

# Infinitesimalrechnung III

Vorlesung im Wintersemester 1993/94

von Prof. Dr. Rolf Leis



# Inhaltsverzeichnis

<b>10 Einführung in die Maßtheorie</b>	<b>3</b>
10.1 Überblick	3
10.2 Das Maß einiger einfacher Mengen im $\mathbb{R}^n$	5
10.3 Meßbare Mengen und Funktionen	8
10.4 Einfache Eigenschaften des Maßes	11
10.5 Integration positiver Funktionen	12
10.6 Ausblick	13
<b>11 Das Lebesguesche Integral</b>	<b>15</b>
11.1 Überblick	15
11.2 Elementares Lebesguesches Maß und Integral	16
11.3 Vervollständigung der Treppenfunktionen	19
11.4 Lebesgue-integrierbare Funktionen	20
11.5 Maßerweiterung	25
11.6 Meßbare Abbildungen	28
11.7 Eigenschaften integrierbarer Funktionen	32
11.8 Das Produktmaß	37
11.9 Reellwertige Abbildungen einer reellen Veränderlichen	41
<b>12 Integration II</b>	<b>50</b>
12.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	50
12.1.1 Kurven im Raum	55
12.1.2 Flächen im Raum	60
12.2 Die Transformationsformel	62
12.3 Beispiele	64
12.4 Alternierende Differentialformen	65
12.4.1 Geschlossene und exakte Formen	70
12.5 Flächenintegrale	72
12.6 Die Integralsätze von Gauß und Stokes	76
12.7 Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	79
12.8 Anwendungen	82
12.8.1 Der Fundamentalsatz der Algebra	82
12.8.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz	83
12.8.3 Vektorfelder auf der Sphäre $S^2$	86
<b>Index</b>	<b>88</b>



## 10 Einführung in die Maßtheorie

### 10.1 Überblick

Das Messen von Längen, Flächen oder Volumina gehört zu den ältesten Kulturleistungen. Die Kenntnis der Größe einer Fläche ist zum Beispiel enorm wichtig, wenn man abschätzen will, wieviel Getreide auf einem Feld wächst oder wieviele feindliche Krieger sich dort möglicherweise verbergen.

So haben wohl alle antiken Zivilisationen Vergleichseinheiten für das Messen entwickelt. Die Ägypter lebten in einem relativ flachen Land. So lag es nahe, als Einheit den Inhalt eines Quadrats oder Rechtecks zu wählen und mit Vielfachen davon zu rechnen.

Die Griechen lebten in einem hügeligeren Land. Dadurch wurde die Flächenmessung komplizierter, und man mußte auch weniger reguläre Gebiete als Rechtecke miteinander vergleichen können. Das war eine große Herausforderung für den griechischen Mathematiker. Es wird die Ansicht vertreten, daß gerade dies ein wichtiger Grund für die großartigen Leistungen der griechischen Mathematik sei. Das Vergleichen der Größe von Flächen ist ein wesentliches Merkmal der griechischen Mathematik. Den Satz von Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

sollte man als Aussage über die Gleichheit von Flächen interpretieren.

Bei Euklid findet man viele Aussagen über das Maß von Flächen, und zwar sowohl von Rechtecken als auch besonders von Dreiecken. Zum Messen komplizierterer Gebiete benutzte man dann die „Pflasterstein-Methode“: Das Ganze ist die Summe der einzelnen Teile. So ließ sich eine beliebige polygonal berandete Fläche in Dreiecke zerlegen und damit messen.

Krummlinig begrenzte Flächen behandelte man approximativ. Die wahre Leistung der Griechen besteht nun darin, auch für solche Flächen eine exakte Definition des Maßes gegeben zu haben. Das geschah durch die Methode des „Ausschöpfens“: Man wählt einmal eine Folge „einbeschriebener Dreiecke“ und zum anderen eine Folge „umbeschriebener Dreiecke“. Die jeweiligen Maße seien  $e_n$  und  $u_n$ . Es sei  $A$  das gesuchte Maß. Dann gilt also

$$e_n \leq A \leq u_n.$$

Konvergieren nun beide Folgen,  $(e_n)$  und  $(u_n)$ , gegen denselben Grenzwert  $\alpha$ , dann hat  $A$  das Maß  $\alpha$ .

Berechnen wir auf diese Weise die Kreisfläche: Es seien  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  die in §5.3 eingeführten Funktionen, und die Kreislinie sei durch

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

gegeben. Ein einbeschriebenes Dreieck mit dem Winkel  $2\pi/n$  hat dann die Fläche  $\sin(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)$ . Es ist also

$$e_n = n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow \pi$$

und analog

$$u_n = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \rightarrow \pi.$$

Die Fläche des Einheitskreises ist also  $\pi$ .

Archimedes konnte auf diese Weise durch kunstvolles Approximieren durch Dreiecke eine ganze Reihe von Flächen exakt messen, so zum Beispiel parabolische Segmente. Ich sollte genauer sagen, die Griechen konnten eine ganze Reihe von Flächen vergleichen, weil eine exakte Definition der Maßzahl einer beliebigen Fläche noch nicht vorlag.

Nach Archimedes Tod herrschte fast zweitausend Jahre lang Ruhe. Zwei Dinge mußten geschehen, um weiterzukommen: Einmal mußte der Zahlbegriff präzisiert werden, denn das Messen geschieht durch Angabe einer Maßzahl, und die rationalen Zahlen genühten nicht. Zum zweiten mußte die Pflasterung durch Dreiecke aufgegeben werden, weil diese spezielle Pflasterung alle weiteren Rechnungen zu kompliziert machte.

In Newtons *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) finden wir dann die Approximation von Flächen, so wie wir es bei der Einführung des Integrals für Regelfunktionen durchgeführt haben. Es wird also nicht mehr durch Dreiecke, sondern durch Rechtecke approximiert, und zwar durch lange, dünne Rechtecke. Und besonders wichtig ist: In der Differential- und Integralrechnung stand bald ein handlicher Kalkül zur Berechnung vieler Flächen bereit. Man mußte „nur“ die jeweilige Stammfunktion bestimmen. Damit war auch der Zusammenhang zwischen Maß- und Integrationstheorie hergestellt. All das findet man schon bei NEWTON, richtig fixiert wurde es aber erst um 1820 von CAUCHY. Cauchys Arbeit wurde dann von RIEMANN fortgeführt. Das so erhaltene Integral trägt heute seinen Namen, und man spricht von der „Menge der Riemann-integriblen Funktionen“.

Riemann ist wohl einer der ersten „modernen“ Mathematiker. Während Cauchy sich noch für spezielle Objekte interessierte, etwa für den Verlauf einer komplizierten stetigen Funktion, richtet sich das Interesse jetzt allmählich auf Klassen von Objekten, die eine bestimmte Eigenschaft haben. Es entwickelt sich eine abstrakte Mathematik, die allgemeine Aussagen über solche Klassen macht. Natürlich ist diese „Strukturmathematik“ dann in der Folgezeit manchmal über ihr Ziel hinausgeschossen.

Die abstrakte Maßtheorie geht nun auf Arbeiten von PEANO um 1880 zurück. Auch JORDAN ist zu nennen. Wenn man so will, ging Peano wieder auf die griechische Vorstellung der Pflasterung zurück. Nur wählte er einfachere Pflastersteine, nämlich Rechtecke und keine Dreiecke, und diese aber nicht lang und dünn, sondern beliebig. Es sei  $F$  die zu messende Teilmenge der Ebene.  $F$  enthalte endlich viele einbeschriebene rechteckige Pflastersteine,  $m$  sei die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke. Der „innere Inhalt“ von  $F$ ,  $\underline{i}(F)$ , wird dann als  $\sup m$ , also als Supremum über alle solche einbeschriebenen Pflasterungen definiert. Analog erklärt man den „äußeren Inhalt“  $\bar{i}(F)$  als Infimum aller umbeschriebenen Pflasterungen. Im allgemeinen ist dann

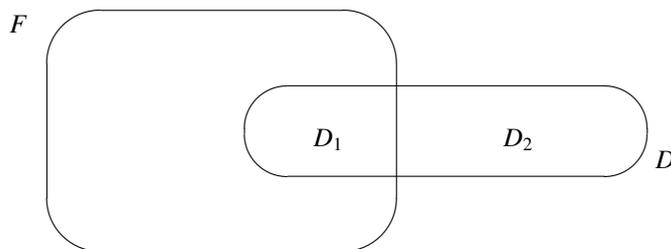
$$\underline{i}(F) \leq \bar{i}(F),$$

und im Falle der Gleichheit nennt man  $F$  meßbar,

$$i(F) := \underline{i}(F) = \bar{i}(F).$$

Damit war das Maß für eine große Menge von Flächen erklärt. Es zeigte sich jedoch schon bald, daß es im Peanoschen Sinne nichtmeßbare Mengen gab, die man aber doch gerne messen können wollte. Denken Sie an abzählbare Mengen, etwa an die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten im Quadrat. Stellt man die Forderung, daß das Maß nicht nur endlich additiv, sondern auch abzählbar additiv sein soll, dann sollte eine solche Menge das Maß Null erhalten (weil ein einzelner Punkt das Maß Null hat). Das Riemann-Peanosche Maß erfüllt aber diese Forderung nicht.

Hier gelang BOREL um 1900 der Durchbruch. Er ließ zu, daß eine einzelne Pflasterung nicht nur aus endlich vielen, sondern auch aus abzählbar unendlich vielen Rechtecken bestehen kann. Damit erreichte er natürlich eine wesentlich bessere Approximation der vorgegebenen Fläche  $F$ . Borels Idee wurde von LEBESGUE weitergeführt. Lebesgue definierte auf diese Weise analog zum äußeren Inhalt das „äußere Maß“  $\bar{m}(F)$  und hoffte, daß dieses äußere Maß für alle  $F$  „das“ Maß sein würde. Lebesgue konnte das aber nicht beweisen. Deshalb führte er etwas komplizierter als beim inneren Inhalt auch das „innere Maß“  $\underline{m}(F)$  ein und nannte im Falle der Gleichheit  $F$  meßbar. Dies war also eine Bedingung an die Menge der zu messenden Mengen  $F$ . Sie wurde von C. CARATHÉODORY (1873–1950) wie folgt einfacher formuliert:



Es seien  $F$  die zu messende Menge und  $D$  eine beliebige Menge. Es seien ferner  $D_1 = D \cap F$  und  $D_2 = D \setminus F$ . Dann heißt  $F$  meßbar, und es ist  $m(F) := \bar{m}(F)$ , wenn

$$\forall D \quad \bar{m}(D) = \bar{m}(D_1) + \bar{m}(D_2)$$

ist. Das ist eine abstrakte Bedingung dafür, daß das Ganze gleich der Summe der Teile sein soll.

Inzwischen hat sich das Lebesguesche-Carathéodorysche Maß überall durchgesetzt. Es bleibt natürlich die Frage bestehen, ob es auch in diesem Sinne noch nichtmeßbare Mengen gibt. Die Antwort ist ja. Beispiele hat man aber nur abstrakt unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms geben können. Alle „praktisch auftretenden“ Mengen sind im Lebesgueschen Sinne meßbar. Das Auswahlaxiom lautet:

**Auswahlaxiom:** *Es sei  $\mathcal{A}$  eine nichtleere Familie nichtleerer Teilmengen der Menge  $X$ . Dann gibt es eine Abbildung*

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{A} \longrightarrow X \\ A &\longmapsto f(A) \in A. \end{aligned}$$

Das Auswahlaxiom ist heute weitgehend unumstritten. Auf ihm beruhen große Teile der Analysis, die Sie nach dem Vorexamen kennenlernen werden. Lebesgue selbst hat es aber nicht akzeptiert.

