

# Infinitesimalrechnung IV

Vorlesung im Sommersemester 1994

von Prof. Dr. Rolf Leis



# Inhaltsverzeichnis

<b>13 Funktionentheorie</b>	<b>3</b>
13.1 Einführung	3
13.2 Holomorphe Abbildungen	6
13.3 Integration	9
13.4 Der Cauchysche Integralsatz	12
13.5 Die Cauchysche Integralformel und Folgerungen	15
13.6 Potenzreihenentwicklung	18
13.7 Cauchysche Ungleichungen und Folgerungen	22
13.8 Umkehrung holomorpher Funktionen	26
13.9 Spezielle Abbildungen	28
13.10 Das Schwarzsche Lemma und das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	37
13.11 Ganze Funktionen	38
13.12 Isolierte Singularitäten	42
13.13 Der Residuenkalkül	46
13.14 Fortsetzung holomorpher Abbildungen	52
13.15 Darstellung meromorpher Abbildungen	54
13.16 Periodische Funktionen	59
13.16.1 Einfach periodische Funktionen	60
13.16.2 Doppelt periodische Funktionen	62
13.17 Konforme Abbildungen	66
13.18 Randwertaufgaben in der Potentialtheorie	73
<b>Index</b>	<b>78</b>



## 13 Funktionentheorie

In diesem Kapitel behandeln wir komplexwertige Abbildungen einer komplexen Veränderlichen. Die Resultate sind größtenteils klassisch. Sie spielen aber in vielen Zweigen der Mathematik eine große Rolle, besonders auch in physikalisch-technischen Anwendungen, so daß ein Mathematiker oder Physiker sie kennen muß. Im folgenden möchte ich wichtige Ideen und Ergebnisse darstellen.

Die *Funktionentheorie* war schon immer bei den Studenten sehr beliebt. Das liegt an der Einfachheit und Klarheit der Theorie und an den vielen schönen Eigenschaften, die die auftretenden Funktionen haben. Sie sind in Potenzreihen entwickelbar, sie sind beliebig oft differenzierbar und dergleichen mehr. Die Theorie liefert zum Beispiel einen sehr einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra; sie wird in der Spektraltheorie benötigt. Auch lassen sich manche Fragen nach dem Verhalten reellwertiger Funktionen erst richtig verstehen, wenn man sie im Komplexen studiert. Das gilt zum Beispiel für die Frage nach der Größe des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Darauf habe ich in §7.2 schon hingewiesen.

Dieser vierte und letzte Teil der Anfängervorlesung wird für Sie der leichteste sein, meine ich. Sie sollten freie Zeit zur Nachbereitung der ersten Teile nutzen und können sich so auf das Vorexamen vorbereiten.

Auch zur Funktionentheorie gibt es viele Bücher. Ich nenne wieder nur wenige und ermuntere Sie, selber in unserer Bibliothek zu stöbern:

*Fischer&Lieb: Funktionentheorie; Vieweg, Braunschweig 1992.*

*Hurwitz-Courant: Funktionentheorie; Springer-Verlag, Berlin 1964. (Erste Auflage 1922)*

*Knopp: Funktionentheorie; drei Göschenbände. (Erste Auflage 1913)*

*Remmert: Funktionentheorie I; Springer-Verlag, Berlin 1989.*

### 13.1 Einführung

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit differenzierbaren Abbildungen einer komplexen Veränderlichen

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

beschäftigen. Dabei bedeutet die komplexe Differenzierbarkeit an der Stelle  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot z + |z| r_f(z_0, z)$$

mit

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} r_f(z_0, z) = 0.$$

Die komplexe Differenzierbarkeit wird also völlig analog zur Differenzierbarkeit der Abbildungen einer reellen Veränderlichen definiert. Ich sagte schon, daß sich komplex differenzierbare Funktionen als beliebig oft differenzierbar erweisen werden, eine Eigenschaft, die differenzierbare Abbildungen

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

sicherlich nicht besitzen. Versuchen wir also zuerst einmal zu verstehen, woran es wohl liegt, daß sich beide Klassen dermaßen unterscheiden.

Die Abbildung  $g$  ist an der Stelle  $\xi_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar, wenn dort

$$g(\xi_0 + \xi) = g(\xi_0) + g'(\xi_0) \xi + |\xi| r_g(\xi_0, \xi)$$

mit  $\xi := (x, y)$  und

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} r_g(\xi_0, \xi) = 0$$

gilt. An der Stelle  $\xi_0$  ist

$$g' \cdot (x, y) = \partial_x g \cdot x + \partial_y g \cdot y = \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y)g \cdot z + \frac{1}{2}(\partial_x + i \partial_y)g \cdot \bar{z} =: \partial g \cdot z + \bar{\partial} g \cdot \bar{z}$$

mit

$$\partial := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

und es folgt

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \partial + \bar{\partial} \\ i(\partial - \bar{\partial}) \end{pmatrix} g.$$

Es sei nun  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist

$$z = \varphi(x, y) := x + iy \quad \text{und} \quad \bar{z} = \overline{\varphi(x, y)} := x - iy,$$

also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{z} + z \\ i(\bar{z} - z) \end{pmatrix} =: \psi(z, \bar{z}). \quad (*)$$

Betrachten wir für den Augenblick  $z$  und  $\bar{z}$  als unabhängige Variable. Dann ist

$$g \circ \psi : E \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$E := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \eta = \bar{\xi}\}.$$

Es existiere eine Fortsetzung von  $g \circ \psi$  auf eine offene Umgebung  $U \supset E$ . Dort gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ \psi) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) g \right) \circ \psi = (\partial g) \circ \psi$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ \psi) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) g \right) \circ \psi = (\bar{\partial} g) \circ \psi.$$

In derselben Interpretation ist für unser  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial}(f \circ \varphi) = 0,$$

weil  $f$  ja gar nicht von  $\bar{z}$  abhängt. Das bedeutet eben eine große Einschränkung der Klasse der Abbildungen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Betrachten wir etwa

$$g(x, y) = x - iy.$$

Dann gehört diese Abbildung nicht zu der in der Funktionentheorie ausgezeichneten Klasse, denn wegen  $g(x, y) = \bar{z}$  ist natürlich

$$\bar{\partial} g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) g = 1.$$

Stellen wir nun die komplexe Differenzierbarkeit noch stärker in den Vordergrund: Es sei  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar. Dann existiert  $f'(z_0)$  als Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z},$$

und zwar bei beliebiger Annäherung von  $z$  an den Nullpunkt. Für

$$g(z) = \bar{z} = x - iy$$

und  $z_0 = 0$  ist mit  $z = r e^{i\varphi}$

$$\frac{g(z)}{z} = e^{-2i\varphi}.$$

Es wäre also zum Beispiel

$$g'(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi = 0 \\ -1 & \text{für } \varphi = \pi/2 \end{cases}.$$

Das heißt aber,  $g'(0)$  existiert nicht, und  $g$  ist mithin nicht komplex differenzierbar.

Durch die Forderung der komplexen Differenzierbarkeit haben wir also die Klasse der Abbildungen

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

eingeschränkt. Funktionen wie  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$  oder Polynome in  $z$  gehören zur ausgezeichneten Klasse; bei  $\sqrt{z}$  oder  $\ln z$  wird die Entscheidung schon schwieriger. Sicherlich nicht werden  $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ ,  $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$  oder  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$  dazugehören.

Lassen Sie mich diese eher heuristischen Überlegungen noch etwas fortsetzen: Es seien  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$ . Dann folgt mit  $z = x + iy$  aus

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und  $\bar{\partial}f = 0$

$$0 = \partial_x u + i \partial_x v + i(\partial_y u + i \partial_y v),$$

also

$$\begin{aligned} \partial_x u - \partial_y v &= 0 \\ \partial_y u + \partial_x v &= 0. \end{aligned}$$

Das sind die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. Für  $u, v \in C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  folgt aus ihnen unmittelbar

$$\Delta u := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0$$

und  $\Delta v = 0$ . Die Lösungen der Gleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0$$

im  $\mathbb{R}^n$  nennt man *Potentialfunktionen*. Realteil und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion sind also Potentialfunktionen im  $\mathbb{R}^2$ .  $v$  nennt man die zu  $u$  *konjugiert harmonische* Funktion.

Potentialfunktionen spielen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und in vielen Anwendungen eine große Rolle. Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen der Funktionentheorie und der zweidimensionalen Potentialtheorie.

Es seien  $\omega_1 := du$  und  $\omega_2 := dv$ . Beide Formen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind geschlossen, und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$*\omega_2 = -(\partial_y v) dx + (\partial_x v) dy = -\omega_1,$$

also

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = *(\omega_1 \wedge *\omega_2) = 0.$$

Die Vektorfelder  $\nabla u$  und  $\nabla v$  stehen also senkrecht aufeinander. Beispielsweise erhält man für

$$f(z) = z^2$$

$u(x, y) = x^2 - y^2$  und  $v(x, y) = 2xy$ . Höhenlinien zu  $u(x, y) = \text{const}$  sind Falllinien zu  $v(x, y) = \text{const}$  und umgekehrt.

Die Potentialfunktion  $u$  sei vorgegeben. Dann erhält man im  $\mathbb{R}^2$  oder für sternförmige Gebiete die zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion  $v$  aus dem Poincaréschen Lemma. Aus  $*\omega_2 := -du$  folgt nämlich

$$\omega_2 = *du = u_x dy - u_y dx \quad \text{und} \quad d\omega_2 = \Delta u dx \wedge dy = 0.$$

Mithin besitzt  $\omega_2$  eine Stammfunktion  $v$  mit  $\omega_2 = dv$ , und es ist

$$\omega_2 = dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also erfüllt.

Wir können leicht eine weitere wichtige Folgerung herleiten: Betrachten wir ein Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_{\Gamma} \{(u dx - v dy) + i(v dx + u dy)\}.$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} d(u dx - v dy) &= (-\partial_y u - \partial_x v) dx \wedge dy = 0 \\ d(v dx + u dy) &= (-\partial_y v + \partial_x u) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Mithin besagt der Gaußsche Satz für geschlossene  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Integrale

$$\int_{\Gamma(a,b)} f(z) dz$$

hängen also nicht vom speziellen Wege  $\Gamma$  von  $a$  nach  $b$  ab, und zu  $f$  kann man dann vermöge

$$F(z) = \int_{\Gamma(z_0,z)} f(\zeta) d\zeta$$

eine Stammfunktion definieren.

All dies war nur als Einführung gedacht. Im folgenden werde ich die einzelnen Resultate und viele Folgerungen systematisch ableiten.

## 13.2 Holomorphe Abbildungen

Im folgenden betrachten wir komplexwertige Abbildungen einer komplexen Veränderlichen

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w = f(z). \end{aligned}$$

Dabei ist  $D \subset \mathbb{C}$  der Definitionsbereich von  $f$ , und wir schreiben grundsätzlich  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ .

**Definition 13.2.1:** Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $z \in U$ . Dann heißt  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z$  (komplex) differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z) =: \frac{df}{dz}(z)$$

existiert.  $f'(z)$  heißt (erste) Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z$ .

Diese Definition der komplexen Ableitung entspricht völlig der Definition der Ableitung für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen (Definition 5.4.1). Man beachte, daß der Grenzwert für jedes komplexe  $h \rightarrow 0$  existieren muß. Als Basis der Topologie für  $\mathbb{C}$  wählen wir selbstverständlich wieder Kreise

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Dabei ist

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die euklidische Norm.

Für das Differenzieren gelten die üblichen Rechenregeln wie im Reellen. Für differenzierbare  $f, g$  ist

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

sowie

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \quad (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f',$$

wenn  $1/f$  bzw.  $g \circ f$  existieren.

### Beispiel 13.2.2:

1. Es sei  $f(z) = z^n$ . Dann ist

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1}),$$

und es folgt

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

2.  $f(z) = \operatorname{Re} z$  ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Es ist nämlich

$$f(z) = z \cdot \frac{\bar{z}f(z)}{|z|^2} = z \left( \frac{x^2 - ixy}{x^2 + y^2} \right)$$

mit

$$\frac{x^2 - ixy}{x^2 + y^2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } y \rightarrow 0 \\ 1 & \text{für } y = 0 \text{ und } x \rightarrow 0. \end{cases}$$

□



Im folgenden werden die *holomorphen Funktionen* eine große Rolle spielen:

**Definition 13.2.3:** Es seien  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset D$  offen und  $z \in U$ . Dann heißt  $f$  in  $z$  holomorph, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $z$  differenzierbar ist.  $f$  heißt in  $U$  holomorph, wenn  $f$  in allen  $z \in U$  holomorph ist.

**Beispiel 13.2.4:**

1.  $f(z) = z^n$  ist in  $\mathbb{C}$  holomorph.

2.  $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$  ist nur im Nullpunkt differenzierbar, also nirgends holomorph: Es ist

$$(z_0 + z)(\overline{z_0 + z}) = z_0 \bar{z}_0 + z \left( \bar{z}_0 + z_0 \frac{\bar{z}}{z} + \bar{z} \right).$$

Wegen  $|\bar{z}| = |z|$  gilt  $\bar{z} \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow 0$ . Wie wir schon in der Einführung gesehen haben, existiert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

jedoch nicht.  $f(z)$  ist also nur im Nullpunkt differenzierbar.

3. Es sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  holomorph. Dann ist  $f' = 0$ . Es sei nämlich für festes  $z_0$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f_1(z)$$

mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = f'(z_0)$ . Es sei  $r \in \mathbb{R}^+$ . Dann folgt

$$\text{a) für } z = z_0 + r : \quad r f_1(z_0 + r) \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) für } z = z_0 + ir : \quad ir f_1(z_0 + ir) \in \mathbb{R}.$$

Es ist also

$$f_1(z_0 + r) \in \mathbb{R} \text{ und } i f_1(z_0 + ir) \in \mathbb{R}.$$

Für  $r \rightarrow 0$  folgt daraus  $f'(z_0) = 0$ .

4. Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und wegzusammenhängend.  $f$  sei in  $U$  holomorph, und  $f'$  verschwinde dort. Dann ist  $f$  konstant. Es ist nämlich mit  $f(z) = f(x + iy)$

$$f' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \partial f = 0,$$

und es gilt erst recht  $\bar{\partial} f = 0$  (vgl. Satz 13.2.7). Mithin verschwinden alle partiellen Ableitungen von  $f$ , und aus Satz 9.5.3, angewandt auf  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$ , folgt die Behauptung. □

Besonders interessant sind die bijektiven holomorphen Abbildungen.

**Definition 13.2.5:** Es seien  $U, V$  offen,  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  bijektiv und holomorph sowie  $f^{-1}$  holomorph. Dann heißt  $f$  biholomorph.

Wie im Reellen kann man beweisen:

**Satz 13.2.6:**  $U, V$  seien offen. Dann gilt:  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  ist biholomorph  $\iff$

1.  $f$  ist bijektiv und holomorph,

2. in  $U$  ist  $f' \neq 0$ ,

3.  $f^{-1}$  ist stetig.

Mit  $w := f(z)$  folgt dann

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Man vergleiche den Beweis zu Satz 5.5.5.

Als erstes zeigen wir nun

**Satz 13.2.7:**  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Dann genügen  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$  den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beweis: Es sei  $h \in \mathbb{R}$ . Dann folgen

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \rightarrow \partial_x u + i \partial_x v$$

und

$$\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} \rightarrow -i \partial_y u + \partial_y v.$$

Beide Grenzwerte sind gleich, es folgt also

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned} \iff \bar{\partial} f = 0.$$

□

Aus der partiellen Differenzierbarkeit und dem Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ( $\bar{\partial} f = 0$ ) folgt noch nicht die Holomorphie. Wie im Reellen muß man hierzu die stetige Differenzierbarkeit voraussetzen.

**Satz 13.2.8:** Es seien  $u, v$  partiell stetig differenzierbar,  $f = u + iv$  und  $\bar{\partial} f = 0$ . Dann ist  $f$  holomorph.

Beweis: Wie im Reellen (Satz 9.5.4) folgt aus  $\bar{\partial} f = 0$  und dem Mittelwertsatz 9.5.1

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \partial f(z_0) + |z - z_0| r(z_0, \theta z),$$

und aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen erhält man  $\lim_{z \rightarrow z_0} r(z_0, \theta z) = 0$ . □

### Elementare holomorphe Funktionen:

1. Es seien  $a_j \in \mathbb{C}$  und

$$P_n(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j$$

ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $z$ . Dann ist  $P_n$  in  $\mathbb{C}$  holomorph und beliebig oft differenzierbar.

2. Es sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe. Potenzreihen haben wir in §7.2 bereits diskutiert. Es sei

$$a := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann ist

$$\rho := \begin{cases} 0, & \text{wenn } a \text{ nicht existiert,} \\ \frac{1}{a}, & \text{wenn } a \text{ existiert und von Null verschieden ist,} \\ \infty, & \text{wenn } a \text{ existiert und gleich Null ist,} \end{cases}$$

der Konvergenzradius von  $f$ . In  $B(z_0, \rho)$  konvergiert  $f(z)$  absolut und ist dort beliebig oft differenzierbar (Satz 7.2.5 und Satz 7.2.1). Ferner gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq \rho \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Es seien nämlich

$$A := \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{und} \quad B := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Dann gilt:

$\alpha$ ) Für jedes  $a \in (0, A)$  gibt es ein  $k > 0$  mit

$$\forall n \geq k \quad |a_{n+1}| < \frac{1}{a} |a_n|.$$

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist also

$$|a_{n+m}| < \left(\frac{1}{a}\right)^m |a_n|$$

oder

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| \leq |a_k| |z - z_0|^k \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{|z - z_0|}{a} \right)^m.$$

Für  $|z - z_0| < a$  konvergiert diese Reihe. Mithin ist  $\rho \geq A$ .

$\beta$ ) Für jedes  $b \in (B, \infty)$  gibt es ein  $k > 0$  mit

$$\forall n \geq k \quad |a_n| < b |a_{n+1}|.$$

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist also

$$|a_n| < b^m |a_{n+m}|$$

oder

$$|a_{k+m} (z - z_0)^{k+m}| \geq \left( \frac{|z - z_0|}{b} \right)^m |a_k| |z - z_0|^k.$$

Notwendig für die Konvergenz der Reihe  $\sum a_n (z - z_0)^n$  ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |a_{k+m} (z - z_0)^{k+m}| = 0.$$

Es muß also  $|z - z_0| < b$  sein. Deshalb ist  $\rho \leq B$ . □

3. Es sei

$$f(z) := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die Exponentialfunktion. Diese Abbildung haben wir in §5.3 bereits diskutiert.  $f$  konvergiert überall in  $\mathbb{C}$  und ist dort beliebig oft differenzierbar. Es gilt

$$f'(z) = f(z) \quad \text{und} \quad f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

Insbesondere ist

$$f(iz) = \cos z + i \sin z$$

mit

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

und

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Auch diese Abbildungen sind überall in  $\mathbb{C}$  beliebig oft differenzierbar. Es folgt

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Man definiert auch

$$\cosh z := \cos(iz) = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := -i \sin(iz) = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}).$$

Man diskutiere das Abbildungsverhalten dieser Funktionen!

### 13.3 Integration

In §12 haben wir wichtige Resultate aus der Integrationstheorie hergeleitet. Für stetig differenzierbare Abbildungen können wir sie hier übernehmen. Darauf habe ich schon in der Einführung hingewiesen und insbesondere

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

gezeigt. Mithin lassen sich Stammfunktionen definieren.

Diese Resultate sollen jetzt noch etwas ergänzt und beleuchtet werden. Ich werde aber – das sei betont – im nächsten Abschnitt die Hauptsätze für unseren speziellen Fall noch einmal neu beweisen. Man kann hier nämlich auf die in §12 vorausgesetzte stetige Differenzierbarkeit verzichten, es genügt die Holomorphie. Voraussetzungen an den Rand  $\Gamma$  lassen sich ebenfalls abschwächen. All das möchte ich Ihnen im nächsten Abschnitt zeigen.

Es seien  $\Gamma$  eine  $C_1$ -Kurve im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Rand  $\partial\Gamma$  und  $f = u + iv$  wie in der Einführung eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\int_{\Gamma} f'(z) dz = \int_{\Gamma} (\partial f)(dx + idy) = \int_{\Gamma} (du + idv) = \int_{\Gamma} df.$$

Aus dem Stokesschen Satz erhalten wir daher

$$\int_{\Gamma} f'(z) dz = f(z)|_{\partial\Gamma}.$$

Das ist ein zweites wichtiges Resultat.

**Beispiel 13.3.1:**

1. Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$  eine Darstellung der Kurve  $\Gamma$  mit  $A = \gamma(a)$ ,  $B = \gamma(b)$ . Dann ist mit  $\gamma = x + iy$

$$\int_{\Gamma(A,B)} dz = \int_a^b \{x'(t) + iy'(t)\} dt = (x(t) + iy(t)) \Big|_a^b = B - A.$$

2. Analog folgt

$$\int_{\Gamma(A,B)} z dz = \int_a^b z(t)z'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(z^2)}{dt} dt = \frac{1}{2}(B^2 - A^2).$$

3. Es sei  $S := S^1(z_0, r)$ . Dann ist mit  $z = z_0 + re^{i\varphi}$

$$\oint_S (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (r^n e^{in\varphi}) \cdot (ire^{i\varphi}) d\varphi = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Vorzeichen des letzten Integrals hängt von der Wahl des Umlaufsinn ab. Wir verabreden, daß bei Integralen über geschlossene Wege die Orientierung immer entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn gewählt werden soll, wenn nichts anderes gesagt ist. Der Normalenvektor soll nach außen weisen.

Wir zeigen nun:

**Lemma 13.3.2:** Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $\Gamma \subset U$  eine  $C_1$ -Kurve der Länge  $L$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und

$$M := \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Dann ist

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq LM.$$

Beweis: Mit  $f = u + iv$  und

$$t := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad n := \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^L \{(w, t) + i(w, n)\} ds.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right|^2 &= \left| \int_0^L (w, t) ds \right|^2 + \left| \int_0^L (w, n) ds \right|^2 \leq L \int_0^L \{(w, t)^2 + (w, n)^2\} ds = \\ &= L \int_0^L |w|^2 ds = L \int_0^L |f|^2 ds \leq L^2 M^2. \end{aligned}$$

**Stammfunktionen:** Wir beginnen mit

**Definition 13.3.3:**

1. Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann heißt  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  Stammfunktion zu  $f$ , wenn  $F$  in  $U$  holomorph ist mit  $F' = f$ .
2.  $f$  hat in  $U$  lokale Stammfunktionen, wenn es zu jedem  $z \in U$  eine Umgebung  $V$  gibt, in der  $f$  eine Stammfunktion besitzt.

Es folgt

**Satz 13.3.4:** Es seien  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  und  $\Gamma(A, B)$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $U$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma(A, B)} f(z) dz = F(B) - F(A).$$

Beweis  $\Gamma$  bestehe aus den stetig differenzierbaren Wegstücken  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} F'(z) dz.$$

Es sei  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Gamma_i$  eine Darstellung von  $\Gamma_i$ . Wegen  $F' = f$  ist  $F$  stetig differenzierbar, und aus

$$F'(z) dz = (\partial F)(dx + idy) = d(\operatorname{Re} F) + i d(\operatorname{Im} F) = dF$$

folgt

$$\int_{\Gamma_i} F'(z) dz = \int_{\Gamma_i} dF = \int_{a_i}^{b_i} \frac{d}{dt} F(\gamma_i(t)) dt = F(\gamma_i(b_i)) - F(\gamma_i(a_i)).$$

Das beweist den Satz. □

**Folgerung 13.3.5:**  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und besitze eine Stammfunktion. Dann gilt für einen geschlossenen Integrationsweg  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Dabei sei – auch im folgenden – ein Integrationsweg ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Ein Gebiet sei eine zusammenhängende offene Menge.

Wir zeigen auch die Umkehrung:

**Satz 13.3.6:** Es seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\Gamma$  in  $G$  gelte

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Dann besitzt  $f$  in  $G$  eine Stammfunktion.

Beweis: Es sei  $A \in G$  fest gewählt. Es seien  $z \in G$ ,  $\Gamma(A, z)$  ein Weg in  $G$  von  $A$  nach  $z$  und

$$F(z) := \int_{\Gamma(A, z)} f(\zeta) d\zeta.$$

Dann ist  $F$  eindeutig definiert und hängt nicht von der speziellen Wahl von  $\Gamma$  ab. Wir wollen zeigen, daß  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  ist:

Es seien  $z_0 \in G$ ,  $[z_0, z]$  die Verbindungsstrecke von  $z_0$  nach  $z$  und  $z$  aus einer Umgebung von  $z_0$  mit  $[z, z_0] \subset G$ . Dann ist

$$\gamma := \{\Gamma(A, z_0), [z_0, z], \Gamma(z, A)\}$$

ein geschlossener Weg in  $G$ , also

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

oder mit  $[z_0, z] := \{z_0 + t(z - z_0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt = (z - z_0)g(z).$$

Dabei ist

$$g(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt$$

und

$$|g(z) - g(z_0)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Das beweist den Satz. □

Die in der Voraussetzung des Satzes genannten geschlossenen Wege lassen sich sogar auf Dreiecke reduzieren. Es gilt nämlich

**Satz 13.3.7:** Es seien  $G$  ein konvexes Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für alle abgeschlossenen Dreiecke  $\Delta \subset G$  gelte

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion.

Beweis: Es sei  $A \in G$  fest gewählt und  $\Gamma(z) := [A, z]$  für  $z \in G$ . Dann liegt  $\Gamma$  in  $G$ , und wir können

$$F(z) := \int_{\Gamma(z)} f(\zeta) d\zeta$$

definieren. Es gilt wieder

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

und wir können wie im Beweis des letzten Satzes fortfahren.  $\square$

**Folgerung 13.3.8:** Die Voraussetzungen des letzten Satzes seien erfüllt, aber  $G$  nicht notwendig konvex. Dann besitzt  $f$  lokale Stammfunktionen.

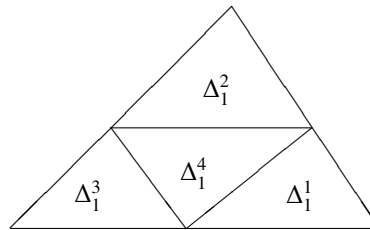
### 13.4 Der Cauchysche Integralsatz

Als erstes zeigen wir das nach EDOUARD GOURSAT, 1858–1936, benannte Lemma.

**Das Goursatsche Lemma:** Es seien  $\Delta$  ein abgeschlossenes Dreieck in  $\mathbb{C}$  und  $f$  holomorph in einer Umgebung von  $\Delta$ . Dann gilt

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Wie skizziert unterteilen wir  $\Delta$  längs der Geraden, die die Seitenmittelpunkte verbinden:



Es ist

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \oint_{\partial\Delta_i} f(z) dz,$$

also

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \max_i \left| \oint_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right|.$$

Wir wählen ein  $\Delta_1^i =: \Delta_1$ , welches einen möglichst großen Beitrag liefert, teilen weiter und erhalten

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^2 \cdot \left| \oint_{\partial\Delta_2} f(z) dz \right| \leq \dots \leq 4^n \cdot \left| \oint_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|$$

mit  $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$  und  $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta_{n-1}) = \dots = 2^{-n}L(\partial\Delta)$ . Weil alle  $\Delta_n$  kompakt sind, gibt es ein  $z_0$  mit

$$\bigcap_n \Delta_n = \{z_0\}.$$

In  $z_0$  ist  $f$  differenzierbar, also folgt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\{f'(z_0) + g(z)\}$$

mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ . Nun ist

$$h(z) := f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$$

linear. Daraus folgt (vgl. Beispiel 13.3.1,2)

$$\oint_{\partial\Delta_n} h(z) dz = 0,$$

also

$$\left| \oint_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\partial\Delta_n} (z - z_0) g(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_n) \cdot \sup_{z \in \partial\Delta_n} (|z - z_0| \cdot |g(z)|) \leq (L(\partial\Delta_n))^2 \cdot \sup_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)|$$

oder

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq (L(\partial\Delta))^2 \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |g(z)|.$$

Nun ist  $g(z)$  in  $z_0$  stetig mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ . Deshalb erhalten wir für  $n \rightarrow \infty$

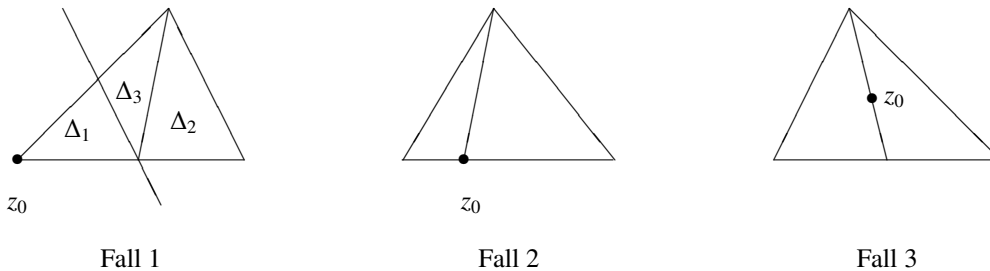
$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = 0. \quad \square$$

Man kann die Voraussetzungen im Goursatschen Lemma etwas abschwächen und auf die Holomorphie von  $f$  in einem Punkt (in endlich vielen Punkten) verzichten, jedoch nicht auf die Beschränktheit. Später spricht man dann auch von einer *hebbaren Singularität*.

**Lemma 13.4.1:** *Es seien  $\Delta$  ein abgeschlossenes Dreieck in  $\mathbb{C}$ ,  $U$  offen,  $z_0 \in \Delta \subset U$ , sowie  $f$  holomorph in  $U \setminus \{z_0\}$  und in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt. Dann gilt*

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Wir machen drei Fallunterscheidungen:



1.  $z_0$  sei ein Eckpunkt. Wie skizziert unterteilen wir  $\Delta$  in  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und erhalten

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz.$$

In diesem Falle ist

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \sup_{z \in \Delta_1} |f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{für } L(\partial\Delta_1) \rightarrow 0.$$

2.  $z_0$  liege auf einer Seite von  $\Delta$ . Wie skizziert unterteilen wir dann  $\Delta$  in  $\Delta_1, \Delta_2$  und erhalten die Behauptung.

3.  $z_0$  liege im Inneren von  $\Delta$ . Auch jetzt unterteilen wir wie skizziert und erhalten die Behauptung. □

Zusammen mit Satz 13.3.7 folgt

**Satz 13.4.2:** *Es seien  $G$  konvex und  $f \in C(G, \mathbb{C})$  holomorph, mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte. Dann besitzt  $f$  in  $G$  eine Stammfunktion.*

Bemerkung: Verzichtet man auf die Konvexität von  $G$ , dann besitzt  $f$  lokale Stammfunktionen.

