$ von F mit denselben Eigenschaften.
Zum Beweis des zweiten Teils bilde $x := x_1 - x_2 \neq 0$. Dann existiert ein $f \in X^*$ mit $0 \neq \|x\| = f(x) = f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. □

II.3.7 Korollar: In jedem LNR X gilt

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)| \;.$$

Beweis: Klarerweise gilt $\sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|$.
Gleichheit hierin folgt aus Korollar II.3.6 . □

In [Ü] wurde gezeigt, daß die Abbildung $T : l^q \to (l^p)^*$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^q$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$, einen isometrischen Isomorphismus liefert für $1 \leq p < \infty$, d.h. der Dualraum von l^p ist identifizierbar mit l^q. Mit einem analogen Argument kann man zeigen:
Ist $c_0 \;:=\; \{\; (x_n) \in l^\infty \;\mid\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\}$, so gilt $T(l^1) = (c_0)^*$. Weiter gilt

II.3.8 Korollar: T ist nicht surjektiv von l^1 auf $(l^\infty)^*$.

Beweis: Sei $c \;:=\; \{\; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty \;\mid\; \xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert $\}$. Dann bilde auf c das Funktional $F(x) \;:= F((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann ist F linear und stetig. Nach dem Fortsetzungssatz (II.3.4) existiert eine Fortsetzung $\tilde{F}$ von F. Wäre $\tilde{F}$ im Wertebereich von T, d.h. hätte es eine Darstellung $\tilde{F}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n y_n$ mit einer Folge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$, so wäre mit $e_k :== (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ $x'_k = \tilde{F}(e_k)$ und andererseits $\tilde{F}(e_k) = \lim_{n\to\infty} \delta_{nk} = 0$, also $x'_k = 0$ für alle k. Widerspruch. □

II.3.9 Definition: Sei $A \subset X$ konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes X, sei $0 \in \text{int}(A)$ und sei A ***absorbierend*** , d.h. jedes $x \in X$ liegt in einer Menge αA mit einem geeigneten $\alpha > 0$.
Dann heißt das Funktional

$$\mu_A(x) \;:=\; \inf\{\alpha > 0 \;\mid\; \alpha^{-1}x \in A\;\}$$

Minkowski-*Funktional*.

II.3.10 Lemma:

1. Es gilt $\mu_A(x) \geq 1$ für $x \notin A$ und $\mu_A(x) \leq 1$ für $x \in A$.
2. μ_A ist sublinear, d.h. $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x)+\mu_A(y)$, $\mu_A(\beta x) = \beta\mu_A(x)$ für $x, y \in X$, $\beta \geq 0$.
3. Ist A ferner ***balanciert*** (kreisförmig) , d.h. $\alpha A \subset A$ für $|\alpha| \leq 1$, so ist μ_A eine Seminorm.
4. Seien $B := \{x \in X \mid \mu_A(x) < 1\}$ und $C := \{x \in X \mid \mu_A(x) \leq 1\}$. Dann gilt $B \subset A \subset C$ und $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

Beweis: 1.: Für $x \in A$ gilt $1 \cdot x \in A$, also $\mu_A(x) \leq 1$. Mit der Konvexität und $0 \in A$ folgt $\alpha A \subset \beta A$ für $0 \leq \alpha \leq \beta$, also $\mu_A(x) \geq 1$ für $x \notin A$.

2.: Ist $x \in \alpha \cdot A$ und $y \in \beta \cdot A$, so gilt $x = \alpha x'$ und $y = \beta y'$ für entsprechende $x', y' \in A$ und $\mu_A(x) \leq 1/\alpha$, $\mu_A(y) \leq 1/\beta$. Dann liefert die Konvexität von A

$$x + y = \alpha x' + \beta y' = (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x' + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y'\right] \in (\alpha+\beta)A,$$

also $\mu_A(x+y) \leq 1/(\alpha+\beta) \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

3.: Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_A(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}\lambda x \in A\} = \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}|\lambda|e^{i\varphi}x \in A\}\\ &= \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}|\lambda| x \in A\} = |\lambda|\mu_A(x).\end{aligned}$$

4) Nach 1. gilt $A \subset C$, ferner $B \subset A$, denn für $x \in B$ kann nicht $\mu_A(x) \geq 1$ gelten. Ferner gilt $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ für alle $x \in X$. Zum Beweis der Gleichheit sei $t > \mu_C(x)$, dann existiert ein α mit $\mu_C(x) \leq \alpha < t$ und $\alpha^{-1}x \in C$, d.h. nach der Definition von C gilt $\mu_A(\alpha^{-1}x) \leq 1$ bzw. $\mu_A(t^{-1}x) = \frac{\alpha}{t}\mu_A(\alpha^{-1}x) < 1$. Nach Definition von B gilt also $t^{-1}x \in B$ und somit $\mu_B(t^{-1}x) \leq 1$ und $\mu_B(x) \leq t$ da $t > \mu_C(x)$ beliebig wählbar ist, gilt $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$. □

II.3.11 Satz: (***Trennungssatz***) Seien A, B zwei disjunkte, nichtleere, konvexe Mengen in einem topologischen Vektorraum X und sei A offen. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional f, welches diese Mengen trennt, d.h. $Ref(x) < \gamma \leq Ref(y)$ für alle $x \in A$, $y \in B$. Geometrisch bedeutet dies die Existenz einer Hyperebene, definiert durch $H(f, \gamma) := \{x \in X \mid f(x) = \gamma\}$, die die Mengen A und B trennt.

Beweis: Zunächst sei X Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wähle $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ und setze $x_0 := b_0 - a_0$. Ferner sei

$$\begin{aligned}C &:= \{z \in X \mid z = x - y + x_0, x \in A, y \in B\}\\ &= \{z \in X \mid z = (x - a_0) + (b_0 - y), x \in A, y \in B\}\end{aligned}$$

. Dann ist C eine konvexe Menge und enthält die Menge

$$V := \{z \in X \mid z = x - a_0, x \in A\} \ni 0 .$$

Da A offen ist, enthält V wegen der Stetigkeit der Translation eine offene Umgebung U um 0. Daher ist C absorbierend und μ_C sublinear. Weiterhin gilt $\mu_C(x_0) \geq 1$, denn $x_0 \notin C$, weil A und B disjunkt sind. Auf $M_0 = \text{span}\{x_0\}$ definiere das Funktional g durch $g(x) := \beta$, falls $x = \beta x_0$. Für $\beta \geq 0$ gilt $\beta = g(\beta x_0) \leq \beta\mu_C(x_0) = \mu_C(\beta x_0) = \mu_C(x)$ und für $\beta < 0$ gilt $\beta = g(\beta x_0) < 0 \leq \mu_C(\beta x_0) = \mu_C(x)$. Nun wende den Fortsetzungssatz (II.3.4) auf μ_C an und erhalte eine Fortsetzung f auf ganz X mit $-\mu_C(-x) \leq f(x) \leq \mu_C(x)$. Es ist $|f(x)| \leq 1$ für $x \in C$ wegen $\mu_C(x) \leq 1$ für $x \in C$. Damit aber auch $|f(x)| \leq 1$ für $x \in U$. Also ist f stetig in 0 und daher überall stetig [Ü]. Sei nun $\gamma := \sup_{x \in A} f(x)$ und zeige $f(x) < \gamma$ für alle $x \in A$. Sei also $\gamma = f(x')$ für ein $x' \in A$. Weil A offen ist, muß $x' + V \subset A$ mit einer Nullumgebung V sein. Nun gibt es eine Nullumgebung U mit $\pm U \subset V$. Für alle

$y \in U$ gilt also $\gamma \geq f(x' + y) = f(x') + f(y)$ und $\gamma \geq f(x' - y) = f(x') - f(y)$. Es folgt $f(y) = 0$ für alle $y \in U$, Widerspruch. Der andere Teil der Ungleichung folgt mit $x \in A$, $y \in B$, aus $f(x) = f(x - y + x_0) + f(y) - f(x_0) \leq \mu_C(x - y + x_0) + f(y) - 1 \leq f(y)$. Damit ist der reelle Fall bewiesen. Der komplexe Fall folgt wie beim Fortsetzungssatz (II.3.4). □

II.3.12 Satz: (Charakterisierung der besten Approximation) Sei M eine konvexe Teilmenge eines reellen linearen normierten Raumes X und $f \in X \setminus M$. Dann gilt: $g^* \in M$ ist eine beste Approximation von f in M genau dann, wenn ein stetiges lineares Funktional φ auf X mit Norm 1 existiert mit

$$\varphi(g) \leq \varphi(g^*) < \varphi(f) \quad \text{für alle} \quad g \in M \ .$$

Ferner gilt: $\varphi(f - g^*) = \|f - g^*\|$. Geometrisch heißt dies, daß die Hyperebene $H(\gamma, \varphi) := \{x \in X \mid \varphi(x) = \gamma = \sup_{g \in M} \varphi(g)\}$ den Punkt g^* enthält und f und M trennt.

Beweis: Sei $A := B_r(f)$ mit $r := \text{dist}(f, M)$. Der vorherige Satz angewendet auf dieses A und M liefert ein stetiges lineares Funktional $\tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(h) < \tilde{\varphi}(g)$ für alle $h \in A$, $g \in M$. Setze $\varphi := -\tilde{\varphi}/\|\tilde{\varphi}\|$. Dann gilt $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(g) < \varphi(h)$ für alle $h \in A$, $g \in M$, insbesondere $\varphi(g) < \varphi(f)$ für alle $g \in M$. Sei nun g^* beste Approximation. Dann liegt g^* auf ∂A, d.h. es gibt eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $h_n \to g^*$, da
$\|f - g^*\| = r = \lim_{n \to \infty} \|f - h_n\|$. Dann gilt
$\varphi(g^*) \leq \inf_{h \in A} \varphi(h) \leq \liminf_{n \to \infty} \varphi(h_n) = \varphi(g^*)$, d.h.

$$\varphi(g^*) = \inf_{h \in A} \varphi(h) = \inf_{\|x\| < r} \varphi(f + x) = \varphi(f) + \inf_{\|x\| < r} \varphi(x) \ .$$

Es folgt

$$0 \leq \varphi(f - g^*) = \varphi(f) - \varphi(g^*) = - \inf_{\|y\| < r} \varphi(y) = r \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi(y)| = r = \|f - g^*\| \ .$$

Umgekehrt folgt, falls $g^* \in M$ diese Bedingung erfüllt und φ trennend ist,
$\|f - g^*\| = \varphi(f - g^*) = \varphi(f - g) + \varphi(g - g^*) \leq \varphi(f - g) \leq \|\varphi\|\|f - g\| = \|f - g\|$ für alle $g \in M$, d.h. g^* ist die beste Approximation. □

II.3.13 Korollar: Ist M zusätzlich ein linearer Teilraum, so gilt: $g^* \in M$ ist eine beste Approximation von f in M genau dann, wenn ein stetiges lineares Funktional φ auf X existiert mit

$$|\varphi\| = 1 \ , \ \varphi(f) = dist(f, M) = \|f - g^*\| \quad \text{und} \quad \varphi(g) = 0 \quad \text{für alle} \quad g \in M \ .$$

Beweis: Nach dem vorherigen Satz gilt $\varphi(g - g^*) \leq 0$ für alle $g \in M$ oder $\varphi(g^* \pm g) \geq 0$ für alle $g \in M$, also $\varphi(g) = 0$. □

Bemerkung: Falls der Dualraum von X bekannt ist, so führt dies zu Kriterien für die beste Approximation.Ein Beispiel ist das bereits in Satz I.5.4 und Korollar I.5.5 bewiesene Ergebnis:

II.3.14 Korollar: Ist X ein Hilbertraum und M eine konvexe Teilmenge von X , so ist $g^*\|) \in M$ eine beste Approximation von f in M genau dann, wenn $(f - g^*, g^* - g) \geq 0$ für alle $g \in M$. Ist M ein linearer Teilraum, so ist dies genau dann der Fall, wenn $(f - g^*, g) = 0$ für alle $g \in M$, d.h. $f - g^* \perp M$.

Beweis: Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (I.5.14) betrachte

$$\varphi(g) := (g, y) \quad \text{mit} \quad y := (f - g^*)/\|f - g^*\|$$

in obigem Satz und vorigem Korollar. Dies liefert sofort die Aussage. □

II.4 SCHWACHE TOPOLOGIE UND DUALITÄT

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei

$$X' := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ linear}\}$$

der ***algebraischer Dualraum*** von X. Zum Unterschied davon führt man ein

II.4.1 Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum. Die Menge

$$X^* := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ stetig und linear}\}$$

heißt der ***topologische Dualraum*** von X.

Im einfachsten Falle, X endlichdimensional, ist $X^* = X'$, denn ist $\{b_1, \cdots b_n\}$ eine Basis für X und $f \in X'$, so gilt für $x = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$:

$$\|f(x)\| = \|f(\sum_{i=1}^n \beta_i b_i)\| = \|\sum_{i=1}^n \beta_i f(b_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \mid \beta_i \mid \|f(b_i)\| \leq \max_{j=1}^n \|f(b_j)\| \quad \sum_{i=1}^n \mid \beta_i \mid \ ,$$

und da

$$\|\sum_{i=1}^n \beta_i b_i\| \ := \ \sum_{i=1}^n \mid \beta_i \mid$$

eine Norm auf X ist und nach I.4.4 auf einem endlichdimensionalem NRL alle Normen äquivalent sind, ist f also stetig.
Offenbar ist die Abbildung

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \in X \longmapsto (\beta_1, \cdots \beta_n) \in \mathbb{K}$$

ein Isomorphismus.

Im allgemeinen ist aber X' sehr viel größer als X^*. Andererseits kann X^* für konkrete Fälle bestimmt werden, zum Beispiel $(L^p(\mu))^* \simeq L^q(\mu)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, μ Lebesguemaß auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zu beachten ist aber, daß X^* von der Wahl der Topologie auf X abhängt.

II.4.2 Lemma: Sei X ein LNR mit den Normen $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ und sei $\|\cdot\|_2$ ist eine ***stärkere Norm*** , d.h. es gibt ein $C > 0$, sodaß für alle $x \in X$ $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ ist. Dann gilt $(X, \|\cdot\|_1)^* \subset (X, \|\cdot\|_2)^*$. Allgemeiner sei $Y \subset X$ und $\|\cdot\|_2$ nur auf Y definiert. Dann gilt: Für $f \in (X, \|\cdot\|_2)^*$ liefert die Restriktion $f|_Y$ ein Element aus $(Y, \|\cdot\|_2)^*$.

Beweis: Sei $f \in (X, \|\cdot\|_1)^*$. Dann ist für $x \in Y$ wegen

$$\sup_{\|x\|_2 \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq 1} |f(x)| = C \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |f(x)|$$

auch $f|_Y \in (Y, \|\cdot\|_2)^*$. □

Beispiel: Sei $X = C[a, b]$ mit Normen $\|\cdot\|_{L^1}$ und $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Dann gilt $\|f\|_{L^1} \leq (b-a)\|f\|_{L^\infty}$ und zu $y \in (X, \|\cdot\|_{L^1})^*$ gibt es $C > 0$ mit $|y(z)| \leq C\|z\|_{L^1} \leq C(b-a)\|z\|_{L^\infty}$, also auch $y \in (X, \|\cdot\|_{L^\infty})^*$, d.h. je stärker die Norm auf X ist, desto mehr stetige Funktionale gibt es, d.h. desto größer ist X^*.

Ziel ist es nun, eine Topologie auf X mittels X^* zu definieren. Wir formulieren die Definition etwas abstrakter, um zu zeigen, wie allgemein man das Konzept einer Topologie fassen kann.

II.4.3 Definition: Sei X eine Menge und $\big((Y_i,\sigma_i)\big)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $\mathcal{F} = \{\ (f_i)\ |\ i \in I\ \}$ eine Menge von Abbildungen $f_i : X \longrightarrow Y_i$. Dann heißt die von

$$\gamma\ := \{\ U \subset X\ |\ U = f_i^{-1}(V_i)\ ,\ i \in I\ ,\ V_i \in \sigma_i\ \}$$

als Subbasis definierte Topologie die $\sigma - (X, \mathcal{F})$-Topologie auf X .

Bemerkung: Die offenen Mengen dieser Topologie sind also die Vereinigungen von endlichen Durchschnitten der Mengen in γ.
Man zeigt leicht, daß die $\sigma - (X, \mathcal{F})$-Topologie von X die gröbste Topologie ist, unter der alle Abbildungen aus $\mathcal{F}$ stetig sind.

II.4.4 Definition: Seien X ein NLR. Dann heißt die $\sigma(X, X^*)$-Topologie auch die ***schwache Topologie*** auf X .

Bemerkung: Nach der obigen Bemerkung ist

$$\gamma\ :=\ \{\ f^{-1}(U)\ |\ f \in X^*\ ,\ U \subset \mathbb{K} \text{ offen}\ \}$$

eine Subbasis, die offenen Mengen sind die Vereinigungen von endlichen Durchschnitten der Mengen in γ, und die schwache Topologie auf X die gröbste Topologie, unter der alle stetigen linearen Funktionale auf X stetig sind. Eine Nullumgebungsbasis aus konvexex Mengen ist offenbar

$$\Big\{\ V\ :=\ \bigcap_{i=1}^{n}\ |\ V_i\ :=\ f^{-1}\big(B_r(o)\big)\ ,\ r > 0\ ,\ 1 \le i \le n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ \Big\}\ .$$

Eine Charakterisierung gibt

II.4.5 Satz: Es sei X ein topologischer Vektorraum mit lokalkonvexer Topologie τ, d.h. τ wird durch Translationen einer Nullumgebungsbasis in X erzeugt, deren Elemente alle konvexe Mengen sind. Dann ist die dadurch induzierte $\sigma(X, X^*)$-Topologie auf X wieder lokalkonvex und X ein toplogischer Vektorrraum unter dieser Topologie.

Dieser Satz zeigt die grundlegende Rolle, die **lokalkonvexe Räume** für eine einheitliche Behandlung der Dualität spielen. Der Beweis ist aber zu lang und abstrakt, um hier gebracht zu werden. Der interessierte Leser sei dazu auf Rudin [8], Kapitel 3 verwiesen. Wesentlich für den Beweise ist der Trennungssatz von Hahn-Banach (II.3.11), der die für einen Hausdorff-Raum geforderte Separationseigenschaft der Topologie $\sigma(X, X^*)$ garantiert.

Anschaulicher wird diese Topologie, wenn man die damit verknüpften Begriffe wie Konvergenz, Abgeschlossenheit, Kompaktheit und Beschränktheit näher betrachtet.

II.4.6 Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt ***schwach konvergent*** bzw. ***schwache* Cauchy-*Folge***, und eine Teilmenge von X heißt ***schwach abgeschlossen*** bzw. ***schwach beschränkt*** bzw. ***schwach kompakt***, bzw. ***schwach folgenkompakt*** wenn sie diese Eigenschaft in der schwachen Topologie hat.

Bemerkung: Um eine Verwechslung mit der Konvergenz in der ursprünglichen Topologie zu vermeiden, z.B der Normtopologie, nennt man Konvergenz in der ursprünglichen Topologie auch stark(e Konvergenz).

II.4.7 Lemma: Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann gelten:

1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist schwach konvergent genau dann, wenn die Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $f \in X^*$ konvergieren.
2. Eine Menge $S \subset X$ ist schwach beschränkt genau dann, wenn $\sup_{x\in S} |f(x)| < \infty$ gilt für alle $f \in X^*$.
3. Ist eine Folge in X konvergent, so ist sie auch schwach konvergent.
4. Ist eine Folge in X beschränkt, so ist sie auch schwach beschränkt.
5. Ist eine Folge in X schwach-konvergent, so ist sie schwach beschränkt.
6. Ist eine Menge $A \subset X$ schwach abgeschlossen, so ist sie auch abgeschlossen.
7. Ist X ein $\infty-$ dimensionaler LNR, so ist X unter der schwachen Topologie nicht normierbar.

Beweis: 1. – 6. sind einfach zu zeigen.

7.: Nehmen wir an, daß $\sigma(X, X^*)$ von einer Norm $\|\cdot\|$ erzeugt wird. Dann ist die Kugel $B_1(0)$ eine Nullumgebung und enthält eine $\sigma(X, X^*)$-Umgebung U. Nach der obigen Bemerkung gibt es also $n \in \mathbb{N}, f_1, \ldots, f_n \in X^*$, $r > 0$ mit

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; |f_i(x)| < r \ , \ f_i \in X^* \ , \ 1 \le i \le n \ , \ r > 0 \right\} .$$

Betrachte dann die Menge

$$N := \left\{ x \in X \;\middle|\; f_i(x) = 0 \ , \ 1 \le i \le n \right\} .$$

Offenbar ist $N \subset V \subset B_1(0)$ und enthält wegen $\dim X = \infty$ ein nicht-triviales Element x_0 . Da N ein linearer Raum ist, wäre auch $t \cdot x_0 \in N$ für alle $t > 0$. Dies bedeutet aber einen Widerspruch zu $\|x\| \le 1$ für die Elemente $x \in N \subset B_1(0)$. □

Bemerkung: Aussage 7. zeigt, daß das Konzept einer Norm für die schwache Topologie zu eng ist, da eine Nullumgebung in der $\sigma(X, X^*)$- Topologie zu "groß"ist, um beschränkt im Sinne einer Norm zu sein. Dies hat u.a. den oben angedeuteten allgemeinen Zugang zu schwachen Topologien motiviert. Da dieser Zugang relativ abstrakt ist, werden in vielen Büchern über Funktionalanalysis, die primär an konkreten Anwendungen der schwachen Topologie interessiert sind, die Aussagen von Lemma II.4.2 als Definition von schwach konvergent, schwach beschränkt, etc. benützt.

Wir untersuchen nun die obigen Begriffe weiter. Insbesondere sind wir an Umkehrungen der Aussagen 3.,4.,6. von Lemma II.4.7 interessiert. Etwas überraschend ist die folgende Aussage, daß "beschränkt" aus "schwach beschränkt " folgt.

II.4.8 Lemma: Sei X ein LNR. Dann ist jede schwach beschränkte Teilmenge $S \subset X$ auch beschränkt in der Norm.

Beweis: Zu $x \in S$ bilde $T_x : X^* \to \mathbb{K}$, $T_x f := f(x)$. Dann gilt $|T_x f| \le \|x\|_X \|f\|_{X^*}$ für alle $f \in X^*$ und nach Lemma II.4.7 $\sup_{x\in S} |f(x)| < \infty$. Nun ist X^* Banachraum (Satz I.4.14) und $\{T_x\}_{x\in S}$ ist eine Familie von stetigen linearen Operatoren auf X^* , die punktweise für jedes $f \in X^*$ beschränkt ist. Dann folgt mit dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit (II.1.1) und Korollar II.3.7 :

$$\infty > \sup_{x\in S} \|T_x\|_{L(X^*,\mathbb{K})} = \sup_{x\in S} \sup_{f\in X^* \|f\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in S} \|x\| .$$

□

Unter einer Zusatzvoraussetzung gilt auch die Äquivalenz von "schwach abgeschlossen" und "abgeschlossen":

II.4.9 Lemma: Sei (X,τ) ein lokal konvexer topologischer Vektorraum und $M \subset X$ konvex. Dann ist der Abschluß $\overline{M}^{\,\tau}$ von M bezüglich τ gleich dem Abschluß $\overline{M}^{\,w}$ von M bezüglich $\sigma(X,X^*)$, d.h. eine konvexe τ-abgeschlossene Menge ist auch schwach abgeschlossen.

Beweis: Man sieht leicht, daß $\sigma(X,X^*)$ gröber als τ ist. Es gilt also immer $\overline{M}^{\,\tau} \subset \overline{M}^{\,w}$. Sei nun $x_o \in X \setminus \overline{M}$. Mit Anwendung des Trennungssatzes (II.3.11) auf die konvexe Menge $\overline{M}$ und eine offene, konvexe, zu $\overline{M}$ disjunkte Umgebung von x_0 folgt die Existenz eines $f \in (X,\tau)^*$ mit $Ref(x_0) < \gamma \leq Ref(y)$, $y \in \overline{M}$. Da $Ref \in X^*$ (Bew!), ist die Menge $U_o := \{x \in X \mid Ref(x) < \gamma\}$ wegen $U_o = f^{-1}(-\infty,\gamma)$ eine Umgebung von x_o in der $\sigma(X,X^*)$-Topologie, die kein Element von $\overline{M}$ und daher auch von M enthält. Also ist x_o kein Element von $\overline{M}^w$. □

II.4.10 Lemma:

1. Sei (X,d) metrischer lokal-konvexer Vektorraum. Konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $x \in X$, so gibt es eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X, sodaß $\lim_{k\to\infty} d(x,y_k) = 0$ und jedes y_k eine Konvexkombination von Elementen aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
2. Sei X Banachraum und A sei schwach dicht in X^*. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $x \in X$ genau dann, wenn
   (a) $\|x_n\| \leq M < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$
   (b) $f(x_n) \to f(x)$ für alle $f \in A$, $\overline{A} = X^*$,
3. Sei X Hilbertraum. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm gegen $x \in X$ genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen x konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Beweis: 1.: Die Behauptung folgt mit Anwendung des vorherigen Lemmas auf die konvexe Hülle H der $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn dieses zeigt $x \in \overline{H}_w = \overline{H}$, d.h. $x = \lim_{n\to\infty} y_n$, wobei die y_n Konvexkombinationen wie angegeben sind.

2.: folgt mit Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus (II.1.4) auf die Operatoren $T_n : X^* \to \mathbb{R}$, $T_n f := f(x_n)$

3.: $\Leftarrow$ ergibt sich aus der Beziehung

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - 2Re(x,x_n) + \|x_n\|^2 = 2\Re(x, x - x_n) + \|x_n\|^2 - \|x\|^2.$$

□

II.4.11 Bemerkung: Aussage 1. läßt sich noch verschärfen, indem man die konvexe Hülle H_N der $(x_n)_{n\geq N}$ betrachtet. Dann gilt wie eben $x \in \overline{H}_N$ und dies bedeutet $x = \lim_{N\to\infty} y_N$, wobei die y_N Konvexkombinationen der x_n mit $n \geq N$ sind.

Nun betrachten wir die schwache Topologie von $X^* = (X,\tau)^*$, wobei X ein topologischer Vektorraum ist. Ist X linearer normierter Raum, so ist nach I.4.14 auf X^* $\|f\|_{X^*} := \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ eine Norm. Dann bilde $X^{**} := (X^*, \|\cdot\|_{X^*})^*$. Mit X^{**} kann wieder die schwache Topologie $\sigma(X^*, X^{**})$ auf X^* gebildet werden.

Eine sehr wichtige Beobachtung ist nun, daß zur Erzeugung einer Topologie auf X^* statt X^{**} auch der Raum X benutzt werden kann.

Nicht nur zur Vorbereitung dient

II.4.12 Lemma: Sei X ein linearer normierter Raum. Dann ist die **kanonische Einbettung**

$$J : X \longrightarrow X^{**} \quad , \quad \text{definiert durch } \; J(x)(f) := f(x) \qquad (f \in X^*)$$

ein isometrischer Isomorphismus von X auf einen (i.a. echten) Teilraum von X^{**} .

Beweis: Die Linearität von J ist klar. Ist $x \in X$, so gikt für alle $f \in X^*$:

$$|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|, \text{ also } \|J(x)\|_{L(X^*,\mathbb{K})} \leq \|x\| \ .$$

Korollar II.3.6 liefert die Existenz eines $\tilde{f} \in X^*$ mit $|\tilde{f}(x)| = \|x\|$ und $\|\tilde{f}\| = 1$. Dann gilt:

$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |J(x)(f)| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\| \ .$$

□

II.4.13 Definition: X^{**} heißt auch der ***Bidualraum*** von X . Im Fall $J(X) = X^{**}$ heißt X **reflextv**.

Bemerkung: Zu beachten ist, daß bei der Definition gerade J genommen wird. **R.C. James** (s.Dunford-Schwartz[3] I p 88) gibt ein Beispiel eines nicht reflexiven, zu dem es einen isometrischen Isomorphismus auf seinen zweiten Dualraum gibt.

II.4.14 Definition: Sei X ein NLR. Die Topologie $\sigma(X^*, X^) := \sigma(X^*, J(X))$ heißt auch die ***schwach**-Topologie*** von X^*. Weiterhin definieren wir für X^* die Eigenschaften ***schwach** *konvergent*** bzw. ***schwach** Cauchy-*Folge***, und eine Teilmenge von X heißt ***schwach** *abgeschlossen*** bzw. ***schwach** *beschränkt*** bzw. ***schwach** *kompakt***, bzw. ***schwach** *folgenkompakt***, wenn sie diese Eigenschaft in der schwach*-Topologie hat.

Bemerkung 1: Die schwache*-Topologie ist also die schwächste Topologie auf X^*, in der alle Funktionale aus $J(X)$, also der Form $\varphi(f) := f(x), x \in X$ stetig sind. Wegen $J(X) \subset X^{**}$ ist sie für nicht-reflexive Banachraüme (beachte: Dualräume sind nach I.4.14 volständig) schwächer als die schwache Topologie $\sigma(X^*, X^{**})$ auf X^* und offenbar bei reflexiven Banachräumen gleich.

Analog wie Lemma II.4.7 läßt sich zeigen:

II.4.15 Lemma: Sei X ein linearer normierter Raum. Dann gelten:

1. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* konvergiert schwach* gegen $f \in X^*$ genau dann, wenn $f_n(x) \to f(x)$ gilt für alle $x \in X$.
2. Eine Menge $S \subset X^*$ ist schwach* beschränkt genau dann, wenn $\sup_{f\in S} |f(x)| < \infty$ für alle $x \in X$.
3. Eine schwach* konvergente Folge ist schwach*beachränkt.

Analog wie Lemma II.4.8 läßt sich zeigen:

II.4.16 Lemma: Sei X ein LNR. Dann ist jede schwach* beschränkte Teilmenge $S \subset X^*$ auch beschränkt in der Norm.

Aus den Lemmata II.4.7 , II.4.8 , II.4.15 und II.4.16 ergibt sich

II.4.17 Korollar: Sei X ein lineare normierter Raum. Dann gelten

1. Jede in X schwach konvergente Folge ist beschränkt.
2. Jede in X^* schwach* konvergente Folge ist beschränkt.

Im nächsten Abschnitt werden wir Reflexivität weiter studieren und dabei gelegentlich X mit $J(X)$ identifizieren, also $X \subset X^{**}$ annehmen.

II.5 REFLEXIVE RÄUME UND KOMPAKTHEIT

Reflexive Räume sind besonders deswegen wichtig, weil für sie Kompaktheits-Sätze gelten, die die Heine-Borel-Eigenschaft in unendlich-dimensionalen LNR ersetzen. Zunächst bemerken wir, daß reflexive LNR notwendig Banachräume sein müssen. Dies folgt aus $X = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$, denn letzterer Raum ist vollständig (s. Satz 1.4.14). Die einfachsten reflexiven Räume sind Hilberträume und auch die im vorigen Abschnitt definierte Abbildung J läßt sich konkret angeben.

II.5.1 Definition: Sei X ein Prä-Hilbertraum. Für $x_o \in X$ sei

$$\begin{aligned} (\cdot, x_o) \ : \ X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto (x, x_o) \end{aligned} \quad ,$$

und sei

$$\begin{aligned} R \ : \ X &\longrightarrow X^* \\ R(x) &:= (\cdot, x) \end{aligned} \quad .$$

II.5.2 Lemma: Sei X ein Hilbertraum. Mit der sog. **Riesz -*Abbildung*** R kann X^* mit X identifiziert werden. R ist konjugiert linear, bijektiv und isometrisch. Dann kann X^{**} mit X durch $J := \tilde{R} \circ R$ identifiziert werden, wobei $\tilde{R} : X^* \to X^{**}$ analog definiert ist.