Es bleibt zu ergänzen, daß von Lebesgue analog zum Maß auch das Integral eingeführt wurde. Beide hängen wieder eng miteinander zusammen. Das Lebesguesche Integral hat große Bedeutung erlangt, und zwar sowohl aus theoretischer Sicht als auch wegen seiner praktischen Handhabbarkeit. Wenn man eine klassische Funktion integrieren will, dann unterscheidet es sich natürlich nicht vom Riemannschen.

Im Rahmen dieser Vorlesung habe ich nur wenig Zeit, mich mit Maßtheorie zu befassen. Ich kann daher nur eine Einführung und wenige Kostproben aus dem nunmehr klassischen Teil der Theorie geben. Ansonsten muß ich auf Spezialvorlesungen verweisen, die insbesondere auch im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie angeboten werden. Der Schwerpunkt dieser Vorlesung soll auf dem Lebesgueschen Integral liegen, das wir in §11 einführen werden. Wegen des Zusammenhangs von Maß- und Integrationstheorie erhalten Sie damit aber „hintenherum“ doch etwas Maßtheorie.

## 10.2 Das Maß einiger einfacher Mengen im $\mathbb{R}^n$

Es sei

$$Q := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

ein offener Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Ihm wollen wir das Maß (das Quadervolumen)

$$\mu(Q) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

zuordnen. Es ist stets  $\mu(Q) \geq 0$ , und insbesondere gilt dann für den Einheitswürfel

$$W^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < 1\}$$

$\mu(W^n) = 1$ , die *Normierung*, und für jedes  $a \in \mathbb{R}^n$  folgt

$$\mu(a + Q) = \mu(Q),$$

also die *Translationsinvarianz*. Dabei soll es keine Rolle spielen, ob  $Q$  offen, halboffen oder abgeschlossen ist. Es sei also  $\mu(\bar{Q}) := \mu(Q)$ .

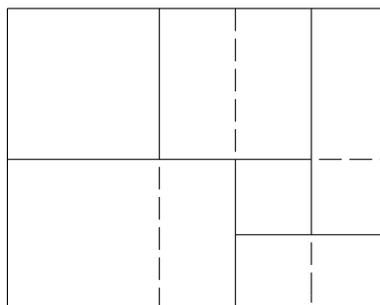
Wichtig ist nun die dritte Eigenschaft des Maßes, nämlich die  $\sigma$ -*Additivität* des Quadervolumens. Wir formulieren sie als

**Satz 10.2.1:** *Der Quader  $Q := \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$  sei eine abzählbare Vereinigung von Quadern  $Q_i$  mit paarweise disjunkten Inneren. Dann gilt*

$$\mu(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i).$$

Den Beweis führen wir in drei Schritten:

1. Es sei  $Q$  eine endliche Vereinigung. Dann können wir, eventuell durch „Verfeinerung“, folgende Zerlegung erreichen:



Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der Definition des Maßes.

2. Offenbar gilt:

(i) Haben  $R_1, \dots, R_r$  paarweise disjunkte Innere und gilt  $\cup_{i=1}^r R_i \subset Q$ , dann folgt

$$\sum_{i=1}^r \mu(R_i) \leq \mu(Q).$$

(ii) Wird  $Q$  von den Quadern  $R_1, \dots, R_r$  überdeckt, dann gilt

$$\mu(Q) \leq \sum_{i=1}^r \mu(R_i).$$

Die Übertragung von (i) auf den abzählbar unendlichen Fall ist offensichtlich, weil die unendliche Reihe absolut konvergiert.

Die zweite Ungleichung läßt sich nicht so einfach übertragen, weil endliche Teilsysteme von  $(R_n)$  den Quader  $Q$  nicht zu überdecken brauchen. Um (ii) auch für den abzählbar unendlichen Fall zu beweisen, wählen wir deshalb zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  zu jedem  $R_j$  einen offenen Quader  $R'_j$  mit

$$\overline{R'_j} \subset R_j \quad \text{und} \quad \mu(R'_j) = \mu(R_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Nach dem Überdeckungssatz von HEINE–BOREL gibt es nun ein endliches Teilsystem der  $(R'_j)$ , das den abgeschlossenen Quader  $\overline{Q}$  überdeckt, etwa  $R'_{j_1}, \dots, R'_{j_r}$ . Dann gilt

$$\mu(Q) \leq \sum_{i=1}^r \mu(R'_{j_i}) < \sum_{i=1}^r \mu(R_{j_i}) + \varepsilon,$$

und aus

$$\sum_{i=1}^r \mu(R_{j_i}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j)$$

folgt daher für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\mu(Q) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j) + \varepsilon.$$

Damit gilt (ii) auch im abzählbar unendlichen Fall.

3. Hieraus folgt die behauptete  $\sigma$ -Additivität des Quadervolumens. Es gilt nämlich

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \leq \mu(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j),$$

wenn die  $Q_j$  paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. □

Wir wollen nun allgemeinere Mengen durch Quader approximieren und zeigen dazu

**Satz 10.2.2:** Jede offene Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Würfeln, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Beweis: Wir wollen  $M$  von innen her durch Würfel ausschöpfen:

1. Würfel erster Stufe seien Würfel mit der Kantenlänge eins, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. Aus ihnen entstehen Würfel der Stufe zwei durch Halbierung der Seiten, aus diesen wiederum Würfel der dritten Stufe usw. Insgesamt gibt es nur abzählbar viele solcher Würfel.
2. Nun nehmen wir alle Würfel erster Stufe, die in  $M$  enthalten sind, weiter alle Würfel zweiter Stufe, die in  $M$ , aber nicht in einem der schon herausgegriffenen Würfel erster Stufe enthalten sind, usw. So erhält man abzählbar viele Würfel, deren Vereinigung in der offenen Menge enthalten ist. Je zwei dieser Würfel haben keine inneren Punkte gemeinsam.
3. Es ist noch zu zeigen, daß jeder Punkt  $a \in M$  in mindestens einem der ausgewählten Würfel liegt. Da  $M$  offen ist, gibt es ein  $B(a, \varepsilon) \subset M$ . Andererseits gibt es zu jedem  $k$  mindestens einen Würfel  $k$ -ter Stufe  $W_k$  mit  $a \in W_k$ . Für genügend großes  $k$  ist aber  $W_k \subset B(a, \varepsilon)$ , das heißt  $a$  liegt in einem ausgewählten Würfel. □

Damit sind wir in der Lage, beschränkte offene Mengen  $M$  zu messen. Es sei nämlich

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$$

eine solche Ausschöpfung. Dann definieren wir

$$\mu(M) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i).$$

Auch unbeschränkte offene Mengen können zugelassen werden, wenn die Summe konvergiert. Das Maß  $\mu$  hat auch jetzt die drei Eigenschaften der Normierung, Translationsinvarianz und  $\sigma$ -Additivität. Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Definition und der  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$  wird der „große Umordnungssatz“ benötigt; wir wollen das hier nicht ausführen. Mit  $M_1, M_2$  sind auch  $M_1 \cup M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  messbar, und es gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) + \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2).$$

Schließlich wollen wir auch den kompakten Teilmengen  $K$  des  $\mathbb{R}^n$  ein Maß  $\mu(K)$  zuordnen. Naheliegender ist das folgende: Man wähle einen offenen Quader  $Q \supset K$ . Dann ist  $Q \setminus K$  offen, und es gilt

$$Q = K \cup (Q \setminus K) \quad \text{und} \quad K \cap (Q \setminus K) = \emptyset.$$

$$\mu(K) := \mu(Q) - \mu(Q \setminus K)$$

leistet dann das gewünschte. Das heißt,  $\mu(K)$  hat wieder die drei Eigenschaften des Maßes.

Bei allgemeineren Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  ging Lebesgue nun folgendermaßen vor: Es sei

$$\mu^*(M) := \inf \{ \mu(U) \mid M \subset U, U \text{ offen} \}$$

das „äußere Lebesguesche Maß“. Es sei ferner

$$\mu_*(M) := \sup \{ \mu(K) \mid K \subset M, K \text{ kompakt} \}$$

das „innere Lebesguesche Maß“. Diese Zahlen mögen existieren. Beide Maße sind jedoch im allgemeinen nicht  $\sigma$ -additiv, vielmehr gilt nur

$$\begin{aligned} \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) \quad \text{„Subadditivität“} \\ \mu_* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \right) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(M_i) \quad \text{„Superadditivität“} \end{aligned}$$

für alle  $M_i$  mit  $M_i \cap M_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , sowie

$$\mu_*(M) \leq \mu^*(M).$$

Im Falle der Gleichheit erhält man durch

$$\mu(M) := \mu_*(M) = \mu^*(M)$$

das gewünschte Maß. Auf Einzelheiten möchte ich hier nicht weiter eingehen, sondern im nächsten Abschnitt einen abstrakteren Zugang angeben. Auf die Umformulierung der Definition des Lebesgueschen Maßes (Ersatz des inneren Maßes) durch Carathéodory habe ich schon in §10.1 hingewiesen.

Ich beschließe diesen Abschnitt mit einem Beispiel für eine im Lebesgueschen Sinne nichtmeßbare Menge, das auf G. VITALI (1875–1932) zurückgeht. Wir wählen in  $\mathbb{R}$  folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

und erhalten damit überabzählbar viele Klassen. Aus jeder dieser Klassen von  $[0, 1]$  wähle man ein Element aus.  $V$  sei die Menge dieser Punkte. An dieser Stelle wird das Auswahlaxiom benötigt, man vergleiche wieder §10.1. Es gilt also

$$V \subset [0, 1].$$

Wir wollen zeigen, daß  $V$  nicht meßbar ist. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

Es seien  $q_n \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$  die rationalen Punkte aus  $[-1, 1]$  und  $V_n := q_n + V$ . Die  $V_n$  sind paarweise disjunkt, denn es sei mit  $a, b \in V, j \neq k$

$$q_j + a = q_k + b.$$

Dann wäre  $a - b \in \mathbb{Q}$ , also  $a \sim b$  und  $q_j = q_k$ .

Nun gilt

$$\mu_*(V_j) = \mu_*(V) \quad \text{und} \quad \mu^*(V_j) = \mu^*(V).$$

Es sei

$$V_0 := \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j.$$

Dann ist

$$[0, 1] \subset V_0 \subset [-1, 2].$$

Es sei nämlich  $x \in [0, 1]$ . Dann ist  $x = q + a$  mit  $a \in V$  und  $|q| = |x - a| \leq 1$ , also  $[0, 1] \subset V_0$ .  $V_0 \subset [-1, 2]$  ist ebenfalls klar.

Aus der Sub- bzw. Superadditivität folgt nun

$$\mu^*(V) > 0 \quad \text{und} \quad \mu_*(V) = 0.$$

Das sieht man so: Es sei  $\mu^*(V) = 0$ . Dann ist

$$\mu^*(V_0) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(V_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(V) = 0$$

im Widerspruch zu  $[0, 1] \subset V_0$ . Es sei  $\mu_*(V) > 0$ .

Dann ist

$$\mu_*(V_0) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(V_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(V) = \infty$$

im Widerspruch zu  $V_0 \subset [-1, 2]$ , also  $\mu_*(V_0) \leq 3$ .

### 10.3 Meßbare Mengen und Funktionen

In §10.1 und §10.2 habe ich Ihnen eine historisch orientierte Einführung in die Lebesguesche Maßtheorie gegeben. Ich möchte Ihnen nun einen etwas abstrakteren Zugang skizzieren, wie er heute üblich ist. Es sei aber betont, daß in der Maßtheorie noch immer gearbeitet wird. So gibt es neuere Zugänge. Darauf kann ich hier aber nur hinweisen.