Aus diesen Resultaten folgt:

**Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete:** *Es seien  $G \subset \mathbb{C}$  konvex sowie  $f \in C(G, \mathbb{C})$  holomorph, mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte. Es sei  $\Gamma$  ein geschlossener Integrationsweg in  $G$ . Dann gilt*

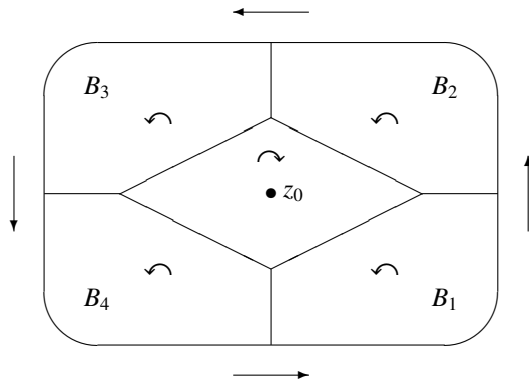
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Der Beweis folgt aus Satz 13.4.2 und Folgerung 13.3.5. □

Der Cauchysche Integralsatz gilt auch für nicht notwendig konvexe Gebiete. Da wir ihn in dieser Form zunächst nicht benötigen, begnüge ich mich hier mit einer Andeutung. Erinnert sei noch einmal an Beispiel 13.3.1.3.

1. Es seien  $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  und wie skizziert

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup \{\text{Menge der gemeinsamen Randpunkte}\}.$$



Für jedes der  $B_i$  gilt der Cauchysche Integralsatz, mithin gilt auch  $\int_{\partial B} f = 0$  für holomorphe  $f$ .

2. Im vorangegangenen bestand der Rand  $\partial B$  aus zwei Komponenten. Allgemein erweist es sich als zweckmäßig, Funktionen nicht nur über einzelne Wege, sondern auch über Systeme von Wegen zu integrieren. Dabei wird zugelassen, daß ein Weg mehrfach auftritt. Solche Systeme von Wegen nennt man *Ketten*. Ein *Zyklus*  $\Gamma$  bestehe aus einer *geschlossenen Kette* von endlich vielen glatten Wegen  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Gamma$ . Dabei soll jeder Punkt  $z \in \mathbb{C}$  unter Berücksichtigung der Vielfachheit ebenso oft als Anfangspunkt eines  $\gamma_i$  wie als Endpunkt eines  $\gamma_i$  auftreten. Man schreibt einen solchen Zyklus auch als  $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ .

Man möchte zunächst eine Zahl einführen, die angibt, wie oft  $\Gamma$  einen festen Punkt  $z \notin \Gamma$  umläuft: Diese Zahl nennt man *Umlaufzahl* oder *Index* von  $\Gamma$  bezüglich  $z$ :

$$\text{ind}(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Offenbar ist  $\text{ind}(\Gamma, 0) = n$  für

$$\Gamma = n \gamma \quad \text{mit } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto r e^{i\varphi}$$

Für einen Zyklus  $\Gamma$  ist  $\text{ind}(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{ind}(-\Gamma, z) = -\text{ind}(\Gamma, z)$ , und es gilt

$$\text{ind}(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = \text{ind}(\Gamma_1, z) + \text{ind}(\Gamma_2, z).$$

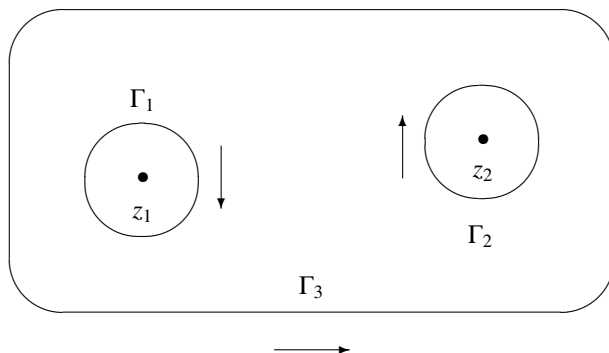
Es seien nun  $U$  offen und  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ . Dann heißen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  *homolog* in  $U$ , wenn

$$\forall z \in \mathbb{C} \cap U \quad \text{ind}(\Gamma_1, z) = \text{ind}(\Gamma_2, z)$$

ist.  $\Gamma$  heißt *nullhomolog* in  $U$ , wenn  $\text{ind}(\Gamma, z)$  für alle  $z \in \mathbb{C} \cap U$  verschwindet. Sind die Zyklen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  homolog, dann ist ihre Differenz nullhomolog. Es seien  $U = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$  und  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  wie skizziert. Dann gilt

$$\text{ind}(\Gamma_2, z_1) = \text{ind}(\Gamma_1, z_2) = 0, \quad \text{ind}(\Gamma_1, z_1) + \text{ind}(\Gamma_3, z_1) = 0, \quad \text{ind}(\Gamma_2, z_2) + \text{ind}(\Gamma_3, z_2) = 0,$$

und  $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  ist nullhomolog.



Der allgemeine Cauchysche Integralsatz lautet dann:



**Satz 13.4.3:** *Es seien  $U$  offen,  $\Gamma$  ein nullhomologer Zyklus in  $U$  und  $f$  in  $U$  holomorph. Dann ist*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Einzelheiten findet man in *Fischer&Lieb, l.c. S. 100f.*

### 13.5 Die Cauchysche Integralformel und Folgerungen

Als erstes zeigen wir:

**Die Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben:** *Es seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $B := B(z_0, r)$  mit  $\bar{B} \subset G$ . Dann gilt für alle  $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis: Es seien  $z \in B$  fest und

$$g : \zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z. \end{cases}$$

Man wähle  $U := B(z_0, r + \varepsilon) \subset G$ . Dann ist  $g$  in  $U$  stetig und in  $U \setminus \{z\}$  holomorph. Aus dem Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete folgt deshalb

$$0 = \oint_{\partial B} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Das zuletzt auftretende Integral

$$h(z) := \oint_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

können wir berechnen.  $h$  ist in  $B$  holomorph, und es gilt

$$h'(z) = \oint_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Der Integrand ist als Funktion von  $\zeta$  in  $U \setminus \{z\}$  stetig und besitzt die Stammfunktion

$$-\frac{1}{\zeta - z}.$$

Nach Folgerung 13.3.5 verschwindet  $h'(z)$  deshalb, und  $h$  ist konstant. Aus  $h(z_0) = 2\pi i$  (Beispiel 13.3.1.3) folgt daher die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 13.5.1:** *Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

Beweis: Es gibt einen Kreis  $B := B(z_0, r)$  mit  $z \in B$  und

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Daraus folgt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

und allgemein

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Als nächstes zeigen wir:

**Die allgemeine Cauchysche Integralformel:** *Es seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  (reell) stetig differenzierbar und  $D \Subset G$  ein Gebiet mit stückweise glattem positiv orientierten Rand. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{(\partial f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Dabei seien für  $\zeta = \xi + i\eta$

$$d\zeta := d\xi + i d\eta \quad d\bar{\zeta} := d\xi - i d\eta,$$

also  $d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -2i d\xi \wedge d\eta$ . Für holomorphe Funktionen  $f$  ist  $\bar{\partial}f = 0$ , es gilt also wieder

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

**Beweis:** Es seien  $z \in D$  fest,  $B_r := D \setminus \bar{B}(z, r)$  mit  $B(z, r) \Subset D$  und

$$\omega(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$\omega$  ist in einer Umgebung von  $\bar{B}_r$  stetig differenzierbar. Aus dem Gaußschen Satz (für stückweise glatt berandete Gebiete) folgt daher

$$\int_{\partial B_r} \omega = \int_{B_r} d\omega.$$

Aus

$$d\omega = -\bar{\partial} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right\} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{(\bar{\partial}f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

erhalten wir daher

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial B(z,r)} \omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{(\bar{\partial}f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Nun folgt aus der Stetigkeit von  $f$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\partial B(z,r)} \omega = f(z)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} \frac{(\bar{\partial}f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \int_D \frac{(\bar{\partial}f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Mithin gilt die Behauptung.  $\square$

Mit der Cauchyschen Integralformel haben wir ein wichtiges Ergebnis bewiesen: Jede komplex differenzierbare Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Im nächsten Abschnitt zeigen wir sogar, daß sie sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Diesen Abschnitt beschließen wir mit einigen Folgerungen: Wir beginnen mit der Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes, benannt nach GIACINTO MORERA (1856–1909).

**Satz von Morera:**  $f$  sei in  $G$  stetig. Für alle abgeschlossenen Dreiecke  $\Delta \subset G$  gelte

$$\oint_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Dann ist  $f$  in  $G$  holomorph.

**Beweis:** Nach Satz 13.3.7 besitzt  $f$  lokal eine Stammfunktion  $F$  mit  $F'(z) = f(z)$  in  $U(z)$ . Mithin ist  $F$  – und damit  $f$  – beliebig oft differenzierbar.  $\square$

Mehrfach haben wir zugelassen, daß eine Eigenschaft eventuell mit Ausnahme eines oder endlich vieler Punkte galt. Man denke an Satz 13.4.2. Um dies allgemeiner zu formulieren, geben wir

**Definition 13.5.2:**  $M \subset G$  heißt diskret, wenn es zu jedem  $z \in G$  eine offene Umgebung  $U(z) \subset G$  so gibt, daß  $U(z) \cap M$  endlich ist.

Es gilt:

**Satz 13.5.3:** Es seien  $M \subset G$  diskret,  $f$  stetig in  $G$  und holomorph in  $G \setminus M$ . Dann ist  $f$  in  $G$  holomorph.

**Beweis:** Es seien  $z_0 \in M$  und  $B(z_0, \varepsilon) \subset G$  so gewählt, daß  $B(z_0, \varepsilon)$  keine weiteren Punkte von  $M$  enthält. Nach Satz 13.4.2 besitzt  $f$  dann lokal eine Stammfunktion und ist mithin in  $z_0$  holomorph.  $\square$

Man kann sogar auf die bisher vorausgesetzte Stetigkeit von  $f$  verzichten. Es genügt die Beschränktheit:

**Riemannscher Hebbarkeitssatz:** Es seien  $z_0 \in G$ , sowie  $f$  holomorph in  $G \setminus \{z_0\}$  und beschränkt in  $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es eine in  $G$  holomorphe Funktion  $\hat{f}$  mit

$$\hat{f}|_{(G \setminus \{z_0\})} = f.$$

$f$  läßt sich also auf  $G$  holomorph fortsetzen, die „Lücke“ läßt sich schließen.

Beweis: Es sei

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{für } z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist  $F$  stetig in  $z_0$  und holomorph in  $G \setminus \{z_0\}$ . Nach Satz 13.5.3 ist  $F$  deshalb in  $G$  holomorph, und es gilt

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)g(z) = (z - z_0)g(z),$$

wobei

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

existiert. In  $G \setminus \{z_0\}$  ist  $f(z) = g(z)$ . Mithin ist  $f$  auf  $G$  stetig fortsetzbar, und es sei  $\hat{f}$  die Fortsetzung. Diese ist dann holomorph in  $G$ , wiederum nach Satz 13.5.3. □

Der Cauchysche Integralsatz und die Integralformel ermöglichen viele Anwendungen zur effektiven Berechnung von Integralen. So werde ich später den *Residuenkalkül* vorstellen. Hier folgt nur noch

**Beispiel 13.5.4:**

1. Es ist

$$I := \oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{dz}{z^2 - 1} = \oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{f(z)}{(z - 1)} dz$$

mit

$$f(z) := \frac{1}{z + 1}.$$

$f$  ist in  $\bar{B}(\frac{1}{2}, 1)$  holomorph. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt daher

$$I = 2\pi i f(1) = \pi i.$$

2. Wir zeigen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Es sei  $B^+(0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \wedge \text{Im } z > 0\}$ . Dann ist

$$\oint_{\partial B^+(0,R)} \frac{dz}{1 + z^2} = \oint_{\partial B^+(0,R)} \frac{dz}{(z + i)(z - i)} = \oint_{\partial B(i,\varepsilon)} \frac{dz}{(z + i)(z - i)} = i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2i + \varepsilon e^{i\varphi}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi.$$

Zusammen mit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\{|z|=R, \text{Im } z > 0\}} \frac{dz}{1 + z^2} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{R^2 - 1} = 0$$

(Lemma 13.3.2) folgt daraus die Behauptung.

3. Es seien  $B := B(z_0, r)$  und  $f$  in  $U(\bar{B})$  holomorph. Dann gilt

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B} \quad \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Bei festem  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}$  gibt es nämlich eine Umgebung von  $\bar{B}$ , in der

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

als Funktion von  $\zeta$  holomorph ist. Mithin verschwindet das Integral.

### 13.6 Potenzreihenentwicklung

Wir haben bereits bewiesen, daß jede holomorphe Funktion beliebig oft differenziert werden kann. Jetzt zeigen wir, daß sie sich sogar in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Es gilt

**Satz 13.6.1:** *Es seien  $U$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f$  in  $U$  holomorph. Dann gibt es eine offene Umgebung  $V$  mit  $z_0 \in V \subset U$  und  $a_n \in \mathbb{C}$ , so daß*

$$\forall z \in V \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

gilt.

Beweis: Wir wählen  $0 < r < R$  mit  $B(z_0, R) \subset U$  und  $B := B(z_0, r)$ . Dann gilt für alle  $z \in B$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Bei festem  $z \in B$  konvergiert die Reihe gleichmäßig für  $\zeta \in \partial B$ . Es folgt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} f(\zeta) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Diese Reihe konvergiert für alle  $z \in B$ , sogar gleichmäßig für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r_0 < r$ . Wegen

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ist  $a_n$  von  $r$  unabhängig. Jede Wahl von  $r < R$  führt also auf dieselbe Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (*)$$

deshalb gilt Gleichung (\*) für alle  $z \in B(z_0, R)$ , und die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Kreis  $\bar{B}(z_0, r)$  mit  $r < R$ .  $\square$

Insbesondere besitzt jeder Punkt  $z$  eine Umgebung, in der die Reihe gleichmäßig konvergiert; man sagt auch, die Reihe konvergiere *lokal gleichmäßig*. Wir fassen zusammen:

**Satz 13.6.2:** *Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f$  holomorph in  $U$  und  $z_0 \in U$ . Dann ist  $f$  um  $z_0$  in eine Potenzreihe entwickelbar,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Dies ist die Taylorreihe für  $f$ . Sie konvergiert mindestens im größten Kreis  $B(z_0, R)$ , der noch ganz in  $U$  liegt, und zwar lokal gleichmäßig.

Die Koeffizienten  $a_n$  sind eindeutig bestimmt. Das folgt aus ihrer Darstellung oder aus dem Identitätssatz für Potenzreihen. Die Reihe kann in einem Kreis konvergieren, der über  $U$  hinausragt.  $f$  ist dann *holomorph fortsetzbar*.

Da Potenzreihen im Konvergenzkreis differenziert werden können, folgt

**Satz 13.6.3:** *Es sei in  $B(z_0, R)$*

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*eine konvergente Potenzreihe. Dann ist  $P$  um alle  $z_1 \in B(z_0, R)$  in eine Potenzreihe*

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n$$

*entwickelbar. Der Konvergenzradius von  $Q$  ist mindestens  $R - |z_1 - z_0|$ .*

Aus der Definition des Konvergenzradius folgt auch:

**Satz 13.6.4:** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r$  und der Summenfunktion  $f$ . Dann gibt es keine in einer Umgebung von  $\bar{B}(z_0, r)$  holomorphe Funktion  $\hat{f}$  mit  $\hat{f}|_B = f$ .*

$f$  läßt sich also sicherlich nicht in allen Randpunkten holomorph fortsetzen. Eine solche Aussage ist im  $\mathbb{R}^1$  natürlich falsch, und wir verstehen jetzt auch, warum im Reellen manche Taylorreihen so merkwürdige Konvergenzradien besitzen.

**Beispiel 13.6.5:** *Es sei für  $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Die zugehörige Tayloreihe

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

hat den Konvergenzradius 1, obwohl  $f(x)$  überall beliebig oft differenzierbar ist.  $f$  läßt sich auch um  $x_0 = 1$  in eine Taylorreihe entwickeln, und zwar mit dem Konvergenzradius  $\sqrt{2}$ . Das folgt aus

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right)$$

und

$$\frac{1}{x \pm i} = \frac{1}{(x - x_0) + (x_0 \pm i)} = \frac{1}{x_0 \pm i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{x - x_0}{x_0 \pm i} \right)^n.$$

Wegen  $|x_0 \pm i| = \sqrt{2}$  haben diese Reihen für  $x_0 = 1$  den Konvergenzradius  $\sqrt{2}$ , und es ist

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{\operatorname{Im}(1 + i)^{n+1}}{2^{n+1}} \right\} (x - 1)^n.$$

All das wird sofort klar, wenn man  $f(z)$  im Komplexen betrachtet, denn

$$f(z) = \frac{1}{(z + i)(z - i)}$$

ist in den Punkten  $\pm i$  nicht holomorph. □

Es folgen weitere Beispiele:

**Beispiel 13.6.6:**

1. Es seien  $z_0 = -i$  und

$$f(z) = \frac{1}{(z - i)^2}.$$

Es ist

$$\frac{1}{(z - i)^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{z - i}$$

und

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{(z - z_0) - 2i} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{2i} \right)^n,$$

also

$$\frac{1}{(z - i)^2} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \left( \frac{z - z_0}{2i} \right)^n.$$

Die Reihe hat den Konvergenzradius 2.

2. Es seien  $z_0 = 0$  und

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Hier führt der Ansatz mit einer Partialbruchzerlegung

$$f(z) \stackrel{!}{=} \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-2}$$

auf

$$c \stackrel{!}{=} (z-2)f(z) \Big|_{z=2} = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = 1$$

$$b \stackrel{!}{=} (z-1)^2 f(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{z-2} \Big|_{z=1} = -1$$

und

$$-a - 1 - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} f(0) = -\frac{1}{2},$$

also

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-2}.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - (n+1) - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n \end{aligned}$$

mit dem Konvergenzradius 1.

3. Es seien  $z_0 = \pi i$  und  $f(z) = e^z$ . Wegen  $f' = f$  und  $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$  läßt sich die Taylorreihe in diesem Falle leicht angeben. Direkt erhält man sie aus dem Additionstheorem

$$e^z = e^{z-\pi i + \pi i} = -e^{(z-\pi i)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^n}{n!}.$$

Damit haben wir die Grundlagen der Funktionentheorie hergeleitet. Es gilt zusammenfassend

**Satz 13.6.7:** *Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:*

1.  $f$  ist holomorph.
2.  $f$  besitzt lokale Stammfunktionen.
3.  $f$  ist reell stetig differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
4.  $f$  ist um jeden Punkt  $z_0 \in U$  in eine Potenzreihe entwickelbar.

Einige Folgerungen sollen nun noch gezogen werden:

**Definition 13.6.8:** *Eine holomorphe Funktion hat in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n$ , wenn*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

*gilt. Sie nimmt in  $z_0$  den Wert  $w_0$  mit der Ordnung  $n$  an, wenn  $f(z) - w_0$  dort eine Nullstelle der Ordnung  $n$  hat.*

Für die Ordnung  $n$  einer Nullstelle wird auch  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  zugelassen. Eine Nullstelle hat die Ordnung  $\infty$ , wenn  $f^{(n)}(z_0)$  für alle  $n$  verschwindet. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $f$  hat in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ .
2. In  $U(z_0)$  gilt

$$f(z) = \sum_{j \geq n} a_j (z - z_0)^j \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0.$$

3. Es gibt eine holomorphe Abbildung  $g : U(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z_0) \neq 0$  und

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

Wichtig ist der folgende

**Identitätssatz:**  $f$  sei in  $G$  holomorph. Dann sind äquivalent:

1. Für alle  $z \in G$  ist  $f(z) = 0$ .
2.  $f$  besitzt in  $G$  eine Nullstelle der Ordnung  $\infty$ .
3. Es gibt eine nichtdiskrete Menge  $N \subset G$  mit  $f|N = 0$  (vgl. Definition 13.5.2).

**Folgerung 13.6.9:**  $f$  sei nicht konstant und  $K \Subset G$ . Dann nimmt  $f$  einen Wert  $w$  in  $K$  höchstens endlich oft an.

Beweis des Identitätssatzes:

3  $\rightarrow$  2: Es seien  $N$  nichtdiskret und  $f|N = 0$ , das heißt:

$$\exists z_0 \in G \quad \exists (z_n), z_n \in N, z_n \rightarrow z_0 \quad z_n \neq z_0.$$

Nun ist

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$$

und in  $U(z_0)$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

Daraus folgt zunächst  $a_0 = 0$ , nach Division durch  $(z_n - z_0)$  auch  $a_1 = 0$ , und so fort, also  $a_j = 0$  für alle  $j$ .

2  $\rightarrow$  1: Es sei  $z_0$  eine Nullstelle unendlicher Ordnung und

$$M := \{z \in G \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Dann gilt:

- a)  $z_0 \in M$ .
- b)  $M$  ist abgeschlossen relativ  $G$ , denn aus  $z_j \in M, z_j \rightarrow z_0 \in G$  folgt  $\forall n \quad 0 = f^{(n)}(z_j) \rightarrow f^{(n)}(z_0)$ .
- c)  $M$  ist offen, denn aus  $z_1 \in M$  und der Reihenentwicklung von  $f$  um  $z_1$  folgt die Existenz einer Umgebung  $U(z_1) \subset M$ , in der  $f$  verschwindet.

Weil  $f$  wegzusammenhängend ist, folgt deshalb  $G = M$ .

1  $\rightarrow$  3: Das ist trivial. □

Der Identitätssatz ist sehr bemerkenswert. Eine holomorphe Funktion ist also in  $G$  bereits vollständig bestimmt, wenn man sie auf einer „kleinen“ Teilmenge kennt, etwa auf  $\{z_n \mid z_n \rightarrow z_0 \in G, z_n \neq z_0\}$ .

**Beispiel 13.6.10:**

1.

$$f(z) := \cot \pi z$$

ist in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  holomorph und hat in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  die Periode eins, das heißt  $f(z)$  und

$$g(z) := f(z + 1)$$

stimmen in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  überein. Daraus folgt

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad f(z) = f(z + 1).$$

2. Die holomorphe Fortsetzung einer reellen Funktion in das Komplexe ist eindeutig bestimmt, wenn sie existiert. Denken Sie etwa an

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

### 13.7 Cauchysche Ungleichungen und Folgerungen

Als erstes zeigen wir folgende wichtige Abschätzung:

**Cauchysche Ungleichung:** Es sei  $f$  in einer Umgebung von  $\bar{B}(z_0, r)$  holomorph. Dann gilt

$$\forall \rho, 0 < \rho \leq r \quad \forall z, |z - z_0| \leq r - \rho \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{r n!}{\rho^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Beweis: Für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$  folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Mit  $0 < \rho \leq r$  sei nun  $|z - z_0| \leq r - \rho$ . Dann ist

$$r = |\zeta - z_0| \leq |\zeta - z| + |z - z_0| \leq |\zeta - z| + r - \rho,$$

also  $\rho \leq |\zeta - z|$ . Es folgt also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r}{\rho^{n+1}} \cdot \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|. \quad \square$$

Aus der Cauchyschen Ungleichung folgen unmittelbar (mit  $\rho = r$  bzw.  $\rho = r/2$ )

**Folgerung 13.7.1:** Es ist

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

und

**Folgerung 13.7.2:** Es gilt

$$\forall z, |z - z_0| \leq \frac{r}{2} \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+1} n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Insbesondere erhalten wir

**Folgerung 13.7.3:** Es ist

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Als weitere Konsequenz zeigen wir den

**Satz von Weierstraß:** Die Abbildungen  $f_n$  seien in  $G$  holomorph. Die Folge  $f_n$  konvergiere in  $G$  lokal gleichmäßig gegen  $f$ . Dann ist  $f$  holomorph, und alle  $(f_n^{(k)})$  konvergieren lokal gleichmäßig gegen  $f^{(k)}$ .

Beweis: Als lokal gleichmäßiger Grenzwert ist  $f$  stetig. Es sei  $\Delta$  ein Dreieck mit  $\bar{\Delta} \subset G$ . Dann folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz in  $\bar{\Delta}$

$$\oint_{\partial \Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial \Delta} f_n(z) dz = 0,$$

und nach dem Satz von Morera ist  $f$  holomorph. Es seien nun  $B(z_0, r) \Subset G$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist nach Folgerung 13.7.2 für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r/2$

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{4}{r} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.$$

Wählen wir  $n_0$  so groß, daß für alle  $n \geq n_0$

$$\max_{|\zeta - z_0| = r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{r}{4} \varepsilon$$

ist, dann folgt

$$\forall z \in \bar{B}(z_0, r/2) \quad \forall n \geq n_0 \quad |f'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon.$$

Mithin konvergiert  $(f'_n)$  lokal gleichmäßig. Für  $k > 1$  schließt man analog.

Die nächsten Anwendungen betreffen erste Aussagen über die Werteverteilung holomorpher Funktionen. Wir beginnen mit:



**Lemma 13.7.4:** Die Funktion  $f$  sei in einer Umgebung von  $\bar{B}(z_0, r)$  holomorph. Es sei

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Dann besitzt  $f$  in  $B(z_0, r)$  eine Nullstelle.

Beweis  $f$  habe in  $B(z_0, r)$  keine Nullstelle. Dann ist

$$g := \frac{1}{f}$$

in einer Umgebung von  $\bar{B}(z_0, r)$  holomorph, denn für  $|z - z_0| = r$  ist

$$\min_{|z-z_0|=r} |f(z)| > |f(z_0)| > 0.$$

Mithin ist nach Folgerung 13.7.1 (für  $n = 0$ )

$$|g(z_0)| \leq \max_{|\zeta-z_0|=r} |g(\zeta)|,$$

also

$$\left| \frac{1}{f(z_0)} \right| \leq \max_{|\zeta-z_0|=r} \left| \frac{1}{f(\zeta)} \right| = \left\{ \min_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)| \right\}^{-1}$$

oder

$$\min_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)| \leq |f(z_0)|$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Es folgt

**Der Satz von der Gebietstreue:** Es sei  $f$  in  $G$  holomorph und nicht konstant. Dann ist  $f(G)$  ein Gebiet.

Beweis:

1.  $f$  ist stetig. Mithin ist  $f(G)$  zusammenhängend. Das besagt der Zwischenwertsatz aus §9.2.
2.  $f(G)$  ist offen: Es sei  $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ . Nach dem Identitätssatz gibt es ein  $r$  mit  $\bar{B}(z_0, r) \subset G$ , so daß  $z_0$  dort die einzige  $w_0$ -Stelle von  $f$  ist, denn sonst wäre  $f = w_0$  in  $\bar{B}(z_0, r)$ . Es gilt also

$$\exists r > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall z \in \partial B(z_0, r) \quad |f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon.$$

Wir wollen  $B(w_0, \varepsilon) \subset f(G)$  zeigen. Dazu sei  $w \in B(w_0, \varepsilon)$ . Dann ist mit  $z \in \partial B(z_0, r)$

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 2\varepsilon,$$

und für  $z = z_0$  gilt

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \varepsilon.$$

Nach Lemma 13.7.4 hat  $f(z) - w$  daher in  $B(z_0, r)$  eine Nullstelle.  $f$  besitzt also eine  $w$ -Stelle. □

**Folgerung 13.7.5:** Holomorphe Funktionen mit konstantem Realteil, Imaginärteil oder Betrag sind konstant, weil ihre Bildmengen sonst nicht offen sind.

Als nächstes zeigen wir

**Das Maximumprinzip:** Die Abbildung  $f$  sei in  $G$  holomorph. Dann gilt

1. Hat  $|f|$  in  $z_0 \in G$  ein lokales Maximum, dann ist  $f$  konstant.
2. Es seien  $G$  beschränkt und  $f$  in  $\bar{G}$  stetig. Dann gilt

$$\forall z \in G \quad |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|.$$

Beweis: Nur die erste Aussage ist zu zeigen. Es sei  $U(z_0) \subset G$  eine Umgebung von  $z_0$  mit

$$\forall z \in U(z_0) \quad |f(z_0)| \geq |f(z)|.$$

Dann ist

$$f(U) \subset \{w \mid |w| \leq |f(z_0)|\}.$$

$f(U)$  ist daher keine Umgebung von  $f(z_0)$ . Es folgt  $f(z) = f(z_0)$  in  $U(z_0)$  und damit nach dem Identitätssatz überall in  $G$ .  $\square$

Wendet man das Maximumprinzip auf  $1/f$  an, dann folgt entsprechend:

**Das Minimumprinzip:** Die Abbildung  $f$  sei in  $G$  holomorph. Dann gilt

1. Hat  $|f|$  in  $z_0 \in G$  ein lokales Minimum, dann ist  $f(z_0) = 0$  oder  $f$  konstant.
2. Es seien  $G$  beschränkt und  $f$  in  $\bar{G}$  stetig. Dann hat  $f$  in  $G$  Nullstellen, oder es gilt

$$\forall z \in G \quad |f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|.$$

Für unbeschränkte Gebiete ist die zweite Aussage im Maximumprinzip falsch. Das Beispiel

$$f(z) := e^{e^z} \quad \text{in } S := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$

zeigt dies. Es ist nämlich  $|f|_S = 1$ , aber  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .

ERNST LINDELÖF, 1870–1946, und LARS PHRAGMÉN, 1863–1937, haben verschiedene Verallgemeinerungen des Maximumprinzips angegeben. Ich gebe hier nur ein Beispiel, nämlich folgenden

**Satz von Phragmén-Lindelöf:** Es seien  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid x_1 < x < x_2, y_0 < y\}$  und  $f \in C(\bar{H}, \mathbb{C})$  in  $H$  holomorph mit  $|f|_{\partial H} \leq c < \infty$ . Ferner gebe es zwei Konstanten  $a, b$  mit

$$\forall z \in \bar{H} \quad |f(z)| \leq a e^{by}.$$

Dann ist  $|f(z)| \leq c$  für alle  $z \in H$ .