Beweis: Der erste Teil ist der Rieszsche Darstellungssatz (I.5.14)für stetige lineare Funktionale auf X. Dann versehe X^* mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{X^*} := (R^{-1}g, R^{-1}f)_X \quad \text{mit Norm} \quad \|f\|_{X^*} = \|R^{-1}\|_X \ .$$

Auf $F \in X^{**}$ wende wieder den Rieszschen Darstellungssatz (I.5.14) an, d.h. zu F existiert genau ein $\varphi \in X^*$ mit $F = \tilde{R}(\varphi)$. Wegen $\varphi = Rf$ für ein $f \in X$ gilt $F = \tilde{R}(Rf) = Jf$. Da R und $\tilde{R}$ bijektiv und isometrisch sind, ist dies auch J. □

II.5.3 Lemma:

1. Ein abgeschlossener linearer Unterraum eines reflexiven LNR X ist wieder reflexiv.
2. Ein LNR X ist reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis: Sei M ein abgeschlossener linearer Unterraum von X

1.: Zu $f \in X^*$ definiere seine Restriktion $Rf := f|_M$ auf M. Dann gilt $\|Rf\|_{M^*} \leq \|f\|_{X^*}$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (II.3.4), angewendet auf M , ist R surjektiv von $X^* \to M^*$.

Definiere mit R einen Prolongationsoperator $P : g \in M^{**} \to (X^*)'$ durch
$P(g)(f) := g(Rf) \quad (f \in X^*)$. Dann ist Pg wegen
$|(Pg)(f)| \le \|g\|_{M^{**}} \|Rf\|_{M^*} \le \|g\|_{M^{**}} \|f\|_{X^*}$ stetig auf X^*. Wegen der Reflexivität von X existiert zu $Pg \in X^{**}$ ein $x \in X$ mit $J(x) = Pg$, also $(Pg)(f) = f(x)$ für alle $f \in X^*$. Wenn gezeigt wird, daß $x \in M$ ist, so ist die Behauptung bewiesen, denn für jedes $\varphi \in M^*$ existiert ein $f \in X^*$ mit $Rf = \varphi$ und daher
$g(\varphi) = g(Rf) = (Pg)(f) = f(x) = \varphi(x)$, d.h. $g = Jx$, bzw. $J(M^{**}) = M$.
Nehme nun $x \notin M$ an. Dann existiert nach dem Fortsetzungssatz (II.3.4) ein $f_0 \in X^*$ mit $f_0(M) = 0$ und $f_0(x) \neq 0$ (Ersetze in I.3.4 M durch $M \bigoplus \mathbb{K}x$ und definiere F durch $F(m + \alpha x) := \alpha$. Das Funktional $f_0 := \widetilde{F}$ leistet das Gewünschte, denn

$$0 \neq f_0(x) = (Pg)(f_0) = g(Rf_0) = g(0) = 0, \qquad \text{Widerspruch!} .$$

2.: Sei X reflexiv und $x''' \in X^{***}$ gegeben. Dann ist $x' : X \to \mathbb{K}$ definiert durch $x'(x) := x'''(J(x))$ linear und stetig, also $x' \in X^*$. Wir zeigen, daß $x''' = J'(x')$ mit der kanonischen Abbildung J' gilt. Da X reflexiv ist, kann jedes $x'' \in X^{**}$ als $x'' = J(x)$ dargestellt werden und es gilt

$$x'''(x'') = x'''(J(x)) = x'(x) = (J(x))(x') = x''(x') \quad \text{für alle} \quad x'' \in X^{**} ,$$

d.h. x''' ist das Bild der kanonischen Abbildung von x' .
Sei andererseits X^* reflexiv. Dann ist $X^{**} = (X^*)^*$ nach dem gerade Bewiesenen reflexiv. Nach 1. ist dies auch der abgeschlossene Unterraum $J(X)$ und daher X auf Grund nachfolgender Bemerkung. □

II.5.4 Bemerkung: Ist X reflexiv und I ein isometrischer Isomorphismus von X auf einen linearen normierten Raum Y, so ist Y auch reflexiv.

Beweis: Zu $G \in Y^{**}$ definiere $F \in X^{**}$ per $F(f) := G(f \circ I^{-1}) = G(g)$ für $f \in X^*$ beliebig mit zugehörigem $g \circ I = f$ definiert durch $g(y) := f(x), y = Ix$.
Zu F finde $z \in X$ per Reflexivität mit $Jz = F$, d.h. $F(f) = f(z)$ für $f \in X^*$. Setze dann $w := Iz$, und es folgt $G(g) = f(I^{-1} \circ z) = g(w)$ bzw. $G = Jw$. □

II.5.5 Lemma: Ein reflexiver LNR X ist genau dann separabel (I.3.11), wenn X^* dies ist.

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus $\Leftarrow$, denn ist X separabel, so auch X^{**} wegen des kanonischen Isomorphismus zwischen beiden Räumen. Mit $\Leftarrow$ folgt die Aussage von X^{**} nach X^*.
$\Leftarrow$ Sei X^* separabel. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^*, deren abgeschlossene Hülle gleich X^* ist. Bilde die Menge aller Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten, dann ist diese Menge abzählbar und dicht in X^*. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Menge. Zu jedem solchen g_n wähle $x_n \in X$ mit $|g_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|g_n\|$, $\|x_n\| = 1$. Sei L die Menge aller Linearkombinationen der $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit rationalen Koeffizienten und $\overline{L}$ der Abschluß von L in X. Wir nehmen $\overline{L} \neq X$ an, dann existiert $x_0 \in X \setminus \overline{L}$. Wie im Beweis zu Korollar II.3.5 existiert ein Funktional $f_0 \in X^*$ mit $f_0(x_0) = 1$ und $f_0(\overline{L}) = 0$. Wähle eine Teilfolge der $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, daß $\lim_{k\to\infty} \|f_0 - g_{n_k}\|_{X^*} = 0$. Dann folgt

$$\|f_0 - g_{n_k}\|_{X^*} = \|x_{n_k}\| \|f_0 - g_{n_k}\| \ge |f_0(x_{n_k}) - g_{n_k}(x_{n_k})| = |g_{n_k}(x_{n_k})| \ge \frac{1}{2}\|g_{n_k}\|$$

wegen $\|x_{n_k}\| = 1$. Also gilt auch $\lim_{k\to\infty} \|g_{n_k}\|_{X^*} = 0$ und folglich $\|f_0\| = 0$. Widerspruch. □

Wir kommen nun zu zwei zentralen Sätzen über Kompaktheit. Der erste verwendet noch nicht die Reflexivität, gilt aber nur in der schwach*-Topologie.

II.5.6 Satz: Ist X ein separabler LNR, so ist seine abgeschlossene Einheitskugel in X^* ***schwach*** * ***folgenkompakt*** , d.h. jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\subset X^*$ enthält eine schwach* konvergente Teilfolge mit Limes $f^* \in \overline{B_1(0)}$, also $f^*(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ für alle $x \in X$ und $\|f^*\| \le 1$.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die dicht in X ist. Dann ist die Folge $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{K}$ und enthält daher eine konvergente Teilfolge $(f_{n,1}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte $(f_{n,1}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$, diese Folge ist beschränkt und enthält eine konvergente Teilfolge $(f_{n,2}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Erhalte eine Diagonalfolge $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$, die für jedes x_k, $k\in\mathbb{N}$ konvergent ist. Dann ist $(f_{n,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes x eine Cauchyfolge, denn für $n,m,k\in\mathbb{N}$ groß genug gilt :

$$\begin{aligned} |f_{n,n}(x)-f_{m,m}(x)| &\leq |f_{n,n}(x)-f_{n,n}(x_k)|+|f_{n,n}(x_k)-f_{m,m}(x_k)| \\ &+ |f_{m,m}(x_k)-f_{m,m}(x)|/20pt)(*) \\ &\leq 2\|x-x_k\|+|f_{n,n}(x_k)-f_{m,m}(x_k)|\leq 2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Daher existiert $\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(x) =: f^*(x)$, und nach II.1.4 ist $f^*\in X^*$. Für $m\to\infty$ in $(*)$ folgt $|f^*(x)-f_{n,n}(x)|\leq 3\varepsilon$, also $f\in x^*$ und $|f^*(x)|\leq\|x\|$ wegen $\|f_{n,n}\|\leq 1$. □

II.5.7 Satz: (Beschränktheit und schwache Folgenkompaktheit) Ist X ein reflexiver LNR, so ist eine Menge A in X genau dann beschränkt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A eine schwach konvergente Teilfolge enthält. Ferner ist die abgeschlossene Einheitskugel in X schwach folgenkompakt.

Beweis: Sei $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|\leq C<\infty$ für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Sei M der Abschluß von $\operatorname{span}\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ mit rationalen Koeffizienten. Dann ist M separabel. Ferner ist M nach Lemma II.5.3 als abgeschlossener Unterraum wieder reflexiv, und nach Lemma II.5.5 ist auch M^* separabel. Die kanonische Abbildung $J: M\to M^{**}$ bildet eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M in eine beschränkte Folge $(Jx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M^{**} ab. Wende den vorherigen Satz auf M^* an. Daher enthält $(Jx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach*-konvergente Teilfolge $(Jx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in M^{**}, d.h. $(Jx_{n_k}(g))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $y(g)$ mit $y\in M^{**}$ für alle $g\in M^*$.
Nach Definition von J ist aber $Jx_{n_k}(g)=g(x_{n_k})$, also ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent in der schwachen Topologie des abgeschlossenen Unterraumes M von X. Bildet man zu beliebigem $f\in X^*$ die Restriktion $g=f|_M\in X^*$, so ist $g(x_{n_k})=f(x_{n_k})$ und $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist sogar schwach konvergent in X. Der Grenzwert dieser Folgen ist nach Obigem gleich $y(g)$ mit $y\in M^{**}$. Es gilt aber $y=Jx$ mit $x\in M$ wegen der Reflexivität von M , also konvergiert $x_{n_k}\to x$ schwach.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\|x_n\|\leq 1$. Nach dem Vorherigen existiert eine Teilfolge mit Grenzwert $x\in M$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (II.3.1) existiert zu diesem x ein $f^*\in X^*$ mit $|f^*(x)|=\|x\|$ und $\|f^*\|=1$. Dann folgt

$$\|x\|=|f^*(x)|=\lim_{k\to\infty}|f^*(x_{n_k})|\leq\|f^*\|\limsup_{k\to\infty}\ |x_{n_k}\|\leq 1\ .$$

□

Es seien noch einige weitere Sätze angeführt (ohne Beweis, siehe dazu Rudin[8] und Dunford-Schwartz[3]). Eine Ergänzung zu Satz II.5.6 ist

II.5.8 Satz: (**Banach-Alaoglu**). In jedem LNR X ist die abgeschlossene Einheitskugel von X^* schwach*-überdeckungskompakt.

Die Aussage dieses Satzes ist allgemeiner als diejenige von Satz II.5.6, denn dort ist X als separabel vorausgesetzt. Der übliche Beweis benutzt den tiefliegenden

II.5.9 Satz: (**Tychonoff**). Das kartesische Produkt von kompakten Räumen ist kompakt.

Daraus ergibt sich zunächst als Verstärkung von Satz II.5.6:

II.5.10 Korollar: In einem reflexiven LNR ist die abgeschlossene Einheitskugel schwach kompakt.

Mit dem tiefliegenden

II.5.11 Satz: (**Eberlein-Šmulian** (s. z.B.Dunford-Schwartz[3], V.6.1) Sei A eine Teilmenge eines Banachraums. Dann sind äquivalent:

- A ist schwach folgenkompakt
- Der Abschluß von A in der schwachen Topologie ist kompakt

Zusammengefaßt läßt sich zeigen:

II.5.12 Satz: Für einen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- X ist reflexiv.
- Die abgeschlossene Einheitskugel von X ist schwach kompakt.
- Die abgeschlossene Einheitskugel von X ist schwach folgenkompakt.

Zur Ergänzung sei noch erwähnt

II.5.13 Lemma: In einem reflexiven LNR ist jede schwache Cauchyfolge schwach konvergent.

Eine wichtige Anwendung des Kompaktheitssatzes II.5.6 ist

II.5.14 Satz: (Hauptexistenzsatz für Variationsprobleme). Sei F ein konvexes Funktional auf einer abgeschlossenen und konvexen Teilmenge $E \subset X$ eines reflexiven LNR X. Weiterhin erfülle F die Eigenschaften

1. $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \infty \quad (x \in E)$. (***Koerzivität***) .
2. F ist nach unten stetig auf E, d.h.:

$$\text{Aus} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{folgt} \quad \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \;\geq\; F(x) \quad .$$

Dann wird $\inf_{x\in E} F(x)$ angenommen.

Beweis: Betrachte für $R > 0$ die Niveaumenge

$$L_R(F) = \{x \in E \mid F(x) \leq R\} \; .$$

Dann gilt $\inf_{u\in E} F(u) = \inf\{F(x) \mid x \in L_R(F)\}$ für ein $R > 0$. Die Menge $L_R(F)$ ist beschränkt und konvex wegen der Koerzivität von F , und weil F konvex ist. Die Menge $L_R(F)$ ist ferner abgeschlossen, denn aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \in L_R(F)$, folgt $F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \leq R$. Also ist $L_R(F)$ schwach abgeschlossen nach Lemma II.4.9 . Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in $L_R(F)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{u\in L_R(F)} F(u)$, dann enthält $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz II.5.7 eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$ und $x \in L_{\mathcal{R}}(F)$ wegen der schwachen Abgeschlossenheit .
Nach Bemerkung II.4.11 existieren Konvexkombinationen der Form $y_l = \sum_{j=n_l}^{m_l} \beta_{j,l} x_{n_j}$ der $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} = \infty$, die in der Norm gegen x^* konvergieren. Weil F nach unten stetig und konvex ist, gilt dann

$$\begin{aligned} F(x^*) \quad &\leq \quad \liminf_{l\to\infty} F(y_l) = \liminf_{l\to\infty} F(\sum_{j=n_l}^{m_l} \beta_{j,l} x_{n_j}) \\ &\leq \quad \liminf_{l\to\infty} \sup_{n_j \geq n_l} F(x_{n_j}) \leq \liminf_{l\to\infty} \; (\inf_{x\in E} F(x) + \varepsilon_l), \varepsilon_l \to 0. \end{aligned}$$

Also $F(x^*) \leq \inf_{x \in E} F(x)$. □

Anwendungen dieses Satzes findet man z.B. in M.Struve [10], Abschnitt I.1.

Eine wichtige hinreichende Bedingung für die Reflexivität ist

II.5.15 Satz: (**Milman**) Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.

Beweis: Gegeben sei $\xi \in X^{**}$ mit $\|\xi\|_{X^{**}} = 1$. Zeige die Existenz von $x \in X$ mit $Jx = \xi$, d.h. $\xi(f) = f(x)$ für alle $f \in X^*$, $\|f\| = 1$.
Sei also $f \in X^*$, $\|f\| = 1$. Nach Definition von $\|\xi\|_{X^{**}} = 1$ existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* mit $f_1 = f$, $f\|f_n\|_{X^*} = 1$ und $1 \geq \xi(f_n) \geq 1 - \frac{1}{n} in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \operatorname{span}\{\beta \in \mathbb{R}^n \mid \beta_i = f_i(x), x \in B_1(0), 1 \leq i \leq n\}$. Zeige dann die Existenz von $x_n \in B_1(0)$ mit $f_i(x_n) = \xi(f_i) =: \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$. Annahme: Ein solches x_n existier nicht. Dann ist der Vektor $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \notin M_n$. Nach dem Fortsetzungssatz (I.5.14) existiert ein Funktional Λ auf $\mathbb{R}^n$, welches M_n und α trennt, d.h. $\Lambda(\alpha) = 1$, $\Lambda(M_n) = \{0\}$. In $\mathbb{R}^n$ ist Λ durch $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ darstellbar, d.h. es gibt λ_i, $1 \leq i \leq n$, mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 1$, $\Lambda(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$ für alle $x \in B_1(0)$.
Also ist $\|f\|_{X^*} = 0$ und

$$0 = \xi(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(f_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 1 \ ,$$

Widerspruch. Es folgt

$$1 - \tfrac{1}{n} \leq \xi(f_n) = f_n(x_n) \leq \|x_n\| \leq 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \ .$$

Für $n \geq m$ folgt

$$1 - \tfrac{1}{n} \leq |\xi(f_n)| = \left|\tfrac{1}{2} f_n(x_n + x_m)\right| \leq \left\|\tfrac{1}{2}(x_n + x_m)\right\| \leq \tfrac{1}{2}(\|x_n\| + \|x_m\|) \leq 1 \ ,$$

daher auch $\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\| \to 1$ für $n, m \to \infty$. Wegen der gleichmäßigen Konvexität bilden die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit Limes x . Nach Konstruktion gilt

$$f(x) = f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \xi(f_1) = \xi(f_1) \ .$$

□

Als Anwendung dieses Satzes folgt, daß die Lebesgue-Räume $L_p(\Omega)$ und die Folgenräume l_p reflexiv sind.

Wegen seiner Bedeutung sei zum Abschluss der Satz über die schwach*-Kompaktheit für den Fall der Lebesgue-Räume formuliert

II.5.16 Satz: Es sei $\{f_n\}$ eine beschränkte Folge in $L_p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$ und $g \in L_p(\Omega)$, sodaß

$$\lim_{k\mapsto\infty} \int_\Omega f_{n_k}(x)\varphi(x)d\mu = \int_\Omega g(x)\varphi(x)d\mu \quad \text{für alle} \quad \varphi \in L_q(\Omega) \ ,$$

wobei 1/p +1/q =1 ist.
Im Falle $p = 1$ gilt die Aussage (**Helly-Bray -*Satz***)

$$\lim_{k\mapsto\infty} \int_a^b \varphi(x)d\mu_{n_k} = \int_\Omega \varphi(x)d\mu \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C[a,b]$$

für beschränkte Folgen $\{\mu_n\}$ in $NBV[a,b]$, dem Dualraum von $C[a,b]$, wobei das Integral ist im Riemann-Stieltjes Sinne zu verstehen ist.

Beweis: Anwendung von Satz II.5.7 auf die Räume $L_p(\Omega) = (L_q(\Omega))^*, 1/p + 1/q = 1$ für $1 < p < \infty$ und $NBV[a,b] \cong C[a,b]^*$ im Falle $p = 1$.

Kapitel III

OPERATORENTHEORIE

III.1 KONJUGIERTE OPERATOREN

III.1.1 Definition: Seien X, Y LNR und $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ linear und $\mathcal{D}(T)$ ein dichter Teilraum von X . Sei $y' \in Y^*$, und es existiere dazu ein $x' \in X^*$ mit

$$\langle Tx, y' \rangle := y'(Tx) = x'(x) =: \langle x, x' \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{D}(T) \ .$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt ***Dualitätspaarung*** auf $X \times X^*$. Dann setze $T'y' := x'$ und definiere dadurch den ***konjugierten Operator*** T', d.h. $\mathcal{D}(T') \subset Y^*$ ist die Menge aller $y' \in Y^*$, für die ein solches $x' \in X^*$ existiert.

III.1.2 Lemma:

1. T' ist wohldefiniert und es gilt

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{D}(T) \ , \ y' \in \mathcal{D}(T') \ .$$

2. T' ist linear und abgeschlossen.

Beweis: 1.: Seien $x'_1, x'_2 \in X^*$ mit $x'_1(x) = y'(Tx) = x'_2(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\langle x, x'_1 \rangle = \langle Tx, y' \rangle = \langle x, x'_2 \rangle$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, also $\langle x, x'_1 - x'_2 \rangle = 0$, wegen der Stetigkeit von $x'_1 - x'_2$ gilt dies für alle $x \in \overline{\mathcal{D}(T)} = X$, also $x'_1 = x'_2$.

2.: Die Linearität ist klar. Zur Abgeschlossenheit sei $y'_n \to y \in Y^*$ eine Folge in $\mathcal{D}(T')$ und $x'_n = T'y'_n \to x' \in X^*$, dann zeige $x' = T'y'$. Dies folgt aber aus

$$\langle Tx, y' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx, y'_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, T'y'_n \rangle = \langle x, x' \rangle \ .$$

$\square$

Bemerkung: Im Falle, daß X und Y Hilbert-Räume sind, identifiziert man die Dualräume X^*, Y^* nach dem Rieszschen Darstellungssatz (I.5.14) mit X bzw. Y und die Dualitätspaarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit den Skalarproduktn $(\cdot, \cdot)$. Dann ist die obige Definition mit Definition I.5.15 des adjungierten Operators identisch.

III.1.3 Satz: Seien X, Y LNR und $T : X \longrightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

1. T ist stetig.
2. $T' \in L(Y^*, X^*)$ ist stetig.

Ist zusätzlich X Banachraum, so ist dazu äquivalent

1. T ist ***schwach folgenstetig***, d.h. falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x'\rangle = 0$ ist für alle $x' \in X^*$, so folgt $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, y'\rangle = 0$ für alle $y' \in Y^*$.

Beweis: 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Wegen $\|T'y'\| = \|y' \circ T\| \leq \|y'\|\|T\|$ gilt $\|T'\| \leq \|T\|$, falls T stetig. Falls T' stetig ist, gilt nach Korollar II.3.7:

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup_{\|y'\|\leq 1}\|T'y'\| = \sup_{\|y'\|\leq 1}\sup_{\|x\|\leq 1}|T'y'(x)| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y'\|\leq 1}|y'(Tx)| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| = \|T'\|.\end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 3. : Es gelte $\mathcal{D}(T') = Y^*$. Dann gilt $T'y' = x' \in X^*$ für beliebiges $y' \in Y^*$ und

$$\langle Tx_n, y'\rangle = \langle x_n, T'y'\rangle =: \langle x_n, x'\rangle \to 0 \quad , \quad \text{falls } x_n \to 0,\ n \to \infty \ .$$

3. $\Rightarrow$ 1. : Aus $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x'\rangle = 0$ für alle $x' \in X^*$, daher

$$F_{y'}(x_n) := \langle Tx_n, y'\rangle \to 0 \quad \text{für alle} y' \in Y^* \ ,$$

d.h. $F_{y'}$ ist stetiges lineares Funktional auf X für jedes $y' \in Y^*$. Es gilt $|F_{y'}(x)| \leq \|y'\|_{Y^*}\|Tx\|$, also $\sup_{\|y'\|_{Y^*}\leq 1}|F_{y'}(x)| \leq \|Tx\|$ für alle $x \in X$, d.h. die Familie $F_{y'}, y' \in Y^*$ ist punktweise beschränkt. Da X Banachraum ist, läßt sich das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (II.1.1) anwenden und Korollar II.3.7 liefert

$$\infty > \sup_{\|y'\|\leq 1}\sup_{\|x\|\leq 1}|F_{y'}(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y'\|\leq 1}|y'(Tx)| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| = \|T\| \ .$$

□

III.1.4 Lemma: Seien X, Y, Z LNR und seien $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, wobei $\mathcal{D}(T) = X$, $\mathcal{D}(S) = Y$. Dann ist $ST \in L(X, Z)$ und $(ST)' = T'S'$.
Für $Id \in L(X)$ gilt $Id' = Id \in L(X^*, X^*)$.
Hat T eine beschränkte Inverse T^{-1} auf ganz Y, so hat $(T')^{-1}$ eine beschränkte Inverse auf ganz X^* mit $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Beweis: Sei $z' \in Z^*$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$\langle x, T'S'z'\rangle = \langle Tx, S'z'\rangle = \langle STx, z'\rangle = \langle x, (ST)'z'\rangle \ .$$

Weiterhin gilt $\langle x, Id'x'\rangle = \langle Idx, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$, also $Id'x' = x'$, d.h. $Id = Id'$. Wende dies an auf $S = T^{-1} \in L(Y, X)$. Dann gilt $Id = Id' = (TT^{-1})' = (T^{-1})'T'$, d.h. $(T^{-1})'$ ist Linksinverse zu T'. Analog zeigt man, daß $(T^{-1})'$ Rechtsinverse ist. □

Als Verallgemeinerung des Begriffs des orthogonalen Komplements im Hilbert-Raum definiert man nun

III.1.5 Definition: Sei M ein linearer Unterraum von eines LNR X und N ein linearer Unterraum von X^*. Dann sind der ***Annihilator*** $M^\perp$ von M in X^* und der Annihilator ${}^\perp N$ von N in X definiert durch

$$\begin{aligned}M^\perp &:= \{\ x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle = 0 \ \text{ für alle } \ x \in M\ \} \ , \\ {}^\perp N &:= \{\ x \in X \mid \langle x, x^*\rangle = 0 \ \text{ für alle } \ x^* \in N\} \ .\end{aligned}$$

III.1.6 Lemma:

1. ${}^{\perp}N$ ist abgeschlossen in X.
2. $M^{\perp}$ ist schwach*-abgeschlossen in X^*.
3. ${}^{\perp}(M^{\perp})$ ist gleich dem Abschluß $\overline{M}$ von M in X.
4. $({}^{\perp}N)^{\perp}$ ist der schwach*-Abschluß von N in X^*.

Beweis: Wir beweisen nur die ersten beiden Aussagen , die später benötigt werden.
1.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in ${}^{\perp}N$ mit $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ für ein $x \in X$. Für alle $x^* \in N$ gilt dann

$$|\langle x, x^*\rangle| = |\langle x - x_n, x^*\rangle| \leq \|x^*\|\|x_n - x\| \to 0$$

für $n \to \infty$, also $x \in^{\perp} N$.
2.: Sei $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $M^{\perp}$ mit $\langle z, y_n^*\rangle \to \langle z, y^*\rangle$ für alle $z \in X$ und ein $y^* \in X^*$. Für alle $w \in M$ und beliebiges $x \in X$ gilt

$$\langle x, y^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, y_n^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x - w, y_n^*\rangle = \langle x - w, y^*\rangle = \langle x, y^*\rangle - \langle w, y^*\rangle\ ,$$

also $\langle w, y^*\rangle = 0$ für alle $w \in M$, also $y^* \in M^{\perp}$. □

Im folgenden soll die Lösbarkeit von Operatorengleichungen studiert werden. Die grundlegenden Begriffe dazu sind

Bemerkung: Ein linearer Operator T ist per Definition surjektiv, wenn $\mathcal{R}(T) = Y$ und offensichtlich genau dann injektiv, wenn $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ gilt.
Im folgenden sollen daher Nullraum und Bildraum mit Hilfe des konjugierten Operators charakterisiert werden, um letztlich die Lösbarkeit von Operatorengleichungen zu studieren.

III.1.7 Lemma: Seien X, Y LNR und $T : X \longrightarrow Y$ linear mit $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$.

1. Es ist $\mathcal{N}(T') \ = \ \mathcal{R}(T)^{\perp}$.
2. Falls T zusätzlich stetig ist, so gilt $\mathcal{N}(T) \ = \ {}^{\perp}\mathcal{R}(T')$.

Beweis: Es gelten

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T') &= \{\ y' \in Y^* \ \mid\ T'y' = 0\ \} = \{\ y' \in Y^* \ \mid\ \langle x, T'y'\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T)\} \\
&= \{\ y' \in Y^* \ \mid\ \langle Tx, y'\rangle = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T)\} \\
&= \{\ y' \in Y^* \ \mid\ \langle z, y'\rangle = 0 \text{ für alle } z \in \mathcal{R}(T)\ \} = \mathcal{R}(T)^{\perp}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \{\ x \in X \ \mid\ Tx = 0\ \} \stackrel{(*)}{=} \{\ x \in X \ \mid\ \langle Tx, y'\rangle = 0 \text{ für alle } y' \in Y^*\ \} \\
&= \{\ x \in X \ \mid\ \langle x, T'y'\rangle = 0 \text{ für alle } y' \in Y^*\ \} =^{\perp} \mathcal{R}(T'),
\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ Korollar II.3.6 angewendet wurde. □

Als erstes Ergebnis der oben angestrebten Art erhalten wir dann

III.1.8 Satz: Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt

1. T' ist injektiv genau dann, wenn $\overline{\mathcal{R}(T)} = Y$ gilt.
2. T ist injektiv, falls $\mathcal{R}(T')$ schwach*-dicht in X^* ist.

Beweis: 1.: Es gilt $\langle Tx, y'\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, $y' \in \mathcal{R}(T)^\perp$.

$\Leftarrow$ Sei $y' \in Y'$. Da $\overline{\mathcal{R}(T)} = Y$, gibt es zu jedem $y \in Y$ eine Folge $(x_n) \in X$ mit

$$\langle y, y'\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y'\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad y \in Y \ .$$

Also ist $y' = 0$ und damit $\mathcal{N}(T') = \mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$ nach Lemma III.1.7. d.h. T' ist injektiv.

$\Rightarrow$ Ist umgekehrt $\overline{\mathcal{R}(T)} \neq Y$, so liefert der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (II.3.4) die Existenz eines $y_0' \in Y^*$ mit $\langle z, y_0'\rangle = 0$ für alle $z \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ und $\langle z_0, y_0'\rangle \neq 0$ für ein $z_0 \notin \overline{\mathcal{R}(T)}$. Daher ist $y_0' \in \mathcal{R}(T)^\perp$, jedoch $y_0' \neq 0$, d.h. es ist $\mathcal{R}(T)^\perp \neq \{0\}$. Wieder nach Lemma III.1.7 ist T' dann nicht injektiv.

2.: Sei der schwach*-Abschluß $\overline{\mathcal{R}(T')}^* = X^*$, d.h. für beliebiges $x' \in X^*$ existiert eine Folge $(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\langle z, Ty_n'\rangle = \langle z, x_n'\rangle \to \langle z, x'\rangle \quad \text{für alle} \quad z \in X \ .$$

Nun sei $x \in {}^\perp\mathcal{R}(T')$, d.h. $\langle x, T'y'\rangle = 0$ für alle $y' \in Y^*$. Wähle nun in $(*)$ $z := x$. Dann folgt $0 = \langle x, x'\rangle$ für $x \in^\perp \mathcal{R}(T')$ und alle $x' \in X^*$. Nach Korollar II.3.6 folgt $x = 0$ und damit ${}^\perp\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T) = \{0\}$ nach Lemma III.1.7 . Also ist T injektiv. □

Dieser Satz kann zu einer eleganten symmetrischen Aussage verschärft werden. Dazu muß man aber erheblich mehr arbeiten. Lemma III.1.7 muß ergänzt werden. Das Gegenstück zu Teil 2. lautet:

III.1.9 Lemma: Sei T stetig auf $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$. Dann gilt $\overline{\mathcal{R}(T)} \ = \ {}^\perp\mathcal{N}(T')$.

Beweis: Sei $y = Tx \in \mathcal{R}(T)$. Für $y' \in \mathcal{N}(T')$ gilt $T'y' = 0$ und daher $y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$, also $\mathcal{R}(T) \subset^\perp \mathcal{N}(T')$. Nach Lemma II.1.6 ist ${}^\perp\mathcal{N}(T')$ abgeschlossen, also auch $\overline{\mathcal{R}(T)} \subset^\perp \mathcal{N}(T')$.
Zeige nun umgekehrt $y \notin \overline{\mathcal{R}(T)} \Rightarrow y \notin^\perp \mathcal{N}(T')$. $\overline{\mathcal{R}(T)}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von Y. Sei $y \notin \overline{\mathcal{R}(T)}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (II.3.1) existiert ein $y' \in Y^*$ mit $y'(\overline{\mathcal{R}(T)}) = \{0\}$ und $y'(y) \neq 0$. Insbesondere ist $y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$, also $y' \in \mathcal{N}(T')$. Daher ist $y \notin^\perp \mathcal{N}(T')$, da $y'(y) = 0$ gelten müßte. □

Am schwierigsten ist das Gegenstück zu Teil 1. zu beweisen, da das direkte Analogon $\overline{\mathcal{R}(T')} = \mathcal{N}(T)^\perp$ nicht immer gilt.