Zunächst erinnere ich noch einmal an den topologischen Raum, weil es viele Zusammenhänge und Analogien einerseits zwischen ihm und dem Raum meßbarer Mengen und andererseits zwischen stetigen und meßbaren Funktionen gibt. In §3.3 hatten wir erklärt:

**Definition 10.3.1:** Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen. Dann heißt  $\mathcal{T}$  Topologie in  $X$  und  $(X, \mathcal{T})$  topologischer Raum, wenn folgendes gilt

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  ist  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
- (iii)  $\forall O_\lambda \in \mathcal{T}, \lambda \in \Lambda, \Lambda$  eine beliebige Indexmenge, ist

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}.$$

Eine beliebige Menge  $X$  besitzt stets zwei ausgezeichnete Topologien, nämlich die „triviale Topologie“

$$\mathcal{T}_t := \{\emptyset, X\}$$

und die „diskrete Topologie“

$$\mathcal{T}_d := \mathcal{P}(X).$$

Die triviale Topologie ist die „größte“, die diskrete ist die „feinste“. Die Elemente von  $\mathcal{T}$  nennt man die „offenen Mengen“ in  $X$ . Typische Beispiele für topologische Räume sind die metrischen Räume; man vergleiche §3.2.

**Definition 10.3.2:** Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Dann heißt  $f$  stetig, wenn für alle  $V \subset Y$ ,  $V$  offen,  $f^{-1}(V)$  eine offene Menge in  $X$  ist.

Einen Raum meßbarer Mengen und eine meßbare Funktion definiert man nun ähnlich:

**Definition 10.3.3:** Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen. Dann heißt  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -Algebra in  $X$  und  $(X, \mathcal{M})$  Raum meßbarer Mengen, wenn folgendes gilt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{M}$
- (ii) aus  $M \in \mathcal{M}$  folgt  $\complement M \in \mathcal{M}$
- (iii) aus  $M_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ , folgt  $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathcal{M}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{M}$  werden „meßbare Mengen“ genannt.

**Definition 10.3.4:** Es seien  $X$  ein Raum meßbarer Mengen,  $Y$  ein topologischer Raum und

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Dann heißt  $f$  meßbar, wenn für alle  $V \subset Y$ ,  $V$  offen,  $f^{-1}(V)$  eine meßbare Menge in  $X$  ist.

**Bemerkung 10.3.5:**

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$  folgt bereits aus  $\emptyset = \complement X$ .
2. Aus  $M_i \in \mathcal{M}$  folgt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \complement \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \complement M_i \right) \in \mathcal{M}.$$

3. Aus  $A, B \in \mathcal{M}$  folgt  $A \setminus B = \complement B \cap A \in \mathcal{M}$ .
4. Es seien  $X$  ein Raum meßbarer Mengen,  $Y$  und  $Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  meßbar,  $g \in C(Y, Z)$  und  $h = g \circ f$ . Dann ist  $h : X \rightarrow Z$  meßbar. Es sei nämlich  $V \subset Z$  offen. Dann ist  $g^{-1}(V)$  in  $Y$  offen und

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

meßbar.

5. Es seien  $E \subset X$  meßbar und

$$\chi_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die „charakteristische Funktion“ von  $E$ .  $\chi_E$  ist meßbar.

Wir zeigen nun, daß es zu jeder Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra gibt, nämlich

**Satz 10.3.6:** Zu jedem  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}^*$  in  $X$  mit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$ .

$\mathcal{M}^*$  heißt die „von  $\mathcal{F}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra“.

Beweis: Es sei  $\Omega$  die Familie aller  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{M}$  in  $X$ , die  $\mathcal{F}$  enthalten.  $\Omega$  ist nicht leer, weil  $\mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Es sei  $\mathcal{M}^*$  der Durchschnitt aller  $\omega \in \Omega$ . Dann ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$ , und es gilt

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathcal{M}^* \subset \omega.$$

Wir müssen nur noch zeigen, daß  $\mathcal{M}^*$  selbst eine  $\sigma$ -Algebra ist: Es seien  $M_i \in \mathcal{M}^*, i \in \mathbb{N}$ , und  $\omega \in \Omega$ . Dann ist  $M_i \in \omega$ , also  $\bigcup M_i \in \omega$  für jedes  $\omega$ . Es gilt also  $\bigcup M_i \in \mathcal{M}^*$ . Die anderen Eigenschaften folgen ebenso.  $\square$

Es sei bemerkt, daß ein analoges Resultat für topologische Räume gilt. Es sei nun  $X$  ein topologischer Raum. Dann gibt es also eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  in  $X$ , so daß jede offene Menge von  $X$  zu  $\mathcal{B}$  gehört. Die Elemente von  $\mathcal{B}$  heißen „Borelmengen“ von  $X$ . Sie spielen im folgenden eine große Rolle. Insbesondere sind alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen, ebenso abzählbare Vereinigungen davon und abzählbare Durchschnitte offener Mengen.

Weil  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist  $(X, \mathcal{B})$  also ein Raum meßbarer Mengen. Es sei  $Y$  ein topologischer Raum und  $f \in C(X, Y)$ . Dann ist für jedes offene  $V \subset Y$  auch  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$ , also  $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ . Das heißt, jede stetige Abbildung ist Borel-meßbar. Borel-meßbare Abbildungen nennt man auch kurz Borelfunktionen. Wir zeigen:

**Satz 10.3.7:** Es seien  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$ ,  $Y$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$ . Dann gilt

1.  $\Omega := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra in  $Y$ .
2. Es seien  $f$  meßbar und  $E$  eine Borelmenge in  $Y$ . Dann ist  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ .
3. Es seien  $Y = [-\infty, \infty]$  und  $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$  für alle  $\alpha$ . Dann ist  $f$  meßbar.
4. Es seien  $f$  meßbar,  $Z$  ein topologischer Raum,  $g : Y \rightarrow Z$  eine Borelfunktion und  $h := g \circ f$ . Dann ist  $h : X \rightarrow Z$  meßbar.

Die Topologie von  $[-\infty, \infty]$  wird von allen  $(a, b)$ ,  $[-\infty, a)$  und  $(a, \infty]$  erzeugt (analog Satz 10.3.6).

Beweis:

1. Die erste Behauptung folgt aus

$$f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{M}, \quad \forall A \in \Omega \quad f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$$

und

$$\forall A_i \in \Omega \quad f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \dots \in \mathcal{M}.$$

2. Es sei  $\Omega := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ . Dann enthält  $\Omega$  alle offenen Mengen in  $Y$  und, weil  $\Omega$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, auch alle Borelmengen.

3. Es sei  $\Omega := \{A \subset [-\infty, \infty] \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ . Es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\alpha_n < \alpha$  mit  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ . Aus  $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ ,

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement (\alpha_n, \infty]$$

und Aussage 1 folgt  $[-\infty, \alpha) \in \Omega$ . Dasselbe gilt dann für

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty] \quad \text{und} \quad [\alpha, \beta] = [-\infty, \beta) \cap [\alpha, \infty].$$

Weil jede offene Menge in  $[-\infty, \infty]$  abzählbare Vereinigung solcher Segmente ist (Satz 10.2.2), enthält  $\Omega$  jede offene Menge.  $f$  ist deshalb meßbar.

4. Es sei  $V \subset Z$  offen. Dann ist  $g^{-1}(V)$  eine Borelmenge von  $Y$ , und wegen  $h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$  ist

$$h^{-1}(V) \in \mathcal{M}$$

nach Aussage 2. □

Es folgen einige Resultate über meßbare Funktionen:

**Satz 10.3.8:** Es seien  $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  meßbar und

$$g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad h := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Dann sind  $g$  und  $h$  meßbar.

Beweis: Es ist  $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty])$ , mithin  $g$  nach Satz 10.3.7 meßbar. Analoges gilt für das Infimum, und aus

$$h = \inf_{k \geq 1} \left\{ \sup_{i \geq k} f_i \right\}$$

folgt, daß auch  $h$  meßbar ist. □

Mit  $f$  und  $g$  sind also  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  und insbesondere

$$f^+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f^- := -\min(f, 0)$$

meßbar und damit auch ihre Summe  $f^+ + f^- = |f|$ . Es ist  $f = f^+ - f^-$ .

In §6.2 haben wir bereits Treppenfunktionen  $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$  eingeführt. Es seien jetzt  $X$  ein beliebiger Maßraum,  $A_i \subset X$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  meßbar und  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Dann sei analog

$$t := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

eine „einfache Funktion“, oder auch wieder eine „Treppenfunktion“,  $t \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R})$ . Offenbar ist  $t$  meßbar. Wir zeigen:

**Satz 10.3.9:** Es sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar. Dann gibt es  $t_n \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R})$  mit

1.  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq f$ ,
2.  $\forall x \in X$  gilt  $t_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

Beweis: Es sei  $\delta_n := 2^{-n}$ . Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists k = k_n(x) \in \mathbb{Z} \quad k \delta_n \leq x < (k + 1) \delta_n.$$

Es sei

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} k_n(x) \delta_n & \text{für } 0 \leq x < n \\ n & \text{für } n \leq x \leq \infty. \end{cases}$$

$\varphi_n$  ist eine Borelfunktion auf  $[0, \infty]$ , und es gilt

$$x - \delta_n < \varphi_n(x) \leq x \quad \text{für } 0 \leq x \leq n,$$

$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq x$  sowie  $\varphi_n(x) \rightarrow x$  für alle  $x \in [0, \infty]$ . Die Funktionen

$$t_n := \varphi_n \circ f$$

leisten dann das gewünschte.

### 10.4 Einfache Eigenschaften des Maßes

Wir beginnen mit der Definition des positiven Maßes:

**Definition 10.4.1:** Es seien  $(X, \mathcal{M})$  ein Raum meßbarer Mengen und

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty].$$

eine Abbildung mit

1. Für alle  $M_i \in \mathcal{M}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $M_i$  disjunkt, sei

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i).$$

2. Es gebe ein  $M \in \mathcal{M}$  mit  $\mu(M) > 0$ .

$\mu$  heißt dann positives  $\sigma$ -additives Maß. Dabei sei  $\mu \equiv \infty$  ausgeschlossen.

Ein Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ist ein Raum meßbarer Mengen  $(X, \mathcal{M})$  mit einem positiven  $\sigma$ -additiven Maß  $\mu$ .

Als erstes zeigen wir

**Satz 10.4.2:** Es sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gilt:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$  für paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{M}$ .
3.  $A \subset B$  impliziert  $\mu(A) \leq \mu(B)$  für  $A, B \in \mathcal{M}$ .
4.  $A_n \in \mathcal{M}$ ,  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  und  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  impliziert

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A).$$

5.  $A_n \in \mathcal{M}$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $\mu(A_1) < \infty$  und  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  impliziert

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A).$$

Beweis:

1. Wähle  $A \in \mathcal{M}$  mit  $\mu(A) < \infty$ ,  $A_1 := A$  und  $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ . Die Behauptung folgt dann aus der  $\sigma$ -Additivität des Maßes.
2. Wähle  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ .

3. Wegen  $B = A \cup (B \setminus A)$  und  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  folgt aus Aussage 2:  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ .

4. Wähle  $B_1 := A_1$  und  $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$  für  $n = 2, 3, \dots$ . Dann gilt  $B_n \in \mathcal{M}$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,  $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$  und  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ . Es folgt

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \quad \text{und} \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Daraus folgt Aussage 4.