Beweis: Bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  ist die Funktion

$$g(z) := e^{\varepsilon z^2} f(z)$$

ebenfalls holomorph. Es sei  $\alpha := \max(x_1^2, x_2^2)$ . Dann ist in  $\bar{H}$

$$|g(z)| = e^{\varepsilon(x^2 - y^2)} |f(z)| \leq a e^{-\varepsilon y^2 + by + \varepsilon \alpha}.$$

Es gibt also ein  $y_1 > y_0$  mit

$$\forall z \in \bar{H}, \operatorname{Im} z \geq y_1 \quad |g(z)| \leq c e^{\varepsilon \alpha}.$$

Wegen des Maximumprinzips gilt diese Abschätzung dann auch für alle  $z \in \bar{H} \cap \{\operatorname{Im} z \leq y_1\}$ . Es folgt also

$$\forall z \in \bar{H} \quad |f(z)| = \left| e^{-\varepsilon z^2} g(z) \right| \leq c \left| e^{-\varepsilon z^2} \right| e^{\varepsilon \alpha} \leq c e^{\varepsilon(\alpha + y^2)}.$$

Bei festem  $z \in \bar{H}$  können wir nun den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow \infty$  durchführen und erhalten

$$|f(z)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c e^{\varepsilon(\alpha + y^2)} = c.$$

$\square$

Wir wollen das Maximumprinzip noch etwas genauer besprechen: Es seien  $U$  offen,  $B(z_0, r) \Subset U$  und  $f$  in  $U$  holomorph. Dann gilt mit  $\zeta = z_0 + r e^{i\varphi}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\varphi}) d\varphi =: M(f, z_0, r).$$

$M(f, z_0, r)$  ist der Mittelwert von  $f$  auf  $\partial B(z_0, r)$  bzw. der Mittelwert von

$$g(\varphi) := f(z_0 + r e^{i\varphi})$$

auf  $[0, 2\pi]$ . Man sagt:

**Definition 13.7.6:** Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in C(U, \mathbb{C})$ . Dann hat  $f$  die Mittelwerteigenschaft, wenn

$$\forall z_0 \in U \quad \exists R > 0 \quad \forall r \leq R \quad f(z_0) = M(f, z_0, r)$$

ist.

Es folgen

**Satz 13.7.7:** Holomorphe Funktionen besitzen die Mittelwerteigenschaft.

**Satz 13.7.8:** Mit  $f, g$  und  $a, b, \in \mathbb{C}$  haben auch  $a f + b g$ , sowie  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$  und  $\bar{f}$  die Mittelwerteigenschaft.

Die Beweise sind klar.

**Beispiel 13.7.9:**

1. Es seien  $f(z) = \operatorname{Re} z = x$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$M(f, a, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} a + r \cos \varphi) d\varphi = \operatorname{Re} a.$$

2. Es seien  $f(z) = 1/x$  und  $a \in \mathbb{R}^+$ . Dann ist für kleine  $r$

$$M(f, a, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + r \cos \varphi} = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi}$$

mit großem  $b := a/r$ . Mit  $z = e^{i\varphi}$  und

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right),$$

folgt

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2bz + 1} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

mit den Nullstellen

$$z_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}.$$

Von diesen liegt nur  $z_1 = -b + \sqrt{b^2 - 1}$  im Einheitskreis. Es ist also

$$I := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{i} \oint_{|z-z_1|=\varepsilon} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

und es folgt mit  $g(z) := 1/(z - z_2)$

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot g(z_1) = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}.$$

Mithin ist für alle  $r \leq r_0$

$$M(f, a, r) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

$f$  besitzt die Mittelwerteigenschaft also nicht.

Als nächstes zeigen wir

**Das allgemeine Maximumprinzip:**  $f \in C(U, \mathbb{C})$  habe die Mittelwerteigenschaft und  $|f|$  in  $z_0 \in U$  ein lokales Maximum. Dann ist  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  konstant.

**Beweis:** Der Fall  $f(z_0) = 0$  ist trivial, es sei also  $f(z_0) \neq 0$ . Dann gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| = 1$  und  $c f(z_0) \in \mathbb{R}^+$ . O.B.d.A. sei  $f(z_0)$  deshalb reell und positiv. Wir wählen ein  $R_1 > 0$  mit

$$\forall z, |z - z_0| \leq R_1 \quad f(z_0) \geq |f(z)|.$$

Nach Voraussetzung gilt außerdem

$$\forall r \leq R_2 \quad f(z_0) = M(f, z_0, r).$$

Es sei nun  $R := \min(R_1, R_2)$  und

$$g(z) := \operatorname{Re} f(z) - f(z_0).$$

Dann ist für alle  $z \in B(z_0, R)$

$$g(z) \leq |f(z)| - f(z_0) \leq 0,$$

sowie  $g(z_0) = 0$ .  $g$  hat die Mittelwerteigenschaft, daraus folgt

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + r e^{i\varphi}) d\varphi$$

und zusammen mit der Stetigkeit von  $g$

$$\forall \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad g(z_0 + r e^{i\varphi}) = 0.$$

Das gilt für alle  $r \leq R$ , mithin verschwindet  $g$  in  $\bar{B}(z_0, R)$ . Dort ist deshalb

$$f(z_0) = \operatorname{Re} f(z)$$

und

$$|f(z)| \leq f(z_0) = \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)|,$$

also  $f(z) = \operatorname{Re} f(z)$  und somit  $f(z) = f(z_0)$ . □

Es folgt

**Satz 13.7.10:**  $f \in C(G, \mathbb{C})$  habe die Mittelwerteigenschaft. Hat  $|f|$  in  $z_0 \in G$  ein globales Maximum, dann ist  $f$  konstant. Ist  $G$  beschränkt und  $f \in C(\bar{G}, \mathbb{C})$ , dann nimmt  $|f|$  das Maximum auf  $\partial G$  an.

Beweis: Nur die erste Behauptung ist zu zeigen. Es sei  $f(z_0) = M$  und

$$G' = \{z \in G \mid f(z) = M\} \neq \emptyset.$$

Weil  $f$  stetig ist, ist  $G'$  relativ  $G$  abgeschlossen.

Es sei  $z_1 \in G'$ . Dann folgt aus dem Beweis des letzten Satzes die Existenz einer Umgebung  $U(z_1)$  mit  $f|U(z_1) = M$ . Mithin ist  $G'$  offen und damit  $G = G'$ . □

### Beispiel 13.7.11:

- Man wende den Satz 13.7.10 auf  $u = \operatorname{Re} f$  an und zeige die Gültigkeit des Maximumprinzips in der Potentialtheorie.
- Es seien  $G = B(0, 1)$  und  $f(z) = 2 + z$ . Dann ist

$$|f(z)| = \sqrt{(2+z)(2+\bar{z})} = \sqrt{4 + 4x + x^2 + y^2}.$$

$f$  ist nicht konstant. Das Maximum von  $|f|$  liegt also am Rand, und zwar in  $z_1 = 1$ . Dort ist  $|f(z_1)| = 3$ . In  $G$  ist  $f(z) \neq 0$ . Mithin liegt auch das Minimum von  $|f|$  am Rand, und zwar in  $z_2 = -1$ . Dort ist  $|f(z_2)| = 1$ . Für  $G = \mathbb{C}$  hat  $f$  in  $z_3 = -2$  eine Nullstelle.

## 13.8 Umkehrung holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Umkehrabbildungen holomorpher Funktionen beschäftigen. Dabei sollen hier lokale Resultate bereitgestellt werden. Später werden wir uns im Rahmen der konformen Abbildungen auch mit globalen Fragen beschäftigen. Erinnerung sei an Definition 13.2.5: Eine bijektive Abbildung, für die sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  holomorph sind, heißt biholomorph. Erinnerung sei auch an den Satz von der Gebietstreue, den wir im letzten Abschnitt bewiesen haben.

Aus dem Reellen ist bekannt (vgl. Satz 9.7.1):

**Satz 13.8.1:** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f \in C_1(U, \mathbb{R}^2)$ ,  $a \in U$  und  $\det f'(a) \neq 0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_1 \subset U$  von  $a$  mit

- $f|U_1$  ist injektiv.
- $f(U_1)$  ist offen.
- Die Umkehrabbildung  $g := (f|U_1)^{-1}$  ist stetig differenzierbar mit  $g' = (f' \circ g)^{-1}$ .  $f|U_1$  ist also diffeomorph.

Im Komplexen gilt deshalb:

**Satz 13.8.2:** *Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a \in U$  und  $f'(a) \neq 0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_1 \subset U$  von  $a$  mit*

1.  $f|_{U_1}$  ist injektiv.

2.  $f(U_1)$  ist offen.

3. Die Umkehrabbildung  $g := (f|_{U_1})^{-1}$  ist holomorph mit  $g' = (f' \circ g)^{-1}$ .  $f|_{U_1}$  ist also biholomorph.

Wir wollen diese Aussage noch etwas ergänzen und verschärfen. Im Reellen ist  $f : x \rightarrow x^3$  bijektiv und beliebig oft differenzierbar. Es ist aber  $f'(0) = 0$ , und die Umkehrfunktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Dieses Phänomen kann im Komplexen nicht auftreten, das zeigt der nächste Satz. Für unser Beispiel ist im Komplexen  $f(e_j) = 1$  mit  $e_j := \exp\left(\frac{2\pi i}{3}j\right)$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

**Satz 13.8.3:** *Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Injektion. Dann ist  $V := f(U)$  offen,  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  und  $f : U \rightarrow V$  biholomorph.*

Beweis:

1.  $f$  ist nirgends lokal konstant, denn sonst wäre  $f = \text{const}$  und nicht injektiv. Also ist  $f(U)$  offen und  $g := f^{-1} : V \rightarrow U$  stetig (Satz von der Gebietstreue).  $f'$  ist lokal nirgends gleich Null, und wegen des Identitätssatzes ist die Nullstellenmenge  $N(f') \subset U$  diskret und wegen der Stetigkeit abgeschlossen. Es sei

$$M := f(N(f')) = g^{-1}(N(f')).$$

$M$  ist abgeschlossen, weil  $N$  es ist und weil  $g$  stetig ist.  $M$  ist diskret. Es seien nämlich  $w \in V$  und  $w_n = f(z_n) \in M$  alle verschieden mit  $z_n \in N$  und  $w_n \rightarrow w$ . Weil  $M$  abgeschlossen ist, ist  $w \in M$ . Es gibt also ein  $z \in N$  mit  $w = f(z)$ . Nun ist  $g$  stetig, daraus folgt  $g(w_n) \rightarrow g(w)$  oder  $z_n \rightarrow z$ .  $N$  ist diskret, also sind nur endlich viele der  $z_n$  verschieden.  $f$  ist injektiv, also gilt das auch für die  $w_n$ . Das ist ein Widerspruch.

2. Es sei  $f(a) = b$  mit  $b \in V \setminus M$ . Es gilt

$$f(z) = f(a) + (z - a)f_1(z).$$

$f_1$  ist in  $a$  stetig mit  $f_1(a) = f'(a) \neq 0$ . Es sei  $f(z) = w \in V$ . Dann folgt

$$w = b + (g(w) - a)(f_1 \circ g)(w).$$

Die Abbildung  $q := f_1 \circ g$  ist in  $b$  stetig mit

$$q(b) = f_1(a) = f'(a) \neq 0.$$

Deshalb ist

$$g(w) = g(b) + \frac{w - b}{q(w)}$$

für alle  $w$  aus einer Umgebung von  $b$ . Mithin ist  $g$  in  $b$  komplex differenzierbar und

$$g'(b) = \frac{1}{q(b)} = (f' \circ g)^{-1}(b).$$

Das gilt für alle  $b \in V \setminus M$ .

3.  $g \in C(V, U)$  ist also in  $V \setminus M$  holomorph. Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt daher die Holomorphie von  $g$ . In  $V \setminus M$  gilt

$$g'(w) \cdot f'(g(w)) = 1.$$

Wegen der Stetigkeit gilt das dann für alle  $w \in V$ . Mithin ist

$$\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0.$$

Das war zu zeigen. □

Damit haben wir auch folgendes Biholomorphiekriterium bewiesen:

**Biholomorphiekriterium:** *Eine holomorphe Injektion ist biholomorph.*

Man sagt

**Definition 13.8.4:**  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt lokal biholomorph um  $a \in U$ , wenn es eine offene Umgebung  $U_1 \subset U$  von  $a$  gibt, so daß

$$f|_{U_1} : U_1 \longrightarrow f(U_1)$$

biholomorph ist.

Es folgt unmittelbar ein

**Lokales Biholomorphiekriterium:** Eine holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist um  $a \in U$  lokal biholomorph genau dann, wenn  $f'(a) \neq 0$  ist.

**Beispiel 13.8.5:** Wir betrachten  $f(z) := e^z$ . Es ist  $f(0) = 1$  und wegen  $f'(z) = f(z)$  auch  $f'(0) = 1$ . Mithin ist  $f$  um Null lokal biholomorph. Es ist

$$g'(w) = \frac{1}{w} = \frac{1}{1 + (w-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(w-1))^n.$$

Mithin lautet die Potenzreihenentwicklung von  $g$  um den Punkt  $w = 1$  wegen  $g(1) = 0$

$$g(w) = (w-1) - \frac{(w-1)^2}{2} + \frac{(w-1)^3}{3} \pm \dots.$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius eins.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem

**Satz von der lokalen Normalform:** Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und um  $a \in U$  nicht konstant. Dann gilt:

1. Es gibt ein  $B := B(a, r) \subset U$  und eine biholomorphe Abbildung  $h : B \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f|_B = f(a) + h^n.$$

Dabei ist  $n$  die Ordnung, mit der  $f$  den Wert  $f(a)$  annimmt.

2. Es sei  $\hat{B} \subset U$  ein Kreis um  $a$  und  $\hat{h}$  holomorph in  $\hat{B}$  mit  $\hat{h}'(a) \neq 0$  und

$$f|_{\hat{B}} = f(a) + \hat{h}^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $m = n$ ,  $\hat{h}(z) = \zeta h(z)$  für  $z \in B \cap \hat{B}$  und  $\zeta^n = 1$ .

Beweis:

1. Aus Definition 13.6.8 und den anschließenden Bemerkungen folgt

$$f(z) = f(a) + (z-a)^n g(z).$$

Dabei ist  $g$  eine holomorphe Abbildung mit  $g(a) \neq 0$ . Wir wählen  $B := B(a, r)$  so, daß  $g$  in  $B$  holomorph und nullstellenfrei ist. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß dann die  $n$ -te Wurzel existiert, also eine holomorphe Abbildung  $q$  mit  $q^n = g$ . Wir wählen

$$h(z) := (z-a)q(z).$$

Dann ist  $h'(a) = q(a) \neq 0$ ,  $h$  mithin biholomorph.

2. In  $B \cap \hat{B}$  ist  $h^n = \hat{h}^m$ ,  $h(a) = \hat{h}(a) = 0$  und  $h'(a) \neq 0$  sowie  $\hat{h}'(a) \neq 0$ . Dann ist  $n = m$  und  $\hat{h}/h$  eine  $n$ -te Einheitswurzel  $e^{2\pi i/n}$ .

## 13.9 Spezielle Abbildungen

Wir unterbrechen nun unsere theoretischen Überlegungen und diskutieren einige spezielle Abbildungen. Es sei grundsätzlich

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{C} &\longrightarrow V \subset \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w := f(z). \end{aligned}$$

Wir sprechen auch von der  $z$ -Ebene und der  $w$ -Ebene. Es sei  $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{C}$  ein glatter Weg mit  $\gamma(0) = z_0$ .  $\gamma$  sei bezüglich der Bogenlänge parametrisiert. Dann ist

$$\begin{aligned} t &: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto z_0 + s \gamma'(0) \end{aligned}$$

die tangentielle Halbgerade an  $\Gamma$  in  $z_0$  und

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) := \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$$

der orientierte Winkel in  $z_0$  zwischen zwei solchen Wegen. Mit  $\gamma_j'(0) = e^{i\varphi_j}$  folgt nämlich

$$\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Es sei nun  $f$  eine holomorphe Abbildung,  $\gamma$  repräsentiere ein glattes Wegstück. Dann ist der Bildweg  $f \circ \gamma$  ebenfalls glatt, und es gilt für  $f'(z_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= f'(z_0) \cdot \gamma'(0) \\ \frac{(f \circ \gamma_2)'(0)}{(f \circ \gamma_1)'(0)} &= \frac{f'(z_0) \cdot \gamma_2'(0)}{f'(z_0) \cdot \gamma_1'(0)} = \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}, \end{aligned}$$

also in  $z_0$

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Es gilt also

**Satz 13.9.1:** Eine in  $z_0$  holomorphe Abbildung  $f$  mit  $f'(z_0) \neq 0$  ist dort winkel- und orientierungstreu.

Es sei umgekehrt  $f$  reell differenzierbar mit  $\nabla f(z_0) \neq 0$ .  $f$  sei winkel- und orientierungstreu. Insbesondere gilt dann für Wege

$$\gamma_\varphi : s \longmapsto z_0 + s e^{i\varphi} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

wieder

$$\angle(f \circ \gamma_\varphi, f \circ \gamma_0) = \angle(\gamma_\varphi, \gamma_0) = \varphi,$$

also wegen  $(f \circ \gamma)' = \partial f \cdot \gamma' + \bar{\partial} f \cdot \bar{\gamma}'$

$$\arg \frac{\partial f(z_0) e^{i\varphi} + \bar{\partial} f(z_0) e^{-i\varphi}}{\partial f(z_0) + \bar{\partial} f(z_0)} = \arg e^{i\varphi}.$$

Daraus folgt, daß

$$\arg(\partial f(z_0) + \bar{\partial} f(z_0) e^{-2i\varphi})$$

von  $\varphi$  unabhängig ist. Also ist  $\bar{\partial} f(z_0) = 0$  und  $f$  daher komplex differenzierbar.

**Definition 13.9.2:**

1. Eine Abbildung  $f \in C_1(G, \mathbb{C})$  heißt lokal konform, wenn sie glatte Wege in glatte Wege überführt und in jedem Punkt winkel- und orientierungstreu ist.
2. Eine lokal konforme Abbildung heißt konform, wenn sie  $G$  bijektiv auf  $f(G)$  abbildet.

Insbesondere besitzt eine lokal konforme Abbildung lokal eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Es gilt

**Satz 13.9.3:** Eine Abbildung  $f : G \rightarrow f(G)$  ist genau dann lokal konform, wenn sie lokal biholomorph ist. Sie ist konform genau dann, wenn sie biholomorph ist.

Die Worte *konform* und *biholomorph* werden also synonym verwandt, klassisch ist die Bezeichnung *konform*.

Es sei noch bemerkt, daß für holomorphe Funktionen

$$\left| \frac{f \circ \gamma(s) - f \circ \gamma(0)}{\gamma(s) - \gamma(0)} \right| \xrightarrow{s \rightarrow 0} |f'(z_0)|$$

gilt. Die „Streckung“ hängt also lokal nicht von der Richtung  $\gamma'(0)$  ab, sondern nur von  $|f'(z_0)|$ . Man sagt deshalb,  $f$  sei im Kleinen *maßstabstreu*.

**Beispiel 13.9.4:** Es sei wie in Beispiel 13.8.5  $f(z) := e^z$ . Wegen  $f'(z) = f(z) \neq 0$  ist  $f$  lokal konform. Betrachten wir

$$g : G := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \longrightarrow B := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg z < \pi\}$$

mit  $g(z) := e^z$ . Diese Abbildung ist konform.

Wir wollen nun eine Reihe spezieller Abbildungen studieren:

1.  $f(z) := az + b$  mit  $z \in \mathbb{C}$  und  $f'(z) = a \neq 0$ .

$f$  ist eine lineare Abbildung. Im Falle  $a = 1$  erhält man eine Parallelverschiebung und im Falle  $b = 0$  eine Drehstreckung, für  $|a| = 1$  eine reine Drehung. Allgemein sieht man leicht, daß eine Gerade

$$\gamma(s) = z_0 + ks$$

in eine Gerade und ein Kreis

$$\gamma(s) = z_0 + r e^{is}$$

wieder in einen Kreis

$$(az_0 + b) + |a|r e^{i(s+\alpha)}$$

überführt wird, und zwar mit

$$\alpha = \arg a.$$

2.  $f(z) := 1/z$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Wir können  $f$  in

$$f = h \circ g = g \circ h$$

zerlegen mit

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{1}{z} && \text{oder } r e^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r} e^{i\varphi} \\ h(z) &:= \bar{z} && \text{oder } r e^{i\varphi} \mapsto r e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $g$  ist die Spiegelung am Einheitskreis,  $h$  ist die Spiegelung an der reellen Achse.  $f$  ist kreisverwandt. Das soll bedeuten, daß  $f$  die Menge der Geraden und Kreise wieder in eine Menge von Geraden und Kreisen abbildet. Das sieht man so:

Die Gleichung

$$cz + \bar{c}\bar{z} + \gamma \stackrel{!}{=} 0$$

beschreibt wegen  $\operatorname{Re} cz = c_1x - c_2y$  die Menge der Geraden. Dabei ist  $c = c_1 + i c_2 \in \mathbb{C}$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Entsprechend werden Kreise durch

$$|z - d|^2 = (z - d)(\bar{z} - \bar{d}) = z\bar{z} - z\bar{d} - \bar{z}d + d\bar{d} \stackrel{!}{=} \delta^2$$

beschrieben, die Menge der Geraden und Kreise also durch

$$\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \beta \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit  $w = 1/z$  wird daraus nach Division durch  $z\bar{z}$

$$\alpha + c\bar{w} + \bar{c}w + \beta w\bar{w} \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung beschreibt wieder Geraden und Kreise in der  $w$ -Ebene. Speziell findet man:

$z$ -Ebene	$w$ -Ebene
0	$\infty$
$\infty$	0
$B(0, \varepsilon)$	$\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, 1/\varepsilon)$
Gerade durch Null	Gerade durch Null
Gerade nicht durch Null	Kreis durch Null
Kreis nicht durch Null	Kreis nicht durch Null.

Dieses Beispiel legt es nahe, die komplexe Ebene durch

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

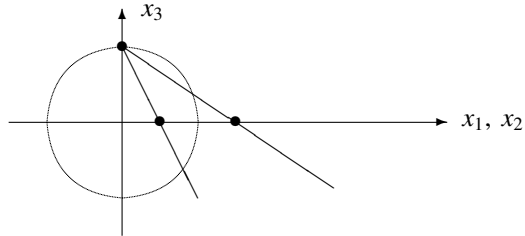


abzuschließen und, wie in der Tabelle bereits geschehen,  $f(0) := \infty$  zu definieren. Man denke dabei auch an die *stereographische Projektion*

$$p : S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$x \longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

mit  $p(0, 0, 1) = \infty$ .



Offene Mengen in  $\hat{\mathbb{C}}$  sollen die offenen Mengen in  $\mathbb{C}$  und alle Mengen der Form  $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$  mit  $K \in \mathbb{C}$  sein. Beide Abbildungen,  $p$  und

$$\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z},$$

sind also stetig und sogar Homöomorphismen. Die Umkehrabbildung von  $p$  lautet

$$p^{-1} : (x, y) \longmapsto \frac{1}{1+x^2+y^2} (2x, 2y, x^2+y^2-1).$$

Auch die stereographische Projektion ist winkeltreu und kreisverwandt.

Eine beliebige Abbildung

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

läßt sich nun im Unendlichen folgendermaßen charakterisieren: Man nehme den Homöomorphismus

$$g : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

und bilde  $f \circ g$ . Dann werde das Verhalten  $f(z)$  im Unendlichen durch das Verhalten von

$$(f \circ g)(w)$$

in der Umgebung des Nullpunktes beschrieben. Für  $g$  selbst bedeutet das

$$(g \circ g)(w) = w.$$

$g$  ist also in  $\infty$  holomorph und nimmt den Wert  $g(\infty) = 0$  von erster Ordnung an. Es sei

$$f(z) := \frac{1}{z^2}.$$

Dann ist

$$(f \circ g)(w) = w^2.$$

$f$  ist also ebenfalls in  $\infty$  holomorph und nimmt dort den Wert null von zweiter Ordnung an.

Wir setzen nun die Behandlung spezieller Abbildungen fort:

3. Es sei

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } |c| + |d| \neq 0.$$

Der Fall  $c = 0$  ist bereits behandelt; es sei also  $c \neq 0$ . Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{c} \left\{ a - \frac{ad-bc}{cz+d} \right\},$$

und  $f$  lässt sich aus Abbildungen vom Typ 1 und 2 zusammensetzen. Deshalb ist  $f$  kreisverwandt und bildet die Figur eines Kreises (oder einer Geraden) und zweier in bezug auf ihn spiegelbildlicher Punkte auf eine ebensolche Figur ab. Die Abbildungen vom Typ 1 und 2 haben nämlich diese Eigenschaft.

$f(z)$  ist genau dann konstant, wenn

$$ad - bc = 0$$

ist, das gilt auch im Falle  $c = 0$ . Es sei daher im folgenden

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det A = ad - bc \neq 0.$$

Unter dieser Voraussetzung spricht man dann von einer *Möbiustransformation*, nach A.F. MÖBIUS (1790–1868). Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

und aus  $w = f(z)$  folgt

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Die Umkehrabbildung ist also vom selben Typ und

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

bijektiv.

Wir berechnen die Fixpunkte von  $f$  für  $f \neq id$ : Im Falle  $c = 0$  ist  $ad \neq 0$  und für  $d \neq a$

$$z_1 := \frac{b}{d - a}$$

Fixpunkt. Für  $d = a$  ist  $b \neq 0$ , und es gibt keinen Fixpunkt. Im Falle  $c \neq 0$  erhält man

$$z_{1,2} = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}.$$

Dabei sei  $\sqrt{r}e^{i\varphi} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ . Diese Abbildung werden wir anschließend noch besprechen.  $f \neq id$  besitzt also höchstens zwei Fixpunkte. Mit  $f_1, f_2$  ist auch  $f_1 \circ f_2$  eine Möbiustransformation. Es seien  $f_1, f_2$  zwei Möbiustransformationen mit

$$f_j(z_k) = w_k \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad j = 1, 2.$$

Dann besitzt

$$f_2^{-1} \circ f_1$$

drei Fixpunkte, nämlich  $z_1, z_2$  und  $z_3$ . Mithin ist  $f_2^{-1} \circ f_1 = id$ . Es gilt also

**Satz 13.9.5:** Eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation  $f$  ist durch Vorgabe von drei Punkten  $z_1, z_2, z_3$  und den Werten  $w_k = f(z_k)$  festgelegt.

Wir konstruieren noch zwei spezielle Möbiustransformationen:

a) Die Abbildung der oberen Halbebene auf den Einheitskreis mit  $f(i) = 0$  lautet wegen  $-i \mapsto \infty$

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - i}{z + i} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

b) Die Abbildung des Einheitskreises auf sich mit  $f(a) = 0$  lautet wegen  $1/\bar{a} \mapsto \infty$

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad \text{mit} \quad |a| < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

4. Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie im Einheitskreis:

Es seien  $a, e \in \mathbb{C}$  mit  $|a| < 1$  und  $|e| = 1$ . Wir betrachten die Klasse  $\mathcal{K}$  der Abbildungen

$$f(z) := e \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

des Einheitskreises auf sich. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} e & -ae \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det A = e(1 - |a|^2) \neq 0$$

entspricht  $f$ . Es ist

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \eta & -\alpha\eta \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\alpha := \frac{a_2 + e_1 a_1}{e_1 + \bar{a}_1 a_2}, \quad \eta := \frac{e_2(e_1 + a_2 \bar{a}_1)}{1 + e_1 a_1 \bar{a}_2} \quad \text{und} \quad |\alpha| = \left| \frac{a_2 + e_1 a_1}{\bar{e}_1 \bar{a}_1 a_2 + 1} \right| < 1, \quad |\eta| = 1.$$

Mithin ist auch  $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{K}$  und ebenso

$$f^{-1}(w) = \bar{e} \frac{w + ae}{1 + \bar{a}\bar{e}w}.$$

Die auftretenden Abbildungen lassen sich also durch

$$\begin{array}{ll} f & \sim \{e, a\} & id & \sim \{1, 0\} \\ f^{-1} & \sim \{\bar{e}, -ae\} & f_1 \circ f_2 & \sim \{\eta, \alpha\} \end{array}$$

charakterisieren.  $\mathcal{K}$  bildet mit der Verknüpfungsoperation eine Gruppe.

In der üblichen euklidischen Geometrie betrachtet man die Bewegungen

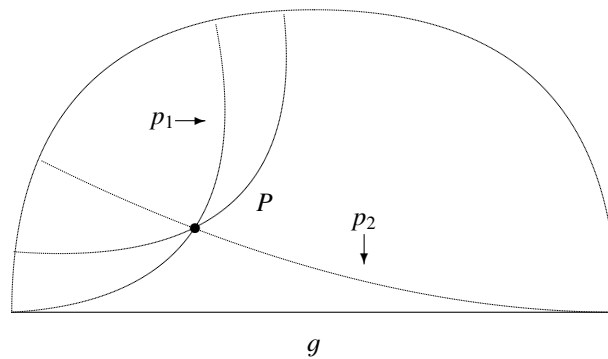
$$x \longrightarrow a + Ax \quad \text{mit} \quad A^t A = id,$$

also Translationen, Drehungen und Spiegelungen. Punkte, Geraden und Kreise werden jeweils in sich abgebildet, und es gilt das Parallelenaxiom: Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $P \notin g$  gibt es genau eine Gerade, die  $g$  nicht schneidet, nämlich die Parallele.

Wir erklären nun im Einheitskreis eine nichteuklidische Geometrie durch:

- Punkte := Punkte im Einheitskreis
- Geraden := Orthogeralen und -kreise
- Kreise := alle anderen Geraden und Kreisstücke
- Bewegungen := obige Gruppe.

Dabei sind *Orthogeralen* und *-kreise* Geraden- bzw. Kreisstücke, die den Rand senkrecht schneiden. Wegen der Winkeltreue werden wieder Geraden in Geraden und Kreise in Kreise abgebildet. Das Parallelenaxiom gilt jedoch nicht mehr. Es seien  $g = (-1, 1)$  und  $P$  wie skizziert. Dann gibt es zu  $g$  durch  $P$  zwei Parallelen  $p_1$  und  $p_2$ , die mit  $g$  einen gemeinsamen Randpunkt haben, und beliebig viele Parallelen ohne gemeinsamen Randpunkt.



In unserer neuen Geometrie können wir auch die Länge messen: Es ist

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Damit haben wir eine geeignete Invariante gefunden und definieren den Abstand als

$$d(z_1, z_2) := g \left( \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right) = d(w_1, w_2),$$

wobei die Abbildung  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  noch zu bestimmen ist. Dazu versuchen wir zunächst auf der reellen Achse

$$d(0, x) + d(x, x+h) \stackrel{!}{=} d(0, x+h)$$

zu erreichen. Das bedeutet

$$g(x) + g\left(\frac{h}{1-x(x+h)}\right) \stackrel{!}{=} g(x+h). \quad (*)$$

Wir differenzieren nach  $h$  und setzen  $h$  anschließend null:

$$g'(0) \frac{1}{1-x^2} \stackrel{!}{=} g'(x).$$

Wir wählen  $g'(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  und finden

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Nachrechnen bestätigt, daß  $g$  Gleichung (\*) wirklich erfüllt.

Wir wählen nun den Abstand  $d(z_1, z_2)$  zweier Punkte  $z_1, z_2$  mit diesem  $g$ . Man bestätigt leicht:

1.  $d(z_1, z_2) \geq 0$  und  $d(z_2, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$ .
2.  $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ .

Es bleibt, die Dreiecksungleichung

3.  $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$

zu überprüfen. Wenn  $z_1, z_2, z_3$  auf einer Geraden liegen, ist sie richtig, weil auf der reellen Achse nach Konstruktion von  $g$  sogar die Gleichheit gilt. Im allgemeinen Fall transformiere man  $z_1, z_2, z_3$  auf  $0, w_2, w_3$  und überprüfe

$$d(0, w_3) \leq d(0, w_2) + d(w_2, w_3).$$

Eine Rechnung bestätigt die Richtigkeit. Eine etwas andere Herleitung findet man in *Fischer&Lieb, l.c. S.255f*.

5. Für  $n > 1$  sei

$$f(z) = z^n.$$

Dann ist  $f'(z) = nz^{n-1}$  mit  $f'(0) = 0$ . Die Abbildung  $f$  ist also in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  lokal konform, jedoch nicht im Nullpunkt. In einer Umgebung des Nullpunktes ist mit  $z = r e^{i\varphi}$

$$f(z) = z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Man bezeichnet für  $k = 1, 2, \dots, n$  mit

$$e_k := e^{k \frac{2\pi i}{n}}$$

die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Offenbar sind alle  $e_k$  verschieden, und es gilt

$$(e_k)^n = 1.$$

$f$  bildet deshalb den Sektor

$$S_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg z < \frac{2\pi k}{n} \right\}$$

injektiv ab.

$$f : S_k \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$$

ist eine konforme Abbildung.

6. Wir wollen nun die *Wurzelabbildung* einführen: Wie wir gerade sahen, ist für  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} f : S_k &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

biholomorph. Mithin existiert die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f^{-1} =: \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow S_k \\ z &\longmapsto \sqrt[n]{z}. \end{aligned}$$

Man sagt auch,  $f^{-1}$  bilde die längs  $\mathbb{R}_0^+$  aufgeschnittene Ebene in  $\mathbb{C}$  ab. Eine holomorphe Funktion  $q$  heißt  $n$ -te Wurzel aus  $f$ , wenn  $q^n = f$  gilt. Es sei  $q$  eine  $n$ -te Wurzel und  $\zeta := e_1 = e^{2\pi i/n}$ . Dann sind auch

$$q, \zeta q, \zeta^2 q, \dots, \zeta^{n-1} q$$

$n$ -te Wurzeln. Es bilde etwa

$$q : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow S_1$$

ab. Dann ist

$$\zeta q : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow S_2,$$

und so weiter.

Zwei Dinge fallen bei der Definition der  $n$ -ten Wurzel auf:

a) Um  $f$  als biholomorphe Abbildung zu definieren, hätten wir  $z^n$  nicht auf einen speziellen Sektor  $S_k$  einschränken müssen, vielmehr hätten wir bei festem  $\psi$  auch

$$S := \left\{ z \mid \psi + \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg z < \psi + \frac{2\pi k}{n} \right\}$$

wählen können. Wir hätten also die Bildebene  $\mathbb{C}$  längs irgendeiner Geraden von Null bis Unendlich aufschneiden können.

b) Betrachten wir wieder  $f : S_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ . Dann ist  $f$  natürlich auch für  $\arg z = 0$  definiert, und es ist

$$f : \left\{ z \mid 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

bijektiv. Nun passiert aber etwas Merkwürdiges: Es sei  $z = r e^{i\varphi}$ . Dann ist

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \longrightarrow \begin{cases} r^n & \text{für } \varphi \rightarrow 0 \\ r^n e^{2\pi i} = r^n & \text{für } \varphi \rightarrow \frac{2\pi}{n}. \end{cases}$$

Man erhält also in beiden Fällen denselben Wert, und Analoges gilt für die anderen Sektoren. Für die Umkehrabbildung bedeutet das aber Folgendes:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{r} & \text{für } \varphi \rightarrow 0 \\ \sqrt[n]{r} e^{2\pi i/n} & \text{für } \varphi \rightarrow 2\pi. \end{cases}$$

Man erhält also nach einmaligem Umlaufen des Nullpunktes einen anderen Wert, nämlich den mit der Einheitswurzel  $\zeta = e^{2\pi i/n}$  multiplizierten. Erst nach  $n$ -maligem Umlaufen des Nullpunktes tritt der Faktor  $\zeta^n = 1$  auf, das heißt, erst dann erhält man wieder den ursprünglichen Wert.

Das hat zur Idee der *Riemannschen Fläche* geführt. Betrachten wir beispielsweise mit

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{z \mid 0 \leq \arg z < \pi\} \\ S_2 &:= \{z \mid \pi \leq \arg z < 2\pi\} \end{aligned}$$

die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 : S_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2 : S_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Wir möchten sie zu einer biholomorphen Abbildung  $f$  zusammensetzen. Dann benötigen wir aber zwei Exemplare der Bildebene, die wir uns längs  $\mathbb{R}_0^+$  aneinandergeheftet denken. Starten wir bei  $\varphi = 0$ . Dann wechseln wir bei  $\varphi = 2\pi$  in das zweite Blatt, und bei  $\varphi = 4\pi$  wieder zurück in das erste, und so weiter. Diese beiden so aneinandergehefteten Blätter der komplexen Ebene nennen wir Riemannsche Fläche  $\mathcal{R}_2$  für  $f$ . In dieser Interpretation ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{R}_2 \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$$

biholomorph, und es existiert die Umkehrabbildung

$$f^{-1} := \sqrt{\cdot} : \mathcal{R}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \sqrt{z}.$$

Analog benötigt man eine  $n$ -blättrige Riemannsche Fläche  $\mathcal{R}_n$ , um  $\sqrt[n]{z}$  zu definieren.

Man versteht all das noch besser, wenn man  $f$  auf  $\hat{\mathbb{C}}$  betrachtet: Umläuft man den Punkt  $\infty$ , dann erhält man ebenfalls  $n$ -mal denselben Wert. Beide Punkte, den Nullpunkt und den Punkt  $\infty$ , nennt man deshalb *Verzweigungspunkte* der Umkehrabbildung. Man kann diese eindeutig definieren, wenn man die Ebene längs dieser beiden Verzweigungspunkte aufschneidet. Denn damit verhindert man ja gerade das Umlaufen eines solchen Verzweigungspunktes. Offenbar muß man nicht längs einer Verbindungsstrecke aufschneiden, wie wir es bisher getan haben. Irgendein Verbindungsweg erfüllt vielmehr denselben Zweck.

Für  $z = e^{i\varphi}$  gebe ich noch einmal eine Wertetabelle für  $g(z) := \sqrt{z}$ .

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	$3\pi$	$4\pi$	$4\pi + \frac{\pi}{2}$	$\dots$
$g(z)$	1	$e^{i\frac{\pi}{4}}$	i	-1	$-e^{i\frac{\pi}{4}}$	-i	1	$e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\dots$

Dabei war die Wahl von  $g = 1$  am Startwert  $\varphi = 0$  natürlich willkürlich. Man hätte auch  $-1$  nehmen können.

7. Wir betrachten nun die Exponentialfunktion  $f(z) = e^z$ . Aus  $e^{z+2\pi i} = e^z$  folgt für alle  $k$  und

$$S_k := \{z \mid 2\pi(k-1) < y < 2\pi k\},$$

daß

$$f : S_k \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Wir treffen also auf eine ähnliche Situation, wie bei den Potenzen, nur mit dem Unterschied, daß wir zur Definition der Umkehrabbildung eine  $\infty$ -blättrige Riemannsche Fläche  $\mathcal{R}_\infty$  benötigen. Verzweigungspunkte der Umkehrabbildung sind wieder Null und Unendlich.

Die Umkehrabbildung zur Exponentialfunktion heißt Logarithmus. Für  $z = r e^{i\varphi}$  ist

$$\ln z = \ln |z| + i\varphi.$$

Beim Summanden  $i\varphi$  tritt die Mehrdeutigkeit besonders deutlich hervor. Wir haben also für  $r = 1$

$\varphi$	$\dots$	$-\pi$	0	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$\dots$
$\ln z$	$\dots$	$-\pi i$	0	$\pi i$	$2\pi i$	$3\pi i$	$4\pi i$	$\dots$

8. Wir behandeln noch kurz die Abbildung  $f(z) = \cos z$ . Weitere Einzelheiten sollen in der Übung besprochen werden.  $f(z)$  besitzt offenbar die Symmetrien

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$$\cos(-z) = \cos z.$$

Aus  $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = u + iv$  und  $y = k$  folgt

$$\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1.$$

Parallelen zur  $x$ -Achse gehen also in Ellipsen über. Entsprechend folgt aus  $x = c$

$$\left(\frac{u}{\cos c}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin c}\right)^2 = 1,$$

man erhält also Hyperbeln. Es seien

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < x < \pi\}$$

und

$$T := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \text{ und } \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Dann ist

$$\cos z : S \longrightarrow \mathbb{C} \setminus T$$

bijektiv.  $f'(z) = -\sin z$  hat für  $z = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , Nullstellen, und es gilt  $f(n\pi) = (-1)^n$ .

Zur genaueren Diskussion von  $f$  beachten wir  $f = g \circ e$  mit

$$g(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{und} \quad e(z) = e^{iz}.$$

Damit wird formal  $f^{-1} = e^{-1} \circ g^{-1}$ . Die Exponentialabbildung  $e$  kennen wir bereits; es ist

$$e^{-1}(w) = -i \ln w.$$

Betrachten wir also  $g$ : Es sei  $g(z) = w$ . Dann findet man formal die Auflösung

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

und damit

$$\arccos z := f^{-1}(z) = -i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Offenbar besitzt  $g^{-1}$  die Verzweigungspunkte  $\pm 1$  und  $e^{-1}$  die Verzweigungspunkte  $0, \infty$ . Die Gleichung

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = 0$$

besitzt keine Lösungen. Wenn  $z$  die Verzweigungspunkte  $\pm 1$  nicht umläuft, dann umläuft  $g^{-1}$  ebenfalls den Nullpunkt nicht, wohl aber den Punkt  $\infty$ . Mithin besitzt  $\arccos z$  drei Verzweigungspunkte, nämlich  $-1, +1$  und  $\infty$ . Man hat also die Ebene etwa längs  $T$  aufzuschneiden um biholomorphe Abbildungen zu erhalten. Man beachte, daß ein Aufschneiden zwischen  $-1$  und  $+1$  nicht genügt, weil dann der Verzweigungspunkt  $\infty$  ausgelassen wird.

### 13.10 Das Schwarzsche Lemma und das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Es sei wieder  $B := B(0, 1)$ . Wir fragen zunächst nach Automorphismen von  $B$ , die den Nullpunkt festlassen, und zeigen

**Das Schwarzsche Lemma:** *Es sei  $f : B \rightarrow B$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt*

1. Für alle  $z \in B$  ist  $|f(z)| \leq |z|$  und  $|f'(0)| \leq 1$ .
2. Es gebe ein  $z_0 \neq 0$  mit  $|f(z_0)| = |z_0|$ , oder es sei  $|f'(0)| = 1$ . Dann ist mit  $\varphi \in \mathbb{R}$

$$f(z) = e^{i\varphi} z.$$

Beweis: Es sei

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z & \text{für } z \in B \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $g$  in  $B$  holomorph. Für  $|z| \leq r < 1$  folgt aus dem Maximumprinzip

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Daraus erhalten wir für  $r \rightarrow 1$

$$\forall z \in B \quad |g(z)| \leq 1$$

oder

$$\forall z \in B \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Das beweist die erste Aussage; wir zeigen die zweite: Wegen  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \neq 0$  ist

$$|g(0)| = 1 \quad \text{oder} \quad |g(z_0)| = 1.$$

Aus dem Maximumprinzip folgt deshalb

$$\forall z \in B \quad |g(z)| = 1. \quad \square$$

**Bemerkung 13.10.1:** *Es sei  $f : B(a, r) \rightarrow B(0, R)$  holomorph. Dann gilt für  $h : B \rightarrow B$  mit*

$$h(z) := \frac{1}{2R} (f(a + rz) - f(a))$$

$h(0) = 0$ . Aus dem Schwarzschen Lemma folgt also mit  $\zeta := a + rz$

$$|f(\zeta) - f(a)| \leq 2R |z| = \frac{2R}{r} |\zeta - a|.$$

Wir zeigen nun das Schwarzsche Spiegelungsprinzip. Es seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet mit

$$z \in G \implies \bar{z} \in G$$

und

$$\begin{aligned} B &:= \{z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0\} \\ B^* &:= \{z \in G \mid \operatorname{Im} z < 0\} \\ I &:= \{z \in G \mid \operatorname{Im} z = 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist also

$$G = B \cup I \cup B^*,$$

und  $B^*$  enthält die an der reellen Achse gespiegelten Punkte von  $B$ . Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip zeigt nun die Existenz einer holomorphen Fortsetzung einer Abbildung  $f : B \cup I \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $G$ .

**Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip:** *Es sei  $f$  in  $B \cup I$  stetig, auf  $I$  reellwertig und in  $B$  holomorph. Dann ist*

$$\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in B \cup I \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } z \in B^* \end{cases}$$

holomorph.

Beweis: Es gilt

1.  $\hat{f} : B^* \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph wegen

$$\bar{\partial} \hat{f}(\bar{z}) = \overline{\partial f(\bar{z})} = 0.$$

2.  $\hat{f} : B^* \cup I \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig. Damit ist  $\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

3. Zum Nachweis der Holomorphie verwenden wir den Satz von Morera aus §13.5. Es sei  $\Delta$  irgendein abgeschlossenes Dreieck in  $G$ . Wir ziehen im Abstand  $\varepsilon$  die Parallelen zur  $x$ -Achse. Es sei

$$G_\varepsilon := \{z \in G \mid -\varepsilon < \operatorname{Im} z < \varepsilon\}.$$

Dann folgt aus den Aussagen 1 und 2

$$\oint_{\partial \Delta} f(z) dz = \oint_{\partial(\Delta \cap G_\varepsilon)} f(z) dz \rightarrow 0$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

### 13.11 Ganze Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir besonders einfache Abbildungen, zum Beispiel Polynome oder Funktionen wie  $e^z$  oder  $\sin z$ , die überall holomorph sind.

**Definition 13.11.1:** *Eine holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ganz.*

Eine ganze Funktion kann man um jeden Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  in eine Potenzreihe entwickeln, die in der ganzen Ebene konvergiert. Polynome nennt man *ganz rational* und die übrigen ganzen Funktionen *ganz transzendent*. Wir beginnen mit dem

**Satz von Liouville:** *Die Abbildung  $f$  sei ganz und beschränkt. Dann ist  $f$  konstant.*

Beweis: Es ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit

$$\forall r > 0 \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Daraus folgt für  $r \rightarrow \infty$

$$a_n = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad \square$$

Aus dem Satz von Liouville folgt unmittelbar



**Satz 13.11.2:** Die Abbildung  $f$  sei ganz, und es gelte

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \geq c > 0.$$

Dann ist  $f$  konstant.

Es sei nämlich  $g := 1/f$ . Dann ist  $g$  konstant.

**Satz 13.11.3:** : Es sei  $f = P_n$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit  $n \geq 1$ . Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{R}^+ \quad \exists r \in \mathbb{R}^+ \quad \forall z, |z| > r \quad |f(z)| > k.$$

Beweis: Mit  $a_n \neq 0$  ist für  $z \neq 0$

$$f(z) = z^n \left\{ a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right\},$$

also

$$|f(z)| \geq |z|^n \left| a_n - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

für alle  $z$  mit  $|z| \geq r_1$ . Daraus folgt

$$\forall z, |z| > r_2 \quad |f(z)| > k$$

mit

$$r_2 = \sqrt[n]{\frac{2k}{|a_n|}}$$

Man wähle also  $r := \max(r_1, r_2)$ . □

Es folgt ebenfalls

**Der Fundamentalsatz der Algebra:** Ein Polynom  $P_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , hat genau  $n$  Nullstellen.

Beweis: Es sei  $z_1$  eine Nullstelle, also  $P_n(z_1) = 0$ . Dann ist

$$P_n(z) = P_n(z) - P_n(z_1) = a_1(z - z_1) + \dots + a_n(z^n - z_1^n).$$

Nun ist

$$z^k - z_1^k = (z - z_1) \{ z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + z_1^{k-1} \},$$

also  $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$ . Es genügt deshalb, die Existenz einer Nullstelle zu zeigen: Es sei  $f(z) := P_n(z) \neq 0$  für alle  $z$ . Dann ist  $g := 1/f$  ganz, und es gibt ein  $r > 0$  mit

$$\forall z, |z| > r \quad |g(z)| < 1.$$

Mithin wäre  $g$  – und damit  $f$  – konstant. □

Wir betrachten nun ganz transzendente Abbildungen und zeigen als erstes

**Satz 13.11.4:** Es sei  $f$  ganz transzendent. Dann gilt

$$\forall k > 0 \quad \forall r > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \exists z, |z| > r \quad |f(z)| > k|z|^m.$$

Natürlich kann diese Aussage nicht für alle  $z$  gelten, zum Beispiel hat  $\sin z$  die Nullstellen  $z_n = n\pi$  mit dem Häufungspunkt Unendlich.

Beweis: Wir schließen indirekt. Es sei

$$\exists k > 0 \quad \exists r > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z, |z| > r \quad |f(z)| \leq k|z|^m.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit

$$\forall \rho > 0 \quad |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq k\rho^{m-n}.$$

Für  $n > m$  folgt daraus  $a_n = 0$ .  $f$  wäre also ein Polynom. □

Als nächstes zeigen wir den

**Satz von Casorati-Weierstraß:** *Es sei  $f$  ganz transzendent. Dann gilt*

$$\forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall c \in \mathbb{C} \quad \exists z, |z| > r \quad |f(z) - c| < \varepsilon.$$

$f$  kommt also im Unendlichen jeder Zahl  $c$  beliebig nahe.  $c$  wird aber im allgemeinen nicht angenommen, zum Beispiel besitzt  $e^z$  keine Nullstelle.

Beweis: Wir machen drei Fallunterscheidungen:

1.  $f$  habe unendlich viele  $c$ -Stellen. Dann können sich diese im Endlichen nicht häufen, denn sonst wäre  $f$  konstant.
2.  $f$  habe keine  $c$ -Stelle. Dann ist

$$g := \frac{1}{f - c}$$

ganz. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  ist  $g(z) \neq 0$ , mithin ist  $g$  ganz transzendent, und es folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall r > 0 \quad \exists z, |z| > r \quad |g(z)| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

oder

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall r > 0 \quad \exists z, |z| > r \quad |f(z) - c| < \varepsilon.$$

3.  $f$  habe endlich viele  $c$ -Stellen, nämlich  $z_1, \dots, z_j$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ . Dann bilden wir

$$g(z) := \frac{f(z) - c}{(z - z_1)^{\alpha_1} \cdots (z - z_j)^{\alpha_j}}.$$

$g(z)$  hat keine Nullstelle und ist ganz transzendent. Es sei wie im zweiten Fall

$$h := \frac{1}{g}.$$

$h$  ist ebenfalls ganz transzendent. Mit  $m := \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$  gilt also

$$\forall r > 0 \quad \exists z, |z| > r \quad |h| > \frac{2}{\varepsilon} |z|^m$$

und

$$\exists r_1 > 0 \quad \forall z, |z| > r_1 \quad \left| \frac{(z - z_1)^{\alpha_1} \cdots (z - z_j)^{\alpha_j}}{z^m} \right| \leq 2.$$

Mithin folgt

$$\forall r > r_1 \quad \exists z, |z| > r \quad |f(z) - c| < \varepsilon. \quad \square$$

Es gibt interessante Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Nullstellen einer ganzen Funktion und ihrem Anwachsen im Unendlichen. Wenn eine ganze Funktion keine Nullstelle hat, muß sie im Unendlichen genügend stark anwachsen. Fragen dieser Art sind Gegenstand der Wertverteilungstheorie.

Wir wollen hier nur ein einfaches Ergebnis aus diesem Fragenkreis beweisen und verschärfen den Satz von Liouville. Im folgenden sei  $f$  ganz und habe keine Nullstelle. Dann kann man  $\ln f$  erklären, es gibt also eine ganze Funktion  $F$  mit

$$f = e^F \quad \text{oder} \quad \ln f = F.$$

Das läßt sich leicht direkt einsehen: Es ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine ganze Funktion. Man wähle  $F(0)$  mit  $0 \leq \arg F(0) < 2\pi$  und

$$f(0) = e^{F(0)},$$

also  $F(0) = \ln f(0)$ , und

$$F(z) := F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Dann ist  $F$  ganz, und es gilt

$$F' = \frac{f'}{f}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{e^{F(z)}}{f(z)}\right)' = \frac{(fF' - f')e^F}{f^2}(z) = 0,$$

also

$$e^{F(z)} = c f(z)$$

mit  $c = 1$ . Im folgenden verwenden wir  $\ln f(z) := F(z)$ .

Es sei von nun an

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := F(z) = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z).$$

Dann ist mit  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$  und  $z = r e^{i\varphi}$

$$\operatorname{Re} F(z) = \ln |f(z)| = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi).$$

Wir setzen nun

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\alpha} \tag{*}$$

mit  $A > 0$ ,  $B \geq 0$  und  $0 \leq \alpha < 1$  voraus. Dann folgt aus der Monotonie des Logarithmus

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) \leq \ln A + B r^\alpha,$$

und für  $m \geq 1$  erhalten wir nach Multiplikation mit  $(1 + \cos m\varphi)$  bzw.  $(-1 + \cos m\varphi)$  durch Integration über  $(0, 2\pi)$

$$2\pi\alpha_0 + \pi r^m \alpha_m \leq 2\pi(\ln A + B r^\alpha)$$

und

$$-2\pi\alpha_0 + \pi r^m \alpha_m \geq -2\pi(\ln A + B r^\alpha).$$

Zusammen bedeutet das

$$2\left(\frac{\alpha_0 - \ln A}{r^m} - \frac{B}{r^{m-\alpha}}\right) \leq \alpha_m \leq 2\left(-\frac{\alpha_0 - \ln A}{r^m} + \frac{B}{r^{m-\alpha}}\right).$$

Für  $r \rightarrow \infty$  folgt daraus  $\alpha_m = 0$ . Analog findet man  $\beta_m = 0$ . Mithin gilt

**Satz 13.11.5:** Die Abbildung  $f$  sei ganz, besitze keine Nullstelle und erfülle Abschätzung (\*). Dann ist  $f$  konstant.

Wie die Exponentialfunktion zeigt, ist der Satz für  $\alpha = 1$  falsch. Für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$  folgt aber

$$\alpha_m = \beta_m = 0,$$

wenn  $m > [\alpha]$  ist. Also gilt im Falle allgemeiner  $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$f(z) = \exp\left(\sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n z^n\right).$$

**Beispiel 13.11.6:**

1. Es sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}.$$

Dann ist

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{|z|}^{2n}}{(2n)!} \leq e^{\sqrt{|z|}}.$$

Mithin gilt Abschätzung (\*) mit  $A = B = 1$  und  $\alpha = \frac{1}{2}$ .  $f$  ist nicht konstant und besitzt deshalb mindestens eine Nullstelle.  $f$  hat sogar unendlich viele Nullstellen. Das zeigen wir indirekt: Es seien  $z_1, \dots, z_k$  die Nullstellen und

$$P(z) := \sum_{n=1}^k (z - z_n).$$

Dann ist  $g := f/P$  ganz und hat keine Nullstelle. Für genügend großes  $r$  folgt

$$\forall z, |z| > r \quad |g(z)| = \left| \frac{f(z)}{P(z)} \right| \leq \frac{e^{\sqrt{|z|}}}{|P(z)|} \leq e^{\sqrt{|z|}},$$

und es gilt erst recht mit einer Konstanten  $K$

$$\forall z, |z| \leq r, \quad |g| \leq K.$$

Es ist also für alle  $z$

$$|g(z)| \leq \max(1, K) e^{\sqrt{|z|}}.$$

Mithin ist  $g$  konstant, also  $g = c$ , und es folgt der Widerspruch

$$f = cP.$$

2. Es sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}.$$

Aus

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} > \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

folgt

$$|f(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{|z|})^{2n}}{(2n)!} < e^{2\sqrt{|z|}}.$$

Deshalb besitzt auch  $f$  unendlich viele Nullstellen.

Damit haben wir gleichzeitig bewiesen:

**Satz 13.11.7:** *Es sei  $f$  ganz transzendent mit*

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\alpha},$$

wobei  $A > 0$ ,  $B \geq 0$  und  $0 \leq \alpha < 1$  ist. Dann besitzt  $f$  unendlich viele Nullstellen.

## 13.12 Isolierte Singularitäten

Betrachten wir nun Abbildungen, die in  $\mathbb{C}$  holomorph sind, isolierte Punkte ausgenommen: Es sei also zum Beispiel  $a \in \mathbb{C}$  und

$$f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph. Wir wollen das Verhalten von  $f$  in der Umgebung der *isolierten Singularität*  $a$  studieren, mögliche Singularitäten klassifizieren, den Cauchyschen Integralsatz auf diese Situation verallgemeinern und interessante Folgerungen ziehen.

Es seien  $r < R$ ,

$$K(a; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

ein Kreisring und  $f$  holomorph in  $K$ . Wir wählen  $r < \rho < P < R$ , und es sei  $z$  fest mit  $\rho < |z - a| < P$ . Dann folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

mit

$$f_1(z) := \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{und} \quad f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dabei verabreden wir, daß Integrale über geschlossene Kreislinien stets dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt orientiert sein sollen. Offenbar ist  $f_1$  in  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > \rho\}$  holomorph, und es gilt für  $|z| \rightarrow \infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f_1(z)| = 0.$$

Andererseits ist  $f_2$  in  $B(a, P)$  holomorph.

$f_1$  nennt man den *Hauptteil* von  $f$  und  $f_2$  den *Nebenteil*.  $f_1$  enthält die Singularität von  $f$  in  $a$ , das heißt,  $f_1$  beschreibt das singuläre Verhalten von  $f$  an der Stelle  $a$ . Es gilt:

**Satz 13.12.1:** Es sei  $f$  in  $K(a; r, R)$  holomorph. Dann gibt es eine in  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > r\}$  holomorphe Funktion  $f_1$  und eine in  $B(a, R)$  holomorphe Funktion  $f_2$  mit

$$\forall z \in K(a; r, R) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Dabei kann  $f_1$  so gewählt werden, daß gleichmäßig bzgl.  $\arg z$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f_1(z)| = 0$$

ist. Durch diese Bedingung sind  $f_1$  und  $f_2$  eindeutig festgelegt.

Beweis: Es sei  $z \in K(a; r, R)$ . Dann wählen wir  $\rho, P, f_1(z)$  wie im vorangegangenen.  $f_1$  und  $f_2$  hängen nicht von  $\rho$  und  $P$  ab, solange nur  $r < \rho < P < R$  erfüllt ist. Das folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz. Wir müssen also nur noch die Eindeutigkeitsaussage beweisen. Es sei auch

$$f = g_1 + g_2$$

mit  $|g_1(z)| \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \infty$ . Dann ist in  $K(a; r, R)$

$$f_1 - g_1 = g_2 - f_2.$$

Es sei

$$h := \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{in } \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| > r\} \\ g_2 - f_2 & \text{in } B(a, R). \end{cases}$$

Dann ist  $h$  eine ganze Funktion mit

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = 0.$$

Aus dem Satz von Liouville folgt daher  $h = 0$  und damit  $f_1 = g_1$  sowie  $f_2 = g_2$ . □

Der Nebenteil  $f_2$  von  $f$  läßt sich als holomorphe Funktion in  $B(a, R)$  durch eine Potenzreihe darstellen:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n.$$

Wir möchten auch für  $f_1$  eine solche Reihenentwicklung angeben. Diese wird im allgemeinen natürlich singuläre Terme enthalten. Um eine solche Beschreibung zu gewinnen, entwickeln wir um den Punkt  $\infty$ . Dazu verwenden wir die biholomorphe Abbildung

$$F : B(0, 1/r) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{B}(a, r) \\ w \longmapsto a + \frac{1}{w}.$$

Mit  $z = F(w)$  ist dann

$$w = \frac{1}{z - a}.$$

Ferner ist

$$f_1 \circ F : B(0, 1/r) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph, und aus  $|f_1(z)| \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$  folgt

$$\lim_{w \rightarrow 0} (f_1 \circ F)(w) = 0.$$

Deshalb kann  $f_1 \circ F$  holomorph auf  $B(0, 1/r)$  fortgesetzt werden, und es ist dann  $(f_1 \circ F)(0) = 0$ . Wir entwickeln nun  $f_1 \circ F$  um den Nullpunkt in eine Potenzreihe:

$$(f_1 \circ F)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n.$$

Diese Reihe konvergiert in  $|w| < 1/r$ , und mit  $w = (z - a)^{-1}$  wird daraus

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n}.$$

Wir setzen nun  $a_{-n} := b_n$ . Dann ist

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - a)^n,$$

und diese Reihe konvergiert für alle  $z$  mit  $|z - a| > r$ . Insgesamt erhalten wir also

**Satz 13.12.2:** Es sei  $f$  in  $K(a; r, R)$  holomorph. Dann ist

$$\forall z \in K(a; r, R) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Dabei konvergiert

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$$

in  $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(a, r)$  lokal gleichmäßig gegen den Hauptteil von  $f$  und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

in  $B(a, R)$  lokal gleichmäßig gegen den Nebenteil von  $f$ . Es gilt mit  $r < \rho < R$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Zum Beweis haben wir nur noch die Formel für die  $a_n$  herzuleiten. Sie folgt natürlich aus der Formel für die Koeffizienten in den Potenzreihenentwicklungen von  $f_1$  und  $f_2$ . Direkt sieht man sie so: Für  $|z| = \rho$  mit  $r < \rho < R$  und  $n \in \mathbb{Z}$  konvergiert

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-a)^{j-n-1}$$

gleichmäßig. Integration über  $\partial B(a, \rho)$  ergibt daher nach Beispiel 13.3.1.3

$$\oint_{\partial B(a, \rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = a_n \oint_{\partial B(a, \rho)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i a_n. \quad \square$$

Die soeben vorgestellte Reihenentwicklung wird nach P.A. LAURENT (1813–1854) benannt.

**Definition 13.12.3:** Eine Laurentreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Sie heißt in  $z_1$  konvergent, wenn dort sowohl  $\sum_{n \leq -1} \dots$  als auch  $\sum_{n \geq 0} \dots$  konvergieren.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$$

heißt Hauptteil der Laurentreihe und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

ihr Nebenteil. Gleichmäßige bzw. lokal gleichmäßige Konvergenz sollen sich jeweils auf den Haupt- und Nebenteil beziehen.

Wir nennen  $r$  Konvergenzradius des Hauptteils, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

in einer Umgebung des Nullpunktes den Konvergenzradius  $1/r$  hat. Der Konvergenzradius des Nebenteils sei  $R$ . Ist dann  $r < R$ , dann konvergiert die Laurentreihe lokal gleichmäßig in  $K(a; r, R)$ . Ist  $r > R$ , dann konvergiert sie auf keiner offenen Menge. Es gilt

**Satz 13.12.4:** In  $K(a; r, R)$  sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Für alle  $\rho \in (r, R)$  und  $n \in \mathbb{Z}$  gilt dann

$$|a_n| \leq \rho^{-n} \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Formel für die  $a_n$ .