III.1.10 Satz: Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen in Y, so gilt $\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T)^\perp$. Speziell ist $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen in X^*.

Zum Beweis zeige zuerst

III.1.11 Lemma: Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ habe abgeschlossenes Bild. Dann existiert ein $K \geq 0$, sodaß für alle $y \in \mathcal{R}(T)$ ein $x \in X$ existiert mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq K\|y\|$.

Beweis: Der Quotientenraum $X/\mathcal{N}(T)$ ist mit der Norm

$$\|x + \mathcal{N}(T)\| := dist(x, \mathcal{N}(T)) \qquad (x + \mathcal{N}(T) \in X/\mathcal{N}(T)) \tag{$*$}$$

ein Banachraum. Ist $\pi \ : \ X \longrightarrow X/\mathcal{N}(T) \quad , \quad x \longrightarrow x + \mathcal{N}(T)$, so ist die sog **kanonische Projektion**

$$\hat{T} : X/\mathcal{N}(T) \longmapsto \mathcal{R}(T) \quad , \quad \hat{T}(x + \mathcal{N}(T)) := Tx$$

wohldefiniert, bijektiv und stetig, und es gilt $T \ = \ \hat{T} \circ \pi$ s.[Ü]. Nach dem Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7) ist $\hat{T}^{-1}$ ebenfalls stetig. Sei nun $y \in \mathcal{R}(T)$ und $\widetilde{x} \in X$ mit

$Tx = y$. Nach $(*)$ gibt es ein $g \in \mathcal{N}(T)$ mit $\|\widetilde{x} - g\| \leq 2\|\widetilde{x} + \mathcal{N}(T)\|$. Für $x := \widetilde{x} - g$ folgt dann $Tx = y$ und

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq 2\|x + \mathcal{N}(T)\| = 2\|\hat{T}^{-1}\hat{T}(x + \mathcal{N}(T)\| \\ &= 2\ \|\hat{T}^{-1}Tx\| \ = \ 2\|\hat{T}^{-1}y \ \leq \ \|\hat{T}^{-1}\|\ \|y\| =: K\ \|y\|\ . \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz III.1.8: Für $T'y' \in \mathcal{R}(T')$ gilt $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für $x \in \mathcal{N}(T)$, also $\mathcal{R}(T') \subset \mathcal{N}(T)^\perp$. Sei nun $x' \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Betrachte die wohldefinierte lineare Abbildung

$$z' : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathbb{K} \quad , \quad Tx \mapsto x'(x)\ .$$

Dann ist z' stetig, denn ist K eine Konstante wie in Lemma III.1.11, so gilt für $y \in \mathcal{R}(T)$ und passendes x mit $Tx = y$

$$|z'(y)| \ = \ |x'(x)| \ \leq \ \|x'\|\|x\| \ \leq \ \|x'\|\ K\ \|y\|\ .$$

Setze z' zu y' mit dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (II.3.4) fort. Dann gilt für alle $x \in X$

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = T'y'(x)\ ,$$

also $x' = T'y'$, was $\mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T')$ zeigt. □

Ergänzend zu Satz III.1.8 gilt:

III.1.12 Satz: (***Satz vom abgeschlossenen Wertebereich***) Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossen.
2. $\mathcal{R}(T) \ = \ {}^\perp\mathcal{N}(T')$.
3. $\mathcal{R}(T')$ ist abgeschlossen.
4. $\mathcal{R}(T') \ = \ \mathcal{N}(T)^\perp$.

Beweis: 1. $\Leftrightarrow$2.: folgt direkt aus Lemma III.1.6 und III.1.7 . 1.

$\Rightarrow$ 3. und 1. $\Rightarrow$ 4.: Folgen aus Satz III.1.8 .

Bemerkung: Im Falle reflexiver Räume X und Y folgt durch ihn auch die Umkehrung. Denn auf T^* statt T liefert er zunächst die Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(T^{**})$. Sind nun J bzw. K die kanonischen Abbildungen von X nach X^{**} bzw. Y nach Y^{**}, so gilt $T^{**} = K \circ T \circ J^{-1}$ (s. Beweis des Satzes von Schauder (III.2.4) im nächsten Abschnitt) bzw. $T = K^{-1} \circ T^{**} \circ J$. Daraus folgert man leicht, daß $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist. Konkret: aus $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in Y$ folgt $y = Tx$ mit $x = J^{-1}w, w \in X^{**}$ und $T^{**}w = Ky$. Bezüglich eines vollständigen Beweises s.Werner [10, Theorem IV.5.1].

Nun zur angekündigten symmetrischen Aussage über die Lösbarkeit einer Operatorengleichung:

III.1.13 Satz: Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Dann gelten

1. T' hat genau dann eine stetige Inverse, falls $\mathcal{R}(T) = Y$ ist.
2. T hat genau dann eine stetige Inverse, falls $\mathcal{R}(T') = X^*$ ist.

Beweis:1.: $\Leftarrow$ Nach Satz III.1.7 ist T' injektiv und nach Satz III.1.12 $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen. Dann ist $T' : Y^* \longrightarrow \mathcal{R}(T')$ bijektiv von Y^* auf den Banachraum $\mathcal{R}(T')$ und daher $(T')^{-1}$ nach dem Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7) stetig.
$\Rightarrow$ Sei T' injektiv und $(T')^{-1}$ stetig. Dann ist $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen in X^*. Denn ist $x'_n \to x \in X^*$ Folge in $\mathcal{R}(T')$, so gilt $(T')^{-1}x'_n \to y' \in Y^*$ wegen der Stetigkeit von $(T')^{-1}$. Da T' injektiv ist, gilt aber $T'x' = y'$, also ist $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen. Nach Satz III.1.12 ist dann auch $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, und Satz III.1.8 ergibt $\overline{\mathcal{R}(T)} = Y$, also $\mathcal{R}(T) = Y$.

2.: $\Rightarrow$ Wenn T eine stetige Inverse hat, ist $\mathcal{R}(T)$ mit dem gleichen Argument wie eben abgeschlossen. Nach Satz III.1.12 ist $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen als auch schwach*-abgeschlossen und es gilt $\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T)^\perp$ gilt. Wegen der Bijektivität von T gilt $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, also $\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T)^\perp = X^*$.
$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{R}(T') = X^*$. Nach Satz II.1.7 ist T injektiv. Nach Satz III.1.12 ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, also T bijektiv von X auf den Banachraum $\mathcal{R}(T)$. Wieder zeigt der Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7) die Stetigkeit von T^{-1}. □

Bemerkung 1: Im Hilbertraum sind die Sätze III.1.12 und III.1.13 viel einfacher zu beweisen, wenn statt des konjugierten Operators T' der adjungierte Operator T^* genommen wird. In der Tat folgen aus den Beziehungen $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$ und $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$ von Lemma I.5.18 sofort die Äquivalenzen 1. $\Leftrightarrow$ 3. und 2. $\Leftrightarrow$ 4., und aus $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$ folgt direkt, daß $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T^*)^\perp$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist, d.h. 1. $\Leftrightarrow$ 2. in Satz III.1.11 . Ebenso ist Satz III.1.12 eine direkte Folge von Lemma I.5.7 .

Bemerkung 2: Andererseits lassen sich Satz III.1.11 und Satz III.1.12 auch auf abgeschlossene Operatoren in Banachräumen erweitern (s. Yosida, Kapitel VII.5).

Bemerkung 3: Im Falle kompakter Operatoren werden diese Aussagen im Rahmen der Riesz-Schauder-Theorie (s. Abschnitt IV.3) erheblich verschärft:

1. Es sind $\mathcal{R}(T), \mathcal{R}(T^*)$ immer abgeschlossen, sodaß statt Satz III.1.12 punktweise Aussagen möglich sind,

2. Die Nullräume $\mathcal{N}(\lambda I - T), \mathcal{N}(\lambda I - T^*)$ haben für $\lambda \neq 0$ endliche Dimension.

III.2 KOMPAKTE OPERATOREN

III.2.1 Definition: Seien X, Y LNR und $T : X \longrightarrow Y$ linear.

a) T heißt ***kompakt*** , falls jede beschränkte Menge $M \subset X$ durch T in eine präkompakte Menge $T(M)$ abgebildet wird.
Sei $K(X,Y)$ die Menge aller linearen kompakten Operatoren $T : X \longrightarrow Y$.

b) T heißt heißt ***vollstetig*** , falls für jede schwach konvergente Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine stark konvergente Teilfolge besitzt.

Zunächst sei bemerkt, daß ein kompakter Opereator T automatisch stetig ist, denn $\overline{T(B_1(0))}$ ist präkompakt bzw. total beschränkt und daher auch beschränkt.

III.2.2 Satz: Sei X LNR, Y Banachraum und $T : X \longrightarrow Y$ linear. Dann gelten

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. T ist kompakt.
2. $\overline{T(\overline{B_1(0)})}$ ist eine kompakte Menge in Y .
3. Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X existiert eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Ist T kompakt, so ist T vollstetig.

c) Ist X zusätzlich reflexiv, so ist $T \in L(X, Y)$ kompakt genau dann, wenn T vollstetig ist.

Beweis: a): Ist T kompakt, so ist $\overline{T(\overline{B_1(0)})}$ präkompakt und abgeschlossen, also eine kompakte Menge, d.h. 1. impliziert 2..

Sei $\overline{T(\overline{B_1(0)})}$ kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\|x_n\| \le R < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Dann liegen Tx_n in $R \cdot T(\overline{B_1(0)})$. Nach Satz I.3.23 ist $R \cdot \overline{T(\overline{B_1(0)})}$ folgenkompakt, d.h. 2. impliziert 3..

Gilt 3., so ist $\overline{T(\overline{B_1(0)})}$ präkompakt nach Satz I.3.23 , also T kompakt.

b): Es gelte $x_n \to x$ schwach, d.h. $f(x_n - x) \to 0$ für alle $f \in X^*$. Zu zeigen ist $y_n := Tx_n \to y := Tx$. Ist $g \in Y^*$, so ist $f := g \circ T \in X^*$ und es folgt

$$g(y_n - y) = g \circ T(x_n - x) = f(x_n - x) \to 0 \ ,$$

d.h. $y_n \to y$ schwach. Würde y_n nicht stark gegen y konvergieren, so existierte eine Teilfolge y_{n_k} mit $\|y_{n_k} - y\| \ge \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Andererseits folgt nach Korollar II.4.16 aus der schwachen Konvergenz die Beschränktheit der x_n. Da T kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $y_{n_{k_j}}$ mit Limes y. Widerspruch.

c): Dazu ist nur die Umkehrung zu b) zu zeigen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Weil X reflexiv ist, hat (x_n) nach Satz II.5.7 eine schwach konvergente Teilfolge. Ist T vollstetig, so werden schwach konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in stark konvergente Folgen $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgebildet. Nach 1. ist also T kompakt. □

III.2.3 Satz: Seien X, Y Banachräume. Dann gilt

1. $K(X, Y)$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von $L(X, Y)$.
2. Ist $T \in K(X)$ und $S \in L(X)$, so sind $TS \in K(X)$ und $ST \in K(X)$.

Beweis: 1.: Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $K(X, Y)$ und $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ für ein $T \in L(X, Y)$. Zeige nun, daß T kompakt ist. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\|x_m\| \le 1$. Jedes T_n ist kompakt, dann existieren Teilfolgen $(x^{(n)}_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodaß $\lim_{k\to\infty} T_n(x^{(n)}_{m_k}) = y_n$, wobei $(x^{(n)}_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x^{(n-1)}_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Dann existiert eine Diagonalfolge $(x^{(k)}_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} T_n(x^{(k)}_{m_k}) = y_n$. Dann zeigt man, daß die Folge $\{y_n\}$ konvergiert. Dazu betrachte

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &\le \underbrace{\|y_n - T_n(x^{(k)}_{m_k})\|}_{\to 0} + \underbrace{\|T_n(x^{(k)}_{m_k}) - T_m(x^{(k)}_{m_k})\|} \\
&\le \|T_n - T_m\|\|x^{(k)}_{m_k}\| \to 0 + \underbrace{\|T_m(x^{(k)}_{m_k}) - y_m\|}_{\to 0} \to 0 \ .
\end{aligned}$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und es gibt ein $y \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wegen

$$\|Tx^{(k)}_{m_k} - y\| \le \|(T - T_n)(x^{(k)}_{m_k})\| + \|T_n(x^{(k)}_{m_k}) - y_n\| + \|y_n - y\| \to 0$$

gilt $\lim_{k\to\infty} Tx^{(k)}_{m_k} = y$, indem man erst n und dann $k \to \infty$ betrachtet.

2.: Sei $B := \overline{B_1(0)}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B. Es ist auch $S(B)$ eine beschränkte Menge und daher $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(Sx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodaß $T(Sx_{n_k}) = (TS)(x_{n_k})$ konvergent ist. Nach Satz II.2.2 ist also $TS \in K(X)$.
Im zweiten Fall beachte, daß $\overline{T(B)}$ nach Satz III.2.2 eine kompakte Menge ist. Da stetige Abbildungen kompakte Mengen in kompakte Mengen abbilden (Satz I.1.23), ist auch $S(\ \overline{T(B)}\ )$ kompakt. Zeige nun $S(\ \overline{T(B)}\ ) = \overline{S(T(B))}$, dann ist die Behauptung bewiesen.
Sei dazu $y \in S(\overline{T(B)})$. Dann ist $y = Sz$ mit $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, $z_n \in T(B)$, also auch $y = \lim_{n\to\infty} Sz_n = \lim_{n\to\infty} STw_n$ mit $w_n \in B$, also $y \in \overline{ST(B)}$.
Sei umgekehrt $y \in \overline{S(T(B))}$. Dann gilt $y = \lim_{n\to\infty} STw_n = \lim_{n\to\infty} Sz_n$ mit $z_n = Tw_n, w_n \in B$. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{T(B)}$ mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$, also $z \in \overline{T(B)}$. Dann gilt $y = \lim_{k\to\infty} Sz_{n_k} = Sz$, d.h. $y \in S(\overline{T(B)})$. □

Bemerkung: Teil 2 dieses Satzes kann man auch unter den allgemeineren Vorausetzungen $T \in K(Z,Y)$ und $S \in L(X,Z)$ bzw. $T \in L(X,Z)$ und $S \in K(Z,Y)$ beweisen. Dies sei dem Leser überlassen.

III.2.4 Satz: (**Schauder**, 1930). Seien X ein LNR, Y ein Banachraum und $T \in L(X,Y)$. Dann gilt

$$T \in K(X,Y) \ \text{ genau dann, wenn } \ T' \in K(Y^*, X^*) \ .$$

Beweis: Sei T kompakt. Dann ist $K = \overline{T(\overline{B_1(0)})}$ ein kompakter metrischer Raum. Sei $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine durch ein $c > 0$ beschränkte Folge in Y'. Dann ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := (y'_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionale auf K durch c beschränkt und gleichgradig stetig, wie man aus

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |y'_n(y_1 - y_2| \le \|y'_n\| \ \|y_1 - y_2\| \le c\ \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in K)$$

folgert. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli (I.3.26) existiert eine auf K konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Daher gilt

$$\|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_l}\| = \sup_{\|x\|\le 1} |T'y'_{n_k}(x) - T'y'_{n_l}(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |y'_{n_k}(Tx) - y'_{n_l}(Tx)|$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} |(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \le \sup_{y\in K} |(f_{n_k}(y) - f_{n_l})y| \to 0 \ \text{ für } \ k,l \to \infty \ ,$$

d.h. $(T'y'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in X'. Also ist sie auch konvergent, und nach Satz II.2.2 ist T' kompakt.

Sei umgekehrt T' kompakt. Dann ist nach dem ersten Teil auch T'' auf X^{**} kompakt und $T''(B_1^{**})$ präkompakt. Seien J die kanonische Abbildung von X nach X^{**} und Q die kanonische Abbildung von Y nach Y^{**}, so gilt für alle $y' \in Y^*, x \in X$

$$\langle y', Q(Tx)\rangle = \langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y')\rangle = \langle T'y', Jx)\rangle = \langle y', T''Jx)\rangle \ .$$

Es folgt nach Teil 2. des vorigen Satzes, daß $QT = T''J$ kompakt ist und daher $QT(B_1(0)) = T''J(B_1(0))$. Weil J eine Isometrie ist, gilt weiter $QT(B_1(0)) \subset T''(B_1^{**})$. Daher ist $QT(B_1(0))$ präkompakt, und weil Q auch eine Isometrie ist, auch $T(B_1(0))$ präkompakt, d.h. T kompakt. □

Wir kommen zur Charakterisierung kompakter Operatoren durch 'einfache' Operatoren.

III.2.5 Definition: Seien X, Y zwei LNR. Ein Operator $T \in L(X,Y)$ heißt ***von endlichem Rang*** n , falls $dim\mathcal{R}(T) = n$ ist.

III.2.6 Lemma:

1. Jeder lineare Operator vom Rang n läßt sich darstellen als $Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i$, wobei $\lambda_i : X \longrightarrow \mathbb{K}$ linear und $\operatorname{span}(y_i)_{1 \le i \le n} = \mathcal{R}(T)$ ist. T ist genau dann stetig, wenn $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ stetig sind.
2. Stetige Operatoren von endlichem Rang n sind kompakt.

Beweis: [Ü].

Bemerkung: Nach Satz III.2.3 ist auch der Grenzwert (in $L(X,Y)$) von Operatoren von endlichem Rang kompakt. Für Anwendungen ist die Frage interessant, wann die Umkehrung gilt, d.h. ob kompakte Operatoren immer durch Operatoren von endlichem Rang approximiert werden können.

Bevor wir diese Frage behandeln, betrachten wir konkrete Beispiele:
Für $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offen und beschränkt definiere den Integraloperator $f \in L^p(\Omega_2) \mapsto Tf$ durch

$$Tf(x) := \int_{\Omega_1} K(x,y) f(y)\ dy \quad , \quad x \in \Omega_1 \quad , \qquad \text{mit Kern } K(x,y) \text{ auf } \Omega_1 \times \Omega_2 \ .$$

Solche Integraloperatoren entstehen z.B. durch Umformulierung eines Randwertproblems mittels Greenscher Funktion. Die Frage ist nun, welche Bedingung an K zu stellen ist, damit T wohldefiniert ist, nach $L^q(\Omega_1)$ abbildet stetig ist. Berechne dazu mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{q,\Omega_1} &= \left(\int_{\Omega_1} \left| \int_{\Omega_2} K(x,y) f(y)\ dy \right|^q\ dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\int_{\Omega_1} \left| \left(\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^{p'}\ dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_2} |f(y)|^p\ dy \right)^{\frac{1}{p}} \right|^q\ dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \|K\|_{p,q}\ \|f\|_{p,\Omega_2}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $\|K\|_{p,q} := \|\ \|K(x_1,x_2)\|_{p',\Omega_2}\|_{q,\Omega_1}$. Aus der Beschränktheit von $\|K\|_{p,q}$ folgt also die gewünschte Stetigkeit von T. Damit läßt sich auch die Kompaktheit zeigen:

III.2.7 Satz: Unter obigen Voraussetzungen an K und $\|K\| < \infty$ ist obiger Integraloperator stetig und kompakt von $L^p(\Omega_2) \longrightarrow L^q(\Omega_1)$ mit Norm

$$\|T\| \le \|K\|_{p,q} := \|\ \|K(x_1,x_2)\|_{p',\Omega_2}\|_{q,\Omega_1} \ .$$

Der Beweis der Kompaktheit geschieht durch Approximation von K durch Treppenfunktionen und anschließender Anwendung von Lemma III.2.6 und Satz III.2.3 .

Im Fall eines Hilbertraums ($p = q = 2$) nennt man kompakte Integraloperatoren auch **Hilbert-Schmidt-*Operatoren*** . In diesem Falle gilt zunächst schärfer

III.2.8 Lemma: Sei T ein Operator wie in Satz III.2.7 für $p = q = 2$ und $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(\Omega_2)$. Dann gilt

$$\|K\|_{2,2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|_{2,\Omega_2} \ .$$

Beweis: Für festes x bilde die Fourier-Koeffizienten des Kerns $a_n(x) := \int_{\Omega_2} K(x,y) u_n(y)\ dy$ als Funktion auf Ω_2. Die Parseval-Identität gibt dann

$$\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^2\ dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\overline{a_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega_2} K(x,y) u_n(y)\ dy \right|^2$$

und somit

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} |K(x,y)|^2 \; dy \; ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \Big| \int_{\Omega_2} K(x,y) u_n(y) \; dy \Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2_{2,\Omega_2} \; .$$

□

Damit läßt sich folgender Satz zeigen:

III.2.9 Satz: Eine stetiger Integraloperator T wie oben auf $L^2(\Omega)$ in sich (also mit $X = Y = L^2(\Omega)$, $p = q = 2$ ist genau dann kompakt, wenn für eine beliebige Orthonormalbasis $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2_{L^2,\Omega_1}$ konvergiert. Die Norm erfüllt dann $\|T\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2_{L^2,\Omega_1}$.

Beweis: Wir beweisen nur die Kompaktheit. Dazu sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem für $L^2(\Omega_2)$ und $A_n u := \sum_{j=1}^{n}(u,u_j)Tu_j$. Wegen $u = \sum_{j=1}^{\infty}(u,u_j)u_j$ folgt dann

$$\begin{aligned} \|Tu - A_n u\|^2 &= \Big\| \sum_{j=1}^{\infty}(u,u_j)Tu_j - \sum_{j=1}^{n}(u,u_j)Tu_j \Big\|^2 \leq \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} |(u,u_j)| \; \|Tu_j\| \Big)^2 \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |(u,u_j)|^2 \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Tu_j\|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Tu_j\|^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Operatornormen

$$\|T - A_n\|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Tu_j\|^2 \to 0 \; , \; n \to \infty \; ,$$

und die Behauptung folgt nach Satz III.2.3 .

Bemerkung: Im Falle symmetrischer kompakter Operatoren auf Hilberträumen wird in Abschnitt IV.2. gezeigt, daß sie über ihre Eigenfunktionen eine abzählbare Orthonormalbasis liefern, sodaß dann $\sum |\lambda_j|^2 < \infty$ für die Eigenwerte gilt. Allgemeiner kann man die Klasse der Operatoren in $L(X), X =$ Banachraum, mit $\sum |\lambda_j|^p < \infty, 1 \leq p \leq \infty$ betrachten. Speziell die Klasse mit $\sum |\lambda_j| < \infty$ heißt ***Spurklasse*** und ist ein Spezialfall der Klasse der ***nuklearen Operatoren*** (nach **Grotendieck**).

III.2.10 Definition: Seien X, Y Banachräume und Folgen $\{x_n^*\} \subset X^*, \{y_n\} \subset Y$ und Zahlen $\lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum |\lambda_n| < \infty$ gegeben. Dann heißt T definiert durch

$$Tx := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, x_n^* \rangle y_n \quad \in Y \;\; \text{für alle} \;\; x \in X$$

nuklearer Operator auf X nach Y.

Man kann zeigen, daß nukleare Operatoren kompakt sind (Übung). Sie verallgemeinern klarerweise die Fourier-Orthogonalreihen aus Abschnitt I.5.

Einen besonders wichtigen Spezialfall bilden ***kompakte Einbettungen***.

III.2.11 Definition: Seien X, Y Banachräume und $X \subset Y$, sodaß die Einbettung stetig ist, d.h. die Normen erfüllen $\|f\|_Y \leq C\|f\|_X$. Hat unter diesen Voraussetzungen jede in $\|\cdot\|_X$ beschränkte Folge eine in $\|\cdot\|_Y$ konvergente Teilfolge, so heißt die Einbettung $I : X \longrightarrow Y$ kompakt.

Bemerkung: Nach Satz III.2.2 ist diese Definition konsistent zu Definition III.2.2. Ist $T : Y \longrightarrow Y$ ein weiterer stetiger Operator, so ist $T = T \circ I : X \longrightarrow Y$ kompakt nach Satz

III.2.3. Die Einbettung $I : X \longrightarrow X$ ist aber nicht kompakt, falls X unendlichdimensional ist.

Zentrale Sätze über kompakte Einbettungen von Hölder- und Sobolev-Räumen sind:

III.2.12 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und seien

$$k_1, k_2 \geq 0 \ , \ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \ \text{ mit } \ k_1 + \alpha_1 > k_2 + \alpha_2 \ .$$

Im Fall $k_1 > 0$ gelte zusätzlich, daß zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in \Omega$ eine (stückweise differenzierbare) Kurve $\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ gibt, für deren Länge gilt $\int_0^1 |\dot\gamma(t)| \ dt \leq C|x_1 - x_2|$, wobei C nur von Ω abhängt.
Dann ist die Einbettung der Hölder-Räume $C^{k_1,\alpha_1}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{k_2,\alpha_2}(\overline{\Omega})$ kompakt.

III.2.13 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien

$$m_1 > m_2 \geq 0 \ \text{ und } \ 1 \leq p_1, p_2 < \infty \ .$$

1. Gilt $m_1 - \frac{n}{p_1} = m_2 - \frac{n}{p_2}$, so existiert die Einbettung $H_0^{m_1,p_1}(\Omega) \longrightarrow H_0^{m_2,p_2}(\Omega)$ und ist stetig.
2. Ist Ω beschränkt und $m_1 - \frac{n}{p_1} > m_2 - \frac{n}{p_2}$, so existiert die Einbettung $H_0^{m_1,p_1}(\Omega) \longrightarrow H_0^{m_2,p_2}(\Omega)$ und ist kompakt.
3. Ist Ω beschränkt und erfüllt die ***Kegelbedingung*** , d.h. zu jedem $x \in \Omega$ gibt es einen Kegel C_x mit Spitze x , der ganz in Ω liegt und unabhängig von x kongruent zu einem festen Kegel C ist. Dann gelten obige Aussagen auch für $H^{m,p}$ statt nur für $H_0^{m,p}$.

III.2.14 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt,

$$m \geq 1 \ , \ 1 \leq p < \infty \ , \ k \geq 0 \ \text{ und } \ 0 \leq \alpha \leq 1 \ .$$

1. Gilt $m - \frac{n}{p} = k + \alpha$ und $0 < \alpha < 1$, so existiert die Einbettung $H_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ und ist stetig.
2. Gilt $m - \frac{n}{p} > k + \alpha$, so existiert die Einbettung $H_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ und ist kompakt.
3. Erfüllt Ω die Kegelbedingung, so gelten obige Aussagen auch für $H^{m,p}$ statt für $H_0^{m,p}$.

Beweise: s. Alt [1].

Ein konstruktiver Zugang zu solchen Kompaktheitsaussagen ergibt sich durch Konstruktion von geeigneten Operatorenfolgen I_N von endlichem Rang N mit der Eigenschaft $(r \geq 1, p \geq q)$

$$\|f - I_N(f)\|_{p,\Omega} \leq C(r,p,q,\Omega) N^{-r+n(1/q-1/p)} \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_{q,\Omega} \qquad (*)$$

für alle $f \in C_0^\infty(\Omega)$, wobei $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ die Norm von $L_p(\Omega)$ bedeutet. Es gilt dann

III.2.15 Lemma: Gibt es Operatoren wie oben mit Eigenschaft $(*)$, so gilt Teil 2. von Satz III.2.13.

Beweis: Aus $(*)$ folgt nämlich für $r - n/q \ > \ - n/p$ und $p \geq q$, also $r > 0$,

$$\sup_{f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\|f - I_N(f)\|_{p,\Omega}}{\|f\|_{r,q,\Omega}} \leq C(r,p,q,\Omega) N^{-r+n(1/q-1/p)} \quad , \qquad \text{für alle } \ f \in C_0^\infty(\Omega)$$

mit $\|\cdot\|_{r,q,\Omega}$ als Norm von $H_0^{r,q}(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^{r,q}(\Omega)$ ist, folgt daraus $\|I - I_N\| \to 0, N \to \infty$, in der Operatornorm von $L(H_0^{r,q}(\Omega), L_p(\Omega)$. Nach Satz III.2.3 und Lemma III.2.6 ist dann I als Einbettung von $H_0^{r,q}(\Omega)$ in $L_p(\Omega)$ kompakt. Den allgemeineren Fall von Satz III.2.13 kann man auf diesen zurückführen. Man nehme $r = m_1 - m_2, q = p_1, p = p_2$ und betrachte D^α als Abbildung von $H_0^{m_1,q}(\Omega)$ in $H_0^{m_1-m_2,q}(\Omega) = H_0^{r,q}(\Omega)$. Dann ist D^α für jedes $|\alpha| \leq m_2$ stetig und $D^\alpha \cdot I$ nach Satz III.2.3 und Lemma III.2.6 kompakt als Abbildung von $H_0^{m_1,p_1}(\Omega)$ in $L_{p_2}(\Omega)$. Übersetzt man dies in Aussagen ̈ber Folgenkompaktheit, so bedeutet dies, daß die Identität von $H_0^{m_1,p_1}(\Omega)$ in $H_0^{m_2,p_2}(\Omega)$ kompakt ist. □

Bemerkung: Operatoren I_N vom Rang N, die die Identität im Sinne von $(*)$ approximieren, ergeben sich bei Hilberträumen automatisch aus einem Orthogonalsystem. Im Falle von Banachräumen ist eine natürliche Erweiterung das Konzept eines Biorthogonalsystems. , das weiter unten vorgestellt wird.
Andere Beweise für die obigen Sätze findet man bei Alt [1]. Wir behandeln nun das angesprochene Problem der Umkehrung der Aussage von Lemma II.2.6 . Dazu benötigen wir den wichtigen Begriff einer Schauder-Basis.

III.2.16 Definition: Sei X ein LNR. Eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt **Schauder-*Basis*** von X, falls es zu jedem $x \in X$ eindeutig bestimmte $\alpha_k \in \mathbb{K}$ gibt, sodaß $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = x$ in der Norm von X gilt.

Die Abbildung $x \mapsto (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist wohldefiniert und liefert durch $\lambda_k(x) := \alpha_k$ lineare Funktionale λ_k auf X. Diese haben per Definition die Eigenschaft $\lambda_k(e_j) = \delta_{k,j}$, die wir biorthogonal nennen. Dazu

III.2.17 Definition: Sei X ein Banachraum. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so heißt eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X^* dazu ***biorthogonal*** , falls $\lambda_i(f_n) = \delta_{in}$ gilt. In diesem Fall heißt $\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}\big)$ ***biorthogonales System***.

Falls ein biorthogonales System existiert, so müssen seine Elemente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig sein, denn
$$g = \sum_{i=1}^\infty \beta_i f_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \lambda_k(g) = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \lambda_k(f_i) = \beta_k.$$
Genauso folgt die lineare Unabhängigkeit der $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Aus ihrer Existenz folgt aber umgekehrt noch nicht, daß die $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst eine Schauder-Basis bilden. Wir untersuchen deshalb den Zusammenhang beider Definitionen genauer.