5. Wähle  $C_n := A_1 \setminus A_n$ . Dann ist  $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ ,

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n) \quad \text{und} \quad A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Aus Aussage 4 folgt daher

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Das beweist Aussage 5. □

Die Konstruktion interessanter Maßräume ist nicht ganz einfach. Unser Ziel ist die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes. Zunächst gebe ich einige einfache Beispiele:

### Beispiel 10.4.3:

1. Es seien  $X$  eine Menge,  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ ,  $E \subset X$  und

$$\mu(E) := \begin{cases} \text{die Kardinalzahl von } E, & \text{wenn } E \text{ endlich ist} \\ \infty, & \text{wenn } E \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

$\mu$  heißt „Zählmaß“ oder „diskretes Maß“ von  $X$ .

2. Es seien  $X$  eine Menge,  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ ,  $E \subset X$ ,  $x_0 \in X$ , und

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } E \ni x_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Maß repräsentiert die in  $x_0$  konzentrierte Einheitsmasse, es heißt „Dirac-Maß“.

3. Es seien  $\mu$  ein Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  und  $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}$ . Dann ist  $\bigcap A_n = \emptyset$ , aber  $\mu(A_n) = \infty$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dies zeigt, daß die Voraussetzung  $\mu(A_1) < \infty$  im letzten Satz nicht überflüssig ist.

## 10.5 Integration positiver Funktionen

Es seien nun  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum,  $E \in \mathcal{M}$  und

$$f : X \longrightarrow [0, \infty]$$

eine meßbare Abbildung. Wir wollen das Integral

$$\int_E f d\mu$$

definieren. Dazu betrachten wir zunächst eine Treppenfunktion

$$t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und  $A_i \in \mathcal{M}$ . Wir definieren

$$\int_E t d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Dabei verabreden wir „ $0 \cdot \infty = 0$ “ (zum Beispiel im Falle  $\alpha_i = 0$ ,  $\mu(A_i \cap E) = \infty$ ).

Das „Lebesguesche Integral“ von  $f$  über  $E$  bezüglich  $\mu$  definiert man dann durch

$$\int_E f d\mu := \sup_{0 \leq t \leq f} \int_E t d\mu.$$

Das Supremum ist also über alle Treppenfunktionen  $t$  mit  $0 \leq t \leq f$  zu nehmen. Das Lebesguesche Integral ist eine reelle Zahl oder  $\infty$ .

Aus dieser Definition folgen leicht einige elementare Eigenschaften des Integrals:

1.  $0 \leq f \leq g$  impliziert  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ .
2.  $A \subset B$  und  $0 \leq f$  implizieren  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .
3.  $c \in \mathbb{R}_0^+$  und  $0 \leq f$  implizieren  $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$ .
4. Aus  $f|_E = 0$  folgt  $\int_E f d\mu = 0$ .
5. Aus  $\mu(E) = 0$  folgt  $\int_E f d\mu = 0$ .
6.  $f \geq 0$  impliziert  $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$ .

An dieser Stelle möchte ich abbrechen und im nächsten Kapitel aus etwas anderer Sicht eine Lebesguesche Integrationstheorie aufbauen.

## 10.6 Ausblick

Zum Abschluß dieser Einführung in die Maßtheorie möchte ich nur noch skizzieren, wie sich das Lebesguesche Maß definieren läßt. Wir werden in dieser Vorlesung im nächsten Kapitel das Lebesguesche Integral einführen. Wegen des Zusammenhangs von Integrations- und Maßtheorie erhalten wir damit auch das Lebesguesche Maß. Hier nur soviel:

**Nullmengen:** Wir haben schon bei der Einführung des Integrals über Regelfunktionen gesehen, daß es keinen Unterschied macht, ob man eine Sprungfunktion etwa von rechts oder von links stetig ergänzt. Man wird die beiden Ergänzungen in diesem Zusammenhang identifizieren. Allgemein sagt man nun, eine Aussage  $A$  gelte „fast überall in  $E$ “, wenn es ein  $N \subset E \subset \mathcal{M}$  gibt mit

$$A \text{ gilt in } E \setminus N \text{ und } \mu(N) = 0.$$

Solche Mengen  $N$  nennt man „Nullmengen“. Ihre Definition hängt natürlich von dem zugrundeliegenden Maßraum ab. Es sei  $f = g$  fast überall (abgekürzt:  $f = g$  f. ü.). Dann sieht man leicht

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Es sei nun  $N$  eine Nullmenge und  $M \subset N$ . Dann könnte es sein, daß  $M$  nicht zu  $\mathcal{M}$  gehört, aber natürlich hätte man gerne  $\mu(M) = 0$ . Man zeigt deshalb als erstes, daß sich  $\mathcal{M}$  zu  $\mathcal{M}^*$  fortsetzen läßt mit

$$\mathcal{M}^* := \left\{ E \subset X \mid \exists A, B \in \mathcal{M}, A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0 \right\}.$$

$\mathcal{M}^*$  ist wieder eine  $\sigma$ -Algebra, und man definiert für  $E \in \mathcal{M}^*$ ,  $A$  wie oben

$$\mu(E) := \mu(A).$$

Dieses so fortgesetzte Maß nennt man „vollständig“,  $\mathcal{M}^*$  heißt die „ $\mu$ -Vervollständigung von  $\mathcal{M}$ “.

Dieser Prozeß der Vervollständigung ist für das Folgende äußerst wichtig. Wir werden auf diese Weise im nächsten Kapitel das Quadervolumen zum Lebesgueschen Maß fortsetzen.

**Der Rieszsche Darstellungssatz:** Das wichtigste Hilfsmittel zur Konstruktion des Lebesgueschen Maßes ist dann der folgende „Rieszsche Darstellungssatz“:

**Satz 10.6.1:** *Es seien  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum und  $\Lambda$  ein positives lineares Funktional auf  $\dot{C}(X, \mathbb{C})$ . Dann gibt es eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  in  $X$ , die alle Borelmengen von  $X$  enthält, und genau ein positives Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{M}$  mit*

$$1. \forall f \in \dot{C}(X, \mathbb{C}) \quad \Lambda f = \int_X f d\mu.$$

2.  $\forall K \in \mathcal{M} \quad \mu(K) < \infty$ .
3.  $\forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) = \inf \{ \mu(V) \mid E \subset V, V \text{ offen} \}$ .
4. Es gilt

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq E, \text{ kompakt} \}$$

für jede offene Menge  $E \subset X$  und für jedes  $E \in \mathcal{M}$  mit  $\mu(E) < \infty$ .

5. Aus  $E \in \mathcal{M}$ ,  $A \subset E$  und  $\mu(E) = 0$  folgt  $A \in \mathcal{M}$ .

Dabei haben wir folgende Abkürzung benutzt:

$$\mathring{C}(X, \mathbb{C}) = \{ f \in C(X, \mathbb{C}) \mid \text{supp } f \subseteq X \}.$$

In einem Hausdorffraum gilt das „Trennungsaxiom“: Zu  $x_1 \neq x_2$  gibt es disjunkte Umgebungen  $U(x_1)$  und  $U(x_2)$ .  $X$  heißt lokal kompakt, wenn jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x) \subseteq X$  besitzt. Ein lineares Funktional heißt positiv, wenn aus  $f \geq 0$  auch  $\Lambda f \geq 0$  folgt.

Dieser Rieszsche Darstellungssatz wird in *W. Rudin: Real and complex analysis. McGraw-Hill, 1987, S. 40–47* bewiesen.

**Das Lebesguesche Maß:** Es seien nun  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Q$  ein Quader. Für  $Q$  haben wir in §10.2 bereits das Quader-volumen definiert. Nennen wir es jetzt  $\mu_0(Q)$ . Dann folgt

**Satz 10.6.2:** Es gibt einen vollständigen Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$  mit

1.  $\mu(Q) = \mu_0(Q)$  für alle Quader  $Q$ .
2.  $\mathcal{M}$  enthält die Borelmengen des  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\mu$  ist translationsinvariant.
4. Es sei  $\nu$  ein translationsinvariantes Maß auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\nu(K) < \infty$  für alle kompakten  $K$ . Dann gilt für alle Borelmengen  $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\nu(E) = c \mu(E) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}_0^+.$$

5. Zu jeder linearen Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt es eine Zahl  $\Delta(T) \in \mathbb{R}$  mit

$$\mu(T(E)) = \Delta(T) \mu(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{M}.$$

Für Rotationen ist  $\Delta(T) = 1$ .

$M \in \mathcal{M}$  nennt man Lebesgue-messbar,  $\mu$  ist das Lebesguesche Maß. Zum Beweis approximiert man das „Integral“ über  $f \in \mathring{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  durch

$$\Lambda_j f := 2^{-jn} \sum_{x \in G_j} f(x),$$

erhält die Existenz von

$$\Lambda f = \lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda_j f$$

und wendet den Rieszschen Darstellungssatz an. Dabei ist

$$G_j := \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = k2^{-j}, k \in \mathbb{N} \}$$

die Menge der Gitterpunkte. All das wird in *W. Rudin, l.c., S. 50–52* ausgeführt.

## 11 Das Lebesguesche Integral

### 11.1 Überblick

In §6 haben wir bereits Integrale für Treppen- und Regelfunktionen eingeführt. Auch das Riemannsches Integral wurde kurz behandelt. Dabei haben wir die Regelfunktionen durch Vervollständigung der Treppenfunktionen unter der Supremumsnorm erhalten. Ähnliches läßt sich im  $\mathbb{R}^n$  durchführen. Das wollen wir aber nicht weiter ausführen, sondern direkt das allgemeinere Lebesguesche Integral behandeln. Mit Hilfe des Lebesgueschen Integrals läßt sich eine größere Klasse von Funktionen integrieren als mit dem Integral für Regelfunktionen bzw. dem Riemanschen Integral. Ein typisches Beispiel für eine solche Funktion ist die Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die rationale Punkte auf 1, sonst auf 0 abbildet. Dieses Beispiel erscheint Ihnen vielleicht auf den ersten Blick wenig überzeugend. Dahinter steckt aber eine ganze Menge:

1. Gerade auch in den Anwendungen, besonders in der Physik, möchte man nämlich nicht nur in  $\mathcal{R}(G, \mathbb{C})$  arbeiten, sondern in größeren Räumen, zum Beispiel im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(G, \mathbb{C})$  oder allgemeiner in  $\mathcal{L}^p(G, \mathbb{C})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Diese Räume sollen aber vollständig sein. Denn wenn man zum Beispiel durch Approximation die Existenz einer Lösung zeigen möchte, dann muß man sicher sein, daß der Grenzwert auch in dem zugrundegelegten Raum enthalten ist. Denken Sie an den Beweis des Approximationssatzes in §9.2. Das bedeutet aber, daß man die Treppenfunktionen in einer solchen  $\mathcal{L}^p$ -Norm vervollständigen müßte. Im einfachsten Falle  $p = 1$  ist das gerade der Raum der im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen. Dadurch sind die auftretenden Funktionen aber nicht mehr für jedes  $x$  festgelegt, sondern wie schon in §10.6 angedeutet, nur noch fast überall. Unser Beispiel gehört also zur Klasse der Nullfunktionen.
2. Die Einführung des Lebesgueschen Integrals führt gleichzeitig auch auf die Einführung einer größeren Klasse meßbarer Mengen im  $\mathbb{R}^n$ . Darüber habe ich schon in §10 berichtet. Man kann also parallel das Integrations- und das Maßproblem lösen. Die Lebesgue-meßbaren Mengen bestehen aus den Borelmengen des  $\mathbb{R}^n$  (vgl. §10.3) und den Lebesgue-Nullmengen. Sie sind also die Vervollständigung der Borelmengen unter dem Lebesguemaß (vgl. §10.4).
3. Nicht zu unterschätzen ist aber auch die große praktische Bedeutung des Lebesgueschen Integrals. Die Lebesguesche Integrationstheorie liefert nämlich einen einfachen Kalkül, mit dem man in der Praxis technisch gut hantieren kann. Hier kommen also Theorie und Praxis zusammen; gemeinsam haben sie den großen Erfolg gebracht. Dafür möchte ich noch ein Beispiel angeben:

**Beispiel 11.1.1:** *Vertauschung von Grenzprozessen:*

In den Anwendungen tritt häufig die Frage auf, ob die Reihenfolge zweier Grenzübergänge vertauscht werden darf. Für  $x \in [0, 1]$  sei etwa  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  mit ( $n \geq 2$ )

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{für } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $f(x) = 0$ , und es gilt

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 2n^2 \int_0^{1/n} x dx = 1.$$

Grenzübergänge dürfen also im allgemeinen nicht vertauscht werden. In §6.5 haben wir ein hinreichendes Kriterium dafür kennengelernt, daß das möglich ist, nämlich

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Diese Bedingung ist nicht notwendig, das zeigt das Beispiel  $f_n(x) = x^n$  in  $[0, 1]$ .  $f_n$  konvergiert nicht gleichmäßig (Beispiel 5.2.1), es gilt aber trotzdem

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Hier ist das Vertauschen also möglich.