Es sei nun mit  $k \geq 1$  und  $a_k \neq 0$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Dann sagen wir,  $f$  habe in  $a$  einen *Pol der Ordnung*  $k$ . Im Falle

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

nennen wir  $f$  in  $a$  *wesentlich singular*. Dabei sollen natürlich unendlich viele Koeffizienten des Hauptteils von Null verschieden sein.

Den Punkt Unendlich klassifizieren wir wieder, indem wir  $f$  in  $\hat{\mathbb{C}}$  diskutieren. Es sei

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

Dann untersuchen wir  $f \circ F$  für  $w \rightarrow 0$ . Eine ganze Funktion  $f$  ist dann *ganz rational*, wenn  $f \circ F$  im Nullpunkt höchstens einen Pol besitzt, andernfalls ist sie ganz transzendent.

**Beispiel 13.12.5:**

1. Es sei

$$f(z) := \frac{z}{z-1}.$$

$f$  ist in  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  holomorph. In einer Umgebung  $U(1)$  lautet die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1+z-1}{z-1} = \frac{1}{z-1} + 1.$$

$f$  besitzt also einen Pol erster Ordnung in Eins. In einer Umgebung  $U(0)$  lautet die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{-z}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Diese Reihe konvergiert in  $B(0, 1)$ . In einer Umgebung  $U(\infty)$  lautet die Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

$f$  ist also im Punkte  $\infty$  holomorph, und die letzte Reihe konvergiert in  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ . Man lasse sich aber nicht täuschen, dies ist keine Entwicklung in  $U(0)$ ;  $f$  ist im Nullpunkt nicht singular.

2. Es sei

$$f(z) := \frac{2z}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}.$$

$f$  hat Pole erster Ordnung in  $z = 1$  und  $z = -1$ . Im Punkte  $\infty$  ist  $f$  holomorph. Mit  $w = 1/z$  ist nämlich

$$f(z) = 2 \frac{w}{1-w^2} = 2w \sum_{n=0}^{\infty} w^{2n}.$$

3. Es ist

$$f(z) := e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}$$

im Nullpunkt wesentlich singular und im Punkte  $\infty$  holomorph, denn  $e^w$  ist in  $U(0)$  holomorph.

4. Es soll

$$f(z) := \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

erklärt werden.  $f$  hat in  $z = \pm 1$  und  $z = \infty$  Singularitäten, und zwar in  $z = \pm 1$  Verzweigungspunkte, man vergleiche §13.9.6. Mit  $w = 1/z$  ist

$$f(z) = \frac{1}{w} \sqrt{(1-w)(1+w)}.$$

Die Wurzel rechts ist in  $U(0)$  holomorph.  $f$  hat also im Punkte  $\infty$  einen Pol erster Ordnung und dort keinen Verzweigungspunkt. Wir schneiden daher  $\mathbb{C}$  längs  $[-1, 1]$  auf, oder etwa längs

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Dann gilt in  $U(0)$

$$f(z) = i\sqrt{1-z^2} = i\left\{1 - \frac{z^2}{2} \pm \dots\right\}$$

mit dem Konvergenzradius eins und in  $K(0; 1, \infty)$

$$f(z) = \frac{1}{w} \left\{1 - \frac{w^2}{2} \pm \dots\right\} = z - \frac{1}{2z} \pm \dots.$$

5. Es ist

$$f(z) := \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots\right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots$$

eine ganze Funktion. Die zunächst formal auftretende Singularität im Nullpunkt ist hebbar.

Die Resultate, die wir in §11 für das Verhalten ganzer Funktionen im Punkte  $\infty$  erhalten haben, lassen sich leicht auf Funktionen übertragen, die in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  singular sind. Es folgt analog Satz 13.11.3

**Satz 13.12.6:** Die Abbildung  $f$  sei in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  holomorph und habe in  $z_0$  einen Pol. Dann gilt

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z, |z - z_0| < \delta \quad |f(z)| > K$$

und analog zum Satz von Casorati-Weierstraß

**Satz 13.12.7:** Die Abbildung  $f$  sei in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  holomorph und in  $z_0$  wesentlich singular. Dann gilt

$$\forall \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall c \in \mathbb{C} \quad \exists z, |z - z_0| < \delta \quad |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Wir erklären nun

**Definition 13.12.8:** Die Abbildung  $f$  heißt auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  meromorph, wenn

$$f : U \setminus P_f \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist. Dabei sei  $P_f$ , die Menge der Pole von  $f$ , diskret.

Man sieht leicht:

**Satz 13.12.9:** Die Abbildung  $f$  sei auf  $U$  meromorph. Dann gilt

$$\forall a \in U \quad \exists V, a \in V \subset U \quad \forall z \in V \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dabei ist  $V$  offen, und  $g, h$  sind holomorphe Funktionen in  $V$ .

### 13.13 Der Residuenkalkül

Der Residuenkalkül ist für praktisches Rechnen und viele Anwendungen äußerst wichtig. Ich erinnere zunächst an Beispiel 13.3.1.3: Es war

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hat  $f$  nun in  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität, dann ist in einer Umgebung von  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

insbesondere also

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz.$$



**Definition 13.13.1:** Die Abbildung  $f$  besitze in  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Darstellung von  $f$  an dieser Stelle. Dann heißt  $a_{-1}$  das Residuum von  $f$  in  $z_0$ .

Es gilt

**Satz 13.13.2:** Es sei  $f$  in  $G$  holomorph mit Ausnahme endlich vieler isolierter singulärer Stellen. Es sei  $\Gamma$  ein geschlossener Weg in  $G$ ,  $f$  sei auf  $\Gamma$  holomorph. Dann ist die Summe der Residuen von  $f$  in den von  $\Gamma$  umschlossenen singulären Stellen gleich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

Wir zeigen nun einige Anwendungen. Es seien  $f$  in  $G$  meromorph und  $\Gamma$  ein geschlossener Weg in  $G$ .  $f$  besitze auf  $\Gamma$  weder Nullstellen noch Pole. Es sei  $N$  die Anzahl der Nullstellen und  $P$  die Anzahl der Polstellen von  $f$  in dem von  $\Gamma$  berandeten Gebiet, jeweils entsprechend der Vielfachheit gezählt. Dann gilt

**Satz 13.13.3:** Es ist

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

**Bemerkung 13.13.4:** Der Satz gilt entsprechend für  $a$ -Stellen; man nehme nur  $f - a$  anstelle  $f$ .

Beweis:

1. Es sei  $z_1$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Dann gilt in einer Umgebung von  $z_1$

$$f(z) = a_{\alpha} (z - z_1)^{\alpha} + \dots \quad \text{mit } a_{\alpha} \neq 0.$$

Daraus folgt mit geeigneten  $c_n$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha a_{\alpha} (z - z_1)^{\alpha-1} + \dots}{a_{\alpha} (z - z_1)^{\alpha} + \dots} = \frac{\alpha}{z - z_1} + c_0 + c_1 (z - z_1) + \dots.$$

$f'/f$  besitzt an der Stelle  $z_1$  also das Residuum  $\alpha$ .

2. Es sei  $z_2$  eine Polstelle der Ordnung  $\beta \in \mathbb{N}$ . Dann gilt in einer Umgebung von  $z_2$

$$f(z) = \frac{b_{-\beta}}{(z - z_2)^{\beta}} + \dots \quad \text{mit } b_{-\beta} \neq 0.$$

Daraus folgt mit geeigneten  $d_n$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta b_{-\beta} (z - z_2)^{-\beta-1} + \dots}{b_{-\beta} (z - z_2)^{-\beta} + \dots} = \frac{-\beta}{z - z_2} + d_0 + d_1 (z - z_2) + \dots.$$

$f'/f$  besitzt an der Stelle  $z_2$  also das Residuum  $-\beta$ . Das beweist den Satz. □

Es folgt wieder der

**Fundamentalsatz der Algebra:** Ein Polynom  $n$ -ten Grades  $P_n(z)$  besitzt genau  $n$  Nullstellen.

Beweis: Nach Satz 13.11.3 gibt es ein  $r > 0$  mit

$$\forall z, |z| \geq r \quad |P_n(z)| \geq 1.$$

Mithin liegen alle Nullstellen in  $B(0, r)$ , und es ist mit  $a_n \neq 0$  für  $|z| \geq r$

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{n a_n z^{n-1} + \dots + a_1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{-\infty} \frac{c_j}{z^j}$$

mit geeigneten  $c_j$ . Daraus folgt aber

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = n. \quad \square$$

Wir wollen einer Funktion  $f$  auch im Punkte  $\infty$  ein Residuum zuordnen. Denken Sie an

$$f(z) := \frac{1}{z}.$$

$f$  hat im Nullpunkt das Residuum 1, und wir hatten verabredet, das Verhalten von  $f$  für  $z \rightarrow \infty$  durch das Verhalten von

$$f\left(\frac{1}{w}\right) \text{ für } w \rightarrow 0$$

zu charakterisieren.  $f(z) = 1/z$  ist dort also holomorph. Trotzdem ordnet man  $f$  im Punkte  $\infty$  ein Residuum zu und definiert

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{w=0} \left\{ \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right\}.$$

Für  $f(z) = 1/z$  ist also

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

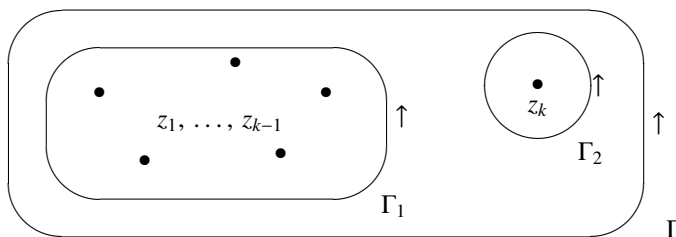
Das mag zunächst verwundern. Der Grund dafür ist, daß mit dieser Wahl der folgende Satz richtig ist.

**Satz 13.13.5:** Die Abbildung  $f$  sei bis auf endlich viele singuläre Stellen in  $\hat{\mathbb{C}}$  holomorph. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{z=z_i} f(z) = 0.$$

Dabei sind die Residuen aller singulären Punkte zu summieren, der Punkt  $\infty$  wird mitgezählt.

**Beweis:** Es seien etwa  $z_1, \dots, z_{k-1}$  die von  $\infty$  verschiedenen singulären Stellen der Funktion  $f$  und  $z_k = \infty$ . Der geschlossene Weg  $\Gamma$  enthalte die Punkte  $z_1, \dots, z_k$  im Inneren. Dann ist  $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .



Die geschlossenen Wege  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  seien wie in der Skizze gewählt. Dann gilt

$$0 = \oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz,$$

und wir erhalten

$$\oint_{\Gamma_1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{res}_{z=z_j} f(z).$$

Nun ist mit  $w := 1/z$

$$dz = -\frac{1}{w^2} dw,$$

also

$$\oint_{\Gamma_2} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{|w|=\rho} \left\{ \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right\} dw = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Das beweist den Satz. □

Es sei noch einmal wiederholt: Für große  $z$  sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Das heißt, in einer Umgebung des Punktes  $w = 0$  gilt

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{w^n}.$$

Dann ist

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}.$$

Es folgt eine Reihe von Beispielen:

**Beispiel 13.13.6:**

1. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Zum Nachweis gehen wir von

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right\}$$

aus. Es ist also

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2i}.$$

Es sei  $H_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ . Dann ist also

$$\int_{\partial H_R} f(z) dz = \pi.$$

Nun gilt für  $R \rightarrow \infty$

$$\int_R^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{-R} \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow 0$$

sowie

$$\left| \int_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

2. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Der Nachweis verläuft völlig analog. Mit

$$z_k := e^{i\frac{\pi}{6}(2k-1)} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, 6$$

ist

$$\frac{1}{1+z^6} = \frac{1}{(z-z_1) \cdots (z-z_6)}.$$

Dabei liegen  $z_1, z_2, z_3$  in der oberen Halbebene. Wir berechnen die Residuen an diesen Stellen. Es ist

$$1+z^6 = 1+z_k^6 + (z^6 - z_k^6) = (z-z_k)(z^5 + z^4 z_k + \cdots + z_k^5),$$

also

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \left(6 z_k^5\right)^{-1} = -\frac{1}{6} z_k.$$

Mithin beträgt die Summe der Residuen in der oberen Halbebene

$$-\frac{1}{6} \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5}{6}\pi} \right\} = -\frac{1}{6} \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} \right\} = -\frac{i}{6} \left\{ 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right\} = -\frac{i}{3}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

3. Es ist für  $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Zum Nachweis verwenden wir  $z = e^{i\varphi}$  und

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right).$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin \varphi} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2aiz - 1}.$$

Der Nenner hat die Nullstellen

$$z_1 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1}) \quad \text{und} \quad z_2 = i(-a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

Davon liegt wegen  $z_1 z_2 = -1$  nur  $z_1$  in  $B(0, 1)$ , und es ist

$$\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2aiz - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

4. Es ist mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $|a| > |b|$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Der Nachweis erfolgt analog. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2}{ib} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1}.$$

Der Nenner hat die Nullstellen

$$z_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}.$$

Davon liegt nur  $z_1$  in  $B(0, 1)$ , und es ist

$$\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

5. Für  $\alpha \geq 0$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx = \pi e^{-\alpha}.$$

Wir gehen analog zum ersten Beispiel vor und schreiben das Integral als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + x^2} dx.$$

Dann gilt mit

$$f(z) := \frac{e^{i\alpha z}}{1 + z^2}$$

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-\alpha}}{2i} \quad \text{und} \quad \oint_{\partial H_R} f(z) dz = \pi e^{-\alpha}.$$

Nun ist für  $\operatorname{Im} z = y > 0$

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha x - \alpha y}| \leq 1.$$

Deshalb folgt für  $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0,$$

und damit die Behauptung.

6. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Der Integrand hat im Nullpunkt keine Singularität. Wir integrieren

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$$

über den Rand  $\partial W_{R\varepsilon}$  von  $W_{R\varepsilon} := \{(-R, R) \times (0, R)\} \setminus B(0, \varepsilon)$  und führen die Grenzübergänge  $R \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  durch. Es ist

$$\oint_{\partial W_{R\varepsilon}} f(z) dz = 0.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ferner ist für  $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{0, |x|=R}^R f(z) dy \right| = \left| \int_0^R \frac{e^{\pm iR-y}}{\pm R + iy} dy \right| \leq \frac{2}{R} \int_0^R e^{-y} dy \rightarrow 0$$

sowie

$$\left| \int_{-R, y=R}^R f(z) dx \right| = \left| \int_{-R}^R \frac{e^{ix} e^{-R}}{x + iR} dx \right| \leq 2R \frac{e^{-R}}{R} \rightarrow 0$$

und für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\pi, |z|=\varepsilon}^0 f(z) dz = \int_{\pi, |z|=\varepsilon}^0 \left\{ \frac{1}{z} + i - z \pm \dots \right\} dz \rightarrow -i\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung.

7. Es ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}.$$

Zum Nachweis schneiden wir die Ebene längs  $\mathbb{R}_0^+$  auf und integrieren über den Rand  $\partial W_r$  von

$$W_r =: B(0, r) \setminus S_r \quad \text{mit} \quad S_r = B\left(0, \frac{1}{r}\right) \cup \left\{ (0, r) \times \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) \right\}.$$

Es seien

$$R(z) := \frac{1}{(1+z)^3} \quad \text{und} \quad f(z) := R(z)(\ln z)^2.$$

Wir haben dabei das Quadrat des Logarithmus genommen, weil sich bei einer linearen Funktion der Realteil, nämlich  $\ln x$ , längs  $\mathbb{R}_0^+$  ja gerade wegheben würde. Wegen

$$|\ln z| \leq \ln |z| + 2\pi$$

gilt dann für  $r \rightarrow \infty$

$$\oint_{\partial W_r} f(z) dz \rightarrow A$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} R(x)(\ln x)^2 dx - \int_0^{\infty} R(x)(\ln x + 2\pi i)^2 dx \\ &= -4\pi i \int_0^{\infty} R(x) \ln x dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} R(x) dx. \end{aligned}$$

Nun hat  $f(z)$  in  $z_1 = -1$  einen Pol, und es ist

$$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3} = \frac{a_0 + a_1(z+1) + a_2(z+1)^2 + \dots}{(z+1)^3}$$

also

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (\ln z)^2 \Big|_{z=-1} = \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{z} \Big|_{z=-1} = 1 - \pi i.$$

Mithin ist

$$A = 2\pi i + 2\pi^2.$$

8. Wir berechnen *Fresnelsche Integrale*

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Solche Integrale treten in der Optik auf. Sie sind nach A.J. FRESNEL, 1788–1827, benannt. Es seien

$$f(z) = e^{-z^2}$$

und  $\partial W_R$  der Rand des Sektors

$$W_R := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Dann erhalten wir

$$\oint_{\partial W_R} f(z) dz = 0.$$

Nun ist für  $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

bekannt (man quadriert und führe Polarkoordinaten ein). Es ist ferner

$$I := \int_{0, |z|=R}^{\pi/4} f(z) dz = iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\varphi} e^{i(\varphi - R^2 \sin 2\varphi)} d\varphi,$$

also für  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |I| &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos \psi} d\psi \\ &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2(1 - \frac{2}{\pi}\psi)} d\psi = \frac{R}{2} e^{-R^2} \frac{\pi}{2R^2} e^{\frac{2R^2}{\pi}\psi} \Big|_0^{\pi/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$-\int_{0, \varphi=\frac{\pi}{4}}^R f(z) dz = -\int_0^R e^{-ir^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr,$$

und es folgt daher für  $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

oder

$$\int_0^R e^{-ir^2} dr \rightarrow \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Das ergibt die Behauptung.

### 13.14 Fortsetzung holomorpher Abbildungen

Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gebiete mit

$$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$$

und  $f_1, f_2$  in  $G_1$  bzw.  $G_2$  holomorphe Abbildungen. Stimmen  $f_1$  und  $f_2$  dann in einer offenen Teilmenge von  $G_1 \cap G_2$  überein, dann stimmen sie in  $G_1 \cap G_2$  überein; das folgt aus dem Identitätssatz. Wir sagen dann auch,  $f_1$  und  $f_2$  seien holomorph fortsetzbar. Mit  $G := G_1 \cup G_2$  ist dann nämlich

$$\begin{aligned} f &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) := \begin{cases} f_1(z) & \text{für } z \in G_1 \\ f_2(z) & \text{für } z \in G_2 \end{cases} \end{aligned}$$

eine holomorphe Abbildung.  $f_i = f|_{G_i}$  sind *Teildarstellungen* oder *Elemente* von  $f$ .

Nun tritt natürlich die Frage auf, wie man erkennt, ob eine vorliegende Abbildung  $f$  fortsetzbar ist, und wie man mögliche Fortsetzungen findet.

Betrachten wir folgende Situation: Es sei in  $B(z_1, \rho_1)$

$$f(z) = f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 (z - z_1)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\rho_1$ . Dann ist  $\rho_1 < \infty$ , denn sonst wäre  $f_1$  eine ganze Funktion, und die Frage nach der Fortsetzung würde sich nicht stellen. Es sei nun

$$z_2 \in B(z_1, \rho_1),$$

und es gelte in einer Umgebung von  $z_2$

$$f_1(z) = f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 (z - z_2)^n.$$

Der Konvergenzradius von  $f_2$  sei  $\rho_2$ . Dann ist

$$\rho_2 \geq \rho_1 - |z_2 - z_1|.$$

Es sei ferner  $\zeta \in \partial B(z_1, \rho_1)$  definiert durch

$$\rho_1 = |z_2 - z_1| + |\zeta - z_2|.$$

Dann sind zwei Fälle möglich:

1. Es ist  $\rho_2 = |\zeta - z_2|$ . Dann ist  $f$  in  $\zeta$  nicht holomorph und eine Fortsetzung längs des Strahles von  $z_1$  nach  $\zeta$  nicht möglich.
2. Es ist  $\rho_2 > |\zeta - z_2|$ . Dann ist  $f_2$  eine Fortsetzung von  $f$  und  $f$  in  $\zeta$  holomorph.

**Beispiel 13.14.1:** Es sei

$$f(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}.$$

Diese Reihe hat wegen  $\sqrt[n^2]{} = (\sqrt[n]{} )^2 \rightarrow 1$  den Konvergenzradius eins. Sie konvergiert sogar für alle  $z \in \partial B(0, 1)$ , aber trotzdem existiert ein Punkt  $\zeta \in \partial B(0, 1)$ , in dem  $f$  nicht holomorph ist (sonst wäre der Konvergenzradius größer als eins). Wegen

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

sieht man sofort, daß  $f$  in  $\zeta_1 := 1$  nicht holomorph ist. Durch Differenzieren folgt

$$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

und daraus

$$f(z) = z + (1-z) \ln(1-z).$$

$f$  hat also in  $\zeta_1$  einen Verzweigungspunkt. Für ein  $\zeta \in \partial B(0, 1)$  mit  $\zeta \neq \zeta_1$  ist  $f$  jedoch fortsetzbar. Es sei etwa  $z_2 = -1/2$ . Dann ist

$$\frac{1}{1-z} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \left(z + \frac{1}{2}\right)\right)^n,$$

und diese Reihe hat den Konvergenzradius  $3/2$

$$f''(z) := f_2''(z) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \left(z + \frac{1}{2}\right)\right)^n,$$

ist also eine Fortsetzung von  $f''$  über  $\zeta_2 := -1$  hinaus. Damit erhält man auch eine Fortsetzung von  $f$ . □

Nehmen wir nun an,  $f$  sei in  $B(z_0, r)$  holomorph und über  $\zeta \in \partial B(z_0, r)$  hinaus holomorph fortsetzbar, etwa längs eines Weges  $\Gamma$ , den wir uns mit Kreisen  $B(a, r_a)$ ,  $a \in \Gamma$ , überdeckt denken. In diesen Kreisen sollen die Fortsetzungen jeweils konvergieren. Nehmen wir weiter an, daß  $\Gamma$  das Holomorphiegebiet von  $f$  wieder trifft; der Punkt  $P$  etwa werde zum zweiten Mal erreicht.

Dann kann es durchaus vorkommen, daß der Funktionswert  $f(P)$  beim zweiten Mal verschieden ist von dem ersten. Die in unserem letzten Beispiel diskutierte Funktion ist ein Kandidat dafür. Es ist sogar möglich, daß die Funktion  $f$  nach der Fortsetzung in  $P$  singularär wird. Als Beispiel dafür betrachte man in einer Umgebung von  $z_0 = 1$

$$f(z) = \frac{1}{\ln z - 2\pi i}.$$

Setzen wir  $f(z)$  längs  $\partial B(0, 1)$  fort. Dann verschwindet der Nenner nach einmaligem Umlaufen.

Es gilt jedoch der „Satz vom eindeutigen Umlaufen“.

**Monodromiesatz:** Es seien  $G$  einfach zusammenhängend und  $f$  holomorph in  $z_0 \in G$ .  $f$  lasse sich von  $z_0$  aus längs eines jeden Weges in  $G$  holomorph fortsetzen. Dann ist  $f$  in  $G$  (eindeutig) holomorph fortsetzbar.

**Beweis:** Es sei  $\Gamma$  ein geschlossener Weg in  $G$  mit  $z_0 \in \Gamma$ .  $\Gamma$  werde von endlich vielen Kreisen  $B(z_i, r_i)$  überdeckt, in denen  $f$  holomorph ist. Dann erhalten wir nach einmaligem Umlauf den alten Wert zurück: Wir wollen das indirekt zeigen und wählen dazu einen Polygonzug durch die  $z_i$ . Weil  $f$  in den  $B(z_i, r_i)$  holomorph ist, erhält man beim Fortschreiten längs des Polygonzuges denselben Wert wie beim Fortschreiten längs  $\Gamma$ . Wir ziehen nun eine Diagonale im Polygonzug. Da wir angenommen haben, daß man nach einmaligem Umlaufen einen anderen Wert erhält, muß dieser Effekt auch schon in mindestens einem der Teilpolygone auftreten. So fahre man fort. Man erhält schließlich ein Dreieck mit dieser Eigenschaft, das ganz in einem Holomorphiegebiet liegt. Das ist ein Widerspruch.  $\square$

Zum Abschluß betrachten wir noch einmal

$$f(z) := z + \frac{1}{z}.$$

$f$  ist eine meromorphe Abbildung.

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

hat in  $z_1 = 1$  und  $z_2 = -1$  Nullstellen, und es ist  $f(z_j) = w_j = \pm 2$ . Die Umkehrabbildung  $g := f^{-1}$  existiert also nur lokal. Formal erhält man

$$g(w) = \frac{1}{2} \left\{ w + \sqrt{(w-2)(w+2)} \right\}.$$

$g$  besitzt also die Verzweigungspunkte  $w_1$  und  $w_2$ . Um  $g$  eindeutig zu erklären, muß man die  $w$ -Ebene von  $w_1$  nach  $w_2$  aufschneiden, etwa längs  $[-2, 2]$ , oder eine zweiblättrige Riemannsche Fläche benutzen. Wegen

$$f(e^{i\varphi}) = 2 \cos \varphi$$

wird die so aufgeschnittene  $w$ -Ebene entweder auf den Einheitskreis oder sein Äußeres abgebildet.

### 13.15 Darstellung meromorpher Abbildungen

Meromorphe Funktionen sind im wesentlichen durch die Vorgabe ihrer Nullstellen und Pole bestimmt. Das wollen wir in diesem Abschnitt zeigen und Darstellungsformeln angeben. Wir beginnen mit

**Satz 13.15.1:** Die Abbildung  $f$  sei ganz und besitze keine Nullstelle. Dann gibt es eine ganze Funktion  $h$  mit

$$f = e^h.$$

Der Beweis wurde bereits in §13.11 ausgeführt.

**Folgerung 13.15.2:** Die Abbildung  $g$  sei ganz. Dann läßt sich jede ganze Funktion mit denselben Nullstellen in der Form

$$g e^h$$

mit einer ganzen Funktion  $h$  darstellen.

Wir wollen nun eine ganze Funktion mit vorgegebenen Nullstellen konstruieren. Zwei Fälle sind möglich: Entweder besitzt  $f$  endlich viele Nullstellen oder  $f$  besitzt unendlich viele Nullstellen, die sich nur im Unendlichen häufen können. Interessant ist nur der zweite Fall. Hier gilt der

**Satz von Weierstraß:** Es sei  $N$  eine Punktmenge, die sich im Endlichen nicht häuft. Dann gibt es eine ganze Funktion  $g$  mit der Nullstellenmenge  $N$ .

**Beweisskizze:** Offenbar ist  $N$  abzählbar,  $N = \{z_1, z_2, \dots\}$ , und es liegt nahe

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{\alpha_j}$$

anzusetzen. Dabei sei  $\alpha_j$  die Vielfachheit der Nullstelle  $z_j$ . Nun wird das unendliche Produkt im allgemeinen aber nicht konvergieren, und wir müssen kurz über das Konvergenzverhalten solcher Produkte sprechen.



**Definition 13.15.3:** Es seien  $a_n \in \mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > n_0 \quad \left| \left( \prod_{j=m+1}^n (1 + a_j) \right) - 1 \right| < \varepsilon$$

gilt. Das Produkt heißt absolut konvergent, wenn

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$$

konvergiert.

Es gilt das Konvergenzkriterium

**Satz 13.15.4:** Es seien  $p_n \geq 0$ . Dann konvergiert

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n)$$

genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

konvergiert.

Beweis: Es seien

$$P_n := \prod_{j=1}^n (1 + p_j) \quad \text{und} \quad S_n := \sum_{j=1}^n p_j.$$

Dann ist

$$S_n \leq P_n.$$

Aus  $1 + x \leq e^x$  für  $x \geq 0$  folgt aber auch

$$P_n \leq e^{S_n}.$$

Das beweist das Kriterium. □

Wir fahren jetzt fort im Beweis des Satzes von Weierstraß und konstruieren *konvergenzerzeugende Faktoren*  $e^{g_n(z)}$  so, daß

$$g(z) := z^{\alpha_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{g_n(z)} \right]^{\alpha_n} \tag{*}$$

konvergiert und die gesuchte Funktion darstellt. Wegen

$$((1 - u) e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots})' = 0$$

folgt für kleine  $u \in \mathbb{C}$

$$(1 - u) = e^{-(u + \frac{u^2}{2} + \dots)}.$$

Es liegt deshalb nahe, die ganzen Funktionen

$$g_n(z) := \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{k_n}.$$

zu nehmen. Dabei sei  $k_n \in \mathbb{N}$  möglichst klein, aber so gewählt, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left( \frac{z}{z_n} \right)^{k_n+1}$$

absolut konvergiert. Eine solche Wahl ist möglich, etwa durch  $k_n := n - 1 + \alpha_n$ . Denn es sei  $z \in \mathbb{C}$  fest. Dann gilt

$$\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| < \frac{1}{e}$$

oder wegen  $x < e^x$

$$\left| \alpha_n \left( \frac{z}{z_n} \right)^{k_n+1} \right| < \alpha_n \left( \frac{1}{e} \right)^{n+\alpha_n} < \frac{1}{e^n}.$$

Die Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$  konvergiert.

Es sei nun

$$f_n(z) := \left[ \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{g_n(z)} \right]^{\alpha_n} - 1,$$

also

$$g(z) = z^{\alpha_0} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)).$$

Wir haben zu zeigen, daß  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$  konvergiert: Es sei  $z$  fest und mit  $\alpha > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{C}$ ,  $|u| < 1/e < 1/2$

$$h(u) := \left[ (1-u) e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^k}{k}} \right]^{\alpha} - 1.$$

Dann ist

$$|h(u)| = \left| e^{-\alpha \left( \frac{u^{k+1}}{k+1} + \dots \right)} - 1 \right|,$$

und mit

$$a := -\alpha \left( \frac{u^{k+1}}{k+1} + \dots \right)$$

erhalten wir deshalb

$$|h(u)| \leq e^{|a|} - 1.$$

Nun ist

$$|a| \leq \alpha |u|^{k+1} (1 + |u| + |u|^2 + \dots) \leq 2\alpha |u|^{k+1},$$

also wegen  $e^x - 1 \leq x e^x$  für  $x \geq 0$  schließlich

$$|h(u)| \leq 2\alpha |u|^{k+1} e^{2\alpha |u|^{k+1}}.$$

Mit  $u := z/z_n$ ,  $k := k_n$ ,  $\alpha := \alpha_n$  und wegen

$$\forall n > n_0 \quad 2\alpha_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{k_n+1} \leq 1,$$

(weil die Summe darüber konvergiert) folgt dann

$$|f_n(z)| \leq 2e\alpha_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{k_n+1}.$$

Mithin konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

für jedes feste  $z$ . Das beweist den Satz von Weierstraß. □

**Beispiel 13.15.5:** Wir konstruieren eine ganze Funktion  $f$  mit der Nullstellenmenge  $N = \mathbb{Z}$ . Jede Nullstelle habe die Vielfachheit eins:

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  seien

$$z_n := \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ j & \text{für } n = 2j - 1, j \in \mathbb{N} \\ -j & \text{für } n = 2j, j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^2,$$

wir können also  $k_n = 1$  wählen. Es folgt

$$f(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{j}\right) e^{\frac{z}{j}} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right).$$

Damit wird

$$\sin \pi z = e^{h(z)} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right),$$

mit einer geeigneten ganzen Funktion  $h(z)$ . Im nächsten Beispiel werden wir  $e^{h(z)} = \pi$  zeigen. □

Zur Darstellung meromorpher Funktionen  $f$  geht man analog vor und zeigt

$$f(z) = m(z) + g(z)$$

mit einer meromorphen Funktion  $m$  und einer geeigneten ganzen Funktion  $g$ . Der entsprechende Satz wird nach G. MITTAG-LEFFLER, 1846–1927, benannt.