Zunächst bemerken wir, daß die λ_k lineare Operatoren

$$P_n x := \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) e_k$$

mit der Eigenchaft

$$P_n(P_n x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j(x) e_j\Big) e_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \delta_{k,j} e_k = P_n(x)$$

definieren. Diese Eigenschaft haben die P_n mit der orthogonalen Projektion aus Definition I.5.6 gemeinsam (s. Lemma I.5.9), und wir führen ein:

III.2.18 Definition: Sei X ein LNR. Ein linearer Operator $P : X \mapsto X$ heißt ***Projektor*** bzw. ***Projektion*** , falls $P^2 = P$, oder äquivalent dazu $P|_{\mathcal{R}(P)} = Id$.

Es gilt derfolgende Satz:

III.2.19 Satz: Ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis in einem Banachraum X, so sind die Funktionale λ_k linear und stetig und bilden ein biorthogonales System zu den $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ferner sind die Normen der Projektionen P_n gleichmäßig beschränkt.

Beweis: Definiere den Folgenraum

$$X_\infty := \left\{\vec{\alpha} = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x := \lim_{n\to\infty} s_n(\vec{\alpha}) \in X\right\} \quad \text{mit} \quad s_n(\vec{\alpha}) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \; .$$

Versehe X_∞ mit der Norm $\|\vec{\alpha}\|_{X_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n(\vec{\alpha})\|$ und definiere den Operator $T : X_\infty \longrightarrow X$ durch $T(\vec{\alpha}) := \lim_{n\to\infty} s_n(\vec{\alpha})$. Dann ist $\|T(\vec{\alpha})\| \le \|\vec{\alpha}\|_{X_\infty}$, also $T \in L(X_\infty, X)$.

Nun ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ per Definition genau dann eine Schauder-Basis, wenn T bijektiv auf X ist, also T^{-1} auf ganz X existiert. Wenn wir zeigen, daß X_∞ unter der angegebenen Norm vollständig ist, ist auch T^{-1} nach dem Satz von der stetigen Inversen (II.1.7) stetig und es gibt ein C mit $\|T^{-1}\| \le C$, d.h.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n(\vec{\alpha})\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) e_k \right\| \le C\|x\| \; .$$

Daraus folgt zunächst der erste Teil der Aussage wegen

$$|\lambda_k(x)| \; \|e_k\| = \|\lambda_n(x) e_k\| = \|s_k(x) - s_{k-1}(x)\| \le 2C\|x\| \; ,$$

d.h. es gilt $|\lambda_n(x)| \le 2C\|e_n\|^{-1}\|x\|$ und $\lambda_n \in X^*$.

Mit $x = T(\vec{\alpha})$ folgt $P_n(x) = s_n(\vec{\alpha})$ und damit auch

$$\|P_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|P_n x\| = \sup_{\|x\|=1} \|s_n(\vec{\alpha})\| \le C \; , \tag{$*$}$$

d.h. die Projektionen P_n sind gleichmäßig beschränkt.

Zeige nun die Vollständigkeit von X_∞. Sei $(\vec{\alpha}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X_∞ . Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\alpha_n^i - \alpha_n^j| \; \|e_n\| &= \|(\alpha_n^i - \alpha_n^j) e_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^i - \alpha_k^j) e_k - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k^i - \alpha_k^j) e_k \right\| \\ &\le 2\|\alpha^i - \alpha^j\|_{X_\infty} \to 0 \text{ für } i,j \to \infty \; . \end{aligned}$$

Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(\alpha_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ mit Limes α_n. Sei $\vec{\alpha} := \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\|T(\vec{\alpha}^i) - T(\vec{\alpha}^j)\| = \|\lim_{n\to\infty} s_n(\vec{\alpha}^i - \vec{\alpha}^j)\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n(\vec{\alpha}^i - \vec{\alpha}^j)\| = \|\vec{\alpha}^i - \vec{\alpha}^j\|_{X_\infty} \to 0$$

für $i, j \to \infty$. Also ist auch $(T(\vec{\alpha}^i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X mit Limes $x \in X$. Zeige nun $T(\alpha) = x$; dann ist $\vec{\alpha} \in X_\infty$. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_X &= \underbrace{\|x - T(\vec{\alpha}^i)\|}_{\to 0 \text{ für } i \to \infty} + \underbrace{\|T(\vec{\alpha}^i) - s_n(\vec{\alpha}^i)\|}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty} + \\ & \underbrace{\|s_n(\vec{\alpha}^i) - s_n(\vec{\alpha}^j)\|}_{\le \|\vec{\alpha}^i - \vec{\alpha}^j\|_{X_\infty} \to 0 \text{ für } j \ge i \to \infty} + \underbrace{\|s_n(\vec{\alpha}^j) - s_n(\vec{\alpha})\|}_{\to 0 \text{ für } j \to \infty} . \end{aligned}$$

Die Grenzübergänge sind dabei so zu verstehen, daß zuerst i so groß gewählt wird, daß der erste und dritte Term $\le \varepsilon$ werden, anschließend n (in Abhängigkeit von i) so groß, daß der zweite Term $\le \varepsilon$ wird, und schließlich j so groß, daß der letzte Term $\le \varepsilon$ wird. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} s_n(\vec{\alpha}) = x$, d.h. $\alpha \in X_\infty$.

Zeige noch, daß $\lim_{i\to\infty} \|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^i\|_{X_\infty} = 0$. Es gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^i\|_{X_\infty} \le \left\| \sum_{k=1}^{n_i} (\alpha_k - \alpha_k^i) e_k \right\| + \varepsilon \le \left\| \sum_{k=1}^{n_i} (\alpha_k - \alpha_k^j) e_k \right\| + \varepsilon + \|\vec{\alpha}^j - \vec{\alpha}^i\|_{X_\infty} \; .$$

Wähle dann i groß genug, sodaß der zweite Term $\leq \varepsilon$ für alle $j \geq i$ wird und anschließend $j \to \infty$ in Abhängigkeit von n_i so groß, daß auch der zweite Term $\leq \varepsilon$ wird. □

Damit kann der Zusammenhang zwischen Schauder-Basis und biorthogonalem System geklärt werden.

III.2.20 Satz: Sei X ein Banachraum und $\big((f_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ ein biorthogonales System, und für die stetigen Projektoren $P_n f := \sum_{j=1}^n \lambda_i(f) f_j$ von endlichem Rang n gelte:

1. $X = \overline{\bigcup_{n\geq 1} X_n} \quad , \quad X_n := span\{f_1, \ldots, f_n\}$.
2. $C := sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \ < \infty$.

Dann bilden die $(f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis. Umgekehrt liefert eine Schauder-Basis ein solches biorthogonales System.

Beweis: Zu $\Rightarrow$: Es gilt $P_n f = f$ für jedes $f \in X_n$ und daher $\lim_{n\to\infty} P_n f = f$ für f aus der dichten Teilmenge $\bigcup_{n\geq 1} X_n$ von X. Wegen der zweiten Voraussetzung folgt mit dem Satz von Banach-Steinhaus (II.1.4) $\lim_{n\to\infty} P_n f = f$ für alle $f \in X$, d.h. $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(f) f_j$ für alle $f \in X$. In dieser Darstellung sind die $\lambda_j(f)$ eindeutig bestimmt, denn Anwendung der biorthogonalen Funktionale ergibt

$$\lambda_i(f) = \sum_{j\geq 1}^{\infty} \lambda_i(\alpha_j f_j) = \sum_{j\geq 1}^{\infty} \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i.$$

Daher bilden die $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis. □

Bemerkung: Die Zahl C in Satz II.2.20 heißt ***Basiskonstante*** der Schauder-Basis. Sie ist maßgebend für die Güte der Approximation durch die Elemente der Schauder-Basis, denn es gilt

$$\|f - P_n f\| = \|f - g + P_n g - P_n f\| \leq \|f - g\| + \|P_n(f - g)\| \quad , \quad (g \in X_n) \ .$$

Bildung des Infimums über alle g liefert

$$\|f - P_n f\| \leq (1 + C(X))\mathrm{dist}(f, X_n) \ .$$

Mit Satz II.2.20 können wir nun für eine spezielle Klasse von Banachräumen die Frage beantworten, wann sich kompakte Operatoren durch solche von endlichem Rang beliebig gut approximieren lassen:

III.2.21 Satz: Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Weiterhin habe Y eine Schauder-Basis. Dann ist $T \in K(X,Y)$ genau dann kompakt, wenn eine Folge von Operatoren $T_n \in L(X,Y)$ von endlichem Rang n existiert mit $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\|_{L(X,Y)} = T$. Dann können als T_n auch die Operatoren $P_n \circ T$ gewählt werden, wobei die P_n die zur Schaude-Basis gehörigen Projektoren sind.

Beweis: $\Leftarrow$: folgt aus Lemma III.2.7 zusammen mit Satz III.2.4 .
$\Rightarrow$: Die Menge $K = \overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt, weil T kompakt ist. Weiter gilt

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx - (P_n T)(x)\| = \sup_{y\in K} \|y - P_n y\|_Y \ .$$

Führen wir für $n \in \mathbb{N}$ die Größen $A_K(n) = \sup_{y\in K} \|y - P_n y\|_Y$ ein, so ist zu zeigen, daß für eine Teilfolge $\lim_{j\to\infty} A_K(n_j) = 0$. Dazu wähle $y_n \in K$ mit $A_K(n) \leq 2\|y_n - P_n y_n\|$. Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit Limes $y^* \in Y$ und es folgt

$$\begin{aligned} A_K(n_j) &\leq 2\|y_{n_j} - P_{n_j} y_{n_j}\| \\ &\leq 2\Big(\|y_{n_j} - y^*\| + \|y^* - P_{n_j} y^*\| + \|P_{n_j} y^*_{n_j} - P_{n_j} y\|\Big) \\ &\leq 2(1 + \sup_{j\in\mathbb{N}} \|P_{n_j}\|)\|y^* - y_{n_j}\| + \|P_{n_j} y^* - y^*\| \to 0 \ \text{ für } \ j \to \infty \ . \end{aligned}$$

□

Der Beweis dieses Satzes motiviert die Einführung von Zahlen, die angeben, wie nahe ein kompakter Operator bei einem von endlichem Rang liegt:

III.2.22 Definition: Seien X, Y Banachräume. Die ***Approximationszahl der Ordnung*** $\alpha_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$ eines Operators $T \in L(X,Y)$ ist definiert als

$$\alpha_n(T) := \inf\{\ \|T - T_n\| \mid T_n \in L(X,Y) \text{ hat endlichen Rang } n\ \}\ .$$

Es gilt offenbar

III.2.23 Lemma: Hat Y eine Schauder-Basis, so streben die Approximationszahlen eines Operators $T \in L(X,Y)$ gegen 0 für $n \to \infty$ genau dann, wenn T kompakt ist.

Das einfachste Beispiel einer Schauder-Basis liegt im Falle eines separablen Hilbert-Raumes vor, der eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt. Jedoch braucht diese nicht immer eine Schauder-Basis bezüglich einer *anderen* Norm zu sein, wie das Beispiel der klassischen Fourier-Reihe zeigt, deren Teilsummen $S_n(f)$ keine gleichmäßig beschrämkten Normen besitzen (s. Beispiel im Anschluß an das "Uniform Boundedness Principle" II.1.1). Aus diesem Grund hat man Schauder-Basen bzw. Biorthogonalentwicklungen zuerst mit Hilfe von Splines (s. auch Ubungen) und später allgemeiner mit Wavelets konstruiert (s. Unterabschnitt über Orthonormalsysteme).

Im Hilbert-Raum-Fall hat Kolmogoroff bereits 1936 die Approximationszahlen eines Operators $T \in L(X)$ als die Eigenwerte von $\sqrt{T^*T}$ bestimmt (Definition dieses Operators in Bemerkung nach IV.3.7).

III.2.24 Satz: Sei X ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ gegeben. Dann gilt

$$\alpha_m(T) = |\lambda_{m+1}(T)|\ ,$$

wobei λ_1 , $\lambda_2 \cdots$ die Eigenwerte von T einschließlich Vielfachheit sind und so geordnet, daß

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots\ .$$

Insbesondere ist der optimale Approximationsoperator T_m^* durch

$$T_m^* x := T(\sum_{i=1}^{m} (x, e_i)\ e_i) = \sum_{i=1}^{m} (Tx, e_i)\ e_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x, e_i)\ e_i \quad (x \in X)$$

gegeben, d.h. durch die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe von Tx bezüglich der zugehörigen Eigenvektoren.

Beweis: Die Abschätzung $\alpha_m(T) \leq |\lambda_{m+1}(T)|$ ist mit dem oben definierten T_m^* leicht zu zeigen. Die Abschätzung " $\geq$ " findet man in Pinkus [6]. Sie benutz wesentlich das **Courant*sche Minimax-Prinzip* (s. Dunford-Schwartz [3] II X.4.3).**

Bemerkung: Approximationszahlen sind intensiv untersucht worden. Information darüber findet man in Pinkus [6]. vskip4ex

III.3 RIESZ-SCHAUDER-THEORIE

III.3.1 Definition: Sei X ein normierter Vektorraum und $T \in L(X)$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ ***Eigenwert*** von T , falls es ein $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$ gibt, also $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$. x heißt dann ein zugehöriger ***Eigenvektor*** oder ein Eigenvektor von T zu λ , $N_\lambda := \mathcal{N}(T_\lambda) := \mathcal{N}(\lambda I - T)$ ***Eigenraum*** zum Eigenwert λ . Weiterhin definiere die Räume

$$\begin{aligned}
N'_\lambda &:= \{x' \in X^* \mid \lambda x' - T'x' = 0\},\\
R_\lambda &:= \{y \in X \mid \text{ gibt es ein } x \in X : y = \lambda x - Tx\},\\
R'_\lambda &:= \{y' \in X^* \mid \text{ gibt es ein } x' \in X^* : y' = \lambda x' - T'x'\} .
\end{aligned}$$

III.3.2 VORAUSSETZUNG: Im folgenden sei, wenn nichts anderes vermerkt ist, X ein unendlichdimensionaler, komplexer Bannachraum und $\lambda \neq 0$. (Für $\lambda = 0$ sind die Aussagen i.a. nicht richtig).

III.3.3 Bemerkung: Sei X ein LNR und $T \in L(X)$. Dann gelten :

1. N_λ und N'_λ sind abgeschlossen.
2. Jeder Eigenraum von T ist T-invariant, d.h. $T(N_\lambda) \subset N_\lambda$.
3. Eigenvektoren zu verchiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Beweis: 1.: Folgt aus der Stetigkeit von T .
2.: Für für $x \in N_\lambda$ ist

$$(\lambda I - T)(Tx) \;=\; (\lambda I - T)\lambda x \;=\; \lambda(\lambda I - T)x \;=\; 0 \;.$$

3.: Folgt induktiv: Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $x_1, \cdots, x_n$ zugehörige Eigenvektoren. Für $n := 1$ gilt die Behauptung, da $x_1 \neq 0$.
Wäre x_{k+1} linear abhängig von $x_1, \cdots, x_k$, also

$$x_{k+1} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{mit} \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \quad ,$$

so folgte

$$0 \;=\; (\lambda_{k+1} I - T)x_{k+1} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i \quad ,$$

also die lineare Abhängigkeit der $x_1, \cdots, x_k$.

III.3.4 Lemma: Ist $T \in K(X)$, so sind N_λ und N'_λ endlichdimensional.

Beweis: Es genügt nach Satz I.4.6 zu zeigen, daß $B := \{x \in N_\lambda \mid \|x\| \leq 1 \}$ kompakt ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B . Da T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen $0 = \lambda x_{n_k} - Tx_{n_k}$ konvergiert auch $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in B , und da B abgeschlossen ist, in B. □

III.3.5 Lemma: Ist $T \in K(X)$, so sind R_λ und R'_λ abgeschlossen.

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in N}$ eine gegen $y \in X$ konvergente Folge in R_λ. Zu zeigen ist: $y \in R_\lambda$. Seien x_n Urbilder von y_n . Wähle dazu $v_n \in N_\lambda$ mit $\|x_n - v_n\| \leq 2d_n := 2dist(x_n, N_\lambda)$ und setze $z_n := x_n - v_n$. Dann ist $y_n = \lambda(I-T)x_n$ wegen $(\lambda I - T)v_n = 0$ und $\|zn\| \leq 2d_n$. Wenn gezeigt ist, daß die d_n gleichmäßig beschränkt sind, es also ein $C > 0$ gibt mit $d_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert wegen der Kompaktheit von T eine konvergente Teilfolge $(Tz_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $z := \lim_{k\to\infty} Tz_{n_k}$. Es gilt dann auch

$$\lambda z_{n_k} = \lambda z_{n_k} - Tz_{n_k} + Tz_{n_k} = \lambda x_{n_k} - Tx_{n_k} + Tz_{n_k} = y_{n_k} + Tz_{n_k} \to y + z\ .$$

Setze nun $x := (y+z)/\lambda$ Dann folgt

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (\lambda I - T) z_{n_k} = \lambda \lim_{k\to\infty} z_{n_k} - \lim_{k\to\infty} Tz_{n_k} = \lambda x - Tx = (\lambda I - T)x\ ,$$

d.h. $y \in R_\lambda$.

Nun zum Beweis der Existenz eines $C > 0$ mit $d_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch Widerspruch. Annahme: Es gibt eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} dist(x_{n_i}, N_\lambda) = \infty$. Setze $\overline{x}_{n_i} = x_{n_i}/dist(x_{n_i}, N_\lambda)$. Dann gilt $dist(\overline{x}_{n_i}, N_\lambda) = 1$. Dazu existieren $v_{n_i} \in N_\lambda$, sodaß $\|w_{n_i}\| = \|\overline{x}_{n_i} - v_{n_i}\| \leq 2$. Nun gilt

$$(\lambda I - T)w_{n_i} = (\lambda I - T)\overline{x}_{n_i} = \frac{(\lambda I - T)x_{n_i}}{dist(x_{n_i}, N_\lambda)} = \frac{y_{n_i}}{dist(x_{n_i}, N_\lambda)} \to 0$$

wegen $y_{n_i} \to y$, $dist(x_{n_i}, N_\lambda) \to \infty$. Wegen der Kompaktheit von T existiert eine Teilfolge $(w'_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(w_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} Tw'_{n_i} = z'$. Damit gilt $\lambda w'_{n_i} = Tw'_{n_i} + (\lambda I - T)w'_{n_i} \to z' + 0$, also $\lim_{i\to\infty} w'_{n_i} = w$. Daraus folgt $0 = \lim_{i\to\infty} (\lambda I - T)w'_{n_i} = \lambda w - Tw$, d.h. $w \in N_\lambda$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} dist(w_{n_i}, N_\lambda) &\leq \inf_{g\in N_\lambda} \|w_{n_i} - w + w - g\| \leq \inf_{w-g\in N_\lambda} \|w - w_{n_i}\| \\ &= dist(w - w_{n_i}, N_\lambda) \leq \|w - w_{n_i}\| \to 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $dist(w_{n_i}, N_\lambda) = dist(\overline{x}_{n_i} - v_{n_i}, N_\lambda) = dist(\overline{x}_{n_i}, N_\lambda) = 1$.

Nach dem Satz von Schauder(II.2.4) ist $T' \in K(X', X)$, und ferner gilt

$$(T')_\lambda = (\lambda I - T') = (\lambda(I-T)' = (\lambda I - T)'\ .$$

□

III.3.6 Lemma: Sei $T_\lambda = \lambda I - T$ und $N_\lambda^k := \mathcal{N}(T_\lambda^k)$. Dann sind alle Räume N_λ^k endlich-dimensional $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $N_\lambda^k \not\subseteq N_\lambda^{k+1}$ für $k < n$ und $N_\lambda^k = N_\lambda^{k+1}$ für $k \geq n$. Diese Zahl n heißt die **Riesz-*Zahl*** von T .

Beweis: Es gilt $T_\lambda^k = (\lambda I - T)^k = \lambda^k I + \sum_{\nu=1}^k \binom{k}{\nu}(-1)^\nu T^\nu \lambda^{k-\nu}$, also ist T_λ^k kompakt. Nach Lemma III.3.3 sind dann alle N_λ^k endlichdimensional. Zeige nun, daß $N_\lambda^k = N_\lambda^{k+1}$ impliziert, daß $N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^{k+2}$. Sei also $x \in N_\lambda^{k+2}$. Dann ist $0 = T_\lambda^{k+2}x = T_\lambda^{k+1}T_\lambda x$, also $T_\lambda x \in N_\lambda^{k+1}$ und damit $0 = T_\lambda^k T_\lambda x = T_\lambda^{k+1}x$, d.h. $x \in N_\lambda^{k+1}$. Jeder Raum N_λ^k ist endlichdimensional und abgeschlossen. Wende nun das Lemma von Riesz (I.4.7) an: Zu dem abgeschlossenen Unterraum $N \subset X$ gibt es $x \notin N$, $\|x\| = 1$, mit $dist(x, N) \geq \frac{1}{2}$. Dies ergibt angewendet auf jedes N_λ^{k+1} eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in N_\lambda^{k+1}$, $\|x_k\| = 1$ und $\|x_k - x\| \geq \frac{1}{2}$ für $x \in N_\lambda^k$. Sei jetzt $l > k$. Dann ist $T_\lambda^l(T_\lambda x_l + Tx_k) = T_\lambda^{l+1}x_l + T_\lambda^l Tx_k = 0 + T_\lambda^l x_k = 0$, d.h. $T_\lambda x_l + Tx_k \in N_\lambda^l$. Dann $Tx_l - Tx_k = \lambda x_l - (T_\lambda x_l + Tx_k) \in N_\lambda^l$ und daher $\frac{1}{|\lambda|}\|Tx_l - Tx_k\| = \|x_l - \frac{1}{\lambda}(T_\lambda x_l + Tx_k)\| \geq \frac{1}{2}$, d.h. $\|Tx_l - Tx_k\| \geq \frac{1}{2|\lambda|}$, d.h. $(Tx_l)_{l\in\mathbb{N}}$ kann keine konvergente Teilfolge enthalten im Widerspruch zur Kompaktheit von T. □

III.3.7 Satz: Sei $T \in K(X)$.

1. Es gelten die Beziehungen
$$R_\lambda \;=\; {}^{\perp}N_\lambda^{'} \quad \text{und} \quad R_\lambda^{'} \;=\; N_\lambda^{\perp} \quad .$$
Insbesondere ist also T_λ genau dann surjektiv, wenn T'_λ injektiv ist.
2. T_λ ist genau dann injektiv, wenn T_λ surjektiv ist.

Beweis: 1.: Nach Lemma III.43.4 sind R_λ und R'_λ abgeschlossen. Behauptung 1. folgt daher aus Satz II.1.12 .

2.: $\Leftarrow$ Sei n die Riesz-Zahl von T . Angenommen, T_λ ist nicht injektiv. Dann ist $n \geq 1$, und es gibt ein ein $x_n \in N_\lambda^n \setminus N_\lambda^{n-1}$. Da T_λ surjektiv ist, gibt es dazu ein $x_{n+1} \in X$ mit $T_\lambda x_{n+1} = x_n$. Daraus ergibt sich der Widerspruch
$$0 \;=\; T_\lambda^n x_n \;=\; T_\lambda^{n+1} x_{n+1} \;=\; T_\lambda^n x_{n+1} \;=\; T_\lambda^{n-1} x_n \;\neq\; 0 \quad .$$

$\Rightarrow$ Aus $N_\lambda = \{0\}$ folgt mit 1.: $R'_\lambda \;=\; {}^{\perp}N_\lambda \;=\; X^*$. Weil T' nach Satz von Schauder (III.2.4) kompakt ist, können wir das eben Bewiesene auf T' anstelle T anwenden, sodaß $N'_\lambda = \{0\}$. Nach 1. bedeutet dies aber $X \;=\; {}^{\perp}\{0\} \;=\; R_\lambda$. □

Bemerkung: Existert T_λ^{-1} und ist stetig auf ganz X , so heißt es die ***Resolvente*** zum Wert λ von T (Genaueres dazu im nächsten Abschnitt).

Die Aussagen von Satz II.3.7 können auch als solche über die Lösbarkeit der Operatorengleichung bzw. Eigenwertgleichung $(\lambda I - T)x = y$ angesehen werden. Um diesen Aspekt stärker herauszuarbeiten, wird dieser Satz im folgenden noch erweitert. Dazu benötigen wir

III.3.8 Definition: Seien M, N Unterräume eines Vektorraumes X .
$M+N \;:=\; \{\, m+n \mid m \in M \;,\; n \in N \,\}$ heißt die Summe von M und N . Die Summe heißt ***direkte Summe***, wenn $M \cap N \;=\; \{0\}$ ist (,d.h. jedes $x \in M+N$ hat eine eindeutige Darstellung $x = m+n$.) Wir bezeichnen die direte Summe mit $M \bigoplus N$. Ist $X \;=\; M \bigoplus N$, so heißt N ein Kompementärraum von M (und M ein Kompementärraum von N), und $codim(M) := dimN$ heißt die ***Codimension*** von M .

Hier ist zu zeigen, daß dieser Begriff wohldefiniert ist, d.h. von N unabhängig ist. Dazu zeigt man mit Linearer Algebra leicht:

III.3.9 Lemma:
$$\begin{array}{rcll} J : X/M & \longrightarrow & N & \\ x+M & \longmapsto & n & \qquad x =: m+n \;,\; m \in M \;,\; n \in N \end{array}$$
ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Die Wohldefiniertheit folgt auch aus dem folgenden bedeutenderem

III.3.10 Lemma: (***vom abgeschlossenen Komplement***) . Sei X ein Banachraum, M ein abgeschlossener Teilraum von X und N ein Komplementärraum von M . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine stetige Projektion P von Xauf M mit $\mathcal{N}(P) = N$.
2. N ist abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen nur die nichttriviale Richtung 2. $\Leftarrow$ 1: Sei $\tilde{X} := M \times N$. dann ist $\tilde{X}$ ein Banachraum unter der Norm $\|(x,y)\|_{\tilde{X}} := \|x\| + \|y\|$ ($(x,y) \in \tilde{X}$) . Wegen $X = M \bigoplus N$ ist die Abbildung $K : \tilde{X} \mapsto X$ definiert durch $K(x,y) := x + y$ linear, surjektiv und injektiv. Daher kann man Abbildungen $P_M : \tilde{X} \mapsto X$, $P_M : \tilde{X} \mapsto X$ durch

$$K^{-1}z =: (P_M z, P_N z) \in X \times Y, \quad z \in X$$

definieren. Aus $K^{-1}z = (z, 0)$ für $z \in M$ folgt leicht, daß P_M eine Projektion auf M ist. Ferner gilt $K^{-1}z = (0, z)$ für $z \in N$, so daß $\mathcal{N}(P_M) = N$ ist. Die Stetigkeit von P_M folgt aus $\|P_M z\|_X \leq \|K^{-1}z\|_{\tilde{X}}$ und derjenigen von K^{-1}, die aber aus dem Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7) folgt. $\square$

III.3.11 Lemma: Sei X ein LNR.

1. Zu n linear unabhängigen Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt es Funktionale $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.
2. Zu n linear unabhängigen Funktionalen $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Beweis: [Ü]

Zur Formulierung des folgenden Hauptsatzes dieses Abschnitts führen wir noch ein:

III.3.12 Definition: Seien X , Y LNR. Ein Operator $T \in L(X,Y)$ heißt **Fredholm-*Operator*** , falls

1. $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossener Teilraum von Y ist
2. $dim\mathcal{N}(T) < \infty$, $codim\mathcal{R}(T) < \infty$.

Für einen solchen Operator definieren wir seinen **Index** durch

$$ind(T) \ := \ dim\mathcal{N}(T) \ - \ codim\mathcal{R}(T) \quad .$$

III.3.13 Satz: Ist T ein kompakter Operator auf einem Banachraum X , so ist $\lambda I - T$ ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Beweis: Schritt 1: Verwende die Bezeichnungen aus Definition III.3.1 und außerdem $n := dimN_\lambda$, $n* := dimN'_\lambda$, $n** := dimN''_\lambda := dim\mathcal{N}(T''_\lambda)$. Nach Lemma III.3.5 ist R_λ abgeschlossen, und es gilt $n, n* < \infty$ nach Lemma III.3.4 .

Schritt 2: $codimR_\lambda(T) \leq n$: Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von N_λ und nehme an, $codimR_\lambda(T) > n$. Dann gibt es nach Definition III.3.8 der Codimension einen n-dimensionalen linearen Unterraum $Y \subset X$ mit Basis $y_1, \cdots, y_n$ und $y_i \notin R_\lambda$, sodaß gilt

$$R_\lambda \bigoplus Y \subset X \quad , \quad R_\lambda \bigoplus Y \neq X \quad . \tag{$*$}$$

Seien $f_1, \ldots, f_n$ duale Funktionale zu $x_1, \ldots, x_n$ nach Lemma II.3.11 und F definiert durch

$$F(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i \ ,$$

sodaß $F \in K(X)$ nach Lemma III.2.7 ist. Dann bilde

$$S := T + F \quad .$$

Zeige nun: $\mathcal{N}(S_\lambda) = \{0\}$: Aus $x \in \mathcal{N}(S_\lambda)$ folgt wegen

$$S_\lambda = \lambda I - S = \lambda I - T - F = T_\lambda - F$$

$0 = S_\lambda x = T_\lambda x - Fx$, also $T_\lambda x = Fx$. Die linke Seite liegt in R_λ, die rechte per Annahme in dessen Komplement, sodaß $T_\lambda x = 0$ bzw. $x \in N_\lambda$ sein muß. Ferner gilt $Fx = 0$ und daher $f_j(x) = 0$ für $1 \leq j \leq n$ wegen der linearen Unabhängigkeit der y_i.
$x \in N_\lambda$ hat die Darstellung $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$. Darauf f_i angewandt ergibt

$$0 = f_i(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{i,k} = \alpha_i \ ,$$

und damit $N(S_\lambda) = \{0\}$ wie gewünscht. Mit Satz III.3.7 folgt daraus $R(S_\lambda) = X$. Wegen $S_\lambda = T_\lambda - F$ schließe daraus weiter $X = R(S_\lambda) \subset R_\lambda \bigoplus Y$, was ein Widerspruch zu $(*)$ ist.

Schritt 3: $n* \leq n$: Dazu nehme an $n* > n$ und wähle eine Basis $g_1, \cdots, g_{n*}$ von N'_λ und dazu $z_1, \cdots, z_{n*}$ als duale Vektoren in X. Sei dann $\widetilde{S}_\lambda$ analog S definiert. Es gilt dann, wie bereits gezeigt, $X = \mathcal{R}(S_\lambda)$. Daher gibt es zu $y_{n*} \in X$ ein $x \in X$ mit $y_{n*} = S_\lambda x$, und es folgt

$$\begin{aligned} 1 &= g_{n*}(y_{n*}) = g_{n*}(S_\lambda x) = g_{n*}(T_\lambda x - Fx) = g_{n*}(T - \lambda x) - g_{n*}(Fx) \\ &= T'_\lambda g_{n*}(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) g_{n*}(y_i) = 0 - 0 = 0, \qquad , \end{aligned}$$

Widerspruch!

Schritt 4: $n = n*$: Wendet man Schritt 3. auf T' statt T an, so folgt zunächst weiter $n^{**} \leq n* \leq n$. Nun impliziert aber $x \in N_\lambda$

$$0 = g(T_\lambda x) = (T'_\lambda g)(x) := g(T''_\lambda Jx) \ \text{ für alle } \ g \in X* \ ,$$

wobei J die kanonische Abbildung von X in X^{**} ist. Also folgt weiter $Jx \in \mathcal{N}(T''_\lambda)$ und somit $n \leq n^{**}$, weil J injektiv ist. Insgesamt schließe also $n = n*$.