In  $\mathcal{L}^1$  lautet die entsprechende hinreichende Bedingung

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0,$$

und hierfür liefert die Lebesguesche Theorie ein bequemes Kriterium, nämlich das

**Majorantenkriterium:** Es seien  $f, f_n$  meßbar mit

1.  $f_n \rightarrow f$  punktweise

2.  $\exists g \in \mathcal{L}^1$  mit  $|f_n| \leq g$  punktweise.

Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1$ ; es gilt  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ , also auch

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f.$$

Das Kriterium ist für  $f_n(x) = x^n$  in  $[0, 1]$  mit  $g \equiv 1$  erfüllt.

Dieses Lebesguesche Kriterium läßt sich vielfältig anwenden. Natürlich liefert es auch nur eine hinreichende Bedingung. Um seine Reichweite zu verstehen, muß man sich daran erinnern, daß die Lebesguesche Integrierbarkeit im wesentlichen bedeutet, daß mit  $f$  auch  $|f|$  integrierbar sein soll. Das ist ja die Definition von  $\mathcal{L}^1$ ! Sucht man also Gegenbeispiele, dann muß man oszillierende Funktionen nehmen. In  $[0, 1]$  sei also

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{\sin n/x}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1/n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$  für jedes  $x \in [0, 1]$ . In §6.6 haben wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

bewiesen. Daraus folgt

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} \frac{\sin n/x}{x} dx = \int_{n^2}^\infty \frac{\sin y}{y} dy \rightarrow 0.$$

Die Vertauschung ist also möglich. Es ist aber

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_{n^2}^\infty \frac{|\sin y|}{y} dy \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq k_0(n)} \frac{1}{(k+1)} = \infty,$$

das heißt, man findet keine Majorante  $g \in \mathcal{L}^1$ . Als  $g$  käme hier nur  $g(x) = 1/x$  in Betracht, und diese Funktion ist nicht aus  $\mathcal{L}^1$ .  $\square$

Als Literatur zu diesem Kapitel möchte ich noch angeben:

*H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin 1985.*

*F. Riesz & B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Dt. Verlag Wiss., Berlin 1956.*

*W. Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York 1987.*

*H. Schäfer: A brief introduction to the Lebesgue Stieltjes integral. Studies in real and complex analysis. Math. Ass. America, Prentice-Hall, 1965.*

## 11.2 Elementares Lebesguesches Maß und Integral

In  $X = \mathbb{R}^n$  sei  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ .  $\mathcal{Q}$  enthalte  $\emptyset, X$ , mit jedem  $Q$  auch  $\complement Q$  sowie alle endlichen Vereinigungen halboffener Quader

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i < b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

mit  $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$ . Es sei ferner

$$\mu_0([a, b)) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

$\mathcal{Q}$  ist eine „Algebra“, das heißt es gilt:

(i)  $\emptyset \in \mathcal{Q}$

(ii) mit  $Q \in \mathcal{Q}$  ist auch  $\complement Q \in \mathcal{Q}$

(iii) mit  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$  ist auch  $Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{Q}$ .

Wegen

$$Q_1 \cap Q_2 = \mathbb{C} \left( \bigcup_{i=1}^2 \mathbb{C} Q_i \right)$$

gehört mit  $Q_1, Q_2$  auch  $Q_1 \cap Q_2$  zu  $\mathcal{Q}$  und ebenso  $Q_1 \setminus Q_2 = (\mathbb{C} Q_2) \cap Q_1$ .

Eine Algebra  $\mathcal{A}$  heißt „ $\sigma$ -Algebra“, wenn statt (iii) gilt:

(iv) mit  $Q_1, Q_2, \dots \in \mathcal{A}$  ist auch  $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \in \mathcal{A}$ .

$\mathcal{Q}$  ist noch keine  $\sigma$ -Algebra.

$$\mu_0 : Q \in \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty)$$

ist ein „additives positives Maß“, das heißt, es gilt

(v) es seien  $Q_1, \dots, Q_r$  paarweise disjunkt. Dann ist

$$\mu_0 \left( \bigcup_{i=1}^r Q_i \right) = \sum_{i=1}^r \mu_0(Q_i),$$

und es gibt ein  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $\mu_0(Q) < \infty$ .

Ein Maß  $\mu$  heißt „ $\sigma$ -subadditiv“ auf  $\mathcal{A}$ , wenn aus  $A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

(vi)  $\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

folgt.

Es seien  $A_i \in \mathcal{A}$  paarweise disjunkt und  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ . Ist dann

(vii)  $\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ,

dann heißt  $\mu$  „ $\sigma$ -additiv“. Ein additives  $\sigma$ -subadditives Maß ist  $\sigma$ -additiv. Aus  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \subset A_2$  folgt nämlich  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$  wegen

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1) \geq \mu(A_1),$$

und aus (v) erhalten wir für alle  $r$

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \geq \mu \left( \bigcup_{i=1}^r A_i \right) = \sum_{i=1}^r \mu(A_i),$$

also zusammen mit (vi)

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

In §10.2 haben wir die  $\sigma$ -Additivität des elementaren Lebesgueschen Maßes  $\mu_0$  bereits gezeigt. Wir geben nun als erstes eine Definition der (Lebesgue-) Nullmengen.

**Definition 11.2.1:**  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $\mu_0$ -Nullmenge (kurz Nullmenge) :  $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{\varepsilon i} \in \mathcal{Q}, i \in \mathbb{N}, \quad N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{\varepsilon i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(N_{\varepsilon i}) \leq \varepsilon.$$

Man beachte, daß  $N$  im allgemeinen nicht zu  $\mathcal{Q}$  gehört.

Jede Teilmenge einer Nullmenge ist Nullmenge; abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

**Beispiel 11.2.2:** Jeweils in  $\mathbb{R}$  sei mit  $\mu([a, b]) = f(b) - f(a)$ :

1.  $f(x) = x$ . Jeder isolierte Punkt oder  $\mathbb{Q}$  sind  $\mu$ -Nullmengen.

2.

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

$[1, 2]$  ist jetzt  $\mu$ -Nullmenge.

3.

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Jetzt ist der Punkt  $x = 1$  keine  $\mu$ -Nullmenge. □

Eine andere Charakterisierung von Nullmengen liefert

**Lemma 11.2.3:**  $N$  ist Nullmenge  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_{\varepsilon i} \in \mathcal{Q}, i \in \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad \left( \forall i \in \mathbb{N} \quad M_{\varepsilon i} \subset M_{\varepsilon, i+1}, \quad \mu_0(M_{\varepsilon i}) \leq \varepsilon \right) \quad \text{und} \quad N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{\varepsilon i}.$$

Beweis:

1.  $\Rightarrow$ : Es sei  $M_{\varepsilon j} := \bigcup_{i=1}^j N_{\varepsilon i}$ . Dann ist  $M_{\varepsilon j} \subset M_{\varepsilon, j+1}$  und

$$\mu_0(M_{\varepsilon j}) \leq \sum_{i=1}^j \mu_0(N_{\varepsilon i}) \leq \varepsilon$$

sowie wegen  $N_{\varepsilon i} \subset M_{\varepsilon i}$

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{\varepsilon i} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{\varepsilon i}.$$

2.  $\Leftarrow$ : Es seien  $N_{\varepsilon 1} := M_{\varepsilon 1}$ ,  $N_{\varepsilon 2} := M_{\varepsilon 2} \setminus M_{\varepsilon 1}$ ,  $\dots$ ,  $N_{\varepsilon j} := M_{\varepsilon j} \setminus M_{\varepsilon, j-1}$ ,  $\dots$ .  
Dann sind die  $N_{\varepsilon j}$  disjunkt. Es gilt

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{\varepsilon i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^i N_{\varepsilon j} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{\varepsilon i}$$

und

$$\sum_{i=1}^k \mu_0(N_{\varepsilon i}) = \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^k N_{\varepsilon i}\right) = \mu_0(M_{\varepsilon k}) \leq \varepsilon,$$

also

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(N_{\varepsilon i}) \leq \varepsilon. \quad \square$$

Im folgenden seien  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Y$  ein Banachraum mit der Norm  $|\cdot|$ , wir denken an  $Y = \mathbb{R}^m$ . Es sei  $E \subset X$  und

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von  $E$ . Es sei wieder  $\mathcal{T}(X, Y)$  die Menge der Treppenfunktionen, also

$$\mathcal{T}(X, Y) := \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}(x) \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in Y, E_i \in \mathcal{Q}, \mu_0(E_i) < \infty \right\}.$$

Für  $f \in \mathcal{T}(X, Y)$  definieren wir das  $\mu_0$ -Integral über  $X$  durch

$$I(f) := \int_X f \, d\mu_0 := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_0(E_i).$$

Diese Definition ist von der speziellen Darstellung von  $f$  unabhängig, weil es immer möglich ist,  $f$  auf disjunkten Mengen zu definieren. Es ist

$$I : \mathcal{T}(X, Y) \longrightarrow Y$$

linear, und es gilt

$$|I(f)| = \left| \int_X f \, d\mu_0 \right| \leq \int_X |f| \, d\mu_0,$$

denn  $x \mapsto |f(x)|$  ist eine reellwertige Treppenfunktion.

Mit  $f \in \mathcal{T}(X, Y)$  und  $E \in \mathcal{Q}$  ist auch  $\chi_{E} f \in \mathcal{T}(X, Y)$ . Deshalb können wir definieren:

**Definition 11.2.4:** Es seien  $f \in \mathcal{T}(X, Y)$  und  $E \subset X$  mit  $E \in \mathcal{Q}$ . Dann ist

$$\int_E f d\mu_0 := \int_X \chi_E f d\mu_0.$$

Offenbar gilt

**Lemma 11.2.5:** Es seien  $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{Q}.$$

In  $\mathcal{T}(X, Y)$  führen wir nun eine Äquivalenzrelation ein:

**Definition 11.2.6:**  $f \sim g$  in  $\mathcal{T}(X, Y)$  (oder  $f = g$  in  $\mathcal{T}(X, Y)$ )  $\iff$

$$f - g = \sum_{i=1}^j \alpha_i \chi_{E_i} \quad \text{mit } \alpha_i \in Y \setminus \{0\} \text{ und Nullmengen } E_i.$$

Wir bezeichnen die Menge der so erhaltenen Äquivalenzklassen wieder mit  $\mathcal{T}(X, Y)$ . Es folgt

**Lemma 11.2.7:** Es seien  $f \in \mathcal{T}(X, Y)$ ,  $N$  eine Nullmenge und  $f|(X \setminus N) = 0$ . Dann ist  $f = 0$  in  $\mathcal{T}(X, Y)$ .