**Satz von Mittag-Leffler:** *Es sei  $M$  eine Punktmenge, die sich im Endlichen nicht häuft. Dann gibt es eine meromorphe Funktion  $m$  mit vorgegebenen Polen in  $M$ .*

Beweisskizze: Es seien die Polstellen  $z_j$  mit den Hauptteilen

$$h_j(z) := \frac{a_{-\alpha_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{\alpha_j}} + \dots + \frac{a_{-1}^{(j)}}{z - z_j}$$

vorgegeben. Dabei sei  $z_0 = 0$ , falls  $0 \in M$ . Im allgemeinen divergiert

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j(z),$$

sonst wäre nichts mehr zu beweisen. Wir suchen daher *konvergenzerzeugende Subtrahenden*  $g_j(z)$  mit

$$m(z) = h_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - g_j(z)).$$

Dabei werden die ganzen Funktionen  $g_j$  für  $j > 0$  folgendermaßen definiert: In einer Umgebung des Nullpunktes sei

$$h_j(z) := \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(j)} z^l$$

und

$$g_j(z) := \sum_{l=0}^{k_j-1} a_l^{(j)} z^l.$$

Dabei sei  $k_j$  so gewählt, daß

$$\forall R > 0 \quad \forall z_j, |z_j| > 2R, \quad \exists p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j < \infty, \quad \forall z, |z| \leq R, \quad |h_j(z) - g_j(z)| \leq p_j$$

gilt. Dann folgt aus

$$\forall R > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall j > n \quad |z_j| > 2R$$

die Konvergenz von

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |h_j(z) - g_j(z)|$$

in  $B(0, R)$ . Mithin ist

$$f_n(z) := \sum_{j=n+1}^{\infty} (h_j(z) - g_j(z))$$

in  $B(0, R)$  holomorph, und wir erhalten

$$m(z) = h_0(z) + \sum_{j=1}^n (h_j(z) - g_j(z)) + f_n(z). \quad \square$$

**Beispiel 13.15.6:** Wir konstruieren eine meromorphe Funktion mit  $M = \mathbb{Z}$ ,  $z_n \in M$  wie im Beispiel 13.15.5, und den Hauptteilen

$$h_n(z) = \frac{1}{z - z_n}.$$

Für  $n \geq 1$  ist

$$h_n(z) = \frac{-1}{z_n} \left\{ 1 + \frac{z}{z_n} + \left( \frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Wir wählen  $k_n = 1$ , also

$$g_n(z) = -\frac{1}{z_n}.$$

Dann folgt für alle  $z$  mit  $|z| \leq R$  und alle  $z_n$  mit  $|z_n| > 2R$

$$|h_n(z) - g_n(z)| = \frac{1}{|z_n|} \left| \frac{z}{z_n} + \left( \frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots \right| \leq \frac{|z|}{|z_n|^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right\} \leq \frac{2R}{|z_n|^2} =: p_n$$

mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \leq 8R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right) + \left( \frac{1}{z + j} - \frac{1}{j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - j} + \frac{1}{z + j} \right) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2}. \end{aligned}$$

Damit ist also zum Beispiel

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} + g(z)$$

mit einer ganzen Funktion  $g$ . Wir wollen  $g$  bestimmen: Es ist

$$(\cot \pi z)' = \frac{-\pi}{\sin^2 \pi z},$$

also

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(z - n)^2} + \frac{1}{(z + n)^2} \right) + g'(z)$$

oder

$$g'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}.$$

Die Abbildung  $g'$  genügt der Funktionalgleichung

$$g'(z) + g'\left(z + \frac{1}{2}\right) = 4g'(2z). \quad (*)$$

Es ist nämlich

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{\sin^2 \pi\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{\cos^2 \pi z} = \frac{1}{\sin^2 \pi z \cdot \cos^2 \pi z} = \frac{4}{\sin^2 2\pi z}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2z - 2n)^2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} - n\right)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2z + 1 - 2n)^2}. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (\*) folgt  $g' = 0$ , denn es seien  $m_1, m_2, m_3$  Maxima von  $|g'|$  auf  $\partial B(0, r_i)$  mit  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = \frac{3}{2}$  und  $r_3 = 2$ . Dann folgt aus dem Maximumprinzip

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3$$

und aus Gleichung (\*)

$$4m_3 \leq m_1 + m_2 \leq 2m_3.$$

Mithin ist  $m_3 = 0$ .

Deshalb gilt mit  $c \in \mathbb{C}$

$$\pi \cot \pi z = m(z) + c.$$

Aus

$$\pi \cot(-\pi z) = -m(z) + c$$

und  $\cot(-z) = -\cot z$  folgt schließlich  $c = 0$ , also

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$

Integrieren wir diese Gleichung etwa von  $1/2$  bis  $z$ , dann erhalten wir aus dieser Darstellung

$$\ln \sin \pi z = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) + \text{const}$$

oder

$$\sin \pi z = k z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Aus

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

folgt dann schließlich

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

## 13.16 Periodische Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir meromorphe Funktionen untersuchen, die die wichtige Eigenschaft der Periodizität besitzen. Es sei also

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f(z + \omega) = f(z).$$

Dabei heißt  $\omega \neq 0$  *Periode* von  $f$ . Wir kennen bereits periodische Funktionen, erinnert sei an

$$f(z) := e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$$

oder auch an  $\cos z$  und  $\sin z$ . Man sieht leicht:

**Satz 13.16.1:** Mit  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind auch  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ , Perioden.

Es sei nun  $\Omega$  die Menge der Perioden der Abbildung  $f$ . Dann gilt

**Satz 13.16.2:** Es sei  $f$  meromorph und nicht konstant. Dann besitzt  $\Omega$  im Endlichen keinen Häufungspunkt.

Beweis: Es sei  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungspunkt von  $\Omega$  und  $(\omega_n)$  eine Folge mit  $\omega_n \rightarrow a$ . Dann sind

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n := \omega_{n+1} - \omega_n$$

ebenfalls Perioden von  $f$ , und es gilt  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Mithin ist Null Häufungspunkt von  $\Omega$ . Das führt aber zu einem Widerspruch: Es sei  $f$  in  $b \in \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(b + \varepsilon_n) = f(b),$$

und aus dem Identitätssatz folgt  $f(z) = f(b)$  für alle  $z$ .  $f$  ist aber nicht konstant.  $\square$

Wir machen nun folgende Fallunterscheidung:

1.  $\Omega$  liege auf einer Geraden:

Diese Gerade geht dann durch den Nullpunkt. Denn es sei  $\omega_1 \in \Omega$  mit möglichst kleinem Betrag gewählt. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad n\omega_1 \in \Omega.$$

Die Gerade geht also durch den Nullpunkt, und ein beliebiges  $\omega \in \Omega$  kann als

$$\omega = t\omega_1 = (n+r)\omega_1$$

geschrieben werden mit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $t, r \in \mathbb{R}$  und  $|r| < 1$ . Dann ist aber  $r\omega_1 \in \Omega$ , also  $r = 0$  und  $\omega$  ein Vielfaches von  $\omega_1$ . Es gilt also

$$\forall \omega_k, \omega_l \in \Omega \quad \frac{\omega_k}{\omega_l} \in \mathbb{R}.$$

2.  $\Omega$  liege nicht auf einer Geraden:

Wir wählen nun zwei Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mit möglichst kleinem Betrag, aber mit

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}.$$

Die Vektoren von Null nach  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  sind also linear unabhängig, und das Dreieck mit den Eckpunkten  $0, \omega_1$  und  $\omega_2$  enthält keine weiteren Perioden. Es sei  $P$  das *Periodenparallelogramm* mit den Eckpunkten  $0, \omega_1, \omega_2$  und  $\omega_1 + \omega_2$ . Weil mit  $\omega_1$  und  $\omega_2$  auch  $\omega_1 + \omega_2$  Periode ist, sind die Eckpunkte von  $P$  Perioden.  $P$  enthält weder im Inneren noch am Rande weitere Perioden. Es sei nun  $\omega \in \Omega$  beliebig. Dann gilt analog zum ersten Fall

$$\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = (n_1 + r_1)\omega_1 + (n_2 + r_2)\omega_2.$$

Daraus folgt wieder  $r_1 = r_2 = 0$ .  $\omega$  ist also ganzzahliges Vielfaches von  $\omega_1, \omega_2$ .

Es gilt also

**Satz 13.16.3:** Die Perioden einer meromorphen Funktion  $f \neq \text{const}$  lassen sich entweder aus einer Periode  $\omega_1$  oder aus zwei Perioden  $\omega_1, \omega_2$  mit

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$$

ableiten.

Im ersten Fall nennt man  $f$  *einfach periodisch* und im zweiten Fall *doppelt periodisch*.

### 13.16.1 Einfach periodische Funktionen

Es seien zur Vereinfachung  $\omega_1 = 1$ , also

$$f(z+1) = f(z),$$

und  $f$  im Nullpunkt holomorph. Es sei ferner

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \zeta = \varphi(z) := e^{2\pi iz}. \end{aligned}$$

$\varphi$  bildet den Streifen

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

auf die längs  $\mathbb{R}_0^+$  aufgeschnittene  $\mathbb{C}$ -Ebene biholomorph ab. Es ist

$$z = \varphi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Es sei

$$g := f \circ \varphi^{-1}.$$

Dann ist  $g$  für alle  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eindeutig definiert. Die Vieldeutigkeit des Logarithmus wird durch die Periodizität von  $f$  gerade aufgehoben.  $g$  besitzt die  $f$  entsprechenden Singularitäten. Möglicherweise kommt  $\zeta = 0$  hinzu. Dieser Punkt entspricht dem Punkt  $z = x + i\infty$ .

**Beispiel 13.16.4:** Wir betrachten

$$f(z) = \sin 2\pi z.$$

Es ist

$$\sin 2\pi z = \frac{1}{2i} (e^{2\pi iz} - e^{-2\pi iz}) = \frac{1}{2i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right),$$

also

$$g(\zeta) = \frac{1}{2i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right).$$

Wir wählen nun  $y_1$  und  $y_2$  so, daß  $f$  im Streifen

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid y_1 \leq \operatorname{Im} z \leq y_2 \right\}$$

holomorph ist. Ein solcher Streifen existiert offenbar immer, weil  $f$  als meromorph vorausgesetzt wurde. Dann ist  $g$  im Kreisring

$$\bar{K}(0; r_2, r_1) := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid e^{-2\pi y_2} =: r_2 \leq |\zeta| \leq r_1 := e^{-2\pi y_1} \right\}$$

holomorph und wird dort durch die Laurentreihe

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad r_2 < r < r_1,$$

dargestellt. Daraus folgt in  $S$

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

mit

$$a_n = \int_{\operatorname{Im} z = y_0} f(z) e^{-2\pi i n z} dz$$

und  $y_1 < y_0 < y_2$ .

Speziell erhält man hierdurch die klassischen Fourierreihen. Es sei nämlich  $f$  in einer Umgebung der  $x$ -Achse holomorph. Dann können wir  $y_0 = 0$  wählen und erhalten mit  $y_1 < 0 < y_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \quad \text{für } y_1 < \operatorname{Im} z < y_2.$$

Dabei ist

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Für reelles  $z = x$  bedeutet das

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n + a_{-n}) \cos 2\pi n x + i(a_n - a_{-n}) \sin 2\pi n x \} \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n \cos 2\pi n x + \beta_n \sin 2\pi n x \} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= a_0 &= \int_0^1 f(x) dx \\ \alpha_n &:= a_n + a_{-n} &= 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x dx \\ \beta_n &:= i(a_n - a_{-n}) &= 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x dx. \end{aligned}$$

### 13.16.2 Doppelt periodische Funktionen

Im folgenden betrachten wir doppelt periodische meromorphe Abbildungen. Solche Funktionen nennt man, der Tradition folgend, *elliptisch*. Sie treten nämlich bei der Berechnung des Umfangs von Ellipsen auf.

Es seien  $\omega_1, \omega_2$  fest gewählt mit  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ . Es sei ferner  $\mathcal{K}$  die Menge aller elliptischen Funktionen mit den Perioden  $\omega_1, \omega_2$ . Dann gilt

1. Die konstante Abbildung gehört zu  $\mathcal{K}$ .
2.  $\mathcal{K}$  ist ein Körper.
3. Mit  $f \in \mathcal{K}$  ist auch  $f' \in \mathcal{K}$ .
4. In einem Periodenparallelogramm gibt es nur endlich viele Pole.
5. Die Funktion  $f \in \mathcal{K}$  ist durch ihre Werte in einem Periodenparallelogramm vollständig bestimmt.

Dabei erhält man ein beliebiges Periodenparallelogramm  $Pp$  durch

$$Pp = \left\{ z = z_0 + \zeta \mid z_0 \in \mathbb{C}, \zeta \in P \right\}$$

mit

$$P := \left\{ r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \mid 0 \leq r_1, r_2 < 1 \right\}.$$

**Definition 13.16.5:** Die Anzahl der Pole in einem Periodenparallelogramm heißt der Grad von  $f$ .

Aus dem Satz von Liouville folgt unmittelbar

**Satz 13.16.6:** Eine elliptische Funktion vom Grade Null ist konstant.

Es gilt auch

**Satz 13.16.7:** Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion in einem Periodenparallelogramm ist null.

Beweis: Wir wählen ein Periodenparallelogramm  $Pp$  so, daß keine Pole am Rande liegen. Es sei  $[a, b]$  die Strecke von  $a$  nach  $b$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \oint_{\partial Pp} f(z) dz &= \int_{[z_0, z_0+\omega_1]} f(z) dz + \dots + \int_{[z_0+\omega_2, z_0]} f(z) dz \\ &= \int_{[z_0, z_0+\omega_1]} (f(z) - f(z+\omega_2)) dz - \int_{[z_0, z_0+\omega_2]} (f(z) - f(z+\omega_1)) dz = 0. \end{aligned}$$

**Folgerung 13.16.8:** Es gibt keine elliptische Funktion vom Grade eins.

Ebenfalls folgt

**Satz 13.16.9:** Es sei  $r \geq 2$  der Grad der elliptischen Funktion  $f$ . Dann nimmt  $f$  in jedem Periodenparallelogramm einen beliebigen Wert  $c \in \mathbb{C}$  genau  $r$ -mal an.

Beweis: Mit  $f$  ist auch

$$\frac{f'}{f-c}$$

elliptisch. Mithin ist

$$N - r = \oint_{\partial Pp} \frac{f'}{f-c} = 0,$$

also  $N = r$ .

Wir konstruieren nun eine elliptische Funktion vom Grade  $r = 2$ . Durch Differenzieren erhält man daraus elliptische Funktionen höheren Grades. Dazu machen wir den Ansatz

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + g(z)$$

mit einer im Periodenparallelogramm  $P$  holomorphen Funktion  $g$ . Weil eine Konstante in  $g$  nicht interessiert, wählen wir mit holomorphem  $p$

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + zp(z).$$

Wir werden zeigen, daß  $\wp$  existiert und dadurch festgelegt ist. Diese Funktion  $\wp$ , die *Weierstraßsche Pe-Funktion*, spielt in der Theorie der elliptischen Funktionen eine große Rolle. Sie ist ein möglichst einfaches Beispiel für eine elliptische Funktion, und es läßt sich zeigen, daß man jede andere elliptische Funktion als rationale Funktion von  $\wp$  und  $\wp'$  darstellen kann.

Wir wollen  $\wp$  nach dem Satz von Mittag-Leffler konstruieren und zeigen dazu



**Lemma 13.16.10:** *Es sei  $\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  mit  $n_j \in \mathbb{Z}$ . Dann konvergiert*

$$\sum^* \frac{1}{|\omega|^3}.$$

Dabei soll  $\sum^*$  bedeuten, daß über alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$  summiert werden soll.

Beweis: Es seien  $A_n$  die Anzahl der Perioden  $\omega$  in

$$S_n := \{ \omega \in \mathbb{C} \mid n \leq |\omega| < n + 1 \}$$

und  $\varepsilon$  fest gewählt mit  $0 < 2\varepsilon < \min(|\omega_1|, |\omega_2|)$ . Wir legen um jede Periode  $\omega \in S_n$  einen Kreis mit dem Radius  $\varepsilon$ . Dann ist

$$\pi \varepsilon^2 A_n < \pi \{ (n + 1 + \varepsilon)^2 - (n - \varepsilon)^2 \} = \pi(1 + 2\varepsilon)(1 + 2n).$$

Es gilt also

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad A_n < nk(\varepsilon, n_0)$$

oder

$$\sigma_n := \sum_{n \leq |\omega| < n+1} \frac{1}{|\omega|^3} \leq c \cdot A_n \cdot \frac{1}{n^3} < \frac{ck}{n^2}.$$

Das beweist das Lemma. □

Es seien nun für  $N := (n_1, n_2) \neq (0, 0)$

$$\omega_N = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$$

Perioden, sowie

$$h_0(z) = \frac{1}{z^2}$$

und

$$h_N(z) = \frac{1}{(z - \omega_N)^2} = \frac{1}{\omega_N^2} \frac{1}{(1 - \frac{z}{\omega_N})^2} = \frac{1}{\omega_N^2} \left\{ 1 + \frac{2z}{\omega_N} + \dots \right\}$$

Hauptteile. Dann suchen wir ganze Funktionen  $g_N(z)$  mit

$$m(z) = h_0(z) + \sum_N (h_N(z) - g_N(z)),$$

und zwar so, daß für festes  $z$  und  $n_0 = n_0(z)$

$$\sum_{|N| > n_0} |h_N(z) - g_N(z)|$$

konvergiert. Dabei sei  $|N| = |n_1| + |n_2|$ . Um das zu erreichen, wählen wir

$$g_N(z) = \frac{1}{\omega_N^2}.$$

Dann gilt

$$\forall R > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall N, |N| > n_0 \quad |\omega_N| > 2R,$$

und für  $|z| \leq R$  folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega_N)^2} - \frac{1}{\omega_N^2} \right| &= \left| \frac{-z^2 + 2z\omega_N}{(z - \omega_N)^2 \omega_N^2} \right| \leq \frac{3R|\omega_N|}{|z - \omega_N|^2 |\omega_N|^2} \\ &\leq \frac{3R}{|\omega_N||z - \omega_N|^2} = \frac{3R}{|\omega_N|^3 \left(1 - \frac{R}{|\omega_N|}\right)^2} \leq \frac{12R}{|\omega_N|^3}. \end{aligned}$$

Mithin konvergiert

$$\sum_{|N| > n_0} \left| \frac{1}{(z - \omega_N)^2} - \frac{1}{\omega_N^2} \right|$$

nach Lemma 13.16.10.

$$m(z) = \frac{1}{z^2} + \sum^* \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

ist somit eine meromorphe Funktion mit den Hauptteilen  $h_0, h_N$ . Insbesondere ist

$$\left(m(z) - \frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=0} = 0.$$

Wir zeigen, daß  $m(z)$  elliptisch ist: Es ist

$$\begin{aligned} m(-z) &= m(z) \\ m'(z) &= -\frac{2}{z^3} - 2 \sum^* \frac{1}{(z-\omega)^3} = -2 \sum \frac{1}{(z-\omega)^3}. \end{aligned}$$

Offenbar ist  $m'$  periodisch und hat den Grad drei. Aus  $m'(z + \omega_1) = m'(z)$  folgt mit einer Konstanten  $c$

$$m(z + \omega_1) = m(z) + c,$$

insbesondere für  $z = -\omega_1/2$

$$m\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = m\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + c.$$

Mithin ist  $c = 0$ , und es gilt

$$m(z + \omega_1) = m(z).$$

Analog folgt für eine beliebige Periode  $\omega$

$$m(z + \omega) = m(z).$$

Die so konstruierte elliptische Funktion zweiten Grades nennen wir  $\wp(z)$ , also  $\wp(z) := m(z)$ . Natürlich gibt es noch andere elliptische Funktionen zweiten Grades, zum Beispiel solche mit zwei verschiedenen Polen erster Ordnung im Periodenparallelogramm.

Als nächstes leiten wir die Differentialgleichung für  $\wp$  durch Koeffizientenvergleich ab: In  $U(0)$  ist

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \dots \\ (\wp'(z))^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \dots \\ (\wp(z))^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 + 20c_2 \wp = -28c_4.$$

Auf der rechten Seite können nämlich keine Terme höherer Ordnung mehr auftreten, weil es außer der Konstanten keine holomorphe elliptische Funktion gibt. Analog folgt aus

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 2c_2 + \dots$$

die Differentialgleichung

$$\wp'' - 6\wp^2 = -10c_2.$$

Wir wollen noch die Konstanten  $c_2$  und  $c_4$  angeben: Es sei

$$\varphi(z) := \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum^* \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2} \varphi''(0) = 3 \sum^* \frac{1}{\omega^4} \\ c_4 &= \frac{1}{4!} \varphi^{IV}(0) = 5 \sum^* \frac{1}{\omega^6}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet auch

$$g_2 := 60 \sum^* \frac{1}{\omega^4} = 20c_2$$

$$g_3 := 140 \sum^* \frac{1}{\omega^6} = 28c_4.$$

Dann ist

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\wp'' = 6\wp^3 - \frac{g_2}{2}. \tag{*}$$

In der Theorie der elliptischen Funktionen zeigt man nun, daß sich zu vorgegebenen  $g_2$  und  $g_3$  mit

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

stets Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  finden lassen mit

$$g_2 = 60 \sum^* \frac{1}{\omega^4} \quad \text{und} \quad g_3 = 140 \sum^* \frac{1}{\omega^6}.$$

Es gibt dann also immer eine  $\wp$ -Funktion zu diesen Werten. Das besagt der Satz von Picard.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

und man rechnet

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

nach. Es ist also

$$\wp' = 2\sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)},$$

und es gilt

$$\wp'(z) = 0 \quad \text{für} \quad z = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Elliptische Funktionen treten zum Beispiel bei der Berechnung des Umfangs von Ellipsen auf. Daher der Name. Es seien etwa  $0 < b < a$  und  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ . Dann erhält man mit  $\varepsilon := (a^2 - b^2)/a^2$

$$U = 4 \int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$= 2a \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2a \int_{-1}^1 \frac{1 - \varepsilon x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varepsilon x^2)}} dx.$$

Allgemein bezeichnet man als elliptisches Integral ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{a_0 + a_1x + \dots + a_4x^4}) dx$$

mit einer rationalen Funktion  $R$ . Mit Hilfe der elliptischen Funktionen lassen sich solche Integrale angeben. Betrachten wir einen einfachen Fall:

$$z = \int_{w_0}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}.$$

Dann ist

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{4w^3 - g_2w - g_3},$$

also

$$w(z) = \wp(z) + c$$

oder für  $c = 0$

$$z = \wp^{-1}(w).$$

Elliptische Funktionen treten auch bei dem Problem der *Uniformisierung* auf: Denken wir zunächst an den Kreis

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

oder allgemeiner an eine ganz rationale Funktion  $G(x, y)$  in  $x, y$  (an ein Polynom). Dann definiert

$$G(x, y) = 0$$

eine *algebraische Kurve*, dabei seien  $x, y \in \mathbb{C}$  zugelassen. Das Problem der Uniformisierung besteht nun darin, zwei Funktionen eines Parameters  $t$  zu finden, die diese Kurve darstellen. Es geht also um das Auflösen einer impliziten Gleichung. Im Fall des Kreises ist das leicht. Es sei

$$x = \varphi(t) := \cos t.$$

Dann ist  $\varphi'(t) = -\sin t$  und

$$\varphi^2 + (\varphi')^2 = 1.$$

Das heißt, der Kreis wird durch

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \varphi'(t)$$

uniformisiert. An solchen Uniformisierungen mit  $x = \varphi(t)$  und  $y = \varphi'(t)$  ist man besonders interessiert, weil sie das Integrieren erleichtern. Betrachten wir noch zwei Beispiele:

1. Das *Weierstraßsche Gebilde*

$$y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3) = 0.$$

Wenn  $4x^3 - g_2x - g_3$  drei verschiedene Nullstellen hat, ist  $g_2^3 \neq 27g_3^2$ . Man wählt dann die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion zu diesen  $g_2, g_3$  und erhält die Uniformisierung

$$x = \wp(t), \quad y = \wp'(t).$$

2. Das *Legendresche Gebilde*

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - \varepsilon x^2) \quad \text{mit } \varepsilon \neq 0, 1.$$

Es sei

$$s(u) := \frac{1}{\sqrt{\wp(u) - e_3}} = u - \left(1 + k^2(\omega_1, \omega_2)\right) \frac{u^3}{3!} \pm \dots$$

die *Sinus amplitudinis Funktion*. Für  $k = 0$  ist  $s(u) = \sin u$ . Man kann zeigen, daß sich zu  $\varepsilon$  Perioden  $\omega_1, \omega_2$  so angeben lassen, daß die zu  $\omega_1, \omega_2$  gebildete Funktion  $s$  der Differentialgleichung

$$(s')^2 = (1 - s^2)(1 - \varepsilon s^2)$$

genügt.  $s$  und  $s'$  liefern also die Uniformisierung des Legendreschen Gebildes.

3. Erinnert sei noch an die Pendelgleichung in Beispiel 8.1.2.5,6. Dort waren wir auf das elliptische Integral

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

für die Schwingungsdauer gestoßen. Dieses Integral führt also auf das Legendresche Gebilde, und es ist

$$I = s^{-1}(1).$$

Wir hatten es mit dem Gaußschen Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels berechnet.

Es gibt noch viele schöne Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen, auch in der Zahlentheorie. Hierauf kann ich nicht weiter eingehen. Verwiesen sei auch auf A. Hurwitz und R. Courant: *Funktionentheorie*. Vierte Auflage 1964. Springer-Verlag, Berlin.

## 13.17 Konforme Abbildungen

Es seien  $G_1, G_2$  zwei Gebiete in  $\mathbb{C}$  und

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

eine biholomorphe Abbildung. Nach Definition 13.9.2 bzw. Satz 13.9.3 heißt eine solche Abbildung konform.  $f$  ist dann winkel- und orientierungstreu und im Kleinen maßstabstreu. Wir sagen auch

**Definition 13.17.1:** Zwei Gebiete  $G_1, G_2$  in  $\mathbb{C}$  heißen konform äquivalent, wenn es eine konforme Abbildung

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

gibt.

Zwei Aufgaben stellen sich:

1. Man bestimme Klassen konform äquivalenter Gebiete.
2. Man bestimme alle konformen Abbildungen eines Gebietes auf sich.

Zur Beantwortung der ersten Frage möchte man ein Normgebiet als Repräsentant einer solchen Klasse angeben und das Normgebiet charakterisieren. Zur Beantwortung der zweiten soll die Gruppe aller konformen Abbildungen eines Normgebietes auf sich bestimmt werden. Man sucht also die Automorphismengruppe des Normgebietes.

Diese Fragen kann ich in der zur Verfügung stehenden Zeit hier nicht in voller Allgemeinheit angehen. Vielmehr werde ich nur einen wichtigen Spezialfall klären. Vorweg als Mitteilung einige Resultate:

Normgebiet	Automorphismengruppe
$\mathbb{C}$	$w = az + b$ mit $a \neq 0$
$\hat{\mathbb{C}}$	$w = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ ad - bc  = 1$
$B(0, 1)$	$w = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$ mit $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$w_{1,2} = az^{\pm 1}$ mit $a \neq 0$
$B(0, 1) \setminus \{0\}$	$w = e^{i\varphi} z$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$
$\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} <  z  < r\}$	$w_{1,2} = e^{i\varphi} z^{\pm 1}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Unser Ziel hier ist der Beweis des berühmten Riemannschen Abbildungssatzes, nämlich

**Riemannscher Abbildungssatz:** *Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $G \neq \mathbb{C}$ . Dann ist  $G$  zu  $B(0, 1)$  konform äquivalent.*

Außerdem zeigen wir

**Satz 13.17.2:** *Es seien  $G$  wie im Riemannschen Abbildungssatz und  $z_0 \in G$ . Dann gibt es genau eine konforme Abbildung*

$$f : G \longrightarrow B(0, 1)$$

mit  $f(z_0) = 0$  und  $f'(z) > 0$ .

Wir beginnen mit vier Bemerkungen:

1.  $\mathbb{C}$  und  $\hat{\mathbb{C}}$  sind nicht konform äquivalent zum Einheitskreis;  $\mathbb{C}$  und  $B(0, 1)$  sind aber homöomorph äquivalent. Eine konforme Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow B(0, 1) \text{ oder } f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow B(0, 1)$$

wäre nämlich beschränkt und damit aufgrund des Satzes von Liouville konstant. Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow B(0, 1)$$

$$z \longmapsto \frac{z}{1 + |z|}$$

ist ein Homöomorphismus. Es ist

$$f^{-1}(w) = \frac{w}{1 - |w|}.$$

2. Wir zeigen

**Satz 13.17.3:** *Die Automorphismengruppe des Einheitskreises besteht aus allen Abbildungen*

$$w = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

Beweis:

- (i): Jede Abbildung

$$w = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

ist ein Automorphismus des Einheitskreises. Wegen  $|a|^2 = 1 + |b|^2$  ist nämlich  $a \neq 0$  und mit  $A = -b/a$  und  $e^{i\varphi} = a/\bar{a}$

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - A}{1 - \bar{A}z} \quad \text{mit} \quad A\bar{A} = \frac{b\bar{b}}{1 + b\bar{b}} < 1.$$

Nach §13.9.3 ist diese spezielle Möbiustransformation eine Abbildung des Einheitskreises auf sich.