Schritt 5: $codim R_\lambda = n$: Es gibt nach Definition II.3.7 der Codimension einen Komplementärraum Y von R_λ mit $X = R_\lambda \bigoplus Y$, wobei nach Schritt 2. $dim Y = m \leq n$ ist, also eine Basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$ besitzt. Dann ist die Abbildung $L : R_\lambda^\perp \longrightarrow Y$,
$L(y') := \sum_{i=1}^m y'(y_i) y_i$ offenbar linear. L ist injektiv , denn aus $y' \in \mathcal{N}(L)$ folgt zunächst $y'(y_i) = 0$ für $1 \leq i \leq m$. Jedes $x \in X$ hat eine Darstellung $x = z + \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$ mit $z \in R_\lambda$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Es gilt $y'(z) = 0$ wegen $y' \in R_\lambda$ und daher
$y'(x) = y'(z) + \sum_{i=1}^m \alpha_i y'(y_i) = 0$ für jedes $x \in X$, d.h. $y' = 0$ und $\mathcal{N}(L) = \{0\}$.Damit folgt $codim R_\lambda = dim Y \geq dim R_\lambda^\perp$ und nach Lemma III.1.7 weiter $codim R_\lambda \geq dim N'_\lambda = n* = n$.
Insgesamt folgt also $n = codim R_\lambda$. □

Aus diesem Satz folgt sofort

III.3.14 Satz: (**Fredholm-*Alternative***) . Sei T ein kompakter Operator auf einem Banachraum X . Dann gilt alternativ eine der beiden Aussagen

1. Die homogene Gleichung $\lambda x - Tx = 0$ hat nur die triviale Lösung.
   In diesem Fall ist die inhomogene Gleichung $\lambda x - Tx = y$ für jedes $y \in X$ eindeutig lösbar.

2. Es existieren $n := dim \mathcal{N}(T_\lambda) < \infty$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung, und auch die adjungierte Gleichung $\lambda x' - T'x' = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen.
   In diesem Fall ist die inhomogene Gleichung genau dann lösbar, wenn $y \in^\perp \mathcal{N}(T')$ ist.

Ergänzend kann man noch zeigen:

III.3.15 Lemma: Für die in Lemma III.3.6 definierte Riesz-Zahl $n := n(\lambda)$ gilt
$$X \ = \ \mathcal{N}(T_\lambda^n) \bigoplus \ \mathcal{R}(T_\lambda^n) \ .$$

Beweis: [Ü]

Für kompakte Operatoren gelten wichtige Aussagen über Lage und Art ihrer Eigenwerte:

III.3.16 Satz: Sei T ein kompakter Operator auf einem linearen normierten Raum X . Dann gelten

1. Es gibt höchstens abzählbare viele Eigenwerte, die sich nirgends häufen außer eventuell bei 0, und zu jedem Eigenwert ist der zugehörige Eigenraum endlichdimensional.
2. Sei X ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Ist $\lambda \neq = 0$ und kein Eigenwert, so existiert die Resolvente T_λ .
   Ist $\lambda = 0$, so ist λ entweder Eigenwert und , so ist $(\lambda I - T)^{-1}$ ein stetiger, auf ganz X definierter Operator, d.h. die Resolvente vom Wert λ zu T existiert.
   Ist $\lambda = 0$, so ist λ entweder Eigenwert, oder T^{-1} existiert, ist aber unstetig, oder
   T^{-1} ist stetig, aber $\mathcal{D}(T^{-1}) \ = \ \mathcal{R}(T) \neq \ = \ X$.

Beweis 1.: Die Aussage folgt, wenn wir einen Widerspruch zur folgenden Situation herleiten:
Es gibt eine Folge $\{x_n\}$ von Vektoren mit $Tx_n = \lambda_n x_n$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n =: \lambda \neq 0$.

Sei X_n :=span $x_k{}_{k=1}^n$. Nach Bemerkung III.3.3 ist dann $X_n \subset X_{n+1}$, $X_n \neq X_{n+1}$. Aus dem Satz von Riesz (I.4.7) folgt induktiv:
Es gibt eine Folge $(y_n)_{n=1}^\infty$ mit
$$y_n \in X_n \ , \ \|y_n\| = 1 \ \text{ und } \ dist(y_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2} \ .$$

Da jedes y_{n+1} eine Darstellung
$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x_j$$
hat, ist
$$T\lambda_{n+1} y_{n+1} = \lambda_{n+1} y_{n+1} - Ty_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j (\lambda_{n+1} - \lambda_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (\lambda_n - \lambda_j) x_j \in X_n \ .$$

Wegen $\frac{1}{\lambda} T = I - \frac{1}{\lambda} T_\lambda \quad (\lambda \neq 0)$ folgt für $m < n$
$$\frac{1}{\lambda_n} Ty_n - \frac{1}{\lambda_m} Ty_m = y_n - (y_m - \frac{1}{\lambda_n} T_{\lambda_n} y_n - \frac{1}{\lambda_m} T_{\lambda_m}) y_m \ := y_n - z \ ,$$
und da $z \in X_{n-1}$, folgt
$$\|\frac{1}{\lambda_n} Ty_n - \frac{1}{\lambda_m} Ty_m\| \geq 1/2 \ .$$

Dies liefert aber einen Widerspruch, denn wegen der Kompaktheit von T gibt es eine konvergente Teilfolge (Ty_{n_k}), und wegen $\lambda_{n_k} \to \lambda \neq 0$ wäre auch $(\frac{1}{\lambda_{n_k}} Ty_{n_k})$ konvergent.

2.: Der erste Teil folgt aus Teil 2. von Satz III.3.7 , denn ist T_λ injektiv und damit surjektiv, so ist T_λ^{-1} nach dem Satz von der beschränkten Inversen (II.1.7) stetig auf ganz X. Dann bemerke, daß wegen $\dim X = \infty$ die Identität I nicht kompakt ist. Ist nun 0 kein Eigenwert, d.h. T^{-1} existiert, und wäre $T^{-1} \in L(X)$, so wäre $T^{-1}T = I$ kompakt nach Satz III.2.4. Daher muß in diesem Fall eine der angebenen Alternativen für T gelten. □

Bemerkung: Die Aussage des zweiten Teils steht in scharfem Gegensatz zum Fall, daß X endlichdimensional ist, denn wenn T^{-1} existiert, ist es automatisch stetig. Man kann z.B. anhand der (unendlich dimensionalen) Folgenräume l_p sehen, daß in der Tat alle der drei angebenen Fälle für $\lambda = 0$ auftreten können.

Als Anwendung der Riesz-Schauder Theorie betrachten wir ***lineare Randwertprobleme*** bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Gegeben sei der Differentialoperator

$$Lf \ := \ \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu f^{(\nu)} \qquad , \qquad R_\mu(f) \ = \ 0 \ \ , \ \ 1 \le \mu \le n$$

auf $C^n[a,b]$ mit Koeffizienten $a_\nu \in C[a,b]$, $a_n \neq 0$. Das Randwertproblem besteht darin, zu gegebenem $g \in C[a,b]$ ein $f \in C[a,b]$ zu finden, welches $Lf = g$ erfüllt. Als Randbedingungen bei a und b werden

$$R_\mu(f) \ := \ \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} f^{(\nu)}(a) + b_{\mu\nu} f^{(\nu)}(b) = 0 \ \ , \ \ 1 \le \mu \le n$$

gefordert. Man kann zeigen, daß L ein sog. ***Fundamentalsystem*** $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von linear unabhängigen Lösungen der Gleichung $L\varphi_i = 0$ besitzt, Außerdem kann man zeigen: Sind die Randbedingungen so gestellt, daß die Determinante der Matrix $(R_\mu(\varphi_k))_{1\le\mu,k\le n}$ nicht Null ist, so existiert eine sogenannte **Green*sche Funktion*** (die von den Randbedingungen abhängig ist) , d.h. ein stetiger Kern $G(x,t)$ aus $C^{k-1}([a,b]^2)$ derart, daß für den zugehörigen ***Integraloperator***

$$(Tg)(x) := \int_a^b G(x,t)g(t) \ dt$$

$T(Lf)(x) = f$ gilt. T ist also Linksinverse von L und Tg erfüllt die Randbedingungen. T ist ein kompakterOperator s. [Ü].
Mit Hilfe des Operators T kann man allgemeiner das ***Eigenwertproblem***

$$Lf - \lambda f = g$$

auf seine Lösbarkeit hin untersuchen, wobei die gleichen Randbedingungen an f gestellt sind. Durch $f := T\varphi$ (das dann die Randbedingungen erfüllt) transformiert sich dieses zu

$$g = \varphi - \lambda \int G(\cdot,t)\varphi(t) \ dt \quad \text{bzw.} \quad T_{1/\lambda} \ \varphi = g/\lambda \ .$$

Ist die Greensche Funktion zusätzlich symmetrisch, d.h. gilt $G(x,t) = G(t,x)$, so liefern die obigen Sätze die Aussagen $(1/\lambda \neq 0)$:

a) Das Problem (†) hat für jede rechte Seite eine eindeutige Lösung, falls das zugehörige homogene Problem, d.h. das Problem $Lf = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

b) Hat das homogene Problem eine nicht-triviale Lösung, so ist diese als Linearkombination von endlich vielen solchen $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ darstellbar. Die Gleichung (†) hat in diesem Fall genau dann eine Lösung, falls der inhomogene Term die Bedingungen $\int_a^b h(t)\varphi_j(t)dt = 0, 1 \le j \le m$ erfüllt.

c) Es gibt nur abzählbare viele Eigenwerte λ, für die der Fall b) eintritt.

Anwendungen auf Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen findet man z.B. bei Hutson-Pym [5], Kapitel 11].

Kapitel IV

SPEKTRALTHEORIE

IV.1 SPEKTRUM UND RESOLVENTE

U

IV.1.1 Definition: Sei X ein linearer normierter Raum und sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$, linear und stetig. Betrachte nun $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Besitzt $\lambda I - A$ eine stetige Inverse und ist weiter $R(\lambda I - A)$ dicht in X, so gehört λ zur ***Resolventenmenge*** von A, geschrieben $\rho(A)$. Der Operator $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ heißt ***Resolventenoperator*** . Falls $\lambda \notin \rho(A)$, so sagt man, λ gehört zum ***Spektrum*** von A, geschrieben $\sigma(A)$.

Die Aufgabe: Finde zu einem $g \in X$ ein $\in X$ mit $(\lambda I - A)f = g$ wird also nur dann als "korrekt" stellt betrachtet, wenn die Resolvente ein im obigen Sinne "vernünftiger Operator" ist. Im folgenden werden im Hinblick auf Differentialoperatoren neben stetigen A auch abgeschlossene Operatoren A betrachtet. Für solche untergliedert man das Spektrum noch weiter:

IV.1.2 Definition: Sei X linearer normierter Raum und sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$. Ferner sei $\lambda \in \sigma(A)$. Hat dann die Gleichung $(\lambda I - A)x = 0$ eine nichttriviale Lösung x, so heißt λ ***Eigenwert*** (EW) und zum ***Punktspektrum*** $\sigma_p(A)$ gehörig und x ein (zugehöriger) ***Eigenvektor*** (EV). Falls $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert, jedoch $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{D}((\lambda I - A)^{-1})$ nicht dicht in X ist, so heißt λ zum ***Residuenspektrum*** $\sigma_r(A)$ gehörig. Die restliche Menge des Spektrums von A heißt ***kontinuierliches Spektrum*** $\sigma_c(A)$. Es besteht aus denjenigen λ, für die $(\lambda I - A)^{-1}$ zwar existiert und sogar $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ dicht ist, jedoch $(\lambda I - A)^{-1}$ unbeschränkt ist.

Das folgende Diagramm veranschaulicht diese Definition:

$(\lambda I - A)^{-1}$	$\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$	$\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X$	$\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} \neq X$
stetig	$\rho(A)$	$\rho(A)$	$\sigma_r(A)$
nicht stetig	$\sigma_c(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$
existiert nicht	$\sigma_p(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_p(A)$

IV.1.3 Lemma: Sei $A : X \longrightarrow X$ abgeschlossen oder stetig. Dann folgt aus $\lambda \in \rho(A)$ nicht nur $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X$, sondern auch $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$.

Beweis: Sei $y \in \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)}$. Dann existieren Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ und $y_n = (\lambda I - A)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Wegen $x_n = (\lambda I - A)^{-1}(y_n)$ folgt aus der Stetigkeit von $(\lambda I - A)^{-1}$, daß $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. Daher ist $y = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = (\lambda I - A)x \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$. □

IV.1.4 Lemma: Sei X ein Banachraum, A abgeschlossen oder stetig mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ oder X ein Hilbertraum und A abgeschlossen.

1. Es gilt $\sigma(A) = \sigma(A')$ bzw. $\rho(A) = \rho(A')$.
   Für $\lambda \in \rho(A)$ gilt $R_\lambda(A') = R_\lambda(A)'$ und $((\lambda I - A)^{-1})' = (\lambda I - A')^{-1}$.
   Ist X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, so gilt $\sigma(A^*) = \{ \overline{z} \mid z \in \sigma(A) \}$
   und $R_\lambda(A^*) = \overline{R_\lambda(A)}$.
2. Ist $\lambda \in \sigma_r(A)$, so ist $\lambda \in \sigma_p(A')$, und ist X ein Hilbertraum, so ist $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Beweis:1.: Ist der Operator A stetig, so folgt $\sigma(a) = \sigma(A')$ aus Lemma IV.1.3 und Lemma II.1.4 . Die angegebenen Formeln sind leicht nachzurechnen.
Ist X ein Hilbertraum und A abgeschlossen, so folgt $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X$. Da $(\lambda I - A)^{-1}$ stetig ist, folgt aus der Erweiterung von Satz III.1.13 auf abgeschlossene Operatoren (s. Bemerkung 2 nach Satz III.1.13)

$$\mathcal{D}(\lambda I - A')^{-1} = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A')} = \mathcal{N}(\lambda I - A)^\perp = \{0\}^\perp = X^* ,$$

d.h. $\lambda \in \rho(A')$.
Umgekehrt impliziert $\lambda \in \rho(A')$ per Definition, daß $\mathcal{D}(\lambda I - A')^{-1} = X^*$ gilt. Nun ist $(\lambda I - A)^{-1}$ nach Lemma II.2.6 wieder abgeschlossen und damit nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (II.2.5) auch stetig. Es folgt

$$\mathcal{D}(\lambda I - A)^{-1} = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = \mathcal{N}(\lambda I - A')^\perp = \{0\}^\perp = X, \qquad \text{d.h. } \lambda \in \rho(A) .$$

Im Hilbertraum-Fall geht man analog vor, wobei man die Relationen von Lemma I.5.18 zwischen Kern und Wertebereich von Operatoren benutzt.

2.: Sei $\lambda \in \sigma_r(A)$. Dann gilt $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} \neq X$, also nach Lemma II.1.7
$\mathcal{N}((\lambda I - A)') = \mathcal{R}(\lambda I - A)^\perp \neq \{0\}$, bzw. $\lambda \in \sigma_p(A')$. □

Darauf aufbauend kommen wir zu einem Satz über selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum, der die Motivation für die Einführung des Residualspektrums liefert (wichtig für die spätere Spektralzerlegung).

IV.1.5 Satz: Sei X ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter (ev. unbeschränkter) linearer Operator auf $\mathcal{D}(A)$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Dann ist $\sigma(A)$ reell und $\sigma_r(A)$ leer.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß jeder EW reell ist: Sei λ EW und x zugehöriger EV. Dann ist

$$\lambda(x, x) = (Ax, y) = (x, Ax) = (x, x)\overline{\lambda} ,$$

also λ reell.
Dann zeige, daß jedes nichtreelle λ in $\rho(A)$ liegt. Sei also $\lambda = \alpha + i\beta$ mit α, β reell, $\beta \neq 0$. Nach dem eben Gezeigten ist $\lambda \notin \sigma_p(A)$, d.h. $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert. Die Stetigkeit folgt mit

$$\begin{aligned} & \|(\lambda I - A)x\|^2 = \big((\alpha I - A)x - i\beta x \, , \, (\alpha I - A)x - i\beta x \big) \\ = \; & \|(\alpha I - A)x\|^2 - i\beta\big(x \, , \, \alpha I - A)x \big) + i\beta x\big((\alpha I - A)x \, , \, x \big) + |\beta|^2\|x\|^2 \\ \geq \; & |\beta|^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

und Anwendung von Satz I.4.15.

Zeige drittens $\sigma_r(A) = \emptyset$, d.h. daß $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X$. Dazu beachte, daß nach Satz I.5.18 gilt

$$\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)^*} = \mathcal{N}(\lambda I - A)^\perp \ .$$

Nach dem Vorigen gilt aber $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, also $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X$. □

Im Hilbertraum kann man die Beschränktheit des Spektrums für beschränkte Operatoren direkt über den Begriff des numerischen Wertebereichs nachweisen. Dazu zunächst

IV.1.6 Definition: Sei . Der ***numerische Wertebereich*** eines abgeschlossenen linearen Operators T auf einem Hilbertraum X ist definiert als

$$W(T) := \{\ (Tx, x)\ \mid\ \|x\| = 1\ \}\ .$$

IV.1.7 Lemma: Sei T ein abgeschlossener linearer Operator auf einem Hilbertraum X . Dann gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$. Insbesondere ist $\sigma(T)$ eine beschränkte Menge, wenn T beschränkt ist.

Beweis: Die letztere Aussage folgt sofort aus

$$|(Tx, x)| \ \leq\ \|Tx\| \cdot 1\ \leq\ \|T\|\ <\ \infty \qquad (x \in X\ ,\ \|x\| = 1)\ .$$

Annahme: $\lambda \in \sigma(T) \setminus \overline{W(T)}$. Dann gibt es ein $d > 0$, sodaß für alle $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gilt:

$$|\lambda I - (Tx, x)|\ ,$$

und daher

$$\|(\lambda I - T)x\|\ =\ \|(\lambda I - T)x\|\|x\|\ \geq\ |(\lambda I - T)x, x)|\ =\ |\lambda\|x\|^2 - (Tx, x)|\ =\ |\lambda - (Tx, x)|\ \geq\ d\ .$$

$(\lambda I - T)^{-1}$ existiert also und ist stetig , also $\lambda \in \rho(T)$ im Widerspruch zur Annahme $\lambda \in \sigma(T)$. □

Beispiel: (**Schrödinger-*Operator*** Es sei

$$Hu := -u'' \quad , \quad u \in \mathcal{D}(H)\ :=\ W_2^2(-\infty, \infty) \subset L_2(\infty, \infty)\ .$$

Man kann leicht zeigen, daß H selbstadjungiert ist. Das Spektrum bestimmt man mit dem Satz von Plancherel (I.5.22), nach dem

$$\|(H - \lambda I)u\|^2\ =\ \|\mathcal{F}(u'' + \lambda u)\|^2\ =\ \|(\omega^2 - \lambda)\mathcal{F}(u)(\omega)\|^2$$

Ist. Nach Satz I.4.15 existiert daher $(H - \lambda I)^{-1}$ und ist stetig genau dann , wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $\inf_{\omega \in \mathbb{R}} |\omega^2 - \lambda| \geq \delta$. Dies gilt genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,d.h. es ist $\sigma(H) \subset [0, \infty)$. Wäre ein solches λ EW, so müßte für einen zugehörigen EV gelten:

$$u_\lambda'' - \lambda u_\lambda = 0\ .$$

Man kann zeigen , daß dann $u_\lambda(t) = e^{-i\kappa t}$ mit $\kappa^2 = \lambda$ (auch für schwache Lösungen (Definition s. Theorie der Differntialgleichungen)) gelten muß. Wegen $|u_\lambda(t)| = e^{t \cdot Im \kappa}$ ist jedoch für kein $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ die Funktion $u_\lambda \in L_2(-\infty, \infty)$. Zusammen mit Satz IV.1.5 schliessen wir:

$$\sigma(H)\ =\ \sigma_c(H)\ =\ [0, \infty)\ .$$

Dieses Beispiel motiviert also die Bezeichnung " kontinuierliches Spektrum ".

Als weitere Beispiele betrachte den Impulsoperator der Quantenmechanik $(Tf)(x) := (id/dx)f(x)$ in Abhängigkeit von Randbedingungen. Wir setzen $T_k := T$ für

$k = 1, \cdots, 4$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T_1) &:= W_2^1(0,1) \ \big(= \{ \ f \in C[0,1] \mid f' \in L_2(0,1) \ \} \big) \\
\mathcal{D}(T_2) &:= \{ \ f \in \mathcal{D}(T_1) \mid f(0) = f(1) \ \} \\
\mathcal{D}(T_3) &:= \{ \ f \in \mathcal{D}(T_1) \mid f(0) = f(1) = 0 \ \} \\
\mathcal{D}(T_4) &:= \{ \ f \in \mathcal{D}(T_1) \mid f(0) = 0 \ \} \ .
\end{aligned}$$

Man kann zeigen $T_1^* = T_3, T_2^* = T_2, T_3^* = T_1$, insbesondere, daß T_2 selbstadjungiert, T_3 symmetrisch, und T_1 nicht symmetrisch ist. Bezüglich der Spektren kann man zeigen: $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$ (mittels Fouriertransformation), $\sigma(T_4) = \emptyset$. Bestimmung von $\sigma(T_2), \sigma(T_3)$ [Ü].

IV.2 SPEKTRUM UND RESOLVENTE IN BANACHALGEBREN

IV.2.1 Definition: Eine ***komplexe Algebra*** A ist ein Vektorraum X über $\mathbb{C}$ mit zusätzlicher Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ mit den Eigenschaften

$$x(yz) = (xy)z, \quad (x + y)z = xz + yz$$

$$x(y + z) = xy + xz, \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

für $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$. A heißt ***normierte Algebra*** , falls X ein linearer normierter Raum ist und $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ gilt. A heißt **Banach*algebra*** , falls X ein Banachraum ist. A heißt ***Algebra mit Einselement*** , falls ein Einselement e existiert,d.h. $ex = xe = x$ für alle $x \in X$. Falls zu $x \neq 0$ das inverse Element x^{-1} ,d.h. $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, existiert, so heißt x ***invertierbar***.

Beispiele:

1. $A = L(X)$, X Banachraum, $f \cdot g := f \circ g$.
2. $A = C([a, b])$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$.
3. $A = l^1$ mit $(a \cdot b)_n := \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i}$.
4. $A = L^1(\mathbb{R})$ mit $(f \cdot g)(t) := (f * g)(t)$.

IV.2.2 Definition: Sei A Banachalgebra mit Einselement über $\mathbb{C}$. Ist $x \in A$, so heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ ***regulärer Wert*** zu x , falls $\lambda e - x$ invertierbar ist. Anderfalls heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ ***Spektralwert*** zu x . Die Menge der Spektralwerte heißt das ***Spektrum*** von x , $\sigma(x)$. Die Menge der regulären Werte $\rho(x)$ heißt ***Resolventenmenge*** von x . Für die Resolvente schreibe $\mathcal{R}(\lambda) := R_\lambda := (\lambda e - x)^{-1}$. Der Wert $r_\sigma(x) := \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$ heißt ***Spektralradius*** .

Bemerkung: Es ist klar , daß obige Begriffe im Falle $A \in L(X)$ mit den vorherigen zusammenfallen. Die feineren Abstufungen wie Punktspektrum, Residuenspektrum etc. werden damit jedoch nicht erfaßt, abgesehen davon, daß dort auch unbeschränkte (abgeschlossene) Operatoren zugelassen sind.

IV.2.3 Lemma: Sei A Banachalgebra mit Einselement.

1. Die Vektormultiplikation ist stetig.
2. Ist $x \in A$ und $\|x\| < 1$, so ist $e - x$ invertierbar, und es gilt
$$\|(e-x)^{-1} - (e+x)\| \;\leq\; \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} \quad .$$
3. Ist $x_0 \in A$ invertierbar und $x \in A$ mit $\|x - x_0\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$, so ist auch x invertierbar; die Menge der invertierbaren Elemente von A ist also offen.

Beweis: 1.: Für $x \to x_0$, $y \to y_0$ gilt
$$\begin{aligned} \|xy - x_0 y_0\| &= \|(x-x_0)y + x_0(y-y_0)\| \\ &\leq \|y\|\|x-x_0\| + \|x_0\|\|y-y_0\| \to 0 \ . \end{aligned}$$
2.: Mit der Neumann-Reihe (Lemma I.4.16) folgt $(e-x)^{-1} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ und
$$\|(e-x)^{-1} - (e+x)\| \;=\; \Big\|\sum_{j=2}^{\infty} x^j\Big\| \;\leq\; \sum_{j=2}^{\infty} \|x\|^j \;=\; \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} \quad .$$
3.: Folgt wegen $x = x_0 - (x_0 - x) = x_0\big(e - x_0^{-1}(x_0 - x)\big)$ direkt aus 2. . □

Als erstes Ergebnis über das Spektrum folgt nun

IV.2.4 VORAUSSETZUNG: Im folgenden sei A eine Banachalgebra, und alle Aussagen sind so zu verstehen, daß sie für beliebiges Argument $x \in A$ gelten.

IV.2.5 Lemma: Sei A eine Banachalgebra mit Einselement. Ist λ_0 regulärer Wert zu x , so gilt für Werte $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|\mathcal{R}(\lambda_0)\|$ die Entwicklung
$$R(\lambda) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j R(\lambda_0)^{j+1} \;=\; R(\lambda_0) \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j R(\lambda_0)^j \qquad (*)$$
im Sinne der Norm von A . Die Resolventenmenge $\rho(x)$ ist offen, und das Spektrum $\sigma(x)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Es gilt
$$\begin{aligned} \lambda e - x &= (\lambda_0 e - x) + (\lambda_0 - \lambda)e \;=\; (\lambda_0 e - x)(e - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 e - x)^{-1}) \\ &= (\lambda_0 e - x)(e - \underbrace{(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0))}_{=:u} \end{aligned}$$
Nach Voraussetzung ist $\|u\| < 1$. Nach Lemma IV.2.3 existiert das Element $(e-u)^{-1}$. Bildet man $v := (e-u)^{-1}R(\lambda_0) \in A$, so ist $v = R(\lambda)$, denn
$$(\lambda e - x)v \;=\; ((\lambda_0 e - x)(e-u))((e-u)^{-1}R(\lambda_0)) \;=\; e$$
und genauso folgt $v(\lambda e - x \;=\; e$. Weiter gilt
$$(\lambda e - x)^{-1} \;= v \;=\; (e-u)^{-1}R(\lambda_0) \;=\; \Big(\sum_{j=0}^{\infty} u^j\Big) R(\lambda_0) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j R(\lambda_0)^{j+1} \ .$$
Daraus folgt der Rest der Ausage: Entweder ist $\rho(x)$ leer, und dann $\sigma(x) = \mathbb{C}$, oder $\rho(x)$ enthält nur innere Punkte, d.h. es ist offen. □

Als nächstes werden einige nützliche Identitäten für Resolventen bewiesen.

IV.2.6 Lemma: Sei A eine Banachalgebra mit Einselement und $\lambda, \mu \in \sigma(x)$. Dann gelten

1. $R(\mu) - R(\lambda) \;=\; (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda)$. (**Hilbert-*Relation***)
2. $R(\lambda)x$ kommutiert mit jedem Element $y \in A$, das mit x kommutiert.
3. es gilt $R(\mu)R(\lambda) \;=\; R(\lambda)R(\mu)$.

Beweis: 1.: Folgt aus

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(\lambda e - x)R_\lambda - R_\mu(\mu e - x)R_\lambda \\ &= R_\mu[\lambda e - x - \mu e + x]R_\lambda \;=\; (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda \;. \end{aligned}$$

2.: Aus $y \cdot x = x \cdot y$ folgt

$$R_\lambda \cdot y \;=\; R_\lambda \cdot y(\lambda e - x)R_\lambda \;=\; R_\lambda(\lambda e - x)y \cdot R_\lambda \;=\; y \cdot R_\lambda \;.$$

3.: $y := R_\mu x$ kommutiert speziell mit x nach 2.. Also kommutiert nach 2. $R_\lambda x$ mit y . □

Eigenschaft 1. führt zu der Beobachtung, daß der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \;=\; -\lim_{\lambda \to \lambda_0} R(\lambda)R(\lambda_0) \;=\; -R(\lambda_0)^2$$

für λ_0 in der offenen Menge $\rho(x)$ existiert. Dies bedeutet, daß die Ableitung von $R(\lambda)$ bezüglich $\lambda \in \rho(x)$ existiert, wenn wir entsprechend einführen:

IV.2.7 Definition: Sei $\mathbb{Z}$ offen in $\mathbb{C}$ und f auf $\mathbb{Z}$ definierte Abbildung mit Werten in einem Banachraum X . Falls für $z_0 \in \mathbb{Z}$ ein Element $g \in X$ existiert mit

$$\lim_{h \to 0} \| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g \| = 0 \;,$$

so heißt g ***starke Ableitung*** von f im Punkt z_0, geschrieben $g = f'(z_0)$. Falls für jedes $z \in \mathbb{Z}$ alle Ableitungen im starken Sinne in X existieren, heißt f ***stark holomorph*** auf $\mathbb{Z}$.

Im Sinne dieser Definition besagt Lemma IV.2.5, daß die Resolvente eine holomorphe Funktion mit Werten in einem Banachraum X auf der offenen Menge $\rho(x)$ ist. Wir nehmen die zum Anlaß, einige Grundlagen der Theorie dieser Funktionen darzustellen.

Analog kann man die Begriffe ßchwache Ableitungünd ßchwach

IV.2.8 Definition: Seien Z und f wie vorher definiert. f heißt ***schwach holomorph*** in $z_0 \in Z$, falls für jedes x^* in X^* die (komplexwertige) Funktion $\langle f(z), x^* \rangle$ holomorph in z_0 ist. Ist f in jedem $z \in Z$ schwach holomorph, so heißt f schwach holomorph auf Z . Für $x^* \in A^*$ heißt die Funktion

$$\langle f'(z), x^* \rangle := \lim_{h \to 0} \langle [f(z+h) - f(z)]/h, x^* \rangle$$

die ***schwache Ableitung*** von f bezüglich x^* .

Bemerkenswert ist nun folgender

IV.2.9 Satz: (**Dunford** 1938): Ist eine Funktion f mit Werten in einem Banachraum X auf einem offenem Gebiet von $\mathbb{C}$ schwach holomorph, so ist sie dort auch stark holomrph.

Beweis: Es sei $\mathbb{C}$ eine rektifizierbare Jordankurve in $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ die von $\mathbb{C}$ eingeschlossene Menge und z_0 ein Punkt im Innern von $\mathcal{D}$. Der Cauchy-Integralsatz liefert die Darstellung

$$\langle f(z_0), x^* \rangle \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\langle f(z), x^* \rangle}{z - z_0} \, dz \; .$$

Zur Abkürzung sei nun $g_h := [f(z_0 + h) - f(z_0)]/h$ gesetzt. Dann gilt für alle h, h' , $h \neq h'$ und $z_0 + h, z_0 + h'$ in einer offenen Umgebung $U_0 \subset \mathcal{D}$ von z_0

$$T_{h,h'}(x^*) \;:=\; \langle \frac{g_h - g_{h'}}{h - h'}, x^* \rangle \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\langle f(z), x^* \rangle}{z - z_0} \frac{1}{z - z_0 - h} \frac{1}{z - z_0 - h'} \, dz \; .$$

Nun haben $z_0 + h, z_0 + h' \in U_0$ einen gleichmäßig nach unten beschränkten Abstand von $\mathbb{C}$, d.h. die Operatoren $T_{h,h'} : X^* \mapsto \mathbb{C}$ sind für jedes $x^* \in X^*$ (also punktweise) gleichmäßig in h, h' beschränkt. Nach dem " Uniform Boundedness Prinziple" (Satz II.1.1) und Korollar II.3.7 zum Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $C > 0$ mit

$$\sup_{h,h'} \|T_{h,h'}\| \;=\; \sup_{h,h'} \sup_{\|x^*\|=1} |T_{h,h'}(x^*| \;=\; \sup_{h,h'} \|\frac{g_h - g_{h'}}{h - h'}\| \;\leq\; C \; .$$

Daraus folgt aber $\|g_{h_n} - g_{h_m}\| \to 0$ für jede Nullfolge $\{h_n\}$, d.h. g_{h_n} ist eine Cauchyfolge. Der Grenzwert ist aber wegen $\|g_h - g_{h'}\| \leq C|h - h'|$ unabhängig von der Nullfolge, sodaß $\lim_{h \to 0} g_h$ wie behauptet existiert.