Beweis: Es sei  $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_{E_i}$  mit disjunkten  $E_i \in \mathcal{Q}$ . Dann gilt auf  $X \setminus N$

$$\forall i \quad \alpha_i \chi_{E_i} = 0.$$

Ist  $\alpha_k \neq 0$ , dann folgt  $\chi_{E_k}|(X \setminus N) = 0$  oder  $E_k \subset N$ . Damit ist  $E_k$  eine Nullmenge. □

Mit

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_X |f| d\mu_0$$

wird  $\mathcal{T}(X, Y)$  ein normierter Raum.

### 11.3 Vervollständigung der Treppenfunktionen

Zur Einführung des Integrals für Regelfunktionen haben wir die Treppenfunktionen bezüglich der Supremumsnorm vervollständigt. Jetzt gehen wir analog vor und bilden

$$\tilde{\mathcal{T}}(X, Y) := \left\{ \mathcal{T}(X, Y); \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1} \right\}^{\sim}$$

Wir beginnen mit der Charakterisierung der Elemente von  $\tilde{\mathcal{T}}(X, Y)$  und zeigen als erstes:

**Rieszsches Lemma:** Es seien  $f_n \in \mathcal{T}(X, Y)$  und  $(f_n)$  eine  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ -Cauchyfolge. Dann gibt es eine Nullmenge  $N$  und eine Teilfolge  $(f'_n)$ , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) =: f(x) \quad \text{für } x \in X \setminus N$$

existiert.

Beweis: Wir wählen sukzessiv:

Für  $i = 1$  eine Teilfolge  $(f_{1,j})$  mit  $\|f_{1,k} - f_{1,l}\|_{\mathcal{L}^1} \leq 2^{-1}$  für alle  $k, l \geq 1$ ,

für  $i = 2$  davon eine Teilfolge  $(f_{2,j})$  mit  $\|f_{2,k} - f_{2,l}\|_{\mathcal{L}^1} \leq 2^{-2}$  für alle  $k, l \geq 2$ , usw.

Es sei  $(f'_j) := (f_{j,j})$  die Diagonalfolge. Dann gilt

$$\|f'_k - f'_l\|_{\mathcal{L}^1} \leq 2^{-i} \quad \text{für alle } k, l \geq i.$$

Es sei

$$g_j := \sum_{i=1}^j |f'_i - f'_{i+1}| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+.$$

Die Folge  $(g_j)$  wächst monoton, deshalb existiert

$$g(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) \in [0, \infty] \quad \text{für alle } x \in X,$$

und es gilt

$$\int_X g_j d\mu_0 = \sum_{i=1}^j \int_X |f'_i - f'_{i+1}| d\mu_0 \leq \sum_{i=1}^j 2^{-i} < 1.$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist dann wegen  $g_j \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R})$

$$M_{\varepsilon j} := \left\{ g_j > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \in \mathcal{Q},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \mu_0(M_{\varepsilon j}) \leq \int_X g_j d\mu_0 \leq 1,$$

und aus  $g_{j+1} = g_j + |f'_{j+1} - f'_j|$  folgt außerdem

$$M_{\varepsilon j} \subset M_{\varepsilon, j+1}.$$

Wegen

$$\{g = \infty\} \subset \left\{ g > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{\varepsilon j}.$$

ist  $N := \{g = \infty\}$  eine Nullmenge, und es gilt deshalb

$$\forall x \in X \setminus N \quad g(x) < \infty.$$

Aus

$$\begin{aligned} |f'_n(x) - f'_m(x)| &\leq |f'_n(x) - f'_{n-1}(x)| + |f'_{n-1}(x) - \cdot| + \cdots + |\cdot - f'_m(x)| \\ &= \sum_{i=m}^{n-1} |f'_{i+1}(x) - f'_i(x)| = g_{n-1}(x) - g_m(x) \end{aligned}$$

erhalten wir deshalb die Konvergenz der Folge  $(f'_n(x))$  für alle  $x \in X \setminus N$ . □

Damit ist das Rieszsche Lemma bewiesen.  $f(x)$  ist für  $x \in X \setminus N$  eindeutig bestimmt. Das werden wir anschließend in Lemma 11.4.1 zeigen. Daher können wir „lokalisieren“, also jeder  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ -Cauchyfolge in  $\mathcal{T}(X, Y)$  eine Funktion zuordnen, die, von einer Nullmenge abgesehen, in  $X$  definiert ist.

**Definition 11.3.1:** Wir sagen  $f = g \mu_0$ -fast überall (kurz: fast überall, abgekürzt f. ü.)  $\iff$  Es gibt eine Nullmenge  $N$  mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ .

Wir behandeln diese  $f : X \setminus N \rightarrow Y$  wie Funktionen und schreiben manchmal auch kurz  $f : X \rightarrow Y$  dafür, wenn das „Fast überall“ aus dem Zusammenhang klar ist.

Als Beispiel zum Rieszschen Lemma betrachten wir in  $X = [0, 1]$ :  $f_1(x) := 1$ ,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_3(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$f_4(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ usw.} \quad f_8(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1/8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ usw.}$$

Es ist  $f_n \in \mathcal{T}(X, Y)$ , und es gilt  $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Die Folge  $(f_n(x))$  konvergiert in irrationalen Punkten nicht, also nicht fast überall, wohl aber die Teilfolge

$$(f_1, f_2, f_4, f_8, \dots).$$

## 11.4 Lebesgue-integrierbare Funktionen

Wir betrachten nun folgende Funktionenklasse:

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(X, Y) := \left\{ f : X \rightarrow Y \mid \exists f_k \in \mathcal{T}(X, Y), (f_k) \text{ ist } \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}\text{-Cauchyfolge mit } f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \text{ f. ü.} \right\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{L}^1$  heißen „ $\mu$ -integrierbar“, „Lebesgue-integrierbar“ oder kurz „integrierbar“. In  $\mathcal{L}^1$  führen wir wieder die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \iff f = g \text{ f. ü.}$$

ein. Offensichtlich ist  $\mathcal{T}(X, Y) \subset \mathcal{L}^1$ . Es sei  $(f_k)$  eine Folge wie in der Definition von  $\mathcal{L}^1$ . Dann gilt

$$\left| \int_X f_k d\mu_0 - \int_X f_i d\mu_0 \right| \leq \int_X |f_k - f_i| d\mu_0 \leq \|f_k - f_i\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

In  $Y$  existiert also

$$I(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu_0.$$

Dafür schreiben wir auch

$$I(f) =: \int_X f d\mu.$$

Das hat zunächst nur symbolische Bedeutung; wir werden aber zeigen, daß  $\mu$  ein Maß ist, nämlich die gesuchte Fortsetzung von  $\mu_0$ . Als erstes müssen wir aber beweisen, daß das Integral nicht von der Wahl der approximierenden Folge  $(f_k)$  abhängt. Dazu zeigen wir:

**Lemma 11.4.1:** *Es seien  $(f_n)$ ,  $(f'_n)$ ,  $f$  und  $N$  wie im Rieszschen Lemma. Dann gilt*

$$(f_n) = 0 \text{ in } \tilde{\mathcal{T}} \iff f = 0 \text{ f. ü.}$$

Beweis:

1.  $\Rightarrow$ : Wir bezeichnen  $(f'_n)$  wieder mit  $(f_n)$ . Es sei

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{für } x \in X \setminus N$$

und

$$\tilde{N} = \{f \neq 0\} \setminus N.$$

Unser Ziel ist zu zeigen, daß auch  $\tilde{N}$  eine Nullmenge ist. Dazu wählen wir eine Teilfolge  $(f'_i)$  mit

$$\int_X |f'_i| d\mu_0 \leq 2^{-i}$$

und zu  $\varepsilon > 0$  ein  $j_\varepsilon$  mit  $2^{-j_\varepsilon} \leq \varepsilon$ . Es sei  $x \in \tilde{N}$ . Dann gibt es ein  $j > j_\varepsilon$  mit

$$|f(x)| > 2^{-j}$$

und ein  $i > 2j$  mit

$$|f'_i(x)| > 2^{-j},$$

letzteres wegen

$$|f'_i(x)| \geq \left| |f(x)| - \underbrace{|f'_i(x) - f(x)|}_{\rightarrow 0} \right|.$$

Mithin ist

$$\tilde{N} \subset \bigcup_{j > j_\varepsilon} \bigcup_{i > 2j} \tilde{N}_{ji},$$

wobei

$$\tilde{N}_{ji} := \{|f'_i| > 2^{-j}\} \in \mathcal{Q}$$

ist. Aus

$$2^{-j} \mu_0(\tilde{N}_{ji}) \leq \int_X |f'_i| d\mu_0 \leq 2^{-i}$$

folgt dann

$$\sum_{\substack{j > j_\varepsilon \\ i > 2j}} \mu_0(\tilde{N}_{ji}) \leq \sum_{\substack{j > j_\varepsilon \\ i > 2j}} 2^{j-i} = \sum_{j > j_\varepsilon} 2^{-j} = 2^{-j_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

$\tilde{N}$  ist also eine Nullmenge.

2.  $\Leftarrow$ : Für eine Teilfolge sei  $f_k \rightarrow 0$  f. ü. Weil die ursprüngliche Folge eine Cauchyfolge ist, genügt es,  $\|f_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$  zu zeigen. Durch den Übergang zu einer weiteren Teilfolge können wir außerdem

$$\int_X |f_k - f_{k+1}| d\mu_0 \leq 2^{-k}$$

annehmen. Für  $\varepsilon > 0$  sei

$$E_{kl} := \left\{ \sum_{i=k}^l |f_i - f_{i+1}| > \varepsilon \right\} \in \mathcal{Q}.$$

Dann ist

$$\varepsilon \mu_0(E_{kl}) \leq \int_X \sum_{i=k}^l |f_i - f_{i+1}| d\mu_0 \leq \sum_{i=k}^l 2^{-i} \leq 2^{-k+1}$$

und

$$E_{kl} \subset E_{k,l+1}.$$

Für  $x \in (X \setminus N) \setminus \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_{kl}$  gilt

$$|f_k(x)| \leq |f_{l+1}(x)| + \sum_{i=k}^l |f_i(x) - f_{i+1}(x)|$$

mit  $|f_{l+1}(x)| \rightarrow 0$  für  $l \rightarrow \infty$ , wegen  $x \in X \setminus N$ , und  $\sum_{i=k}^l |\dots| \leq \varepsilon$  für alle  $l$  nach Definition der  $E_{kl}$ . Es folgt also

$$\{|f_k| > \varepsilon\} \subset N \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_{kl} \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (M_{\delta l} \cup E_{kl}),$$

wobei  $M_{\delta l}$  wie in Lemma 11.2.3 gewählt wurde; es gilt also  $M_{\delta l} \subset M_{\delta, l+1}$ ,  $\mu_0(M_{\delta l}) \leq \delta$  und  $N \subset \bigcup_l M_{\delta l}$ . Weil  $\mu_0$   $\sigma$ -subadditiv ist, folgt aus der Monotonie von  $M_{\delta l} \cup E_{kl}$  bezüglich  $l$

$$\mu_0(\{|f_k| > \varepsilon\}) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \mu_0(M_{\delta l} \cup E_{kl}) \leq \delta + \frac{2^{-k+1}}{\varepsilon}.$$