(ii): Es sei  $w = f(z)$  ein Automorphismus des Einheitskreises mit dem Fixpunkt  $z = 0$ . Dann folgt aus dem Schwarzschen Lemma in §13.10

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Weil  $f$  konform ist, ist  $f'(0) \neq 0$ , und für  $g := f^{-1}$  gilt ebenso  $g'(0) \neq 0$ . Nun  $g \circ f = id$ . Daraus folgt

$$1 = \frac{d}{dz}(g \circ f) \Big|_{z=0} = (g' \circ f) \cdot f' \Big|_{z=0} = g'(0) \cdot f'(0),$$

also  $|f'(0)| = 1$ . Dann folgt aus dem Schwarzschen Lemma

$$f(z) = e^{i\varphi} z \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

(iii): Es sei nun  $g$  ein beliebiger Automorphismus des Einheitskreises mit  $g(0) = c \in B(0, 1)$ . Dann ist

$$h(z) := \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

ein Automorphismus mit  $h(c) = 0$ . Also ist  $h \circ g$  ein Automorphismus mit dem Fixpunkt Null. Das bedeutet

$$(h \circ g)(z) = e^{i\varphi} z$$

oder

$$g(z) = h^{-1}(e^{i\varphi} z) = \frac{e^{i\varphi} z + c}{\bar{c}e^{i\varphi} z + 1} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

mit

$$a := r e^{i\varphi/2}, \quad b := r e^{-i\varphi/2} c$$

und zunächst beliebigem  $r \in \mathbb{R}$ . Nun ist

$$a\bar{a} - b\bar{b} = r^2(1 - c\bar{c}).$$

Man wähle also  $r := (1 - c\bar{c})^{-1/2}$ . Damit hat  $g$  die gewünschte Form. □

3. Aus dem Vorangegangenen folgt bereits die Normierung in Satz 13.17.2. Es seien nämlich für  $i = 1, 2$

$$f_i : G \longrightarrow B(0, 1) \quad \text{mit} \quad f_i(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'_i(z_0) =: p_i > 0$$

und  $\mathcal{A}$  die Automorphismengruppe des Einheitskreises. Dann existiert ein  $g \in \mathcal{A}$  mit

$$f_2 = g \circ f_1$$

und

$$0 = f_2(z_0) = g(0)$$

sowie

$$p_2 = f'_2(z_0) = (g' \circ f_1) \cdot f'_1 \Big|_{z=z_0} = g'(0) p_1.$$

Es ist also  $g(0) = 0$  und  $g'(0) > 0$ . Aus

$$g(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{mit} \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

folgt dann  $b = 0$ , also  $|a| = 1$  und

$$g'(z) = \frac{a}{\bar{a}} > 0.$$

Also ist  $a$  reell und  $g(z) = z$ .

**Bemerkung 13.17.4:** Natürlich hätte man die Normierung auch anders vornehmen können, zum Beispiel durch Vorgabe von  $\arg f'(z_0)$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ .

4. Es genügt, den Riemannsches Abbildungssatz für beschränkte Gebiete zu zeigen. Es gilt nämlich

**Satz 13.17.5:**  $G$  ist zu einem beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiet konform äquivalent.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein Punkt  $a \in \mathbb{C}$  mit  $a \notin G$ . Mithin gibt es mindestens zwei Punkte aus  $\hat{\mathbb{C}}$ , die nicht zu  $G$  gehören, nämlich  $a$  und  $\infty$ . Mit  $G$  ist auch  $\mathbb{C} \setminus G$  in  $\hat{\mathbb{C}}$  einfach zusammenhängend. Mithin gibt es einen Weg von  $a$  nach  $\infty$  in  $\mathbb{C} \setminus G$ . Wir schneiden  $\hat{\mathbb{C}}$  längs dieses Weges auf und bilden

$$\begin{aligned} f_1 : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sqrt{z-a}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung läßt sich eindeutig definieren, und

$$f_1 : G \longrightarrow G_1 := f_1(G)$$

ist konform mit  $f_1^{-1}(w) = w^2 + a$ .

Es sei nun  $z_1 \in G_1$ . Dann ist  $-z_1 \notin G_1$ , denn beide Punkte hätten sonst dasselbe Urbild. Aufgrund des Satzes von der Gebietstreue gibt es zu  $z_1$  ein  $B(z_1, \rho) \subset G_1$  mit  $B(-z_1, \rho) \not\subset G_1$ . Als nächstes betrachten wir deshalb die Abbildung

$$\begin{aligned} f_2 : G_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z+z_1}. \end{aligned}$$

Für diese Abbildung gilt

$$-z_1 \longmapsto \infty \quad \text{und} \quad B(-z_1, \rho) \longmapsto \left\{ w \mid |w| > \frac{1}{\rho} \right\}.$$

Mithin bildet

$$f_2 : G_1 \longrightarrow G_2 := f_2(G_1) \subset B(0, \frac{1}{\rho})$$

biholomorph ab. Die Gebiete  $G$  und  $G_2$  sind also konform äquivalent.  $G_2$  ist beschränkt und ebenfalls einfach zusammenhängend. Letzteres wegen

**Lemma 13.17.6:** Es sei  $G$  einfach zusammenhängend und

$$f : G \longmapsto G'$$

biholomorph. Dann ist  $G'$  einfach zusammenhängend.

Zum Beweis sei daran erinnert, daß  $G$  genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn jeder Zyklus  $\Gamma$  in  $G$  nullhomolog ist, und das ist nach Satz 13.4.3 genau dann der Fall, wenn für jede holomorphe Abbildung  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$$

ist. Es sei nun  $\Gamma' \subset G'$  ein Zyklus,  $g$  auf  $G'$  holomorph und  $\Gamma := f^{-1}(\Gamma')$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma'} g(w) dw = \int_{\Gamma} (g \circ f)(z) \cdot f'(z) dz = 0,$$

weil  $G$  einfach zusammenhängend ist. □

Es sei schließlich  $b \in G_2$  und

$$\begin{aligned} f_3 : G_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\rho}{2}(z-b). \end{aligned}$$

Dann ist  $|f_3(z)| < 1$ , also

$$f_3 : G_2 \longrightarrow B(0, 1).$$

Mithin genügt es, den Riemannschen Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Gebiete  $G$  mit

$$0 \in G \subset B(0, 1)$$

zu beweisen. Das soll im folgenden geschehen.

Zunächst werde an einige Begriffe und Resultate über Folgen konformer Abbildungen erinnert. Dabei seien die Mengen  $U, V \subset \mathbb{C}$  stets offen.

1.  $(f_n)$  konvergiert auf  $M$  gleichmäßig gegen  $f$  :  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall z \in M \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2.  $(f_n)$  konvergiert auf  $U$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  :  $\iff$

$$\forall z_0 \in U \quad \exists V(z_0) \subset U \quad \text{mit } (f_n) \text{ konvergiert auf } V(z_0) \text{ gleichmäßig.}$$

Es sei nun  $\mathcal{F}$  eine Menge (Familie) auf  $M \subset \mathbb{C}$  definierter Funktionen.

3.  $\mathcal{F}$  heißt beschränkt :  $\iff$

$$\exists c \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z \in M \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(z)| \leq c.$$

4. Eine auf  $U$  definierte Familie  $\mathcal{F}$  heißt lokal beschränkt :  $\iff$

$$\forall z_0 \in U \quad \exists V(z_0) \subset U \quad \text{mit } \{f|V \mid f \in \mathcal{F}\} \text{ ist beschränkt.}$$

5.  $\mathcal{F}$  heißt gleichartig stetig :  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z_1, z_2 \in M, |z_1 - z_2| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

6. Eine auf  $U$  definierte Familie  $\mathcal{F}$  heißt lokal gleichartig stetig :  $\iff$

$$\forall z_0 \in U \quad \exists V(z_0) \subset U \quad \text{mit } \{f|V \mid f \in \mathcal{F}\} \text{ ist gleichartig stetig.}$$

7.  $(f_n)$  konvergiert auf  $U$  lokal gleichmäßig gegen  $\infty$  :  $\iff$

$$\forall K \Subset U \quad \forall R > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall z \in K \quad |f_n(z)| \geq R.$$

8. Eine auf  $U$  definierte Familie holomorpher Funktionen  $\mathcal{F}$  heißt normal :  $\iff$  Jede Folge in  $\mathcal{F}$  besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion oder  $\infty$  konvergiert.

Als erstes zeigen wir nun

**Lemma 13.17.7:** *Es sei  $(f_n)$  eine auf  $G \subset \mathbb{C}$  lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nicht konstantem Grenzwert  $f$ .  $f$  habe in  $z_0 \in G$  eine  $k$ -fache  $w_0$ -Stelle. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V, z_0 \in V \subset B(z_0, \varepsilon) \subset G, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad f_n|V \text{ hat } k \text{ } w_0\text{-Stellen.}$$

Beweis: O.B.d.A. sei  $w_0 = 0$ . Man wähle  $0 < \delta < \varepsilon$  so, daß  $f|B(z_0, \delta)$  nur in  $z_0$  verschwindet und daß  $(f_n)$  in  $B(z_0, \delta)$  gleichmäßig konvergiert. Es seien ferner

$$\eta := \min \{ |f(z)| \mid z \in \partial B(z_0, \delta) \} > 0$$

und  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in \partial B(z_0, \delta) \quad |f_n(z) - f(z)| < \eta$$

ist. Für  $0 \leq \lambda \leq 1$  sei nun

$$h_\lambda := f + \lambda(f_n - f).$$

Dann ist  $h_0 = f$ ,  $h_1 = f_n$ , und wegen

$$|\lambda(f_n - f)| < \eta \leq |f| \quad \text{auf } \partial B(z_0, \delta)$$

verschwindet  $h_\lambda$  dort nicht. Mithin ist

$$N_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, \delta)} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} dz$$

die Anzahl der Nullstellen von  $h_\lambda$  in  $B(z_0, \delta)$ . Der Integrand hängt stetig von  $\lambda$  ab, und es ist  $N_\lambda \in \mathbb{Z}$ . Mithin ist  $N_\lambda$  bezüglich  $\lambda$  konstant also  $N_0 = N_1$ .  $\square$



**Folgerung 13.17.8:** Sind die  $f_n$  injektiv, dann ist auch  $f$  injektiv.

Es sei nämlich  $f(z_1) = f(z_2) = w_0$  für  $z_1 \neq z_2$ . Dann gibt es disjunkte  $V_j(z_j)$  so, daß für alle  $n \geq n_0$  die  $f_n$  in  $V_1$  und  $V_2$  eine  $w_0$ -Stelle besitzen.

Im folgenden sollen konvergente Teilfolgen ausgewählt werden. Dazu sei an Satz 8.2.8 erinnert, den

**Satz von Arzelà-Ascoli:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $(f_n)$  eine beschränkte und gleichartig stetige Folge auf  $M$  definierter Abbildungen. Dann gibt es eine auf  $M$  gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $(f_n)$ .

Die lokale Version dieses Satzes lautet

**Satz 13.17.9:** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $(f_n)$  eine auf  $U$  lokal beschränkte und lokal gleichartig stetige Funktionenfolge. Dann gibt es eine auf  $U$  lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $(f_n)$ .

Es seien nun  $U \subset \mathbb{C}$  und  $f_n$  in  $U$  holomorph. Dann vereinfacht sich die Situation, denn es gilt

**Satz 13.17.10:** Eine auf einer offenen Menge  $U$  lokal beschränkte Menge holomorpher Funktionen  $\mathcal{F}$  ist lokal gleichartig stetig.

Beweis: Es seien  $\bar{B}(a, r) \subset U$  und  $|f| \leq k$  auf  $\bar{B}(a, r)$  für alle  $f \in \mathcal{F}$ . Wir zeigen die gleichartige Stetigkeit auf  $M := \bar{B}(a, r/2)$ : Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{F}$  und  $z_1, z_2 \in M$

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{z \in M} |f'(z)|.$$

Nun ist aber für  $z \in M$

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{4k}{r},$$

also

$$\forall z_1, z_2 \in M, |z_1 - z_2| < \delta := \frac{\varepsilon r}{4k}, \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon.$$

Es gilt also der nach P. MONTEL, 1876–1975, benannte Satz

**Satz von Montel:** Es sei  $(f_n)$  eine auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Dann besitzt  $(f_n)$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Die Grenzfunktion einer solchen Folge ist wieder holomorph. Das folgt aus dem Satz von Weierstraß in §13.7. Mithin gilt

**Satz 13.17.11:** Eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir den Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes zu Ende führen. Es war  $G$  einfach zusammenhängend mit

$$0 \in G \subset B(0, 1),$$

und wir suchen eine konforme Abbildung

$$f : G \longrightarrow B(0, 1).$$

Es sei

$$\mathcal{F} := \{f : G \rightarrow B(0, 1) \mid f \text{ ist injektiv und holomorph mit } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

$\mathcal{F}$  ist nicht leer, denn  $id(z) = z$  gehört zu  $\mathcal{F}$ . Die Familie  $\mathcal{F}$  ist durch eins beschränkt, also normal. Es sei

$$\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(0).$$

Weil  $id$  zu  $\mathcal{F}$  gehört, ist  $1 \leq \alpha \leq \infty$ . Es sei  $(f_n)$  eine Folge mit  $f_n \in \mathcal{F}$  und  $f'_n(0) \rightarrow \alpha$ . Dann existiert eine Teilfolge, die wir wieder  $(f_n)$  nennen und die lokal gleichmäßig gegen die holomorphe Funktion  $f$  konvergiert.  $f$  ist in  $G$  eindeutig erklärt, das besagt der Monodromiesatz, und aus dem Satz von Weierstraß folgt

$$f'_n(0) \longrightarrow f'(0).$$

Mithin ist  $f'(0) = \alpha < \infty$ . Wegen  $\alpha \geq 1$  ist  $f$  nicht konstant. Aus  $|f_n| < 1$  folgt zunächst  $|f| \leq 1$ , und aus dem Maximumprinzip sogar

$$\forall z \in G \quad |f(z)| < 1.$$

Schließlich ist  $f$  injektiv nach Folgerung 13.17.8. Es ist also

$$f \in \mathcal{F}.$$

Zu zeigen bleibt noch  $f(G) = B(0, 1)$ . Dazu benutzen wir

**Lemma 13.17.12:** *Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes echtes Teilgebiet des Einheitskreises mit  $0 \in G$ . Dann gibt es eine injektive holomorphe Abbildung*

$$h : G \longrightarrow B(0, 1) \quad \text{mit} \quad h(0) = 0 \quad \text{und} \quad h'(0) > 1.$$

Wir beenden zunächst den Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes und zeigen anschließend das Lemma. Es sei also  $B := f(G) \neq B(0, 1)$  und  $h$  nach Lemma 13.17.12 gewählt. Dann ist  $h \circ f \in \mathcal{F}$  mit

$$(h \circ f)'(0) = (h' \circ f) \cdot f'|_{z=0} = h'(0) \alpha > \alpha$$

im Widerspruch zur Definition von  $\alpha$ . Damit ist der Riemannsches Abbildungssatz bewiesen.  $\square$

Beweis von Lemma 13.17.12: Es sei  $c \in B(0, 1) \setminus G$ . Dann ist  $c \neq 0$ . Es sei ferner

$$\begin{aligned} s_1 : B(0, 1) &\longrightarrow B(0, 1) \\ z &\longmapsto \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \end{aligned}$$

ein Automorphismus des Einheitskreises. Dann ist  $s_1(0) = -c$  und  $s_1'(0) = 1 - c\bar{c} > 0$ .  $s_1(G)$  ist nach Lemma 13.17.6 einfach zusammenhängend und enthält den Nullpunkt nicht. Mithin existiert

$$\begin{aligned} s_2 : s_1(G) &\longrightarrow B(0, 1) \\ z &\longmapsto \sqrt{z}. \end{aligned}$$

$s_2$  ist eine injektive holomorphe Abbildung. Es seien  $d := s_2(-c) = |d|e^{i\delta} \in B(0, 1) \setminus \{0\}$  und

$$\begin{aligned} s_3 : B(0, 1) &\longrightarrow B(0, 1) \\ z &\longmapsto e^{i\delta} \frac{z - d}{1 - \bar{d}z} \end{aligned}$$

ein Automorphismus des Einheitskreises. Es sei schließlich

$$h : G \longrightarrow B(0, 1), \quad h := s_3 \circ s_2 \circ s_1.$$

$h$  ist eine injektive holomorphe Abbildung. Dann gilt

$$s_1(0) = -c, \quad s_2(-c) = d, \quad s_3(d) = 0,$$

also  $h(0) = 0$  und

$$s_1'(0) = 1 - c\bar{c}, \quad s_2'(z) = \frac{1}{2s_2(z)}, \quad s_2'(-c) = \frac{1}{2d}, \quad s_3'(d) = \frac{e^{i\delta}}{1 - d\bar{d}}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} h'(0) &= (s_3' \circ (s_2 \circ s_1)) \cdot (s_2' \circ s_1) \cdot s_1'|_{z=0} \\ &= s_3'(d) \cdot s_2'(-c) \cdot s_1'(0) \\ &= \frac{1 - c\bar{c}}{2|d|(1 - d\bar{d})}. \end{aligned}$$

Es sei nun  $x = |d|$ . Dann ist  $0 < x < 1$ , und es gilt mit  $F(x) := h'(0)$

$$F(x) = \frac{1 - x^4}{2x(1 - x^2)} = \frac{1 + x^2}{2x}.$$

Wegen

$$F'(x) = 1 - \frac{(1 + x^2)}{2x^2} = \frac{(x^2 - 1)}{2x^2} < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

ist  $F(x)$  eine monoton fallende Funktion in  $0 < x < 1$  mit  $F(0) = +\infty$  und  $F(1) = 1$ . Deshalb ist

$$F(x) > 1 \quad \text{in} \quad 0 < x < 1.$$

Das war zu zeigen.  $\square$

### 13.18 Randwertaufgaben in der Potentialtheorie

Zur Vertiefung des Verständnisses soll nun noch ein Ausblick auf Randwertaufgaben gegeben werden. Randwertaufgaben treten bei vielen physikalischen Fragestellungen auf. Es seien etwa  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $A$  ein Differentialoperator,  $g$  eine Funktion auf  $G$  und  $h$  eine Funktion auf  $\partial G$  vorgegeben. Dann sucht man eine Lösung  $u$  mit

$$Au = g \text{ in } G \quad \text{und} \quad u|_{\partial G} = h.$$

Eine solche Randwertaufgabe nennt man Dirichletsche Randwertaufgabe. Natürlich sind auch andere Randwertaufgaben möglich. Erinnert sei an §8.5, wo wir analoge Probleme für gewöhnliche Differentialgleichungen bereits behandelt haben. Im  $\mathbb{R}^n$  sei zum Beispiel

$$A := - \sum_{j,k=1}^n \partial_j a_{jk}(x) \partial_k$$

mit

$$\exists p > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{j,k=1}^n \xi_j a_{jk}(x) \xi_k \geq p |\xi|^2.$$

Der einfachste Operator dieser Art ist der  $\Delta$ -Operator. Er tritt in der Physik oft auf, zum Beispiel in der Elektrostatik. Die Lösungstheorie zu  $\Delta$  nennt man *Potentialtheorie*. Solche Randwertaufgaben werden in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ausführlich behandelt.

Hier soll nur der Zusammenhang mit der Funktionentheorie herausgestellt werden. Dazu müssen wir uns natürlich auf den  $\mathbb{R}^2$  beschränken. Wir wollen weiter vereinfachen und wählen  $G \subset \mathbb{R}^2$  als ein beschränktes, einfach zusammenhängendes und glatt berandetes Gebiet. Natürlich kann man allgemeinere Gebiete zulassen. Wir wollen andeuten, wieso der Riemannsche Abbildungssatz und das Lösen der Dirichletschen Randwertaufgabe in der Potentialtheorie äquivalent sind.

Zunächst ist klar, daß in beiden Fällen dieselbe Differentialgleichung zugrundeliegt. Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion genügen ja der Potentialgleichung. Zur Erinnerung: Es sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $f = u + iv$ . Dann genügen  $u, v$  den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -\partial_y \\ \partial_x \end{pmatrix} v = 0,$$

und aus ihnen folgt  $\Delta u = \Delta v = 0$ .  $v$  nennt man auch die zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion. Es gilt

**Satz 13.18.1:** *Es seien  $G$  einfach zusammenhängend und  $u$  in  $G$  harmonisch. Dann existiert eine zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion  $v$ . Sie ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die 1-Form  $\omega := (\partial_y u)dx - (\partial_x u)dy$  ist geschlossen. Wegen des einfachen Zusammenhangs von  $G$  ist dann für alle geschlossenen Wege  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} \omega = 0.$$

$\omega$  ist exakt, und es existiert eine 0-Form  $\pi$  mit  $\omega = d\pi$ . Es sei  $\pi =: v$ . Dann ist  $d\pi = (\partial_x v)dx + (\partial_y v)dy$ . Das beweist den Satz.  $\square$

In der Einführung §13.1 haben wir bereits gesehen, daß die Vektorfelder  $\nabla u$  und  $\nabla v$  aufeinander senkrecht stehen. Höhenlinien zu  $u = \text{const}$  sind Falllinien zu  $v = \text{const}$  und umgekehrt.

Mittelwertegenschaft, Maximumprinzip und Darstellungsformeln lassen sich auch für  $u$  und  $v$  im Rellen beweisen und als Aussagen der Potentialtheorie formulieren. Das soll hier nicht vorgeführt werden.

Wir wollen uns nun vielmehr direkt der Randwertaufgabe zuwenden. Eine alte klassische Lösungsidee ist es zu versuchen, die Cauchysche Integralformel reell zu schreiben. Im Komplexen ist ja für  $z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Man erhält also  $f$  in  $G$  aus den Randwerten von  $f$ . Dabei muß  $f$  in  $G$  holomorph und in  $\bar{G}$  stetig sein. Die inhomogene Aufgabe läßt sich durch die allgemeine Cauchysche Integralformel in §13.5 analog lösen. Beachten Sie, daß  $f$  dabei durch einen *singulären Kern* in Integranden erzeugt wird, nämlich durch  $(\zeta - z)^{-1}$ .

Die Dirichletsche Randwertaufgabe in der Potentialtheorie kann man nun analog lösen, wenn man eine geeignete Singularitätenfunktion kennt. Man nennt sie *Greensche Funktion*  $\gamma$  zu  $G$ . Eine Greensche Funktion ist Ihnen bereits in der Theorie der Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen in §8.5.2 begegnet. In der

Potentialtheorie im  $\mathbb{R}^2$  ist sie durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Es sei  $z = (x, y) \in G$  fest und  $\zeta = (\xi, \eta)$  die laufende Variable. Dann soll gelten

1.  $\gamma(\cdot, z) \in C_2(G \setminus \{z\}) \cap C_1(\bar{G} \setminus \{z\})$ .
2.  $\Delta\gamma(\cdot, z) = 0$  in  $G \setminus \{z\}$ .
3.  $\gamma(\cdot, z) + \frac{1}{2\pi} \ln |\cdot - z| \in C_2(G)$ .
4.  $\forall \zeta \in \partial G \quad \gamma(\zeta, z) = 0$ .

Die Greensche Funktion ist also eine singuläre Lösung der homogenen Randwertaufgabe (zu den Randwerten  $h = 0$ ). Die einzelnen Regularitätsannahmen lassen sich abschwächen, insbesondere Eigenschaft 1. Aus diesen Eigenschaften folgt leicht die Symmetrie der Greenschen Funktion,

$$\gamma(\zeta, z) = \gamma(z, \zeta)$$

und  $0 \leq \gamma(\zeta, z)$ . Man vergleiche §8.5.2 (mit  $p = r = 1$  und  $q = 0$ ). Es gilt

**Satz 13.18.2:** Es seien  $u \in C_2(G) \cap C_1(\bar{G})$ ,  $-\Delta u =: g \in C_\alpha(G)$ ,  $u|_{\partial G} =: h \in C(G)$  und  $n$  der nach außen gerichtete Normalenvektor von  $\partial G$ . Die Greensche Funktion  $\gamma$  zu  $G$  existiere. Dann gilt

$$u(z) = \int_G g \gamma(\cdot, z) - \int_{\partial G} h(n, \nabla) \gamma(\cdot, z).$$

Dieser Darstellungssatz läßt sich analog zur allgemeinen Cauchyschen Integralformel beweisen.

Das Problem besteht natürlich darin, die Greensche Funktion zu finden. Das gelingt leicht für spezielle Gebiete (Kreise, Quader), ist aber im allgemeinen eine sehr schwierige Aufgabe. Der Grund dafür ist folgender: Die Cauchysche Integralformel liefert  $f$  in  $G$  aus den Randwerten  $f|_{\partial G}$ . Es müssen also sowohl  $u|_{\partial G}$  als auch  $v|_{\partial G}$  bekannt sein. In der Potentialtheorie hingegen ist nur  $u|_{\partial G}$  vorgegeben, und man muß sich  $v|_{\partial G}$  erst verschaffen, wenn man die Cauchysche Integralformel direkt verwenden will. Aus der Sicht der Potentialtheorie ist  $f$  also durch Vorgabe von  $f|_{\partial G}$  in der Cauchyschen Integralformel völlig überbestimmt, und eben das macht sie so einfach. Unser Problem besteht jetzt darin, daß nur  $\operatorname{Re} f|_{\partial G}$  vorgegeben ist und daß allein daraus  $f$  bestimmt werden soll.

Wie gesagt, für spezielle geometrisch einfache Gebiete lassen sich die Greensche Funktion und Darstellungen der Lösung leicht angeben. Betrachten wir den Kreis  $B(0, R)$ . In diesem Falle erhält man aus der Cauchyschen Integralformel mit  $z = r e^{i\psi}$  und  $\zeta = R e^{i\varphi}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{R^2 - \bar{\zeta}z} d\varphi.$$

Nun ist für festes  $z \in B(0, R)$  die Funktion

$$\frac{f(\zeta)}{R^2 - \bar{\zeta}z}$$

in  $\bar{B}(0, R)$  holomorph. Es gilt also auch

$$\frac{f(z)}{R^2 - r^2} = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{|R^2 - \bar{\zeta}z|^2} d\varphi$$

und damit

$$f(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} d\varphi.$$

Daraus folgt die *Poissonsche Integralformel* für den Kreis

$$u(z) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta)}{|\zeta - z|^2} d\varphi.$$

Sie ist nach S.D. Poisson, 1781–1840, benannt.

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Es sei

$$f : G \longrightarrow B(0, 1)$$

die konforme Abbildung mit  $f(z) = 0$  und  $f'(z) > 0$  für ein festes  $z \in G$ . Im letzten Kapitel haben wir  $f$  konstruiert (Riemannscher Abbildungssatz). Es sei ferner für  $\zeta \in G$

$$\gamma(\zeta, z) := -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(\zeta)|.$$

Dann ist  $\gamma$  die Greensche Funktion zu  $G$ . Um das zu zeigen, skizzieren wir den Nachweis der einzelnen Eigenschaften: Es ist

$$f(\zeta) = (\zeta - z)p(\zeta)$$

mit einer holomorphen Funktion  $p$  und  $p(z) > 0$ , also

$$\ln |f(\zeta)| = \ln |\zeta - z| + \ln |p(\zeta)|$$

oder

$$\gamma(\zeta, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\zeta - z| - \frac{1}{2\pi} \ln |p(\zeta)|.$$

Daraus folgen die Eigenschaften 1–3, und Eigenschaft 4 erhält man aus

$$\lim_{\zeta \rightarrow \partial G} |f(\zeta)| = 1.$$

**Beispiel 13.18.3:** Wir bestimmen die Greensche Funktion für den Einheitskreis:

Die Automorphismen des Einheitskreises mit  $f(z) = 0$  lauten

$$f(\zeta) = e^{i\varphi} \frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}.$$

Es ist

$$f'(\zeta) = \frac{e^{i\varphi}}{1 - |\zeta|^2},$$

und durch die Forderung  $f'(z) > 0$  wird  $\varphi = 0$ , also

$$f(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}.$$

Damit ist

$$\gamma(\zeta, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(\zeta)| = \frac{1}{2\pi} \{-\ln |\zeta - z| + \ln |1 - \bar{z}\zeta|\}$$

die Greensche Funktion für den Einheitskreis. □

Es sei nun umgekehrt die Greensche Funktion  $\gamma$  zu  $G$  bekannt. Dann wollen wir aus ihr die konforme Abbildung

$$f : G \longrightarrow B(0, 1)$$

mit  $f(z) = 0$  und  $f'(z) > 0$  konstruieren: Es sei  $z \in G$  wieder fest und  $\gamma_0$  durch

$$\gamma(\zeta, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\zeta - z| + \gamma_0(\zeta, z)$$

definiert. Es seien ferner  $\gamma_0^*(\zeta, z)$  die zu  $\gamma_0$  nach Satz 13.18.1 existierende konjugiert harmonische Funktion mit  $\gamma_0^*(z, z) = 0$ ,

$$\gamma^*(\zeta, z) := -\frac{1}{2\pi} \arg(\zeta - z) + \gamma_0^*(\zeta, z)$$

und

$$F(\zeta, z) := (\gamma + i\gamma^*)(\zeta, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\zeta - z) + (\gamma_0 + i\gamma_0^*)(\zeta, z).$$

Es sei schließlich

$$f(\zeta) := e^{-2\pi F(\zeta, z)} = (\zeta - z)e^{-2\pi(\gamma_0 + i\gamma_0^*)(\zeta, z)}.$$

Dann ist

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorph mit  $f(z) = 0$  und  $f'(z) > 0$ . Aus  $\gamma \geq 0$  folgt  $|f| \leq 1$ , es gilt sogar

$$\mathcal{R}(f) = B(0, 1),$$

und  $f$  ist die gesuchte konforme Abbildung. Das muß im einzelnen überprüft werden. Um uns ein Bild zu machen, betrachten wir die Schar der Höhenlinien

$$\gamma(\zeta, z) = c.$$

Wegen  $\gamma \geq 0$  beginnt sie mit  $\gamma(\zeta, z) = 0$ ; das ist der Rand  $\partial G$ . Für  $c > 0$  erhält man geschlossene Kurven, die sich für  $c \rightarrow \infty$  auf den Punkt  $z$  zusammenziehen. Man rechnet leicht nach, daß die Falllinien dazu die Höhenlinien von

$$\gamma^*(\zeta, z) = k$$

sind. Diese Linien verbinden  $z$  mit dem Rand und stehen auf  $\partial G$  senkrecht. Für  $\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi}$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt

$$\gamma^*(\zeta, z) \rightarrow -\frac{\varphi}{2\pi}.$$

Bei einmaligem Umlaufen um  $z$  erhöht sich  $\gamma^*$  also um  $-1$ . Die Funktion  $F$  bildet daher  $G$  auf den Streifen

$$\{z \mid 0 < \operatorname{Re} z \leq \infty \text{ und } k \leq \operatorname{Im} z < k + 1\}$$

ab.  $f$  bildet somit  $G$  auf den Einheitskreis ab.