IV.2.10 Definition: : Seien Z und f wie oben unf f sei stetig. Für eine orientierte rektifizierbare Kurve $\mathcal{C}$ in Z ist das Kurvenintegral $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz$ als Grenzwert von Riemannschen Zwischensummen bezüglich f und $\mathcal{C}$ definiert.

Bemerkung: Die Existenz und Eindeutigkeit sind leicht nachzuweisen.

Folgende Aussagen können nun formuliert werden:

a) Cauchy-*Integralsatz:* Ist f in einem von einer rektifizierbaren Jordankurve $\mathcal{C}$ umschlossenen Gebiet $\mathcal{D}$ holomorph und stetig auf $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz \;=\; 0 \; .$$

b) Integraldarstellung : Unter den Voraussetzungen von a) gilt für $z_0 \in \mathcal{D}$

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \; .$$

c) Potenzreihen-Entwicklung : Unter den Voraussetzungen von a) sei K eine Kreissscheibe um z_0 in $\mathcal{D}$. Dann gilt für $z \in K$

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \qquad f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \; .$$

d) Satz von Liouville : Ist f holomorph in der ganzen komplexen Ebene und $\sup_z \|f(z)\| \leq \infty$, so ist f eine konstante Funktion .

Die Beweise aller Aussagen können mit der Beobachtung, daß sie für jede schwach holomorphen Funktion $\langle f(z), x^* \rangle$ gelten und Anwendung des Satzes von Hahn-Banach geführt werden.

IV.2.11 Satz: Sei A eine Banachalgebra mit Einselement und $x \in A$. Dann gelten

1. Das Spektrum ist niemals leer.
2. Für den Spektralradius gilt $r_\sigma(x) \;\leq\; \|x\|$, und $\sigma(x)$ ist kompakt.
3. $(\lambda e - x)^{-1}$ existiert , falls $|\lambda| \;>\; r_\sigma(x)$, und es gilt die Darstellung
$$R(\lambda) \;=\; \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n \;.$$
4. Konvergiert die Reihe für ein λ mit $|\lambda| \;=\; r_\sigma(x)$, so stellt sie die Resolvente $R(\lambda)$ dar.
5. Die Reihe divergiert für $|\lambda| \;<\; r_\sigma(x)$.

Beweis: 2.: Für $|\lambda| > \|x\|$ ist die Reihe
$$(\lambda e - x)^{-1} \;=\; \lambda^{-1}\Big(e - \frac{x}{\lambda}\Big)^{-1} \;=\; \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n \qquad (*)$$
konvergent, also $\sigma(x) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$, somit $r_\sigma(x) \leq \|x\|$ per Definition. Ferner ist $\sigma(x)$ beschränkt und nach der Bemerkung zur Neumann-Reihe (Lemma I.4.16) abgesclossen also kompakt.

3.: Per Definition existiert die Resolventenabbildung $R(\lambda)$ für $|\lambda| > r_\sigma(x)$ und ist nach Lemma IV.2.5 holomorph. Also ist $f(1/\lambda) := R(\lambda)$ eine holomorphe Abbildung für $|1/\lambda| < 1/r_\sigma(x)$, und es gilt die Laurent- Reihenentwicklung
$$(\lambda e - x)^{-1} \;=\; R(\lambda) = f(1/\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{-n} \;. \qquad (**)$$
Diese Formel muß mit $(*)$ auf dem gemeisamen Durchschnitt, d.h. für $|\lambda| > \max(\|x\|, r_\sigma(x) = r_\sigma(x)$ übereinstimmen, sodaß $(*)$ auch dort gilt.

1.: Nehme an $\sigma(T) = \emptyset$. Wende dann auf $R(\lambda)$ ein beliebiges $l \in X^*$ an. Dann ist die Abbildung $\lambda \mapsto l(R(\lambda))$ in der ganzen komplexen Ebene holomorph und hat nach $(*)$ in Lemma IV.2.5 die Darstellung
$$l(R(\lambda)x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j l(R(\lambda_0)^{j+1} \;.$$
Sie ist aber auch beschränkt, denn für $|\lambda| > 2\|x\|$ gilt nach $(*)$
$$\|(R(\lambda)x)\| \;\leq\; |\lambda|^{-1}| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda|^{-n} |\|x\|^n \leq \;\leq\; |\lambda|^{-1}| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda|^{-n}|| \frac{\lambda|^n}{2^n} \;=\; |\lambda|^{-1}| \cdot 2 \;< \|x\|^{-1} \;.$$
Auf der kompaktem Menge $\{\; \lambda \mid |\lambda| \leq 2\|x\| \;\}$ ist $R(\lambda)$ ebenfalls holomorph ist und so aus Stetigkeitsgründen beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist sie dann konstant. Aus
$$\|R(\lambda)x\| \;\leq\; |\lambda^{-1}| \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{-1}x\|^n \;=\; \frac{|\lambda^{-1}|}{1 - \|\lambda^{-1}x\|} \;=\; \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}$$
folgt aber $\|R(\lambda)x\| \mapsto 0, \lambda \mapsto \infty$ und daher weiter $R(\lambda)x = 0$. Dies liefert einen Widerspruch, da dann $e \;=\; (\lambda e - x)R(\lambda)x \;=\; 0$ wäre.

Der Beweis der ergänzenden Aussagen 4. und 5. sei dem Leser überlassen.

Wir wollen noch kurz darauf eingehen, wie man mit Hilfe der Resolventenabbildung einen **Operatorenkalkül in Banachalgebren** A entwickeln kann (nach N.Dunford). Die

Grundidee ist, einer auf (einem Gebiet von) $\mathbb{C}$ definierten komplexwertigen Funktion $f(\lambda)$ eine Operator-wertige Abbildung $F(x)$ mit Werten in A (eineindeutig) zu zuordnen. Diese Korrespondenz soll dann dazu dienen, Aussagen z.B. über das Spektrum von $F(x)$ zu gewinnen. Zur Motivation betrachten wir die Zuordnungen $(\alpha, t \in \mathbb{C})$

$$\begin{array}{rclcrcl} f_0(t) & := & \alpha \cdot 1 & \longmapsto & F_0(x) & := & \alpha \cdot e \in A \\ f_k(t) & := & \alpha \cdot t^k & \longmapsto & F_k(x) & := & \alpha \cdot x^k \in A \end{array}$$

Es werden also der konstanten Funktion mit Wert 1 das Einselement, der Variablen t das Element bzw. der Operator $x \in A$ zugeordnet, und allgemein Polynomen in t entsprechende in $x \in A$. Entscheidend für das Weitere ist aber die Zuordnung

$$f^*(t) \ := \ \frac{1}{\lambda \cdot 1 - t} \qquad \longmapsto \qquad (\lambda e - x)^{-1} \ = \ R(\lambda)$$

und die Idee, die Darstellung holomorpher Funktionen durch den Cauchy-Integralsatz mit $f^*(t)$ als Kern zu benutzen. Dies führt zur Abbildung

$$f \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f}{\lambda - t}\, d\lambda \qquad \overset{S}{\longmapsto} \qquad S(f)(x) \ := \ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda(x)\, d\lambda \ ,$$

wobei Γ aus einer oder mehreren geschlossenen Kurven in der Resolventenmenge $\rho(x)$ besteht. (Natürlich muß man noch die die Integration Operator-wertiger Abbildungen geeignet definieren, wobei man Konvergenz im Sinne der Norm der Algebra A zu betrachten hat).
Ist $f(\lambda) \ := \ \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ eine holomorphe Abbildung in einem Kreis um 0 mit Radius $\tau \ > \ r_\sigma(x)$, so ist diese Definition von F mit derjenigen über eine Potenzreihe äquivalent; denn setzt man f in die Definition ein, benützt die Darstellung $(*)$ der Resolvente und vertauscht Integration und Summation, so folgt

$$S(f)(x) \ = \ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| \ = \ \tau} \lambda^{n-1} \sum_{k=0}^\infty \lambda^{-k} x^k \ d\lambda \ .$$

Nochmalige Vertauschung von Integration und Summation und Anwendung von $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| \ = \ \tau} \lambda^{n-k-1} \ d\lambda \ = \ \delta_{n,k}$ ergibt

$$S(f)(x) \ = \ \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \ =: \ F(x) \ ,$$

also die gleiche Form wie f, nur ist t ersetzt durch x im Sinne des am Anfang erwähnten Prinzips. In der Operatorabbildung $S(f) \ = \ F(x)$ heißt f auch das ***Symbol*** von F (vergl. Bemerkung nach Satz I.4.17).

Man kann diese Abbildung S auf einer erheblich größeren Klasse von holomorphen Funktionen definieren. Für Einzelheiten sei auf Rudin[7, Kapitel 10] verwiesen. Ein zentrales Ergebnis dieser Theorie ist

IV.2.12 Satz: (***Spektralabbildungssatz***) Es sei A eine Banachalgebra, Ω offen in $\mathbb{C}$ und $H(\Omega)$ der Vektorraum (und die Algebra) aller komplexen holomorphen Funktionen auf Ω . und

$$A_\Omega := \{x \in A \ | \ \sigma(x) \subset \Omega\}$$

(Aus der Bemerkung zur Neuman-Reihe (Lemma I.4.16) folgt leicht daß A_Ω offen ist). Dann gilt für $x \in A_\Omega$ und $f \in H(\Omega)$:

$$\sigma(S(f)(x)) = f(\sigma(x)) \ .$$

Im Spezialfall, daß f ein Polynom ist, kann diese Formel direkt bewiesen werden:

IV.2.13 Lemma: Für ein Polynom p gilt

$$\sigma(p(x)) \ = \ p(\sigma(x)) \ .$$

Beweis: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$p(t) - \lambda = \alpha(t - \beta_1) \cdots (t - \beta_n)$$

mit komplexen Zahlen $\alpha \neq 0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ und daher auch

$$p(x) - \lambda \cdot e = \alpha(x - \beta_1 e)(t - \beta_2 e) \cdots (t - \beta_n e) \ .$$

Ist nun $\lambda \in \sigma(p(x))$, also $p(x) - \lambda e$ nicht invertierbar, so muß für wenigstens ein β_j das Element $(x - \beta_j e)$ nicht invertierbar sein. Dies bedeutet $\beta_j \in \sigma(x)$ bzw. per Definition $p(\beta_j) \in p(\sigma(x))$. Einsetzen in obige Zerlegung zeigt nun $p(\beta_j) = \lambda$, sodaß $\lambda \in p(\sigma(x))$ folgt. Umgekehrt sei $\lambda \in p(\sigma(x))$, also $\lambda = p(\mu)$ mit $\mu \in \sigma(x)$. Dann gilt analog zu oben

$$p(x) - p(\mu) \cdot e \ = \ \alpha(x - \gamma_1 e) \cdots (x - \gamma_{n-1} e)(x - \mu e) \ .$$

Wäre nun $\lambda \notin \sigma(p(x))$, also $p(x) - p(\mu) \cdot e$, so folgte

$$e \ = \ \Big\{(p(x) - p(\mu) \cdot e)^{-1} \alpha(x - \gamma_1 e) \cdots (x - \gamma_{n-1} e)\Big\}(x - \mu e) \ .$$

Dann hätte $x - \mu e$ eine linksseitige Inverse. Analog kann man die Existenz der rechtsseitigen Inversen folgern, sodaß $x - \mu e$ invertierbar wäre, d.h. $\mu \notin \sigma(x)$ im Widerspruch zur Annahme.

Der folgende Satz gibt als Ergänzung von Satz IV.2.11 eine Formel für den Spektralradius, die später noch benötigt wird.

IV.2.14 Satz: Sei X eine Banachalgebra mit Einselement.

1. Dann gilt für den Spektralradius

$$r_\sigma(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \ .$$

2. Ist X ein Hilbertraum und T ein normaler Operator auf X , so ist

$$r_\sigma(T) \ = \ \|T\| \ .$$

Beweis: 1.: Zeige zunächst

$$r_\sigma(x) \ \le \ \liminf_{n\to\infty} \ \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \ . \qquad (*)$$

Nach dem vorigen Lemma gilt aber $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, und somit $|\lambda|^n \le ||x||^n$, also folgt $(*)$. Andererseits gilt als Spezialfall der obigen Resolventenformel

$$x^n \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| \ = \ \tau} \lambda^n R(\lambda) \ d\lambda \ .$$

Mit $M(\tau) := \max_\varphi ||R(\tau e^{i\varphi}||$ folgt daraus die Abschätzung $||x^n|| \le \tau^{n+1} M(\tau)$ und damit

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \tau \quad , \qquad \text{bzw.} \qquad \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \rho_\sigma(x) \ ,$$

da $\tau > r_\sigma(x)$ beliebig war. Zusammen mit $(*)$ zeigt dies die Existenz des Limes in der gewünschten Formel für $r_\sigma(x)$.

2.: Ist T normal, gilt $\|Tf\| = \|T^* f\|$ nach Lemma I.5.21 , also $\|TTf\|^2 = \|T^*Tf\|^2$ für $f \in X$, und damit $\|T^2\| = \|T^*T\|$. Andererseits ist $\|T^*T\| \le \|T\|^2$ und

$\|Tf\|^2 = (f, T^*Tf) \leq \|T^*T\| \|f\|^2$, also $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Insgesamt gilt daher $\|T^2\| = \|T\|^2$. Da alle T^n ebenfalls normal sind, gilt auch $\|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\|$ und

$$\sigma_r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|T\| \ .$$

□

IV.3 KOMPAKTE NORMALE OPERATOREN IN PRÄ-H-RÄUMEN

Zur Erinnerung: Normale Operatoren T erfüllen definitionsgemäß die Beziehung $T\ T^* = T^*\ T$. Darunter fallen selbstadjungierte und unitäre Operatoren. Nach Lemma I.5.21 ist T genau dann normal, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in X$ ist.

IV.3.1 Lemma: Sei X ein Ppä-Hilbertraum und $T \in L(X)$ normal. Dann gelten:

1. $$\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) \ \text{ für alle } \ \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

2. $$\mathcal{N}(\lambda I - T) \perp \mathcal{N}(\mu I - T) \ \text{ für alle } \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \ , \ \lambda \neq \mu \ .$$

   Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenräumen sind also orthogonal.

3. Ist T symmetrisch, so sind die Eigenwerte reell; ist T unitär, so liegen sie auf dem Eiheitskreis.

4. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten

   $$R(\lambda I - T)^\perp = \mathcal{N}(\lambda I - T) \quad , \quad X = \overline{R(\lambda I - T)} \oplus \mathcal{N}(\lambda I - T) \ .$$

1.: Einfaches Nachrechnen zeigt

$$(\lambda I - T)(\overline{\lambda} I - T^*) \;=\; (\overline{\lambda} I - T^*)(\lambda I - T) \ ,$$

$\lambda I - T$ ist also ein normaler Operator. Die Behauptung folgt daher aus Lemma I.5.21 .

2.: Sei $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ und $\lambda \neq \mu$. Dann ist nach IV.3.1

$$\lambda(x,y) \;=\; (\lambda x, y) \;=\; (Tx, y) \;=\; (x, T^*y) = (x, \overline{\mu} y) \;=\; \mu(x,y) \ ,$$

also $(x,y) = 0$.

3.: Analog zeigt man, daß die Eigenwerte reell sind , falls T symmetrisch ist . Für unitäre T gilt nach Lemma I.5.21 $\|Tx\| = \|x\|$. Nach Satz IV.2.11 gilt also $\lambda \leq \|T\| = 1$ für $\lambda \in \sigma(T)$, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ gehören nicht zum Spektrum. Wegen $T^{-1} = T^*$ ist T stetig invertierbar, d.h. $\lambda := 0$ liegt nicht im Spektrum von T. Das Gleiche gilt für den Bereich $\{ \ \lambda \mid 0 < |\lambda| < 1 \ \}$, denn $\lambda T^* - I$ ist wegen $\|T^*\| = 1$ invertierbar, sodaß

$$\begin{aligned}
[T(\lambda T^* - I)]^{-1} &= (\lambda T^* - I)^{-1} T^{-1} = (\lambda T^* - T^*T)^{-1} T^* \\
&= [T^*(\lambda I - T)]^{-1} T^* = (\lambda I - T)^{-1} (T^*)^{-1} T^* = (\lambda I - T)^{-1} \ .
\end{aligned}$$

4.: Folgt aus Lemma I.5.18 . □

IV.3.2 Satz: Sei X ein Hilbertraum und $T \in K(X)$ normal. Dann existiert eine Teilmenge $N = \{1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem $\{e_k \mid k \in N\}$ und eine Folge $(\lambda_k)_{k \in N}$ mit Elementen aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die höchstens 0 als Häufungspunkt besizt, sodaß

$$X = \mathcal{N}(T) \bigoplus \overline{\{span\{e_k \mid k \in N\}} \ , \qquad (*)$$

und

$$Tx = \sum_{k \in M} \lambda_k (x, e_k) e_k \quad , \quad (x \in X) \ ,$$

wobei die λ_k die von Null verschiedenen Eigenwerte mit Vielfachheiten (s. Beweis) zu den Eigenvektoren e_k sind.

Beweis: Nach Satz II.3.15 der Riesz-Schauder-Theorie ist die die Folge (μ_j) der paarweise verschiedenen Eigenwerte höchstens abzählbar mit einzig möglichem Häufungspunkt 0. Nach Lemma II.3.3 sind die Dimensionen d_j der zugehörigen Eigenräume $\mathcal{N}_j$ endlich. Bilde dann die Menge der λ_k durch d_i-fache Wiederholung der μ_j:

$$\underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_1}_{d_1 \text{ mal}}, \underbrace{\mu_2, \ldots, \mu_2}_{d_2 \text{ mal}}, \mu_3, \ldots$$

Dann ist diese Menge endlich oder besitzt höchtens 0 als Häufungspunkt. Ferner wähle Orthonormalbasen der Eigenräume $\mathcal{N}_j$ und bilde entsprechend den λ_k die Folge der e_k. Nach Lemma II.3.3 sind die e_k paarweise orthogonal und es gilt $Te_k = \lambda_k e_k$ für $k \in M$. Weiterhin ist $\mathcal{N}(T) \perp e_k$ für $k \in M$, daher ist $Y := \mathcal{N}(T) \bigoplus \overline{span\{e_1, e_2, \ldots\}}$ ein abgeschlossener Unterraum von X.
Zeige nun $(*)$, d.h. $X = Y$ und betrachte dazu $Y^\perp$. Es ist $T(Y^\perp) \subset Y^\perp$, denn für $y \perp e_k$ gilt nach Lemma IV.3.1

$$(Ty, e_k) = (y, T^* e_k) = (y, \overline{\lambda_k} e_k) = \lambda_k (y, e_k) = 0 \ ,$$

und für $x \in \mathcal{N}(T)$ ist ebenfalls nach Lemma IV.3.1 $(Ty, x) = (y, T^{/ast} x) = 0$. Betrachte die Restriktion $T_0 := T|_{Y^\perp}$. Dann ist T_0 normal als Operator auf $Y^\perp$, denn $\|T_0 x\| = \|T_0^* x\|$. Ist $T_0 \neq 0$, so gibt es nach den Sätzen IV.2.11 und IV.2.14 ein $\lambda \in \sigma(T_0)$ mit $|\lambda| = r_\sigma(T_0) = \|T_0\| > 0$ und ein $\tilde{x} \in Y^\perp \setminus \{0\}$ mit $T_0 \tilde{x} = \lambda \tilde{x}$. Dann ist aber $\tilde{x} \in span\{e_1, e_2, \ldots\}$. Andererseits ist $\tilde{x} \perp Y$, also $\tilde{x} = 0$ und damit $T_0 = 0$. Es folgt $Y^\perp \subset \mathcal{N}(T) \subset Y$, also $Y^\perp = \{0\}$.
Jedes $x \in X$ kann daher in der Form

$$x = y + \sum_{k \in M} (x, e_k) e_k$$

mit $y \in \mathcal{N}(T)$ geschrieben werden, also

$$Tx = Ty + \sum_{k \in M} (x, e_k) Te_k = \sum_{k \in M} \lambda_k (x, e_k) e_k \ .$$

□

Bemerkung: Ist $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, so folgt, daß zu T ein vollständiges abzählbares Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von T für X existiert.

Betrachte nun **symmetrische und kompakte Operatoren** auf Prä-Hilbert-Räumen X. Die Verbindung dieser Eigenschaften ist so stark, daß man teilweise auf Vollständigkeit verzichten kann.

IV.3.3 Lemma: Sei X ein Prä-Hilbertraum und $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$, $\mathcal{D}(T) \subset X$, stetig und symmetrisch. Dann gilt

1. $\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} |(Tx, x)|$.
2. Ist T zusätzlich kompakt, so ist entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ Eigenwert von T .

Beweis: 1.: Sei $M = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|$. Dann ist $|(Tx,x)| \le \|Tx\|\|x\| \le \|T\|$ für $\|x\| \le 1$, also $M \le \|T\|$. Aus $T = T^*$ folgt

$$\begin{aligned}(T(x+y),x+y) - (T(x-y),x-y) &= 2(Tx,y) + 2(Ty,x) \\ &= 2(Tx,y) + 2(y,Tx) \ = \ 4\Re(Tx,y) \ .\end{aligned}$$

Mit der Parallelogrammgleichung I.5.3 folgt

$$4\Re(Tx,y) \ \le \ M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \ = \ 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ ,$$

also $\Re(Tx,y) \ \le \ M$ für $\|x\|,\|y\| \ \le \ 1$ und allgemeiner $\Re(Tx,y) \ \le \ M \ \|x\|\|y\|$ für alle x,y. Damit folgt mit $y := Tx$

$$\|Tx\|^2 \ = \ \Re(Tx,Tx) \ \le \ M \ \|x\| \ \|Tx\| \quad , \quad \text{d.h.} \ \ \|Tx\| \ \le \ M \ \|x\| \ ,$$

also $\|T\| \ \le \ M$.

2.: Nach 1. gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $|(Tx_n,x_n)| \to \|T\|$. Weil T kompakt ist, gibt es nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge ein $y \in X$ mit $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$. Hieraus folgt $\lambda = \lim_{n\to\infty}(Tx_n,x_n)$ mit $|\lambda| = \|T\|$ und

$$\begin{aligned}\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2|\lambda|(Tx_n,x_n) + |\lambda|^2\|x_n\|^2 \\ &\le \|T\|^2 + |\lambda|^2 - 2\lambda(Tx_n,x_n) \to 0 \ ,\end{aligned}$$

Also $Ty - \lambda y = 0$, d.h. λ ist Eigenwert und y Eigenvektor. □

Damit kann man eine analoge Aussage zu Satz IV.3.2 beweisen:

IV.3.4 Satz: Sei X ein Prä-Hilbertraum und $T : X \longrightarrow X$ kompakt und symmetrisch. Dann existiert eine Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$ und eine Folge von Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in N}$ und ein zugehöriges Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in N}$ von Eigenvektoren , sodaß die Darstellung

$$Tx = \sum_{n\in N} \lambda_n(x,e_n) \ e_n \quad , \quad (x \in X) \qquad (*)$$

gilt, wobei die Summe sich über alle auftretenden $\lambda_n e_n$ erstreckt einschließlich Vielfachheit. Es gilt außerdem $|\lambda_n| \to 0, n \to \infty$, falls die Folge unendlich ist. Jeder Eigenwert λ_i tritt mindestens einmal in dieser Folge auf, und die Vielfachheit, mit der λ_i auftritt, ist endlich und gleich der Dimension des Eigenraums zu λ_i .

Beweis: Dazu wende das Argument des vorigen Lemmas induktiv an. Seien $X_1 := X$ und λ_1 ein Eigenwert von T und e_1 ein zugehöriger Eigenvektor der Norm 1. Setze $X_2 := \{e_1\}^\perp$. Dann gilt $T(X_2) \subset X_2$, und man kann die Restriktion $T_2 := T|_{X_2}$ von T auf X_2 betrachten. Man verifiziert leicht, daß T_2 wieder kompakt ist, sodaß das vorige Lemma wieder anwendbar ist. Man findet λ_2, e_2 mit $Tx_2 = \lambda_2 e_2$ und $|\lambda_2| = \|T_2\| \le |\lambda_1|$, usw.. Damit erhält man eine Folge $\{X_n\}$ von Unterräumen in X mit $X_{n+1} \subset X_n$ und $X_{n+1} \perp span\{e_i \mid i = 1,\cdots,n\}$, wobei e_i Eigenvektor der Norm 1 zum Eigenwert λ_i ist mit $|\lambda_i| = \|T|_{X_i}\|$. Diese Folge ist genau dann endlich, wenn $T|_{X_{n+1}} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{N}(T) = X_{n+1}$ ist. In diesem Fall ist $P_n x := x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,e_i) \ e_i$ Orthogonalprojektion von X auf X_{n+1} wegen

$$(x - P_n x, g) = -\sum_{i=1}^n (x,e_i)(e_i,g) = 0 \quad (g \in X_{n+1})$$

Daraus folgt

$$Tx \ = \ T(P_n x + \sum_{i=1}^n (x,e_i) \ e_i) \ = \ T(P_n x) \ + \ T(\sum_{i=1}^n (x,e_i) \ e_i) \ = \ \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,e_i) \ e_i \ ,$$

d.h. die Behauptung des Satzes im Fall endlich vieler Eigenwerte.
Im anderen Falle schließe so: würde nicht $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$ gelten, so müßte es wegen $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ ein $\delta > 0$ geben, sodaß $|\lambda_n| \geq \delta$. Die Folge der $y_n := \frac{1}{\lambda_n} e_n$ würde dann $\|y_n\| \leq \frac{1}{\delta 1}$ und $Ty_n = e_n$ erfüllen und wegen der Kompaktheit von T Gäbe es eine konvergente Teilfolge der $\{e_n\}$. Dies ist aber unmöglich wegen
$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2$.
(Dieses Argument ersetzt dasjenige in Satz IV.3.2 , das die Riesz-Schauder-Theorie benötigte!).
Für P_n gilt nach Lemma I.5.9 $\|P_n x\| \leq \|P\|\|x\| = \|x\|$ und folglich

$$\|T\ P_n x\| = \|T|_{X_{n+1}}(P_n x)\| = |\lambda_{n+1}|\ \|P_n x\| \leq |\lambda_{n+1}|\ \|x\| ,$$

also $TP_n x = Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i)\ e_i \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, d.h. Konvergenz und Gleichheit in $(*)$.
Wäre $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert zu T und nicht in der Folge $\{\lambda_i\}$ enthalten, so gäbe es einen Eigenvektor $x \neq 0$ mit $\lambda(x, e_k) = (Tx, e_k) = (x, Te_k) = \lambda_k(x, e_k)$, sodaß $(x, e_k) = 0$ für alle k in $(*)$ und somit $Tx = 0$ wäre. Dies ist aber ein Widerspruch zu $Tx = \lambda x \neq 0$.
Ein Eigenwert kann nicht unendlich oft auftreten, denn das obige Argument, angewendet auf die Folge der zugehörigen Eigenvektoren, würde die Konvergenz einer Teilfolge von ihnen liefern, was unmöglich ist.
Tritt ein Eigenwert α_i- mal auf, so gibt es dazu auf Grund des eben Bewiesenen α_i verschiedene, paarweise orthogonale Eigenvektoren. Wäre die Dimension des Eigenraums echt größer, so gäbe es ein $\bar{x}$ mit $T\bar{x} = \lambda_i \bar{x}, \|\bar{x}\| = 1$ und $(\bar{x}, e_l) = 0$ für *alle* Eigenvektoren e_l (denn die zu $\lambda_l \neq \lambda_i$ zugehörigen sind sowieso orthogonal). Es wäre dann wieder $T\bar{x} = 0$ im Widerspruch zu $\lambda_i \bar{x} \neq 0$.

Bemerkung: Beachte, daß der Satz die Konvergenz der Reihendarstellung $(*)$ (in der zugehörigen Norm) ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit garantiert.

Zur Ergänzung für die Darstellung der Elemente von X selbst:

IV.3.5 Korollar: (**Hilbert-Schmidt**) Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz IV.3.5 gilt:
Es gibt eine Indexmenge J und ein Orthonormalsystem $\{d_j | j \in J\}$ sodaß

$$x = \sum_{j\in J} (x, d_j)\ d_j + \sum_{n\in N} (x, e_n)\ e_n \quad , \quad (x \in X) .$$

Beweis: Die Behauptung folgt mit Wahl einer Orthonormalbasis für $\mathcal{N}(T)$ aus Satz IV.3.2
.

Eine für Anwendungen wichtige Variante von Satz IV.3.4 ist

IV.3.6 Satz: Sei X ein Prä-Hilbertraum und $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ ein symmetrischer linearer Operator auf $\mathcal{D}(A) \subset X$. Es existiere $T := A^{-1}$ auf ganz X mit $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(A)$. Weiterhin sei T kompakt. Dann ist die Folge der Eigenwerte (λ_k) von T unendlich. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zugehöriges Eigenvektoren der Norm 1. Dann besteht das Spektrum $\sigma(A)$ aus der Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n}$, mit $\mu_n \longrightarrow \infty$. Die $\{x_n \mid {}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden ein totales Orthonormalsystem für $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(T)$ und es gilt $Ax_n = \mu_n x_n$. Ist $\mu \neq \mu_i \ (i \in \mathbb{N})$, so ist $\mu \in \rho(A)$, die Resolvente $(\mu I - A)^{-1}$ ist kompakt und hat die Darstellung

$$(\mu I - A)^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, x_k)}{\mu - \mu_k} x_k \qquad (y \in X) . \qquad (*)$$

Beweis: Zu $x, y \in X$ existieren $x', y' \in \mathcal{D}(A)$ mit $Ax' = x,\ Ay' = y$ bzw. $x' = Tx,\ y' = Ty$. Dann ist $(x, Ty) = (Ax', y') = (x', Ay') = (Tx, ATy) = (Tx, y)$, d.h. T ist symmetrisch.