$\delta$  war beliebig, also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_0(\{|f_k| > \varepsilon\}) = 0. \quad (*)$$

Wenn Gl. (\*) gilt, sagt man,  $(f_k)$  sei gegen Null „maßkonvergent“. Nun ist

$$E_l := \{f_l \neq 0\} \in \mathcal{Q} \quad \text{mit } \mu_0(E_l) < \infty.$$

Daher folgt für  $l < k$

$$\begin{aligned} \int_X |f_k| d\mu_0 &\leq \int_{E_l} |f_k| d\mu_0 + \int_{X \setminus E_l} |f_k| d\mu_0 \\ &\leq \varepsilon \mu(E_l) + \int_{\{|f_k| > \varepsilon\}} |f_k| d\mu_0 + \int_{X \setminus E_l} |f_k| d\mu_0 \\ &\leq \varepsilon \mu(E_l) + \int_{\{|f_k| > \varepsilon\}} |f_l| d\mu_0 + \int_{\{|f_k| > \varepsilon\}} (|f_k| - |f_l|) d\mu_0 + \int_{X \setminus E_l} |f_k| d\mu_0 \\ &\leq \varepsilon \mu(E_l) + \int_{\{|f_k| > \varepsilon\}} |f_l| d\mu_0 + 2 \int_X |f_k - f_l| d\mu_0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_X |f_k - f_l| d\mu_0 &\leq \sum_{i=l}^{k-1} \int_X |f_i - f_{i+1}| d\mu_0 \leq 2^{-l+1} \rightarrow 0 \text{ für } l \rightarrow \infty, \\ \varepsilon \mu_0(E_l) &\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ bei festem } l, \\ \int_{\{|f_k| > \varepsilon\}} |f_l| d\mu_0 &\leq \sup_x |f_l(x)| \mu_0(\{|f_k| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ bei festen } \varepsilon, l. \end{aligned}$$

Es folgt also  $\|f_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ , und das war zu zeigen. □

Damit ist bewiesen, daß für  $f \in \mathcal{L}^1$  das Integral  $\int_X f d\mu$  wohldefiniert ist. Es gilt

$$\forall f \in \mathcal{T}(X, Y) \quad \int_X f d\mu = \int_X f d\mu_0.$$

Ferner zeigt das Lemma, daß es zu einer Cauchyfolge  $(f_k) \in \tilde{\mathcal{T}}(X, Y)$  genau ein  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  gibt, so daß für eine Teilfolge  $(f'_k)$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$$

f. ü. gilt. Dies definiert die lineare Abbildung

$$J : \tilde{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}^1(X, Y).$$

Es ist  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{T}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ , und nach dem vorigen Lemma ist  $J$  injektiv und nach Definition von  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  surjektiv. Aus  $J((f_k)) = f$  folgt auch  $J(|f_k|) = |f|$ . Wegen

$$\| |f_k| - |f| \|_{\mathcal{L}^1} = \int_X | |f_k| - |f| | d\mu_0 \leq \int_X |f_k - f| d\mu_0 = \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1}$$

ist nämlich mit  $(f_k) \in \tilde{\mathcal{T}}(X, Y)$  auch  $(|f_k|) \in \tilde{\mathcal{T}}(X, Y)$ , und aus  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$  folgt auch  $|f_k(x)| \rightarrow |f(x)|$ . Deshalb ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_X |f| d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k| d\mu_0 = \|(f_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{\tilde{\mathcal{T}}}$$

oder

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|J((f_k)_{k \in \mathbb{N}})\|_{\mathcal{L}^1} = \|(f_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{\tilde{\mathcal{T}}}.$$

$J$  ist also eine Isometrie.  $\tilde{\mathcal{T}}(X, Y)$  ist nach Definition vollständig, mithin ist  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  mit der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$  ein Banachraum.

Ist  $J((f_k)_{k \in \mathbb{N}}) = f$ , dann gilt

$$\forall j \quad J((f_k - f_j)_{k \in \mathbb{N}}) = f - f_j$$

und

$$\|f - f_j\|_{\mathcal{L}^1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f_j| d\mu_0 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

$f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  läßt sich mithin durch Treppenfunktionen in der  $\mathcal{L}^1$ -Norm approximieren;  $\mathcal{T}(X, Y)$  ist in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  dicht.

Die Konvergenz f. ü. im Rieszschen Lemma überträgt sich auf  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ . Es gilt nämlich:

**Rieszscher Satz:** Es seien  $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  mit  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(f'_n)$  mit  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  f. ü.

Beweis: O.B.d.A. seien  $\|f_j\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ ,  $f_j \geq 0$ ,  $Y = \mathbb{R}$  und (für eine Teilfolge)

$$\int_X f_j d\mu \leq 2^{-j}.$$

Aus dem Rieszschen Lemma folgt dann für jedes  $j$  die Existenz einer Folge  $(f_{jk})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}(X, Y)$  mit

$$\forall j \quad \forall x \in X \setminus N \quad f_j(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{jk}(x).$$

Dabei kann man die Nullmenge  $N$  unabhängig von  $j$  wählen (sie ist ja eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen  $N_j$ ). Indem man für jedes  $j$  zu einer Teilfolge übergeht, kann man ferner annehmen:

$$\int_X |f_j - f_{j1}| d\mu \leq 2^{-j} \quad \text{und} \quad \int_X |f_{jk} - f_{j,k+1}| d\mu_0 \leq 2^{-j-k}.$$

Nun sei

$$N_0 := \left\{ x \in X \setminus N \mid (f_j(x))_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist keine Nullfolge} \right\}.$$

Wir haben zu zeigen, daß  $N_0$  eine Nullmenge ist. Dazu wählen wir zu  $\varepsilon > 0$  ein  $l_\varepsilon$  mit  $6 \cdot 2^{-l_\varepsilon} < \varepsilon$ . Für ein  $l > l_\varepsilon$  und  $x \in N_0$  gilt dann

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x) > 2^{-l}$$

und für ein  $j > 2l$

$$f_j(x) > 2^{-l}.$$

Wegen  $|f_j| \leq |f_j - f_{j1}| + |f_{j1}|$  und  $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$  folgt daraus

$$|f_j(x) - f_{j1}(x)| > 2^{-l-1} \quad \text{oder} \quad |f_{j1}(x)| > 2^{-l-1}.$$

Für  $x \in N_0$  gilt deshalb wegen  $f_{jk}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_j(x)$  entweder

$$\sum_{i=2}^k |f_{ji}(x) - f_{j,i-1}(x)| \geq |f_{jk}(x) - f_{j1}(x)| > 2^{-l-1} \quad \text{für große } k$$

oder  $|f_{j1}(x)| > 2^{-l-1}$ .

In Mengenschreibweise bedeutet das

$$N_0 \subset \bigcup_{l>l_\varepsilon} \bigcup_{j>2l} \left( N_{lj} \cup \left( \bigcup_{k \geq 2} M_{ljk} \right) \right),$$

wobei

$$N_{lj} := \{ |f_{j1}| > 2^{-l-1} \} \in \mathcal{Q},$$

$$M_{ljk} := \left\{ \sum_{i=2}^k |f_{ji} - f_{j,i-1}| > 2^{-l-1} \right\} \in \mathcal{Q}$$

und  $M_{ljk} \subset M_{l,j,k+1}$  ist. Nun gilt

$$\mu_0(N_{lj}) \leq 2^{l+1} \int_X |f_{j1}| d\mu_0 \leq 2^{l+1} \left\{ \int_X |f_{j1} - f_j| d\mu + \int_X |f_j| d\mu \right\} \leq 2^{2+l-j}$$

und

$$\mu_0(M_{ljk}) \leq 2^{l+1} \int_X \sum_{i=2}^k |f_{ji} - f_{j,i-1}| d\mu_0 \leq 2^{l+1} \sum_{i=2}^k 2^{-j-i+1} \leq 2^{1+l-j},$$

also

$$\sum_{l>l_\varepsilon} \sum_{j>2l} \left\{ \mu_0(N_{lj}) + \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_0(M_{ljk}) \right\} \leq \sum_{l>l_\varepsilon} \sum_{j>2l} 6 \cdot 2^{-l-j} = 6 \cdot 2^{-l_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Damit ist der Rieszsche Satz bewiesen. □

**Folgerung 11.4.2:**  $(f_n)$  sei eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  und

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad f. \ddot{u}.$$

Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ , und es gilt  $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ .

Beweis: Weil  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  vollständig ist, gibt es ein  $g \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  mit  $\|f_n - g\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Aus dem Rieszschen Satz folgt dann die Existenz einer Teilfolge  $(f'_n)$  mit  $f'_n \rightarrow g$  f.  $\ddot{u}$ . Deshalb ist  $f = g$  f.  $\ddot{u}$ ., also  $f = g$  in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ .

Damit haben wir das Lebesguesche Integral eingeführt. Rechentechniken dafür geben wir in §11.7. Jetzt folgen noch eine Dichteaussage und eine einfache Abschätzung.

**Satz 11.4.3:**  $\mathring{C}(X, Y)$  ist in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$  dicht.

Beweis: Analog Satz 6.2.3 zeigt man, daß  $\mathcal{T}(X, Y)$  in  $\mathring{C}(X, Y)$  bezüglich der Supremumsnorm dicht ist. Zu  $g \in \mathring{C}(X, Y)$  gibt es also einen Quader  $Q \Subset X$  und  $t_n \in \mathcal{T}(X, Y)$  mit  $\text{supp } t_n \subset Q$  und

$$\|g - t_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Mit  $c := \mu(Q)$  ist dann

$$\|g - t_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{c}{n}.$$

Mithin ist  $\mathring{C}(X, Y) \subset \mathcal{L}^1(X, Y)$ , und wir müssen nur noch zeigen, daß sich ein  $\chi_Q$  mit  $Q = [a, b]$  durch  $\mathring{C}$ -Funktionen approximieren läßt. Dazu wählen wir (o.B.d.A.)  $Y = \mathbb{R}$  und bilden mit  $\varepsilon > 0$

$$Q_\varepsilon := \left\{ x \in X \mid a_i - \varepsilon \leq x_i < b_i + \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

$$f_\varepsilon(x) := \max\left(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{dist}(x, Q)\right) \in \mathring{C}(X, \mathbb{R}).$$

Dann ist

$$\chi_Q \leq f_\varepsilon \leq \chi_{Q_\varepsilon},$$

und es folgt aus dem nächsten Satz

$$\int_X |f_\varepsilon - \chi_Q| d\mu \leq \int_X (\chi_{Q_\varepsilon} - \chi_Q) d\mu = \mu_0(Q_\varepsilon \setminus Q) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

**Satz 11.4.4:** Es seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  und  $g \geq f$  f. ü. Dann gilt

$$\int_X g d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Beweis: O.B.d.A. sei  $f = 0$ . Es seien  $g_k \in \mathcal{T}(X, Y)$  und  $(g_k)$  eine  $\mathcal{L}^1$ -Cauchyfolge mit  $g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$  f. ü. Mit

$$g_k^+ := \max(0, g_k) \in \mathcal{T}(X, Y)$$

gilt dann

$$|g_k^+ - g_l^+| \leq |g_k - g_l|.$$

Mithin ist auch  $(g_k^+)$  eine  $\mathcal{L}^1$ -Cauchyfolge, und f. ü. folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k^+ = \max\left(\lim_{k \rightarrow \infty} g_k, 0\right) = g.$$

Nach Folgerung 11.4.2 konvergiert dann auch  $\|g_k^+ - g\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ , also

$$\int_X g d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k^+ d\mu_0 \geq 0. \quad \square$$

## 11.5 Maßerweiterung

Auf den Zusammenhang von Integrations- und Maßtheorie habe ich schon mehrfach hingewiesen. So liefert die Konstruktion von  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  auch die Erweiterung von  $\mu_0$  auf eine  $\sigma$ -Algebra, und man erhält auf diese Weise das Lebesguesche Maß  $\mu$ . Das soll nun gezeigt werden.