Es gibt viele Methoden, Dirichletsche Randwertaufgaben direkt zu lösen, und zwar im  $\mathbb{R}^n$  und ohne funktionentheoretische Hilfsmittel. Dieses Problem hat eine große Bedeutung für die weitere Entwicklung der Mathematik gehabt, und es läßt sich spannend darüber berichten. Ich möchte zum Abschluß nur noch eine nunmehr klassische Beweisidee schildern, die auch von Riemann selbst verwandt worden ist. Es geht dabei um das *Dirichletsche Prinzip*:

Der Hintergrund ist ein physikalisches Prinzip, welches besagt, daß ein physikalischer Prozeß so abläuft, daß ein Energieintegral – die Wirkung – von der tatsächlichen Lösung minimiert wird. Es seien

$$D(v) := \int_G |\nabla v|^2$$

das *Dirichletsche Integral* und etwa

$$\mathcal{D} := \{u \in C(\bar{G}) \cap C_2(G) \mid D(u) < \infty \text{ und } u|_{\partial G} = h\}$$

der zugrundeliegende Funktionenraum. Dabei sollen  $G \subset \mathbb{R}^n$  das Gebiet und  $h \in C(\partial G)$  eine vorgegebene Funktion sein. Das Dirichletsche Prinzip besagt dann, daß man die gesuchte Lösung  $u$  der Dirichletschen Randwertaufgabe durch Minimieren von  $D(v)$  für  $v \in \mathcal{D}$  erhält.

Das Minimum von  $D(v)$  werde von  $u \in \mathcal{D}$  angenommen. Dann folgt für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathring{C}_\infty(G)$  und alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$D(u + \varepsilon\varphi) \geq D(u)$$

oder

$$2\varepsilon \int_G (\nabla u, \nabla \varphi) + \varepsilon^2 \int_G |\nabla \varphi|^2 \geq 0.$$

Daraus erhält man

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty(G) \quad \int_G (\nabla u, \nabla \varphi) = 0.$$

Aus dieser Beziehung folgt  $\Delta u = 0$ . Das Minimum  $u$  löst also die Randwertaufgabe.

Die andere Richtung, nämlich den Nachweis der Existenz eines Minimums, hielt man wegen  $D(v) \geq 0$  zunächst für trivial. Riemann benutzte das Dirichletsche Prinzip in dieser Form zum Beweis seines Satzes. Der Einspruch und ein Gegenbeispiel wurden dann von Weierstraß vorgetragen. Ich habe schon oft betont, daß Sie nicht das Minimum mit dem Infimum verwechseln dürfen. Dies ist gerade die Stelle, an der in der Analysis dieser große Fehler gemacht worden ist, und zwar von bedeutenden Mathematikern wie Riemann. Es hat dann etwa dreißig Jahre gedauert, bis nach vielen Versuchen das Dirichletsche Prinzip „gerettet“ werden konnte, und zwar von Hilbert und seiner Schule. Durch dieses intensive Bemühen und Nachdenken sind viele Erkenntnisse gewonnen worden, und es ist das entstanden, was man heute moderne Mathematik nennt.

Meine Kritik an Riemann soeben habe ich etwas überspitzt, und sie wird ihm so nicht gerecht. Natürlich hat Riemann den Unterschied zwischen Minimum und Infimum gekannt, und natürlich hat er Weierstraß' Kritik, die dieser ihm bereits vor ihrer Veröffentlichung persönlich vorgetragen hatte, verstanden. Letztlich interessierte sie ihn aber gar nicht, weil das dahinterstehende physikalische Prinzip so plausibel war. Und das genügte ihm zum mathematischen Beweis. Wir stoßen hier also auf die Frage, was ein mathematischer Beweis eigentlich ist und wie er sich von einem physikalischen unterscheidet (Einsicht durch Vernunft – Einsicht durch Erfahrung).

Für Riemann waren das noch Spitzfindigkeiten, die Weierstraß eben klären sollte, wenn dieser unbedingt wollte. Natürlich glaubte Riemann an seine Sätze, und er hat sich um die Fundierung des Dirichletschen Prinzips überhaupt nicht weiter gekümmert.

Beim Beweis des Dirichletschen Prinzips standen dann zwei Gedanken im Vordergrund. Einmal mußte die Klasse der zugelassenen Lösungen geeignet erweitert werden (Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs), um mehr Chancen zum Lösen zu erhalten. Es gibt nämlich sehr einfache Beispiele für Gebiete, für die die klassische Dirichletsche Randwertaufgabe nicht lösbar ist, das Dirichletsche Prinzip aber zu einer Lösung führt. Man denke etwa an den punktierten Einheitskreis mit den Randwerten  $u = 0$  für  $|z| = 1$  und  $u = 1$  für  $z = 0$ . Andererseits mußten geeignete Annahmen an die Klasse der zugelassenen Randwerte  $h$  gefunden werden. Die Voraussetzung  $h \in C(\partial G)$  ist ja nicht angemessen, wegen der aufgetretenen Gegenbeispiele. Man wähle etwa den Einheitskreis und die Randwerte

$$h(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n! \varphi}{n^2}.$$

Diese Randwertaufgabe ist mit Hilfe des Poissonschen Integrals lösbar, das Dirichletsche Integral existiert aber für die Lösung nicht. Die Methode des Dirichletschen Prinzips versagt also in diesem Fall; das läßt sich leicht nachrechnen.

Hier kann ich nur noch ganz kurz eine Lösungsidee schildern: Ich habe schon oft betont, daß es wichtig ist, in einem vollständigen Raum zu arbeiten, wenn man Gleichungen lösen will. Denken Sie an den Banachschen Fixpunktsatz. Und wir haben ja immer wieder Vervollständigungen durchgeführt. Nun ist unser Raum  $\mathcal{D}$  nicht vollständig, man sollte ihn also zuerst einmal vervollständigen. Das hat zur Verallgemeinerung des Begriffs der Ableitung einer Funktion geführt. Verwenden wir etwa neben dem  $\mathcal{L}^2$ -Skalarprodukt auch

$$(f, g)_1 := (f, g) + (\nabla f, \nabla g)$$

mit der entsprechenden Norm, dann kann man  $C_1(G)$  unter dieser Norm vervollständigen und erhält so den *Sobolevraum*  $\mathcal{H}_1(G)$ , benannt nach SERGEI LVOVICH SOBOLEV, 1908–1989. Soll eine Funktion am Rande verschwinden, dann drückt man das durch

$$u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$$

aus.  $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$  ist die Vervollständigung der Testfunktionen unter der  $\|\cdot\|_1$ -Norm. Beachten Sie bitte, daß für diese Definition keine Glattheitseigenschaften des Randes von  $G$  benötigt werden. Allein das ist schon ein ungeheurer Vorteil.

Betrachten wir nun eine einfache Randwertaufgabe, nämlich

$$(-\Delta + 1)u \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad u|_{\partial G} = h.$$

Dabei sei  $h \in \mathcal{H}_1(G)$  vorgegeben. Die *Randwerte*  $h$  sollen also in  $G$  definiert und aus  $\mathcal{H}_1(G)$  sein, das ist die neue Voraussetzung an  $h$ . Testen wir die Differentialgleichung, dann folgt

$$\forall \varphi \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \quad (u, \varphi)_1 \stackrel{!}{=} 0. \quad (*)$$

Gesucht wird nun eine Funktion  $u \in \mathcal{H}_1(G)$  mit  $u - h \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ , die Gleichung (\*) genügt. Das ist der neue Lösungsbegriff. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe läßt sich leicht einsehen. Der Projektionssatz in §9.2 besagt nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(G) &= \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \oplus \mathring{\mathcal{H}}_1(G)^\perp \\ h &= v + u. \end{aligned}$$

Diese Funktion  $u$ , also die Projektion von  $g$  auf  $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)^\perp$ , ist die gesuchte Lösung. Es ist nämlich  $u - h = -v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ , und es gilt

$$\forall v \in \mathring{\mathcal{H}}_1 \quad (u, v)_1 = 0$$

nach Definition von  $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)^\perp$ .

Entsprechende Aufgaben in der Potentialtheorie oder für andere Differentialgleichungen lassen sich ebenso leicht lösen. Damit ist sehr einfach abstrakt die Existenz einer Lösung bewiesen. Die eigentliche Arbeit beginnt erst, wenn man mehr über die verallgemeinerte Lösung wissen möchte, zum Beispiel wie regulär sie ist oder wie sie sich am Rande verhält.

**Index**

Druck der Seitenzahlen: Es bedeuten für das Stichwort

*schräg* : Personennamen  
**fett** : definierendes Vorkommen  
 von–bis : Abschnittsüberschriften  
 normal : angewandtes Vorkommen

## Abbildung

beschränkte, 38  
 biholomorphe, 7, 26, 34, 37, 43, 61, 67, 70  
 differenzierbare, 3, **6**, 7  
 elliptische, **62**  
 ganz rationale, **38**, **45**  
 ganz transzendente, **38**, 39, 40, 42, **45**  
 ganze, **38**, 41, 55  
 Grad, **62**  
 Hauptteil, **43**, 44, 45, 58, 64  
 holomorph fortsetzbare, **17**, **53**, 54  
 holomorphe, 6–9, 12, 13, 15, 16, 20, 29, 53, 70  
 injektive holomorphe, 73  
 komplexwertige, 3, 6  
 konforme, 26, **29**, 34, 67–73, 75, 76  
 konstante, 38, 41, 60  
 kreisverwandte, **30**  
 lokal biholomorphe, **28**  
 lokal konforme, **29**, 34  
 maßstabstreue, **29**, 67  
 meromorphe, **46**, 47, 54  
 Nebenteil, 43, **43**, 44  
 orientierungstreue, 29, **29**, 67  
 Pol der Ordnung  $k$ , **45**  
 Residuum, 47, **47**, 49  
 spezielle, 28–37  
 Umkehr–, 26–28, 32, 34, 36, 54  
 wesentlich singuläre, **45**, 46  
 winkeltreue, **29**, 31, 33, 67  
 Wurzel–, **34**

Abbildungssatz  
 Riemannscher, **68**, 69, 70, 72, 74, 75

abgeschlossenes Dreieck, 12, 16, 38

Ableitung, 78  
 komplexe, **6**  
 partielle, 7

absolut konvergentes Produkt, **55**

Additionstheorem, 20

allgemeine Cauchysche Integralformel, **15**

allgemeiner Cauchyscher Integralsatz, **14**

allgemeines Maximumprinzip, **25**

Automorphismengruppe  
 des Einheitskreises, **68**  
 des Normgebietes, **67**

Automorphismus, 37  
 des Einheitskreises, 73

## Axiom

Parallelen–, **33**

Banachscher Fixpunktsatz, 78

beschränkte Abbildung, 38

beschränkte Menge von Funktionen, **70**

beschränktes Gebiet, 69

## Beweis

mathematischer, 77

physikalischer, 77

biholomorphe Abbildung, 7, 26, 27, 34, 37, 43, 61, 67, 70

Biholomorphiekriterium, **27**

lokales, **28**

Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen, **5**, 7, 9, 20, 74

Cauchysche Integralformel, 17, 74

allgemeine, **15**

für Kreisscheiben, **15**

Cauchysche Ungleichung, **22**, 22–26

Cauchyscher Integralsatz, **14**, 17, 42, 43

für konvexe Gebiete, **13**, **15**

Umkehrung, **16**

Courant, 67

## Darstellung

meromorpher Abbildungen, 55–60

Darstellungsformel, 55, 74

Darstellungssatz, **75**

$\Delta$ –Operator, 74

Differentialgleichung, 65, 67, 78

Differentialgleichungen

Cauchy–Riemannsche, **5**, 7, 9, 20

Differentialoperator, 73

differenzierbare Abbildung, 3, **6**, 7

(erste) Ableitung, **6**

differenzierbarer Weg, 10

Differenzierbarkeit

komplexe, **3**, 4

partielle, 8

stetige, 8, 9

Differenzieren

Rechenregeln, 6

Dirichletsche Randwertaufgabe, **73**, 74, 77

Dirichletsches Integral, **77**

Dirichletsches Prinzip, **77**

diskrete Menge, **16**, 27, 46

doppelt periodische Funktion, 62–67

Drehstreckung, 30

Drehung, 30, 33

Dreieck

abgeschlossenes, 12, 16, 38

Dreiecksungleichung, 34

einfach periodische Funktion, 61–62

einfach zusammenhängendes Gebiet, 68, 70, 74



- Einheitskreis, 68, 72  
 Automorphismengruppe, **68**  
 Automorphismus, 73  
 Greensche Funktion, **76**  
 punktierter, 77
- Einheitswurzel, **34**
- Elektrostatik, 74
- elementare holomorphe Funktionen, 8–9
- Ellipse, 36  
 Berechnung des Umfangs, 62, 66
- elliptische Funktion, 62, **62**, 63, 64, 66  
 vom Grade Null, 62  
 zweiten Grades, 65
- elliptisches Integral, **66**, 67
- Energieintegral, 77
- erste Ableitung, **6**
- euklidische Geometrie, 33
- euklidische Norm, **6**
- Exponentialfunktion, **9**, 36, 41  
 Umkehrabbildung, 36
- Faktor  
 konvergenzerzeugender, **56**
- Falllinien, 5, 74, 76
- Familie von Funktionen  
 beschränkte, **70**  
 gleichartig stetige, **71**  
 lokal beschränkte, **71**, 72  
 lokal gleichartig stetige, **71**  
 normale, **71**, 72
- Fischer–Lieb, *15*, 34
- Fixpunkt, 32, 68
- Fixpunktsatz  
 Banachscher, 78
- Fläche  
 Riemannsches, **35**
- Folge konformer Abbildungen  
 gleichmäßig konvergente, **70**, 71  
 lokal gleichmäßig konvergente, **70**
- Form, 5
- Fortsetzung  
 einer holomorphen Abbildung, **53**, 54  
 holomorphe, **17**, 18, 21, 38  
 holomorpher Abbildungen, 53–54
- Fourierreihe, **62**
- Fresnel, 52
- Fresnelsches Integral, **52**
- Fundamentalsatz der Algebra, 3, **39**, **48**, 65
- Funktion  
 Ableitung, 78  
 Darstellungsformel, 55  
 Darstellungssatz, **75**  
 doppelt periodische, **61**, 62–67  
 einfach periodische, **61**, 61–62  
 elementare holomorphe, 8–9  
 elliptische, 62, **62**, 63, 64, 66  
 Exponential–, **9**, 36, 41  
 ganz rationale, **38**, **45**, 66  
 ganz transzendente, **38**, 40, **45**  
 ganze, **38**, 38–43, 46, 53, 55, 57, 59, 64  
 globales Maximum, 26  
 Grad, **62**  
 Greensche, **74**, 75  
 Hauptteil, **43**, 44, 45, 58, 64  
 holomorph fortsetzbare, **17**  
 holomorphe, **6**, 15, 18, 20, 23, 35, 43, 61, 63, 75  
 Umkehrung, 26–28  
 holomorphe Fortsetzung, 18, **53**  
 komplex differenzierbare, 27  
 konjugiert harmonische, **5**, **74**, 76  
 lineare, 51  
 lokales Maximum, 23, 25  
 lokales Minimum, 24  
 Menge  
 beschränkte, **70**  
 gleichartig stetige, **71**  
 lokal beschränkte, **71**, 72  
 lokal gleichartig stetige, **71**  
 meromorphe, **46**, 55, 57, 58, 61, 64  
 Mittelwerteigenschaft, 25  
 Nebenteil, 43, **43**, 44  
 Nullstelle, 23  
 periodische, 60–67  
 Pol der Ordnung  $k$ , **45**  
 Potential–, **5**  
 rationale, 66  
 Reihenentwicklung, 21  
 Residuum, 47, **47**, 49  
 Singularitäten–, 74  
 Sinus amplitudinis, **67**  
 Stamm–, **5**, **6**, **9**, **10**, 12, 13, 15  
 Test–, 77  
 wegzusammenhängende, 21  
 wesentlich singuläre, **45**, 46
- Funktionalgleichung, 59
- Funktionenfolge  
 lokal gleichmäßig konvergente, 22
- Funktionenraum, 77
- Funktionentheorie, 3–78
- ganz rationale Funktion, **38**, **45**, 66
- ganz transzendente Funktion, **38**, 39, 42, **45**
- ganze Funktion, **38**, 38–43, 46, 53, 55, 57, 59, 64
- Gaußscher Satz, 5, 16
- Gaußsches Verfahren  
 des arithmetisch–geometrischen Mittels, 67
- Gebiet, **11**, 23, 73, 77  
 beschränktes, 69  
 einfach zusammenhängendes, 68–70, 74  
 homöomorph äquivalentes, **68**  
 konform äquivalentes, **67**, 69  
 konvexes, 12, 13  
 Norm–, **67**
- Gebilde  
 Legendresches, **67**  
 Weierstraßsches, **66**
- Geometrie  
 euklidische, 33

- nichteuklidische, 32
- Gerade
  - Ortho-, 33
- geschlossene Kette, 14
- geschlossener Integrationsweg, 11, 13
- geschlossener Weg, 47, 54
- glatter Weg, 29
- gleichartig stetige Menge
  - von Funktionen, 71
- gleichmäßig konvergente Folge
  - konformer Abbildungen, 70, 71
- Goursat, 12
- Goursatsches Lemma, 12
- Greensche Funktion, 74, 75
  - für den Einheitskreis, 76
- Halbgerade
  - tangentiale, 29
- Hauptteil, 43, 44, 45, 58, 64
  - der Laurentreihe, 44
  - Konvergenzradius, 45
- hebbare Singularität, 13, 46
- Hilbert, 77
- Höhenlinien, 5, 74, 76
- holomorph fortsetzbare Abbildung, 17, 53, 54
- holomorphe Abbildung, 6–9, 12, 13, 15, 16, 20, 29, 53, 70
  - Element, 53
  - Fortsetzung, 53, 53–54
  - orientierungstreue, 29, 29
  - Teildarstellung, 53
  - winkeltreue, 29, 29
- holomorphe Fortsetzung, 17, 18, 21, 38, 53
- holomorphe Funktion, 6, 15, 18, 20, 23, 35, 43, 61, 63, 75
  - konstante, 23
  - Mittelwerteigenschaft, 25
  - $n$ -te Wurzel, 35
  - normale Familie, 71, 72
  - Umkehrung, 26–28
- holomorphe Injektion, 27
- Holomorphie, 8, 9, 13, 27, 38
- homogene Randwertaufgabe, 74
- homologer Weg, 14
- homologer Zyklus, 14
- homöomorph äquivalente Gebiete, 68
- Homöomorphismus, 31, 68
- Hurwitz, 67
- Hurwitz–Courant, 3
- Hyperbel, 36
- Identität, 32
- Identitätssatz, 21, 23, 24, 27, 53, 60
- Identitätssatz für Potenzreihen, 18
- Index, 14
- Injektion
  - holomorphe, 27
- injektive holomorphe Abbildung, 73
- Integral
  - Dirichletsches, 77
  - effektive Berechnung, 17
  - elliptisches, 66, 67
  - Energie-, 77
  - Fresnelsches, 52
  - Kurven-, 5
  - Poissonsches, 77
  - über geschlossener Kreislinie, 43
- Integralformel
  - Cauchysche, 17, 74
  - allgemeine, 15
  - für Kreisscheiben, 15
  - Poissonsche, 75
- Integralsatz
  - Cauchyscher, 14, 42, 43
- Integration, 9–12, 41
- Integrationstheorie, 9
- Integrationsweg, 11
  - geschlossener, 13
- isolierte Singularität, 42–47
- Kette, 14
  - geschlossene, 14
- Knopp, 3
- komplex differenzierbare Funktion, 27
- komplexe Ableitung, 6
- komplexe Differenzierbarkeit, 3, 4
- komplexwertige Abbildung, 3, 6
- konform äquivalente Gebiete, 67, 69
- konforme Abbildung, 26, 29, 34, 67–73, 75, 76
  - gleichmäßig konvergente Folge, 70, 71
  - lokal gleichmäßig konvergente Folge, 70
- konjugiert harmonische Funktion, 5, 74, 76
- konstante Abbildung, 38, 41, 60
- konvergente Potenzreihe, 19
- konvergenzerzeugender Faktor, 56
- konvergenzerzeugender Subtrahend, 58
- Konvergenzkriterium, 55
- Konvergenzradius, 3, 8, 19, 20, 28, 46, 53, 54
  - des Hauptteils, 45
  - des Nebenteils, 45
- konvexes Gebiet, 12, 13
- Kreis
  - Ortho-, 33
- Kreisring, 42, 61
- kreisverwandte Abbildung, 30
- Kriterium
  - Biholomorphie-, 27
  - lokales Biholomorphie-, 28
- Kurvenintegral, 5
- Laurent, 44
- Laurentreihe, 44, 61
  - Hauptteil, 44
  - lokal gleichmäßig konvergente, 45
  - Nebenteil, 44
- Legendresches Gebilde, 67
- Uniformisierung, 67

- Lemma
  - Goursatsches, **12**
  - Poincarésches, **5**
  - Schwarzsches, **37, 37–38, 68**
- Lindelöf, **24**
- lineare Funktion, **51**
- Logarithmus, **36, 41, 51, 61**
- lokal beschränkte Menge
  - von Funktionen, **71, 72**
- lokal biholomorphe Abbildung, **28**
- lokal gleichartig stetige Menge
  - von Funktionen, **71**
- lokal gleichmäßig konvergente Folge
  - konformer Abbildungen, **70**
- lokal gleichmäßig konvergente Reihe, **18, 45**
- lokal konforme Abbildung, **29, 34**
- lokale Stammfunktion, **10, 12, 13, 16, 20**
- lokales Biholomorphiekriterium, **28**
- Lösungsbegriff, **78**
- $\mathcal{L}^2$ -Skalarprodukt, **78**
  
- maßstabstreue Abbildung, **29, 67**
- mathematischer Beweis, **77**
- Maximumprinzip, **23, 24, 37, 59, 72, 74**
  - allgemeines, **25**
- Menge
  - der Geraden und Kreise, **30**
  - der Pole, **46**
  - diskrete, **16, 27, 46**
  - nichtdiskrete, **21**
  - offene ... in  $\hat{\mathbb{C}}$ , **31**
  - wegzusammenhängende, **7**
- Menge von Funktionen
  - beschränkte, **70**
  - gleichartig stetige, **71**
  - lokal beschränkte, **71, 72**
  - lokal gleichartig stetige, **71**
- meromorphe Funktion, **46, 55, 57, 58, 61, 64**
  - Darstellung, **55–60**
  - Darstellungsformel, **55**
  - doppelt periodische, **61, 62–67**
  - einfach periodische, **61, 61–62**
  - Periode, **61**
- Minimumprinzip, **24**
- Mittag-Leffler, **57**
- Mittelwerteigenschaft, **25, 74**
- Mittelwertsatz, **8**
- Möbius, **32**
- Möbiustransformation, **32, 32, 68**
  - Umkehrabbildung, **32**
- Monodromiesatz, **54, 72**
- Montel, **72**
- Morera, **16**
  
- $n$ -blättrige Riemannsche Fläche, **36**
- $n$ -te Einheitswurzel, **34**
- $n$ -te Wurzel, **35**
- Nebenteil, **43, 43, 44**
  - der Laurentreihe, **44**
- Konvergenzradius, **45**
- Potenzreihenentwicklung, **43**
- nichtdiskrete Menge, **21**
- nichteuklidische Geometrie, **32**
- Norm
  - euklidische, **6**
- normale Familie
  - holomorpher Funktionen, **71, 72**
- Normalenvektor, **75**
- Normgebiet, **67**
  - Automorphismengruppe, **67**
- nullhomologer Weg, **14**
- nullhomologer Zyklus, **15, 70**
- Nullstelle der Ordnung  $n$ , **20**
  
- offene Menge in  $\hat{\mathbb{C}}$ , **31**
- orientierter Winkel, **29**
- orientierungstreue Abbildung, **29, 29, 67**
- Orthogerade, **33**
- Orthokreis, **33**
  
- Parallelenaxiom, **33**
- Parallelverschiebung, **30**
- Partialbruchzerlegung, **20**
- partielle Ableitung, **7**
- partielle Differenzierbarkeit, **8**
- $\varphi$ -Funktion
  - Weierstraßsche, **63, 65, 66**
- Pendelgleichung, **67**
- Periode, **60, 61, 63, 65**
- Periodenparallelogramm, **60, 62, 65**
- periodische Funktion, **60–67**
- Phragmén, **24**
- physikalischer Beweis, **77**
- Poincarésches Lemma, **5**
- Poisson, **75**
- Poissonsche Integralformel, **75**
- Poissonsches Integral, **77**
- Pol, **47, 55, 57, 62**
  - der Ordnung  $k$ , **45**
  - erster Ordnung, **45, 46**
- Polarkoordinaten, **52**
- Potentialfunktion, **5**
- Potentialgleichung, **74**
- Potentialtheorie, **26, 74, 78**
  - Darstellungsformel, **74**
  - Maximumprinzip, **74**
  - Mittelwerteigenschaft, **74**
  - Randwertaufgabe, **73–78**
- Potenzreihe, **3, 8, 16, 18, 20, 38, 43, 53**
  - konvergente, **19**
  - Konvergenzradius, **3, 8**
- Potenzreihenentwicklung, **18–21, 28, 45**
- Prinzip
  - allgemeines Maximum-, **25**
  - Dirichletsches, **77**
  - Maximum-, **23, 24, 37, 59, 72**
  - Minimum-, **24**
  - Schwarzsches Spiegelungs-, **38**

- Produkt  
absolut konvergentes, **55**  
Konvergenzkriterium, **55**
- Projektion  
stereographische, **31**
- Projektionssatz, 78
- Punkt  
Verzweigungs-, **36, 37**  
punktierter Einheitskreis, 77
- Randwertaufgabe, 78  
Dirichletsche, **73, 74, 77**  
homogene, 74  
in der Potentialtheorie, 73–78
- rationale Funktion, 66
- Raum  
Sobolev-, **78**  
vollständiger, 78
- Reihe  
Fourier-, **62**  
Laurent-, **44, 61**  
lokal gleichmäßig konvergente, **18**  
Potenz-, 3, 8, 16, 18, 20, 38, 43, 53  
Taylor-, **18, 20**
- Reihenentwicklung, 21
- Remmert, 3
- Residuenkalkül, 17, 47–52
- Residuum, 47, **47, 49, 63**  
im Punkte  $\infty$ , **48**
- Richtung, 29
- Riemann, 77
- Riemannsche Fläche, **35, 54**  
 $n$ -blättrige, **36**
- Riemannscher  
Abbildungssatz, **68, 69, 70, 72, 74, 75**  
Hebbarkeitssatz, **17, 27**
- Satz  
allgemeiner Cauchyscher Integral-, **14**  
Banachscher Fixpunkt-, 78  
Cauchyscher Integral-, **13, 15, 17, 42, 43**  
Darstellungs-, **75**  
Fundamental-... der Algebra, **39, 48, 65**  
Gaußscher, 5, 16  
Identitäts-, 18, **21, 23, 24, 27, 53, 60**  
Mittelwert-, 8  
Monodromie-, **54, 72**  
Projektions-, 78  
Riemannscher Abbildungs-, **68, 69, 70, 72, 74, 75**  
Riemannscher Hebbarkeits-, **17, 27**  
Stokesscher, 10  
von Arzelà–Ascoli, **71**  
lokale Version, **71**  
von Casorati–Weierstraß, **40, 46**  
von der Gebietstreue, **23, 26, 70**  
von der lokalen Normalform, **28**  
von Liouville, **38, 43, 62, 68**  
Verschärfung, **41**  
von Mittag–Leffler, **57, 63**  
von Montel, **72**  
von Morera, **16, 22, 38**  
von Phragmén–Lindelöf, **24**  
von Picard, 65  
von Weierstraß, **22, 55, 57, 72**  
Zwischenwert-, 23
- Schwarzsches Lemma, **37, 37–38, 68**  
Schwarzsches Spiegelungsprinzip, **38, 37–38**  
Schwingungsdauer, 67
- Sektor, 52
- Singularität, 46  
hebbare, **13, 46**  
isolierte, 42–47
- Singularitätenfunktion, 74
- singulärer Kern, 74
- Sinus amplitudinis Funktion, **67**
- Sobolev, 78
- Sobolevraum, **78**
- Spektraltheorie, 3
- spezielle Abbildung, 28–37
- Spiegelung, 33  
am Einheitskreis, **30**  
an der reellen Achse, **30**
- Spiegelungsprinzip  
Schwarzsches, **38, 37–38**
- Stammfunktion, 5, **6, 9, 10, 12, 13, 15**  
lokale, **10, 12, 13, 16, 20**  
stereographische Projektion, **31**  
stetig differenzierbare Umkehrabbildung, 29  
stetige Differenzierbarkeit, 8, 9
- Stokesscher Satz, 10
- Streckung, 29
- Subtrahend  
konvergenzerzeugender, **58**
- tangentiale Halbgerade, **29**
- Taylorreihe, **18, 20**
- Teildarstellung  
einer holomorphen Abbildung, **53**
- Testfunktion, 77  
Vervollständigung, 78
- Theorie  
der elliptischen Funktionen, 65, 67  
der partiellen Differentialgleichungen, 5, 74  
Funktionen-, 3–78  
Integrations-, 9  
Potential-, 26, **74, 78**  
Randwertaufgabe, 73–78  
Spektral-, 3  
Wertverteilungs-, **40**  
Zahlen-, 67  
zweidimensionale Potential-, 5
- Topologie für  $\mathbb{C}$ , 6
- Translation, 33
- Umkehrabbildung, 26–28, 32, 34, 36, 54  
stetig differenzierbare, 29  
Verzweigungspunkt, **36**

- Umlaufzahl, **14**  
 Uniformisierung, **66**
- Vektorfeld, 5, 74  
 Verzweigungspunkt, **36**, 37, 46, 54  
 vollständiger Raum, 78
- Weg  
   differenzierbarer, 10  
   geschlossener, 47, 54  
   geschlossener Integrations-, 11  
   glatter, 29  
   homologer, **14**  
   Integrations-, **11**  
   nullhomologer, **14**  
   Umlaufzahl, **14**  
   Zyklus, **14**
- wegzusammenhängende Funktion, 21  
 wegzusammenhängende Menge, 7  
 Weierstraß, 77  
 Weierstraßsche  $\varphi$ -Funktion, **63**, **65**, 66  
 Weierstraßsches Gebilde, **66**  
   Uniformisierung, **66**
- Wert  
   der Ordnung  $n$ , **20**  
   erster Ordnung, 31  
   zweiter Ordnung, 31
- Wertverteilungstheorie, **40**  
 wesentlich singuläre Funktion, **45**, 46
- Winkel  
   orientierter, **29**
- winkeltreue Abbildung, **29**, 31, 33, 67  
 Wurzelabbildung, **34**
- Zahlentheorie, 67  
 zweiblättrige Riemannsche Fläche, 54  
 zweidimensionale Potentialtheorie, 5  
 Zwischenwertsatz, 23
- Zyklus, **14**  
   homologer, 14  
   nullhomologer, 15, 70