Satz IV.3.5 ist also anwendbar und liefert eine wegen $dimX = \infty$ unendliche Folge $\{\lambda_n, x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $x_n = ATx_n = A(\lambda_n x_n) = \lambda_n Ax_n$, d.h. $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n}$ ist Eigenwert von A. Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge ist, gilt $\mu_n \longrightarrow \infty$. Wegen $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ bilden die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein totales Orthonormalsystem für $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(A)$. Also gilt $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k$ für $x \in \mathcal{D}(A)$
Sei nun $\mu \neq 0$, $\mu \neq \mu_i$. Wir zeigen zunächst:
$(T - \frac{1}{\mu}I)$ besitzt eine stetige Inverse: Annahme, dies ist falsch. Nach Satz I.4.15 existiert dann eine Folge (y_n) in X mit $\|y_n\| = 1$ und $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|Ty_n - \frac{1}{\mu}Iy_n\| = 0$. Weil T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge (Ty_{n_k}) gegen ein $z \neq 0$ $(\|y_n\| = 1)$. Dann konvergiert (y_{n_k}) gegen μz , und es folgt
$\lim_{k\to\infty} Tyn_k = T(\lim_{k\to\infty} yn_k) = T(\frac{1}{\mu}z) = \frac{1}{\mu}Tz$, also ist $\frac{1}{\mu}$ ein Eigenwert im Widerspruch zu $\frac{1}{\mu} \neq \lambda_i$.
Es folgt

$$\frac{1}{\mu}T(T - \frac{1}{\mu}I)^{-1} \;=\; \big(\mu(T - \frac{1}{\mu}I)A\big)^{-1} \;=\; (\mu I - A)^{-1} \;. \qquad (**)$$

amit existiert die Resolvente $(\mu I - A)^{-1}$ und ist nach Satz II.2.3 kompakt, da T kompakt ist, und das Spektrum $\sigma(A)$ besteht aus der Folge der $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$.
Konvergenz der Reihe $(*)$: Sei $y \in X$ und seien

$$u_n \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(y, e_k)}{\mu_k - \mu}\, e_k \quad , \quad v_n \;:=\; Au_n \quad , \quad (n \in \mathbb{N}) \;.$$

$(u)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, da für $m > n$

$$\|u_m - u_n\|^2 \;=\; \sum_{k=n+1}^{m} \Big| \frac{(y, x_k)}{\mu_k - \mu} \Big|^2 \;\leq\; \frac{1}{[\min_{j\in\mathbb{N}|\mu_j - \mu|}]^2} \sum_{k=n+1}^{m} |(y, x_k)|^2 \longrightarrow 0 \;\text{ für }\; n \to \infty \;.$$

$(v)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da für $n \in \mathbb{N}$

$$\|v_n\|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \Big|\frac{\mu_k}{\mu - \mu_k}\Big|^2 |(y, x_k|^2 \;\leq\; \sup_{j\in\mathbb{N}} \Big|\frac{\mu_j}{\mu - \mu_j}\Big|^2 \sum_{k=1}^{n} |(y, x_k|^2 \longrightarrow 0 \;\text{ für }\; n \to \infty \;.$$

Weil T kompakt ist, enthält $(Tv_n\,)_{n\in\mathbb{N}} = (u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, und somit ist $\{u_N\}_{n\in\mathbb{N}} = (Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Cauchyfolge insgesamt konvergent.
Die Formel in $(*)$ folgt aus

$$(\mu I - A)z \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, x_k)}{\mu - \mu_k}(\mu - \mu_k)\; x_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(y, x_k)\; x_k \;=\; y \;.$$

Beispiel (**Sturm-Liouville-*Operator***):
Sei $(Ax)(t) := (px')'(t) + q(t)x(t)$ definiert auf

$$\mathcal{D}(A) := \{\; x \in C^2[a, b] \;\mid\; R_a(x) := \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \;,\; R_b(x) := \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \;\} \;.$$

Weiterhin seien $q \in C([a, b])$, $p \in C^1([a, b])$, $(x, y) := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\; dt$. Setze $p(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$ voraus, d.h. ist A regulärer Differentialoperator 2. Ordnung. Die Randbedingungen $R_a(x), R_b(x)$ seien so, daß das homogene Problem $Ax = 0, x \in \mathcal{D}(A)$ nur die triviale Lösung besitzt. Wie am Ende des Abschnitts über die Riesz-Schauder-Theorie erwähnt, kann man dann zeigen, daß zu A eine kompakte Inverse T existiert. Betrachte nun das Eigenwertproblem $Ax - \lambda x = 0$, bzw. suche die Spektralentwicklung von A. Da die Voraussetzungen des vorherigen Satzes erfüllt sind, läßt sich jede Funktion aus $C^2([a, b])$ mit geeigneten Randbedingungen entwickeln als $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n(t)$, wobei die e_n orthonormierte Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Problems $Ae_n - \mu_n e_n = 0$ sind.
Anwendungen auf Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen sind z.B. in Hutson-Pym [5], Kapitel 11] zu finden.

IV.4 BESCHRÄNKTE SELBSTADJUNGIERTE OPERATOREN

Sei X ein Hilbertraum. Bezeichne mit $S(X)$ die Menge aller beschränkten selbstadjungierten Operatoren $A : X \longrightarrow X$. Dafür benötigen wir einen Operatorkalkül, der hier anders aufgebaut ist als derjenige über Resolventen (s.oben).
Definiere dazu eine Halbordnung auf $S(X)$:

IV.4.1 Definition: Für zwei Operatoren $L, M \in S(X)$ sei $L \geq M$ genau dann, wenn $(Lx, x) \geq (Mx, x)$ für alle $x \in X$. Speziell heißt L ***positiv***, falls $L \geq 0$. Eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $S(X)$ heißt ***monoton wachsend***, falls $L_n - L_m \geq 0$ für $n \geq m$; entsprechend ist monoton fallend definiert.

IV.4.2 Lemma: Seien $L, M \in S(X)$.

1. Aus $L \geq M$ und $M \geq L$ folgt $M = L$.
2. Aus $L \geq M$ folgt $L + N \geq M + N$ für $N \in S(X)$.
3. Aus $L \geq M$ und $\alpha \geq 0$ folgt $\alpha L \geq \alpha M$.
4. Aus $L, M \geq 0$ und $\alpha, \beta \geq 0$ folgt $\alpha L + \beta M \leq \max(\alpha, \beta)(L + M)$.
5. Aus $M \geq L \geq N$ folgt $\|L\| \leq \max(\|M\|, \|N\|)$.
6. Aus $M \geq L_1 \geq N$ und $M \geq L_2 \geq N$ folgt $\|L_1 - L_2\| \leq \|M - N\|$.

Beweis: Wesentlich für die Beweise ist die schon in Lemma IV.3.3 bewiesene Beziehung $\|T\| = \max(|m(T)|, |M(T)|)$ für die Größen $m(T) := \inf_{\|x\|=1}(Tx, x)$ und $M(T) := \sup_{\|x\|=1}(Tx, x)$. Z.B. zum Beweis von
1.: Beachte $(x, (M - L)x) = 0$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| = 1$, sodaß $\|M - L\| = 0$. Der Beweis von 5. ergibt sich aus den beiden Ungleichungen $\sup(x, Lx) \leq \sup |(x, Mx)|$ und $\inf(x, Lx) \geq -\inf |(x, Mx)|$, und 6.folgt aus 5. per $N - M \leq L_1 - L_2 \leq M - N$.

IV.4.3 Lemma: Sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend in $S(X)$ und durch $\tilde{L} \in S(X)$ nach oben beschränkt, d.h. $L_n \leq \tilde{L}$ für alle n. Dann konvergieren die L_n gegen ein $L \in S(X)$. Ist $B \in L(X)$ ein Operator, der mit jedem L_n kommutiert, dann kommutiert B auch mit $\tilde{L}$.

Beweis: Sei $m \geq n$. Dann ist $U := L_m - L_n$ positiv und in $S(X)$. Für $(x, y)_U := (Ux, y) \quad (x, y \in X)$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|Ux\|^4 &= (Ux, Ux)^2 = (x, Ux)_U^2 \leq (x, x)_U (Ux, Ux)_U \\ &= (x, Ux)(U^2x, Ux) \leq (x, Ux)\|U^2x\|\|Ux\| \\ &\leq (L_mx - L_nx, x)\|U\|^3\|x\|^2 . \end{aligned}$$

Setze nun $\tilde{L}_n := L_n - \alpha I$, wobei $\alpha := \inf_{\|x\|=1}(L_0x, x) \leq \|L_0\|$. Dann ist $\tilde{L}_n$ positiv wegen $L_n \geq L_0$. Es folgt nach Lemma IV.3.4

$$\begin{aligned} \|U\| &= \sup_{\|x\|=1} (Ux, x) = \sup_{\|x\|=1} ((L_m - L_n)x, x) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} ((\tilde{L}_m - \tilde{L}_n)x, x) \leq \sup_{\|x\|=1} (\tilde{L}_mx, x) \leq \|L_m\| + \|L_0\| . \end{aligned}$$

Nun gilt $(L_mx - L_nx, x) \to 0$ für $n, m \to \infty$ lt. Voraussetzung, sodaß $(L_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge für jedes $x \in X$ ist. Daher existiert für jedes $x \in X$

$Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$. L ist offensichtlich linear und symmetrisch, ferner wegen

$$0 \;\le\; |(Lx,x)| \;=\; \lim_{n\to\infty} |(L_n x,x)| \;\le\; \lim_{n\to\infty} \|\tilde{L}\|\,\|x\|^2$$

auch stetig mit $\|L\| \le \|\tilde{L}\|$.
Schließlich gilt für für alle $x \in X$

$$LBx \;=\; \lim_{n\to\infty} L_n Bx \;=\; \lim_{n\to\infty} BL_n x \;=\; B\lim_{n\to\infty} L_n x \;=\; BLx \;.$$

□

IV.4.4 Satz: Sind $S,T \in S(X)$ positiv und kommutieren , so ist $ST \ge 0$.

Beweis: Multipliziere T mit geeignetem $\beta > 0$, sodaß $\beta T \le I$. Setze $U := I - \beta T$. Dann ist $U \ge 0$. Dann benütze die **Reid*****sche Ungleichung***

$$(SUx,x) \;\le\; \|U\|(Sx,x) \;\;\text{für alle}\;\; S,U \in S(X) \;\;\text{mit}\;\; S,U \;\ge\; 0\;.$$

Damit folgt

$$((S(I-\beta T)x,x) \;\le\; \|I-\beta T\|(Sx,x) \;\le\; \|I\|(Sx,x) \;=\; (Sx,x)\;,$$

und daher $(STx,x) \ge 0$. Beweis der Reidschen Ungleichung:
Nach Kürzen durch $\|U\|$kann man o.B.d.A. $\|U\| = 1$ annehmen. Ferner ist U mit S vertauschbar und SU^n wieder symmetrisch, also

$$\begin{aligned}(SU^n x,x) \;&\le\; \frac{1}{2}\underbrace{(S(x-U^n x),x-U^n x)}_{\ge 0} + (SU^n x,x)\\ &=\; \frac{1}{2}\left((Sx,x)+(SU^n x,U^n x)\right) \;=\; \frac{1}{2}\big((Sx,x)+(x,SU^{2n}x)\big)\;.\end{aligned}$$

Mit Induktion über $n = 1,2,4\cdots$ folgt

$$(SUx,x) \;\le\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}}_{\to 1}(Sx,x) \;+\; 2^{-n}\underbrace{(x,SU^{2n}x)}_{\le\|x\|^2\|S\|}\;,$$

also die Behauptung. □

IV.4.5 Lemma: Sei $T \in S(X)$ und seien p,q Polynome über $\mathbb{C}$ mit reellen Koeffizienten. Gilt $p(\lambda) \ge q(\lambda)$ für alle λ aus dem numerischen Wertebereich $J = [m(T),M(T)]$ von T (s. Definition IV.1.6) , so gilt $p(T) \ge q(T)$. Die Halbordnung überträgt sich also auf Polynome über J.

Beweis: Es genügt, $q := 0$ zu betrachten (sonst nehme $p - q$ statt p). Sei also $p(\lambda) \ge 0$, $\lambda \in J$. Zerlege p in

$$p(\lambda) = a\prod(\lambda - a_j)\prod(b_j - \lambda)\prod((\lambda - c_j)^2 + d_j^2),$$

wobei $a > 0$, a_j die reellen Nullstellen $< m(T)$, b_j die reellen Nullstellen $> M(T)$ und $c_j \pm i\, d_j$ die paarweise konjugierten komplexen Nullstellen von p sind. Aus Lemma IV.4.1 1. folgt leicht $T - a_j I \ge 0$, $b_j I - T \ge 0$ und $(T - c_j I)^2 + d_j^2 I \ge 0$. Mit Satz IV.4.4 folgt $p(T) \ge 0$. □

IV.4.6 Definition: (***Operatorenkalkül*** auf $S(X)$) . Sei $T \in S(X)$ und f eine stetige reellwertige Funktion auf dem numerischen Wertebereich J von T. Dann definiere $f(T) := \lim_{n\to\infty} p_n(T)$, wobei p_n Polynome mit $\sup_{\lambda\in J}|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \longrightarrow 0$ sind.

IV.4.7 Satz: Unter den Voraussetzungen der vorherigen Definition ist $f(T)$ wohldefiniert. Es ist $f(T) \in S(X)$ und $f(T)$ kommutiert mit jedem linearen Operator auf X, der mit T kommutiert. Ferner gilt

1. $f(T) \geq 0$, falls $f(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \in J$.
2. $\|f(T)\| \leq \sup_{\lambda\in J} |f(\lambda)| = \|f\|_\infty$.
3. Ist g vom gleichen Typ wie f , so gelten

$$(fg)(T) = f(T)g(T) \text{ und } (f+g)(T) = f(T)+g(T) .$$

Beweis: Ist $\sup_{\lambda\in J} |f(\lambda) - p_n(\lambda)| \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt $-\epsilon \leq f(\lambda) - p_n(\lambda) \leq \epsilon$ für ϵ beliebig klein und passendes n. Mit passendem m gilt auch $-2\epsilon \leq p_m(\lambda) - p_n(\lambda) \leq 2\epsilon$, also $-2\epsilon I \leq p_m(T) - p_n(T) \leq 2\epsilon I$. Nach Lemma IV.4.2 gilt $\|p_m(T) - p_n(T)\| \leq 2\epsilon$, d.h. $p_n(T)$ ist Cauchyfolge und konvergiert daher in der Operatornorm. Der Limes ist eindeutig bestimmt, denn ist $(q)_n$ eine weitere solche Folge wie $(p)_n$, so ergibt die SZick-ZakFolge $(p_1.q_1.p_2, q_2, \cdots)$ einen Widerspruch. Daher ist $f(T)$ wohldefiniert.
Als nächstes zeige $(\inf_{\lambda\in J} f(\lambda)) \cdot I \leq f(T) \leq (\sup_{\lambda\in J} f(\lambda)) \cdot I$. Nun gilt

$$-\epsilon_n + \inf_{\lambda\in J} f(\lambda) \leq p_n(\lambda) \leq \sup_{\lambda\in J} f(\lambda) + \epsilon_n$$

mit $\epsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$. Lemma IV.4.5 angewandt auf $p_n(\lambda)$ und $q := 1$ liefert

$$(-\epsilon_n + \inf_{\lambda\in J} f(\lambda))I \leq p_n(T) \leq (\sup_{\lambda\in J} f(\lambda) + \epsilon_n)I .$$

Daraus folgen nun die Aussagen 1. und 2. nach Lemma IV.4.2 .
Die Kommutationseigenschaft folgt analog zum Beweis von Lemma IV.3.3 .
Zum Beweis der Multiplikationsregel betrachte für beliebiges $x \in X$

$$\begin{aligned}(fg)(T)(x) - f(T)g(T)(x) &= \lim_{n\to\infty} ((p_n q_n)(T)(x) - f(T)(q_n(T)x)) \\ = \lim_{n\to\infty} [p_n(T) - f(T)](q_n(T)(x) - g(T)x) &+ \lim_{n\to\infty} [p_n(T) - f(T)]g(T)x ,\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß $(p_n q_n)(T)(x) = p_n(T)q_n(T)(x)$ bereits nach der Multiplikationsregel für Polynome folgt. Nun beachte

$$\|[p_n(T) - f(T)][g(T)(x) - q_n(T)x]\| \leq \|[p_n(T)\| + \|f(T)\|]\|g(T)(x) - q_n(T)x\| \to 0 ,$$

$$\|[p_n(T) - f(T)]g(T)(x)\| \leq \|p_n(T) - f(T)\| \; \|g(T)(x)\| \to 0 ,$$

und es folgt $(fg)(T)(x) - f(T)g(T)(x) = 0$. Die Additionsregel zeigt man genauso.

Bemerkung: Als Anwendung kann man z.B. die **Wurzel** $\sqrt{T}$ eines positiven Operators $T \in S(X)$ dadurch eindeutig definieren, indem man $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem numerischen Wertebereich von T nimmt. Konkret kann man $\sqrt{T}$ mit $0 \leq T \leq I$ als Limes der Folge der iterativ definierten Operatoren

$$T_0 := 0, \qquad T_{n+1} := T_n + (1/2)(T - T_n^2) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

erhalten. Dies kann man mittels Lemma IV.4.3 zeigen.

Für die Anwendung auf die Spektralzerlegung von Operatoren muß der bisherige Operatorenkalkül auch auf unstetige Funktionen, speziell auf Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen von Intervallen ausgedehnt werden. Dazu dient

IV.4.8 Definition: Eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$ heißt ***oberhalb stetig***, falls f punktweiser Limes einer monoton fallenden Folge stetiger Funktionen auf $[a, b]$ ist.

Bemerkung: Die übliche Definition von oberhalb stetig ist folgende:
f auf $[a,b]$ ist oberhalb stetig im Punkte x_0, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ existiert, sodaß $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt.
Man kann zeigen, daß obige Definition mit dieser übereinstimmt.

Es gilt nun

IV.4.9 Satz: Sei $T \in S(X)$, f eine nichtnegative oberhalb stetige Funktion auf $J := [m(T), M(T)]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton fallender stetiger Funktionen, die punktweise gegen f konvergieren. Dann konvergiert die Folge $(f_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in der Norm von X gegen einen Grenzwert $f(T)$, der die gleichen Eigenschaften hat wie in Lemma IV.4.3 .

Beweis: Die Existenz von $f(T)$ als punktweiser Limes $f(T)(x)$ folgt bereits aus Lemma IV.4.3 , angewendet auf die Folge $(-f_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$, die monoton wachsend ist. Das Problem ist hier, die Unabhängigkeit von $f(T)$ von der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen, denn es gilt nicht wie zuvor Konvergenz in der Operatorentopologie.
Seien $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ zwei monoton fallende Folgen von Funktionen mit punktweisem Limes $f(t)$. Bilde das Maximum $h_n(t) := \max_{k\in\mathbb{N}}(f_k(t), g_n(t))$. Dann ist $\lim_{k\to\infty} h_n(t) = g_n(t)$, da dieses Maximum einerseits immer $\geq g_n(t)$ ist, andererseits aber $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t) \leq g_n(t)$. Benütze nun den folgenden ***Satz von* Dini**:
Jede monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die auf einer kompakten Menge punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert dort auch gleichmäßig.
Die Anwendung auf die Folge $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt $0 \leq h_m(t) - g_n(t) \leq \frac{1}{n}$ für $t \in J$ und m groß genug, also $0 \leq f_m(t) - g_n(t) \leq \frac{1}{n}$ für $t \in J$ und m groß genug. Nach Lemma IV.4.3 gilt dann $\lim_{k\to\infty} f_k(T) \leq g_n(T) + \frac{1}{n}I$. Wendet man nochmals Lemma IV.4.3 auf die Folge $(g_n(T) + \frac{1}{n}I)_{n\in\mathbb{N}}$ an , so ergibt sich $\lim_{k\to\infty} f_k(T) \leq \lim_{n\to\infty} g_n(T)$. Vertauschung der Rollen von $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt Gleichheit. Die weiteren in Lemma IV.4.7 genannten Eigenschaften

1. und 3.: Übertragen sich unmittelbar.

2.: Sei $\alpha > 0$ gegeben mit $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda\in J} |f(\lambda)| < \alpha$. Dann existiert eine monoton fallende Folge $(f_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|f_n(\lambda)| \leq \alpha$, die auf J punktweise gegen $f(\lambda)$ konvergiert. Mit Lemma IV.4.7 folgt für $\|x\| = 1$ weiter

$$\|f(T)x\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|f_n(T)x\| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \|f_n(T)\| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \|f_\infty\|_\infty$$

und damit $\|f(T)\| \leq \alpha$ für alle $\alpha > \|f\|_\infty$.

Bevor wir zur Spektralzerlegung von Operatoren $T \in S(X)$ kommen, sei daran erinnert, daß im Falle kompakter symmetrischer Operatoren nach dem Hilbert-Schmidt-Satz (IV.3.6) die Darstellung

$$x \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P_k e_k \quad , \quad x \in X \qquad (*)$$

gilt, wobei $P_k := \sum_{i=1}^{d_k}(x, e_k^i)e_k^i$ die Orthogonalprojektionen von X auf die (endlich-dimensionalen) Eigenräume zu den Eigenwerten λ_k sind. Um die Schwierigkeiten und Modifikationen zu erläutern, die bei der Erweiterung auf allgemeine $T \in S(X)$ zu erwarten sind , betrachte das Beispiel des Operators $A := id/dx$. Im periodischen Fall setze

$$\begin{aligned} X \;&:=\; \{\; f \in L_2(0, 2\pi) \;\mid\; \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \;\} \\ \mathcal{D}(A) \;&:=\; \{\; f \in X \;\mid\; f' \in X \;,\; f(0) = f(2\pi) \;\} \;, \end{aligned}$$

wobei der Hilbertraum X hier als komplexwertig zu verstehen ist. Die Eigenfunktionen von A sind dann die Funktionen $e_k(t) := e^{ikt}/\sqrt{2\pi}, k \in \mathbb{Z}$ zu den Eigenwerten $k \in \mathbb{Z}$, und es gilt die Fourier-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}'}^{\infty} (f, e^{ikx}) e^{ikx} \quad , \quad (f \in X) \quad , \quad \mathbb{Z}' := \mathbb{Z}/\{0\} \; .$$

Der Operator $(Tf)(t) := -i \int_0^t f(s)ds$ ist die inverse Abbildung zu A auf X mit Wertebereich $R(T) = \mathcal{D}(A)$ wegen der für X geltenden Nebenbedingung $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Es ist $\mathcal{D}(A)$ ein Unterraum des Sobolev-Raumes $W_2^1(0, 2\pi)$, der kompakt in $L_2(0, 2\pi)$ eingebettet ist . Daher ist T kompakt, sodaß ein Spezialfall von Satz IV.3.2 vorliegt.

Anders liegt der Fall, wenn $A := id/dx$ auf $W_2^1(-\infty, \infty)$ betrachtet wird. Das Spektrum ist dann die ganze reelle Achse , denn der Plancherel-Satz über die Fouriertransformation (I.5.22) zeigt, daß für kein $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|(\lambda I - A)f\|_2 = \|(\lambda - v)\hat{f}(v)\|_2 \overset{(!)}{\geq} C\|\hat{f}(v)\|_2 = C\|f\|_2$$

gleichmäßig in $f \in L_2(-\infty, \infty)$ gelten kann (dagegen gilt dies für λ mit $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$) . Dennoch liefert die inverse Fouriertransformation eine Darstellung , nämlich

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(t)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (f, \varphi_\lambda)_2 \varphi_\lambda(t)d\lambda \; , \tag{$**$}$$

wobei $(\cdot, \cdot)_2$ das Skalarprodukt in $L_2(-\infty, \infty)$ bedeutet und $\varphi_\lambda(t) := e^{i\lambda t}/\sqrt{2\pi}$. Bei einem formalen Vergleich von $(**)$ mit $(*)$ fällt auf: die Summe in $(*)$ wird durch ein Integral ersetzt - dies entspricht dem übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen Spektrum - und die Operatoren $P_k f := (f, e_k)e_k$ durch $Q_\lambda f := (g, \varphi_\lambda)\varphi_\lambda$. Jedoch bilden die Q_λ nicht mehr in $L_2[-\infty, \infty)$ ab. Der Ausweg ist die Superposition der φ_λ durch Integration über "kleine Bereiche U" von λ (sogenannte Wellenpakete in der Quantenmechanik). Man führt ein

$$E_U(g) := \int_U (f, \varphi_\lambda)_2 \varphi_\lambda \; d\lambda = \int_U Q_\lambda f \; d\lambda \quad , \quad U \text{ meßbar in } \mathbb{R} \; .$$

Letzteres Integral ist als Integration einer Funktion mit Werten in einem Hibertraum zu verstehen. Der resultierende Operator ist wohldefiniert und eine symmetrische Projektion in $L_2[-\infty, \infty)$, wovon man sich leicht überzeugen kann. Dies steht in Analogie zum diskreten Fall und unterstreicht die besondere Rolle der Projektionsoperatoren für eine Spektralzerlegung. Zugleich wird dadurch motiviert:

IV.4.10 Definition: Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf einem Maßraum Ω und X ein Hilbertraum. Eine Zuordnung $P : \mathcal{M} \longrightarrow L(X)$ heißt ***Auflösung der Identität***, falls für $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

1. Jedes $P(\omega)$ ist orthogonale Projektion,
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = I$,
3. $P(\omega_1 \cap \omega_2) = P(\omega_1) \cdot P(\omega_2)$,
4. $P(\omega_1 \cup \omega_2) = P(\omega_1) + P(\omega_2)$,
5. $(P(\omega)x, y)$ ist komplexes Maß für alle $x, y \in X$.

In diesem Zusammenhang ist es notwendig, mehr Information über Orthogonalprojektionen zu sammeln.

IV.4.11 Lemma: Sei X ein Prä-Hilbertraum und P eine lineare Projektion, $P \neq 0$.

1. Ist P stetig, so ist sie genau dann eine orthogonale Projektion, wenn sie symmetrisch ist.
2. Ist P eine orthogonale Projektion, so ist P stetig, $\|P\| = 1$ und $0 \leq P \leq I$.

Beweis: 1.: Ist P eine stetige lineare Projektion, so ist nach Lemma I.5.9 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$. Daher ist für $x, y \in X$

$$\begin{aligned}(Px, y) - (x, Py) &= ((Px, y - Py) + (Px, Py)) - ((x - Px, Py) - (Px, Py)) \\ &= (Px, (I - P)y) + ((I - P)x, y) = 0 \ ,\end{aligned}$$

d.h. P ist symmetrisch.
Umgekehrt folgt aus der Symmetrie für alle $x \in \mathcal{R}(P)$, $y \in \mathcal{N}(P)$

$$(x, y) = (Px, y) = (x, Py) = (x, 0) = 0 \quad , \quad ,$$

d.h. $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

2.: Nach Lemma I.5.9 ist $\|P\| = 1$.
Da für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}(Px, x) &= (P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geq 0 \\ (Px, x) &= \|Px\|^2 \leq (\|P\| \ \|x\|)^2 \leq \|x\|^2 \ ,\end{aligned}$$

ist $0 \leq P \leq I$.

Man kann nun, ausgehend von der Definition IV.4.12 einer Spektralschar eine Spektraltheorie für allgemeine normale Operatoren aufbauen. Dieser Zugang ist jedoch sehr allgemein und verlangt einiges an Vorbereitung und Aufwand (vergl. Rudin [8], Kapitel 12 und 13). Wir beschränken uns daher auf symmetrische Operatoren, deren Spektrum nur aus reellen Werten besteht. Ist T außerdem beschränkt, so liegt das Spektrum in $\Omega := [m(T), M(T)]$. Für diesen Fall - nur ihn betrachten wir im folgenden - wird in obiger Definition $\Omega = [a, b]$, und gibt es eine vereinfachte Version, die nur Intervalle als Teilmengen verwendet.

IV.4.12 Definition: Sei X ein Hilbertraum.
$P \ : \ [a, b] \longrightarrow L(X)$, $P_\lambda := P(\lambda)$ heißt ***Spektralschar auf*** $[a, b]$, falls gilt

1. P_λ ist Orthogonalprojektion.
2. $P_\lambda = 0$ für $\lambda < a$, $P_\lambda = I$ für $\lambda \geq b$.
3. $P_\lambda \leq P_\mu$ für $\lambda \leq \mu$.
4. $P_{\lambda+0}$ $(= \lim_{\mu \searrow \lambda} P_\lambda x) = P_\lambda x$ (rechtsseitig stetig).

Man erkennt in Verbindung mit Lemma IV.4.14, daß Eigenschaft 3. diejenigen 3. und 4. der vorigen Definition ersetzt. Eigenschaft 4. erlaubt es, mit Riemann-Stieltjes- statt Lebesgue- Integralen zu arbeiten.
Jeder Operator $T \in S(X)$ liefert nun eine solche Spektralschar:

IV.4.13 Satz: Sei X Hilbertraum und sei $T \in S(X)$. Dann gibt es zu T eine Spektralfamilie (P_λ) auf $[m(T), M(T)]$, die nach Satz IV.4.9 definiert ist durch die Symbole

$$p_\lambda(t) := \begin{cases} 1 & t \leq \lambda \\ 0 & t > \lambda \end{cases} \quad , \quad \lambda \in [m(T), M(T)]$$

Beweis: P_λ ist wohldefiniert nach Satz IV.4.9 , denn p_λ ist eine oberhalb stetige Funktion und $P_\lambda \in S(X)$. Es ist $P_\lambda^2 = P_\lambda(T)P_\lambda(T) = P_\lambda(T) = P_\lambda$. Weiterhin ist $p_\lambda(t) = 0$ auf $[m(T), M(T)]$ für $\lambda < m(T)$, also $P_\lambda(T) = 0$. Analog gilt $P_\lambda(T) = I$ für $\lambda \geq M(T)$, da $p_\lambda(t) = 1$ auf $[m(T), M(T)]$ für diese λ. Schließlich ist $P_\lambda \leq P_\mu$ wegen $p_\lambda(t) \leq p_\mu(t)$ für $\lambda \leq \mu$ und $t \in [m(T), M(T)]$.
Sei φ_n eine monoton fallende Folge mit $\varphi_n(t) \geq p_{\lambda+\epsilon_n}(t)$ mit $\epsilon_n \longrightarrow 0$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = p_\lambda(t)$. Lemma IV.4.5 liefert $\varphi_n(T) \geq P_{\lambda+\epsilon_n}(T) \geq P_\lambda(T)$. Ferner gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(T)x = P_\lambda(T)x$ und $\lim_{n\to\infty}(p_{x+\epsilon_n}(T)x, x) = (P_\lambda(T)x, x)$ .Die Konvergenz von $P_{\lambda+\epsilon_n}$ in der Norm folgt dann mit dem Beweis der Reidschen Ungleichung (Satz IV.4.4) aus

$$\|P_{\lambda+\epsilon_n}(T)x - P_\lambda(T)x\|^2 \ \leq \ \|P_{\lambda+\epsilon_n}(T) - P_\lambda(T)\| \underbrace{((P_{\lambda+\epsilon_n}(T) - P_\lambda(T))x, x)}_{\longrightarrow 0}$$

□

Bemerkung: Aus dieser Konstruktion der Spektralschar folgert man $P_\mu - P_\lambda = (P_\mu - P_\lambda)(T) = \chi_{(\lambda,\mu]}(T)$, d.h. diese Projektion ist dem Intervall $(\lambda, \mu]$ zugeordnet, entspricht also eigentlich den Projektionen aus Definition IV.4.12 .

Bevor wir zum Hauptsatz dieses Abschnitts kommen, benötigen wir eine Ergänzung zu Lemma IV.4.11 .

IV.4.14 Lemma: Seien P_1, P_2 Orthogonalprojektionen in einem Hilbertraum X. Dann gelten

1. $P_1 + P_2$ ist orthogonale Projektion $\Leftrightarrow$ $P_1P_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2)$.
2. $P_1P_2 = P_1 = P_2P_1$ $\Leftrightarrow$ $P_1 \leq P_2$, $\mathcal{R}(P_1) \subset \mathcal{R}(P_2)$..

Beweis 1.: Da nach Lemma I.5.9 $X = \mathcal{R}(P_1) \bigoplus \mathcal{N}(P_1)$, ist $\mathcal{N}(P_1)$ der größte zu $R(P_1)$ orthogonale Unterraum und folglich $\mathcal{R}(P_2) \subset N(P_1)$, wenn $\mathcal{R}(P_1) \perp R(P_2)$. Dann ist aber $P_1(P_2x) = 0$ für jedes $x \in X$. Umgekehrt folgt $\mathcal{R}(P_2) \subset \mathcal{N}(P_1)$ aus $P_1P_2 = 0$ und somit auch $\mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2)$. Da die Relation $\mathcal{R}(P_1) \perp R(P_2)$ symmetrisch in P_1, P_2 ist, gilt $P_2P_1 = 0 \Leftrightarrow P_1P_2 = 0$.
Aus $P_2P_1 = 0$ erhalte dann $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2$, d.h. $P_1 + P_2$ ist Projektion und offenbar auch symmetrisch, sodaß sie nach dem vorigen Lemma orthogonal ist. Umgekehrt folgt daraus zunächst $P_2P_1 + P_1P_2 = (P_1 + P_2)^2 - (P_1 + P_2) = 0$. Für $x \in \mathcal{R}(P_2)$ folgt daraus weiter $0 = P_1x + P_2P_1x$ und $0 = P_2P_1x + P_2^2P_1x = 2P_2P_1x$. Für x aus dem Komplementärraum $\mathcal{N}(P_2)$ gilt aber trivialerweise $P_1P_2x = 0$ und so insgesamt $P_2P_1x = 0$ für alle $x \in X$.

2.: Es gelte $P_2P_1 = P_1$. Dann folgt $(P_1P_2x, y) = (P_2x, P_1y) = (x, P_2P_1y) = (x, P_1y)$, d.h. $P_1P_2 = P_1$. Also sind P_1 , P_2 vertauschbar und es gilt auch $P_1P_2 = P_1$.
Weiter folgt $(P_2 - P_1)^2 = P_1 + P_2 - 2P_1P_2 = P_2 - P_1$, d.h. $P_2 - P_1$ ist orthogonale Projektion und positiv. Nach Lemma IV.4.11 gilt dann $P_2 \geq P_1$.
Gilt umgekehrt $P_2 \geq P_1$, so folgt $Q_2 := I - P_2 \leq I - P_1 := Q_1$. Ferner gelten $Q_1P_1 = 0$ und $Q_2^2 = I - 2P_2 + P_2^2 = I - P_2 = Q_2$, sodaß

$$\|Q_2P_1x\|^2 = (Q_2^2P_1x, P_1x) = (Q_2P_1x, P_1x) \leq (Q_1P_1x, P_1x) = 0 \ .$$

Damit folgt $0 = Q_2P_1 = P_1 - P_2P_1$, und die erste äquivalenz ist gezeigt.
Gilt nun $P_2P_1 = P_1$, so folgt für $x \in \mathcal{R}(P_1)$

$$x = P_1x = P_2P_1x \in \mathcal{R}(P_2) \qquad \text{d.h. } \mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2) \ .$$

Umgekehrt gelte $\mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2)$. Dann zerlege $x = u + v$ mit $u \in \mathcal{R}(P_1) \subset \mathcal{R}(P_2)$ und $v \in \mathcal{N}(P_1)$. Daraus schließt man $P_1u = u$ und $P_2u = u$ und weiter $P_2P_1u = P_2u = P_1u$, sodaß für beliebiges $x \in X$

$$P_2P_1x = P_2P_1u + P_2P_1v = P_1u + 0 = P_1u + P_1v = P_1x \ .$$

□

IV.4.15 Satz: Spektralzerlegungssatz Die in Satz IV.4.13 konstruierte Spektralfamilie erfüllt

1. $T = \int_{\mu_0}^{M(T)} \lambda \ dP_\lambda$ für jedes $\mu_0 \le m(T)$.
2. $f(T) = \int_{\mu_0}^{M(T)} f(\lambda) \ dP_\lambda$ für alle auf $[-\infty, \infty]$ stetigen f .
3. Es gilt Multiplikationsformel

$$f(T)g(T) = (f \cdot g)(T)) \ .$$

Das Integral ist dabei wie folgt definiert:

IV.4.16 Definition: Sei X ein Banachraum und $f : [a,b] \to X$. Dann heißt f **Riemann-Stieltjes-*integrierbar*** mit dem Banachraum-wertigen Stieltjes-Maß E, falls ein $S \in X$ existiert mit

$$\lim_{|Z|\to 0} \left\| S - \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j)\,(E(\mu_{j+1}) - E(\mu_j)) \right\| = 0 \ ,$$

wobei Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ ist mit $a = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n = b$, $a_j \in [\mu_j, \mu_{j+1}]$ beliebige Zwischenpunkte sind und $|Z| := \max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ die Feinheit der Zerlegung ist. Man schreibt dann

$$S = \int_a^b f(\lambda) \ dE(\lambda) \ .$$

Bemerkung: Ist $[a,b] = (-\infty,\infty)$, so heißt f Riemann-Stieltjes-integrierbar auf $(-\infty,\infty)$, falls es Riemann- Stieltjes-integrierbar ist auf jedem endlichen $[a,b]$. Setze dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \ dE(\lambda) \ := \ \lim_{a,b\to\infty} \int_a^b f(\lambda) \ dE(\lambda) \ ,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beweis von Satz IV.4.15: 1.: Zu zeigen ist $T = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^n a_j(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}})$ für alle Zerlegungen Z , $\mu_0 < \mu_1, \dots, \mu_n = M(T)$, $\delta = |Z|$, $a_j \in [\mu_{j-1}, \mu_j]$, wobei P_{μ_j} die Orthogonalprojektionen der Spektralschar aus Satz IV.4.13 sind. Betrachte $T - \sum_{j=1}^n a_j(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}})$ und beachte $\sum_{j=1}^n (P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) = P_{\mu_n} - P_{\mu_0} = I$. Dann folgt aus dem Beweis zu Satz IV.4.13

$$T - \sum_{j=1}^n a_j(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) \ = \ \sum_{j=1}^n (T - a_j I)(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) \ =: \ \sum_{j=1}^n \varphi_j(T)$$

mit Funktionen $\varphi_j(t) = (t - a_j)(p_{\mu_j}(t) - p_{\mu_{j-1}}(t))$, die nur auf $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ nicht verschwinden und dort 1 sind. Weiter gilt wegen $|t - a_j| \le \delta$

$$-\delta(p_{\mu_j}(t) - p_{\mu_{j-1}}(t)) \le \varphi_j(t) \le \delta(p_{\mu_j}(t) - p_{\mu_{j-1}}(t) \quad \text{auf } [\mu_0, M(T)] \ .$$

Nach Summation folgt mit Eigenschaft 1. von Satz IV.4.7, die wegen Satz IV.4.9 auch für die dortigen unstetigen Funktionen gilt, dann

$$-\delta I \le T - \sum_{j=1}^n a_j(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) \le \delta I \ ,$$

also

$$\Big\| T - \sum_{j=1}^{n} a_j (P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) \Big\| \le \delta$$

nach Lemma IV.4.2 .

2.: Nach Lemma IV.4.5 gilt $P_\lambda \le P_\mu$ für $\lambda \le \mu$, sodaß nach Teil 2 von Lemma IV.4.14 folgt: $P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = P_\lambda$ und so für $Q_k := P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}$ und $k > j$

$$Q_k Q_j = P_{\mu_k} P_{\mu_j} - P_{\mu_{k-1}} P_{\mu_j} - P_{\mu_k} P_{\mu_{j-1}} + P_{\mu_{k-1}} P_{\mu_{j-1}} = P_{\mu_j} - P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}} + P_{\mu_{j-1}} = 0 \ .$$

Analog folgt $Q_k Q_j = 0$ für $k < j$ und ferner $Q_k^2 = P_{\mu_k}^2 - 2P_{\mu_{k-1}} + P_{\mu_{k-1}}^2 = Q_k$. Damit erhält man

$$\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_k\}^2 \ = \ \sum_{k,j} \lambda_k Q_k \lambda_j Q_j \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 Q_k^2 \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 Q_k$$

und induktiv weiter

$$\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k [P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}]\}^r \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r [P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}] \ .$$

Läßt man hier auf beiden Seiten $\delta \to 0$ streben , so erhält man nach Teil 1. und der Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals

$$T^r \ = \ \int_{\mu_0}^{M(T)} \lambda^r \ dP_\lambda \ ,$$

d.h. Eigenschaft 2. für $f(\lambda) := \lambda^r$ und damit auch für alle Polynome.
Sei nun f eine beliebige stetige rellwertige Funktion auf $[m(T), M(T)]$. Nach Definition IV.4.6 gibt es ein Polynom $p(\lambda)$ mit $\|f(T) - p(T)\| \le \epsilon$. Dann gilt analog zu Teil 1.

$$-\epsilon I \ \le \ \sum_{j=1}^{n} [f(\lambda_j) - p(\lambda_j)](P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}}) \ \le \ \epsilon I \ ,$$

sodaß $\|S(f) - S(p)\| \le \epsilon$ gilt, wobei $S(f)$ die Riemannsche Zwischensumme $\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(P_{\mu_j} - P_{\mu_{j-1}})$ ist. Da die Behauptung bereits für Polynome bewiesen ist , gilt für genügend kleines $\delta > 0$ $\|p(T) - S(p)\| \le \epsilon$ und so zusammen

$$\|f(T) - S(f)\| \ \le \ \|f(T) - p(T)\| \ + \ \|p(T) - S(p)\| \ + \ \|S(p) - S(f)\| \ \le \ 3\epsilon \ .$$

Damit ist Teil 2. bewiesen, wenn man im Falle komplexwertiger f diese in ihren Real- und Imaginärteil aufspaltet und das Bisherige jeweils darauf anwendet.

3.: Die Multiplikationsregel folgt aus der Beziehung

$$\{\sum_{k=1}^{n} f(a_k) Q_k\}\{\sum_{j=1}^{n} g(a_j) Q_j\} \ = \ \sum_{k,j} f(a_k) Q_k \ g(a_j) Q_j \ = \ \sum_{k=1}^{n} (f \cdot g)(a_k) Q_k \ ,$$

die genauso wie im Beweis zu 2. gezeigt wird. Grenzübergang $|Z| \to 0$ liefert dann auf der linken Seite den Ausdruck

$$\int_{\mu_0}^{M(T)} f(\lambda) \ dP_\lambda \int_{\mu_0}^{M(T)} g(\lambda) \ dP_\lambda \ = \ f(T) g(T) \ ,$$

während sich auf der rechten Seite

$$\int_{\mu_0}^{M(T)} (f \cdot g)(\lambda) \ dP_\lambda \ = \ (f \cdot g)(T)$$

ergibt.

Varianten des Spektralzerlegungssatzes gibt

IV.4.17 Korollar: Unter den Voraussetzungen der Sätze IV.4.13 und IV.4.15 gilt für alle auf $(-\infty, \infty)$ stetigen f

1. $f(T) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \; dP_\lambda,$
2. $f(T)x \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \; dP_\lambda x \quad (x \in X)$,
3. $(f(T)x, y) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \; d(P_\lambda x, y) \quad (x, y \in X)$.

1.: Folgt aus der Beobachtung, daß die Operatoren P_λ außerhalb des Spektrums konstant sind, also dort $dP_\lambda = 0$ ist, und daher $\mu_0, M(T)$ durch $-\infty$ bzw. ∞ ersetzt werden können. Der Beweis der beiden anderen Aussagen folgt genauso wie im vorigen Satz, wenn man mit den Maßen $dP_\lambda x$ und $(dP_\lambda x, y)$ statt mit dP_λ arbeitet.

Ergänzend beschreiben wir noch, wie sich Resolventenmenge und Punktspektrum im Spektralzerlegungssatz erkennen bzw. wiederfinden lassen.

IV.4.18 Satz: Unter den Vorausetzungen wie bisher gilt:
Eine reelle Zahl λ_0 gehört zur Resolvente $\rho(T)$ genau dann, wenn $\{P_\lambda\}$ konstant auf einem Intervall $[\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$ mit einem $\gamma > 0$ ist.

Beweis: Ist $\{P_\lambda\}$ nicht konstant auf $[\lambda_0 - \gamma \; , \; \lambda_0 + \gamma]$, so ist die Projektion $P := P_{\lambda_0+\gamma} - P_{\lambda_0-\gamma} \neq 0$. Daher gibt es ein $x \in X, \|x\| = 1$, sodaß $Px = x$ gilt . Weiter gilt $(T - \lambda_0 I)P = q(T)$ mit $q(t) := (t - \lambda_0)(P_{\lambda_0+\gamma}(t) - P_{\lambda_0-\gamma}(t)$, wobei das Symbol p_λ wie in Satz IV.4.13 definiert ist. Analog wie im Beweis des vorigen Satzes gilt $|q(t)| \leq \gamma$ weil $q(t) = 0$ außerhalb von $[\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$ ist. Also folgt mit Lemma IV.4.2

$$\|(T - \lambda_0 I)P\| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \frac{\|x\|}{\|(T - \lambda_0 I)x\|} = \frac{\|x\|}{\|(T - \lambda_0 I)Px\|} \geq \frac{1}{\gamma} \; .$$

Wenn dies für beliebig kleines γ gelten soll , kann $T - \lambda_0 I$ nach Satz I.4.15 keine stetige Inverse haben, und λ_0 muß in der Resolvente $\rho(T)$ von T liegen.
Sei nun P_λ konstant auf $U := [\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$ für ein $\gamma > 0$. Dann betrachte die Funktion

$$f_0(t) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} & , \quad t \in \mathbb{R} \setminus C \; , \\ \text{stetig fortgesetzt} & , \quad t \in U \quad . \end{cases}$$

als Symbol. Nach dem Spektralzerlegungssatz (Satz IV.4.15) gilt dann (weil $dP_\lambda = 0$ auf U)

$$f_0(T) = \int_{\mu_0}^{M(T)} f_0(\lambda) \; dP_\lambda = \int_{\lambda \in U^c} f_0(\lambda) \; dP_\lambda = \int_{\lambda \in U^c} \frac{dP_\lambda}{\lambda_0 - \lambda} \; .$$

Andererseits gilt auch

$$\lambda_0 \; I - T \; = \; \int_{\lambda \in U^c} (\lambda_0 - \lambda) \; dP_\lambda \; ,$$

sodaß nach der Multiplikationsformel desselben Satzes $I = f_0(T)(\lambda_0 \; I - T)$ folgt. Das bedeutet aber , daß die Resolvente im Punkt λ_0 existiert und gleich $f_0(T)$ ist, also $\lambda_0 \in \rho(T)$. □

Bemerkung: Aus dem Beweis der Rückrichtung ergibt sich als Spektralzerlegung der Resolvente

$$R_{\lambda_0}(T) = (\lambda_0 I - T)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_\lambda}{\lambda_0 - \lambda}, \qquad (\lambda_0 \in \rho(T)) \; .$$

IV.4.19 Korollar: Es gilt der ***Spektralabbildungssatz***

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)) \qquad \text{für auf } \; [m(T), M(T)] \; \text{ stetiges } f \; .$$

Beweis: Man kann mit den gleichen Argumenten wie im obigen Satz zeigen, daß $f(\lambda_0) \in \rho(f(T))$ genau dann gilt, wenn $\{P_\lambda\}$ konstant auf einem Intervall $[\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$ mit irgendeinem $\gamma > 0$ ist und dies ist äquivalent zu $\lambda_0 \in \rho(T)$. Durch Komplementbildung folgt daraus der Spektralabbildungssatz.

Das Gegenstück zur Charakterisierung der Eigenwerte über die Spektralschar lautet

IV.4.20 Satz: Unter den Vorausetzungen wie bisher gilt:
Eine reelle Zahl $\lambda_0 \in [m(T), M(T)]$ ist ein Eigenwert von T genau dann, wenn die Spektralschar $\{P_\lambda\}$ einen "Sprung" bei λ_0 besitzt , d.h. $P_{\lambda_0 - 0} \neq P_{\lambda_0} = P_{\lambda_0+0}$ gilt. In diesem Fall ist $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T) = R(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0 - 0})$.

Beweis: Es sei $F_0 := P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0}$ und y beliebig aus $\mathcal{R}(F_0), y = F_0 x$. Dann gilt wegen $P_{\lambda_0-0} \leq P_{\lambda_0}$ nach Lemma IV.4.14

$$\begin{array}{rcl} P_\lambda y &=& P_\lambda F_0 x \;=\; (P_\lambda P_{\lambda_0} - P_\lambda P_{\lambda_0-0})x \;=\; P_\lambda x - P_\lambda x \;=\; 0 \quad \text{für} \quad \lambda < \lambda_0 \;, \\ P_\lambda y &=& P_\lambda F_0 x \;=\; (P_\lambda P_{\lambda_0} - P_\lambda P_{\lambda_0-0})x \;=\; (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})x \;=\; y \quad \text{für} \quad \lambda \geq \lambda_0 \;. \end{array}$$

Also ist $dP_\lambda y, y) = 0$ außerhalb einer Umgebung $U = (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, sodaß

$$\begin{array}{rcl} \|(T - \lambda_0\ I)y\|^2 &=& ((T - \lambda_0\ I)^2 y, y) = \displaystyle\int_{-\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2\ d(P_\lambda y, y) \\ &\leq& \epsilon^2 \displaystyle\int_{-\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} d(P_\lambda y, y) = \epsilon^2 \|y\|^2 \;. \end{array}$$

Da ϵ beliebig war, folgt $\|(T - \lambda_0\ I)y\| = 0$ und $R(F_0) \subset \mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$.
Umgkehrt sei $y \in \mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$. Dann gilt $(\lambda_0 I - T)^2 y = 0$ und nach 3. von Korollar IV.4.17

$$0 \;=\; \|(T - \lambda_0\ I)y\|^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\ d(P_\lambda y, y) \;.$$

Weil $d(P_\lambda y, y)$ monoton wachsend in λ ist, muß dieses Integral auf jedem Teilintervall verschwinden, also speziell für genügend kleines ϵ wegen $d(P_\lambda y, y) = 0$ für $\lambda < m(T)$:

$$0 \;=\; \int_{-\infty}^{\lambda_0-\epsilon} (\lambda - \lambda_0)^2\ d(P_\lambda y, y) \;\geq\; \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\lambda_0-\epsilon} d(P_\lambda y, y) \;=\; \epsilon^2[(P_{\lambda_0-\epsilon} y, y) - 0] \;,$$

also $0 = (P_{\lambda_0-\epsilon} y, y) = \|P_{\lambda_0-\epsilon} y\|^2 = 0$ für alle genügend kleinen ϵ .
Analog schließt man

$$0 \;=\; \int_{\lambda_0+\epsilon}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\ d(P_\lambda y, y) \;\geq\; \epsilon^2 \int_{\lambda_0+\epsilon}^{\infty} d(P_\lambda y, y) \;=\; \epsilon^2[(Iy, y) - (P_{\lambda_0+\epsilon} y, y)] \;,$$

sodaß $0 = ((I - P_{\lambda_0+\epsilon})y, y) = \|(I - P_{\lambda_0+\epsilon})y\|^2 = 0$ für genügend kleine ϵ ist.
Zusammen ergibt dies

$$y \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} (P_{\lambda_0+\epsilon} - P_{\lambda_0-\epsilon})y \;=\; (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})y \;,$$

d.h. $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T) \subset mathcal R(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})$. □

Bemerkung: Da für selbstadjungierte Operatoren $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ gilt (Satz IV.1.5), folgt aus den beiden letzten Sätzen, daß λ_0 genau dann im kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c(T)$ liegt , wenn P_λ in λ_0 stetig und in einer Umgebung von λ_0 nicht konstant ist . Damit ist dieser Spektrumstyp entsprechend seinem Namen charakterisiert.

Zum Abschluß geben wir noch eine wichtige Formel an , mittels der die Projektionen der Spektralschar durch die Resolventen des Operators T beschrieben werden können.

IV.4.21 Satz: (**Stone-*sche Formel***) Unter den Voraussetzungen wie bisher gilt für die dem Intervall $(\lambda_1, \lambda_2]$ zugeordnete Orthogonalprojektion $P(\lambda_1, \lambda_2) := P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1}$ und $x, y \in X$

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)x, y) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} ([R_{\lambda-i\epsilon}(T) - R_{\lambda+i\epsilon}(T)]x, y) d\lambda \ .$$

Zum Beweis sei bemerkt, daß man ihn auf den Fall $x = y$ reduzieren kann und dann die nach der Spektralzerlegung geltende Formel

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)x, x) \ = \ \lim_{\delta \to 0+} \int_{\lambda_1 \ + \ \delta}^{\lambda_2-\delta} d(P_\lambda x, x) \qquad (*)$$

benützt. Dann zeigt man

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)x, x) \ = \ \lim_{\delta \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \to 0+} p_{\epsilon,\delta}(\lambda) d(P_\lambda x, x) \ ,$$

wobei das Symbol $p_{\epsilon,\delta}(\mu)$ durch

$$p_{\epsilon,\delta}(\mu) \ = \ \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} [\frac{1}{\lambda - \mu - i\epsilon} - \frac{1}{\lambda - \mu + i\epsilon}] d\lambda \ = \ \frac{1}{\pi}[\arctan \frac{\lambda_2 - \delta - \mu}{\epsilon} - \arctan \frac{\lambda_1 + \delta - \mu}{\epsilon}]$$

erklärt ist. Für $\epsilon \to 0$ aber strebt diese Funktion gegen das Symbol der Projektion in $(*)$, andererseits ist $1/(\lambda - \mu - i\epsilon) - 1/(\lambda - \mu + i\epsilon)$ dasjenige des Operators auf der rechten Seite der Stone'schen Formel.

Bemerkung: Eine Folgerung daraus ist, daß die Spektralschar zu T eindeutig bestimmt ist.

IV.5 ALLGEMEINE SELBSTADJUNGIERTE OPERATOREN

Die bisherigen überlegungen zur Spektraldarstellung lassen sich auf allgemeine selbstadjungierte Operatoren A im Hilbert-Raum, nämlich unbeschränkte, ausdehnen. Man kann dann aber nicht erwarten, daß das Spektrum beschränkt ist, und muß deshalb eine Integraldarstellung der Form $A = \int_{-infty}^{\infty} \lambda \ dF_\lambda$ mit einer Spektralschar auf **ganz** $(-\infty, \infty)$ verwenden. Es gibt im wesentlichen zwei Wege, die dort hinführen und nun kurz beschrieben werden (Näheres s. **Bachman-Narici**, loc.cit. Abschnitt 29).
Eine Methode besteht in der Zerlegung von A in **beschränkte** selbstadjungierte Operatoren A_i , die auf paarweise zueinander orthogonalen Unterräumen M_i definiert sind, d.h. $A_i : \ M_i \longrightarrow M_i$ und $X = \sum_i \bigoplus M_i$, d.h. X ist die direkte orthogonale Summe der M_i. Hieraus kann man die Existenz einer Spektralschar $\{F_\lambda\}$ auf ganz $(-\infty, \infty)$ folgern. Dann kann der Beweis der Zerlegung $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \ dF_\lambda$ analog wie vorher geschehen, nur daß man zusätzlich das uneigentliche Integral mit Hilfe geeigneter Projektionen in Integrale $\int_n^{n+1}$ aufspaltet.
Ein anderer, kürzerer, vielleicht nicht so anschaulicher Beweis führt über die Cayley-Transformation, durch die das Problem der Spektralzerlegung auf den Fall unitärer Operatoren U reduziert wird. Für diese Operatoren mit der Eigenschaft $U^*U = I$ - die aber nicht symmetrisch sind - gibt es eine interessante Variante zur bisherigen Spektralzerlegung. Zunächst stellt man fest , daß ihr Spektrum nach Lemma IV.3.1 auf dem Einheitskreis liegt. Darum entwickelt man man einen Operatorenkalkül mit trigonometrischen Polynomen, indem man dem Symbol e^{it} den Operator U zugeordnet, oder allgemeiner

$$p(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \ e^{ikt} \quad \longmapsto \quad p(U) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \ U^k \ .$$

Insbesondere wird dem Operator U^* das Symbol e^{-it} zugeordnet. Ist $p(z)$ ein auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ reellwertiges (algebraisches) Polynom, so folgt daraus $(p(U)x, y) = (x, p(U)^*y) = (x, \overline{p}(U)y) = (x, p(U)y)$, d.h. $p(U)$ ist selbstadjungiert.
Man betrachtet nun für feste $x, y \in X$ auf der Menge der trigonometrischen Polynome $p(e^{it})$ das lineare Funktional

$$p \quad \longmapsto \quad L(p) := (p(U)x, y) \ .$$

Es ist $p(U)$ insbesondere ein normaler Operator, sodaß nach Satz IV.2.16 und dem Spektralabbildungssatz IV.2.12

$$\|p(U)\| = r_{\sigma P(U)} = \max_{\lambda \in \sigma(p(U))} |\lambda| = \max_{\lambda \in p(\sigma(U))} |\lambda| \leq \max_{t \in [0,2\pi]} |p(e^{it})| =: \|p\|_\infty .$$

Damit folgt $|L(p)| \leq \|p\|_\infty \|x\| \ \|y\|$, d.h. L ist ein stetiges lineares Funktional auf der Menge der trigonometrischen Polynome und nach dem Satz von Hahn-Banach fortsetzbar auf den ganzen Raum der stetigen 2π-periodischen Funktionen. Es gilt dann der Darstellungssatz (s. Korollar IV.4.17))

$$L(f) = (f(U)x, y) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dV(t; x, y) = \int_0^{2\pi} V(t; x, y) df(e^{it}) \ ,$$

wobei $V(t; x, y)$ eine Funktion beschränkter Variation in t ist und f eine beliebige stetige Funktion auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist. Insbesondere gilt

$$\|x\| \ \|y\| \geq \sup \frac{|L(f)|}{\|f\|_\infty} = \|V(t; x, y)\|_{BV} := \sup_{|Z|} \sum_{j=1}^{n-1} |V(\mu_{j+1}; x, y) - V(\mu_j; x, y)| \ ,$$

wobei Z eine Zerlegung wie in Definition IV.4.16 ist. Daraus folgt, daß für jedes $t \in [0, 2\pi$ $V(t; x, y)$ eine stetige Bilinearform in x, y ist, sodaß nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz I.5.14) $V(t; x, y) = (E_t x, y)$ mit einem stetigem Operator E_t ist. Es gilt $E_0 = 0$ wegen $V(0; x, y) = 0$ und $E_{2\pi} = I$ wegen $V(2\pi; x, y) = \int_0^{2\pi} dV(t; x, y) = (x, y)$, da $V(t; x, y)$ entsprechend normiert werden kann.
Man kann die Operatoren E_t als Spektralschar erkennen , indem man ihnen analog wie in Satz IV.4.13 das Symbol

$$q_\lambda(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \leq \lambda \\ 0 & , \quad t < \lambda \end{cases}$$

zuordnet, wobei q_λ $2\pi-$ periodisch fortgestzt ist. Dann gibt es eine monoton fallende Folge $\{p_n(e^{it})\}$ von reellwertigen trigonometrischen Polynomen mit $\lim_{n\to\infty}\{p_n(e^{it})\} = q_\lambda(t)$, sodaß nach Satz IV.4.9

$$(q_\lambda(U)x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(e^{it}) dV(t; x, y) = \int_0^\lambda dV(t; x, y) = V(\lambda; x, y) \ .$$

Damit gilt $E_\lambda = q_\lambda(U)$ und die E_λ sind symmetrische Projektionen. Man kann dann die weiteren überlegungen auf dem Weg zu einem Spektralzerlegungssatz völlig analog wie oben durchführen und erhält

IV.5.1 Satz: ***Spektralzerlegungssatz für unitäre Operatoren***
Zu jedem unitären Operator U auf einem Hilbertraum X gibt es eine Spektralfamilie von orthogonalen Projektionen mit den Eigenschaften

1. $E_t = 0$ für $t < 0$, $E_t = I$ für $t \geq 2\pi$,
2. $E_t \leq E_s$ für $t \leq s$,
3. $\lim_{s \searrow t} E_s x \equiv E_{t+0}x = E_t x$, (rechtsseitige Stetigkeit)
4. $U = \int_0^{2\pi} e^{it} \, dE_t$,
5. $f(U) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \, dE_t$ für alle $2\pi-$periodischen, stetigen Funktionen f ,
6. Es gilt die Multiplikationsformel $f(U)\, g(U) \;=\; (f \cdot g)\,(U)$.

Nun zur **Cayley-*Transformation*** . Sie ordnet einem linearen abgeschlossenem und symmetrischen Oprator A mit dichtem Definitionsbereich einen unitären Operator zu:

$$A \longmapsto U \;:=\; (A \;-\; i\; I)\; (A \;+\; i\; I)^{-1}\; .$$

zu (Die Wohldefiniertheit folgt aus dem nächten Satz). Instruktiv ist es dann, der Cayley-Transformation von A ein Symbol zuzuordnen. Im Sinne des allgemeinen Operatorenkalküls sollte man

$$U = w(A) \qquad \text{mit} \qquad w(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

schreiben. Man erhält die aus der Funktionentheorie bekannte Möbius-Transformation, die die reelle Achse auf den Rand des Einheitskreises abbildet. Dies ist in Übereinstimmung mit dem Spektralabbildungssatz (s. Korollar IV.4.19), nach dem das Spektrum von A auf das von U abbgebildet wird, das auf dem Einheitskreis liegt (s. Lemma IV.3.1).

Man kann nun folgendes zeigen:

IV.5.2 Satz: Es sei A ein linearer, abgeschlossener und symmetrischer Operator auf $\mathcal{D}(A)$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Der oben definierte Operator U bildet dann $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(A + i\; I)$ auf $R(U) = R(A - i\; I)$ ab. Er ist isometrisch, d.h. $\|Ux\| = \|x\| \quad (x \in X)$, und er ist unitär genau dann, wenn $\mathcal{D}(U) = R(U) = X$ oder A selbstadjungiert ist, d.h. wenn $A^* = A$.

Zum Beweis sei bemerkt: Es ist $A \pm i\; I$ abgeschlossen, und es existiert $(A \pm i\; I)^{-1}$ als beschränkte Abbildung wegen

$$\|(A \pm i\; I)x\|^2 = ||Ax\|^2 + \|x\|^2\; .$$

Daraus folgert man, daß $\mathcal{D}(U) = R(A + i\; I)$ abgeschlossen ist und somit ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (II.2.5) auch U beschränkt, speziell
$U \in L(R(A + i\; I), R(A - i\; I))$. Die Isometrie folgt aus $\|(A - i\; I))v\| = \|(A + i\; I))v\|$ und so $\|(A - i\; I)(A + i\; I)^{-1}x\| = \|x\|$ mit $(A - i\; I)^{-1})x = v$.
Ferner gilt die Relation

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \bigoplus R(A + i\; I)^{\perp} \bigoplus \mathcal{R}(A - i\; I)^{\perp}\; ,$$

aus der die letzte Aussage folgt.

Nach diesen Vorbereitungen kann man zeigen

IV.5.3 Satz: Es sei A ein linearer und selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{D}(A)$ mit $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Dann hat der Operator $U := (A - i\ I)(A + i\ I)^{-1}$ die Spektraldarstellung

$$- U \ = \ \int_0^{2\pi} e^{it} \ dE_t \ ,$$

und es gilt weiter für alle $x \in X$

$$(Ax, x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \ dF_\lambda, \quad , \quad F_\lambda := E_{2arctan\lambda} \ .$$

Auf einen Beweis sei hier verzichtet und lediglich bemerkt , daß man von der Spektralzerlegung $\{E_t\}$ von U auf diejenige von A durch die Rücktransformation

$$A \ = \ i\ (I + U)(I - U)^{-1}$$

kommt.