Unser Maß  $\mu_0$  ist auf  $X = \mathbb{R}^n$  „ $\sigma$ -finit“ . Das bedeutet, daß es  $X_n \in \mathcal{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gibt mit  $\mu_0(X_n) < \infty$  und  $X = \cup X_n$ . Für  $X_n$  können wir halboffene Quader wählen, und zwar so, daß

$$X_n \subset X_{n+1}$$

ist. Es sei nun

$$\mathcal{L} := \{E \subset X \mid \chi_{E \cap X_n} \in \mathcal{L}^1(X, Y) \text{ für alle } n\},$$

und für  $E \in \mathcal{L}$  definieren wir

$$\mu(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{E \cap X_n} d\mu.$$

Satz 11.4.4 zeigt, daß die Integrale rechts anwachsen. Der Limes existiert also in  $[0, \infty]$ .

**Lemma 11.5.1:** Es ist  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$  und  $\mu(E) = \mu_0(E)$  für alle  $E \in \mathcal{Q}$ .

Beweis: Es sei  $E \in \mathcal{Q}$ . Dann ist auch  $E \cap X_n \in \mathcal{Q}$ , mithin  $\chi_{E \cap X_n} \in \mathcal{T}(X, Y) \subset \mathcal{L}^1(X, Y)$  und

$$\mu_0(E \cap X_n) = \mu(E \cap X_n).$$

Gibt es ein  $k$  mit  $E \subset X_k$ , dann ist das Lemma damit bewiesen. Allgemein gilt punktweise

$$\chi_{E \cap X_n}(x) \rightarrow \chi_E(x).$$

Ist nun  $\mu_0(E) < \infty$ , dann folgt

$$\mu_0(E \cap X_n) \leq \mu_0(E) < \infty.$$

Mithin konvergiert  $\mu_0(E \cap X_n)$ , und aus Folgerung 11.4.2 erhält man

$$\|\chi_{E \cap X_n} - \chi_E\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Ist  $\mu_0(E) = \infty$ , dann ist auch

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(E \cap X_n) = \infty.$$

**Lemma 11.5.2:** Es sei  $\chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . Dann gibt es  $E_n \in \mathcal{Q}$  mit

$$\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Beweis: Es seien  $t_n \in \mathcal{T}(X, Y)$  mit  $0 \leq t_n \leq 1$  und

$$\|\chi_E - t_n\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Es seien ferner

$$E_n := \left\{ x \in X \mid t_n(x) > \frac{1}{2} \right\} \in \mathcal{Q}.$$

Dann gilt

$$|\chi_{E_n} - \chi_E|(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E_n \setminus E \\ 0 & \text{für } x \in E_n \cap E \\ 1 & \text{für } x \in E \setminus E_n \end{cases} \quad \text{und} \quad |t_n - \chi_E|(x) \geq \begin{cases} 1/2 & \text{für } x \in E_n \setminus E \\ 0 & \text{für } x \in E_n \cap E \\ 1/2 & \text{für } x \in E \setminus E_n, \end{cases}$$

also

$$|\chi_{E_n} - \chi_E| \leq 2|t_n - \chi_E|.$$

Aus Satz 11.4.4 folgt daher

$$\int_X |\chi_{E_n} - \chi_E| d\mu \leq 2 \int_X |t_n - \chi_E| d\mu \rightarrow 0.$$

**Lemma 11.5.3:** *Es sei  $\mu(E) < \infty$ . Dann ist  $\mu(E) = \|\chi_E\|_{\mathcal{L}^1}$ .*

Es ist nämlich  $\chi_{E \cap X_n} \leq \chi_E \cdot \|\chi_{E \cap X_n}\|_{\mathcal{L}^1}$  konvergiert gegen  $\mu(E)$ , und punktweise gilt

$$\chi_{E \cap X_n}(x) \rightarrow \chi_E(x).$$

Aus Folgerung 11.4.2 erhalten wir daher

$$\|\chi_{E \cap X_n} - \chi_E\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Nun können wir den folgenden Satz beweisen:

**Satz 11.5.4:**  *$(X, \mathcal{L}, \mu)$  ist ein Maßraum.*

Beweis:  $(X, \mathcal{L})$  ist ein Raum meßbarer Mengen. Um das zu zeigen, müssen wir die Eigenschaften (i) – (iii) in Definition 10.3.3 nachweisen:

(i) ist klar.

Es sei  $E \in \mathcal{L}$ . Dann ist

$$X = E \cup (X \setminus E) \quad \text{und} \quad X_n = (E \cap X_n) \cup ((X \setminus E) \cap X_n)$$

sowie

$$\chi_{X_n} = \chi_{E \cap X_n} + \chi_{(X \setminus E) \cap X_n}.$$

Mit  $\chi_{X_n}$  und  $\chi_{E \cap X_n}$  ist daher auch  $\chi_{(X \setminus E) \cap X_n}$  in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ , das heißt  $X \setminus E \in \mathcal{L}$ . Das beweist (ii).

Es seien nun  $E_i \in \mathcal{L}$  und o.B.d.A.  $E_i \subset E_{i+1}$  (man wähle  $F_1 := E_1$ ,  $F_2 := F_1 \cup E_2, \dots$ ). Es sei ferner

$$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

und es gebe ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $E \subset X_k$ . Dann ist

$$\mu(E_i) = \|\chi_{E_i \cap X_k}\|_{\mathcal{L}^1} \leq \mu_0(X_k)$$

$(\mu(E_i))$  ist also monoton und beschränkt, mithin konvergiert  $\|\chi_{E_i}\|_{\mathcal{L}^1}$ . Für alle  $x$  gilt

$$\chi_{E_i}(x) \rightarrow \chi_E(x).$$

Aus Folgerung 11.4.2 erhalten wir deshalb

$$\|\chi_{E_i} - \chi_E\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Das beweist  $\chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ ,  $E \in \mathcal{L}$  und

$$\mu(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i).$$

Bei allgemeinem  $E$  folgt deshalb für alle  $k$

$$E \cap X_k \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \mu(E \cap X_k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i \cap X_k).$$

Damit gilt ebenfalls  $E \in \mathcal{L}$ , und (iii) ist bewiesen.

$(X, \mathcal{L})$  ist also ein Raum meßbarer Mengen, und nach Definition 10.4.1 müssen wir nur noch die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$  nachweisen: Es seien also  $E_i \in \mathcal{L}$  disjunkt und

$$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Dann wollen wir  $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$  zeigen. Es sei wieder  $F_1 := E_1, F_2 := F_1 \cup E_2, \dots$ . Dann ist  $F_i \subset F_{i+1}$  und  $\mu(F_i) = \sum_{j=1}^i \mu(E_j)$ . Wie wir bereits wissen, ist

$$\forall k \quad \mu(E \cap X_k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(F_i \cap X_k)$$

sowie  $F_i \subset E$  und  $\mu(F_i) \leq \mu(E)$ . Im Falle  $\mu(F_i) \rightarrow \infty$  ist auch  $\mu(E) = \infty$ , also nichts mehr zu beweisen. Es sei deshalb  $\mu(F_i) \leq c < \infty$ . Dann sind wieder zwei Fälle möglich:

Einmal sei  $\mu(E) < \infty$ . Dann konvergiert  $\mu(F_i)$ , und es folgt

$$\mu(F_i) = \|\chi_{F_i}\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow \|\chi_E\|_{\mathcal{L}^1} = \mu(E).$$

Zum zweiten sei  $\mu(E) = \infty$ . Dann gilt auch  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(F_i) = \infty$ , und das war bereits ausgeschlossen.  $\square$

Wir zeigen ferner:

**Satz 11.5.5:** *Es gilt*

(i)  $N \subset X$  ist  $\mu_0$ -Nullmenge  $\iff N \in \mathcal{L}$  mit  $\mu(N) = 0$ .

(ii)  $\chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$   $\iff E \in \mathcal{L}$  mit  $\mu(E) < \infty$ .

Beweis: Weil  $\mu_0$   $\sigma$ -finit war, ist es auch  $\mu$ . Man wähle nur dieselben  $X_n \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ . Wir zeigen:

1. (i)  $\implies$ : Für alle  $k$  ist  $\chi_{N \cap X_k} = 0$  in  $\mathcal{L}^1$ . Mithin ist  $N \in \mathcal{L}$  und  $\mu(N) = 0$ .
2. (i)  $\impliedby$ : Es ist  $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} (N \cap X_k)$ . Deshalb genügt es, die Behauptung für ein  $N \cap X_k$  zu beweisen. Es sei also o.B.d.A.  $N \subset X_k$  für ein  $k$ . Dann ist

$$\|\chi_N\|_{\mathcal{L}^1} = \int_X \chi_N d\mu = \mu(N) = 0,$$

also  $\chi_N = 0$  f.ü. Mithin ist  $N$  in einer  $\mu_0$ -Nullmenge enthalten.

3. (ii)  $\impliedby$ :  $\mu(E \cap X_n)$  ist eine monotone und durch  $\mu(E)$  beschränkte Folge,  $\chi_{E \cap X_n}$  also eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ , welche punktweise gegen  $\chi_E$  konvergiert. Nach Folgerung 11.4.2 ist dann  $\chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ .
4. (ii)  $\implies$ : Nach Lemma 11.5.2 gibt es  $E_k \in \mathcal{Q}$  mit  $\|\chi_{E_k} - \chi_E\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Aus dem Rieszschen Satz folgt daher die Existenz einer Teilfolge  $\chi_{E'_k} \rightarrow \chi_E$  f.ü. Wegen

$$|\chi_{E_k \cap X_n} - \chi_{E'_k \cap X_n}| \leq |\chi_{E_k} - \chi_{E'_k}|$$

und Satz 11.4.4 ist  $(\chi_{E_k \cap X_n})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ , und f.ü. gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E'_k \cap X_n} = \chi_{E \cap X_n}.$$

Aus Folgerung 11.4.2 erhalten wir deshalb  $\chi_{E \cap X_n} \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ , also  $E \in \mathcal{L}$ . Satz 11.4.4 liefert dann

$$\int_X \chi_{E \cap X_n} d\mu \leq \int_X \chi_E d\mu,$$

also

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{E \cap X_n} d\mu \leq \int_X \chi_E d\mu = \|\chi_E\|_{\mathcal{L}^1},$$

und damit natürlich  $\mu(E) = \|\chi_E\|_{\mathcal{L}^1}$ .  $\square$

Damit haben wir die Lebesgue-meßbaren Mengen  $\mathcal{L}$  und den vollständigen Lebesgueschen Maßraum  $(X, \mathcal{L}, \mu)$  eingeführt. Es sei  $\mathcal{B}$  die von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Menge von Borelmengen, und es sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$  die Menge der Nullmengen. Dann ist nach Definition der Borelmengen  $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ . Es gilt sogar

**Satz 11.5.6:** Jede meßbare Menge  $L \in \mathcal{L}$  läßt sich als  $L = B \cup N$  darstellen, mit  $B \in \mathcal{B}$  und  $N \in \mathcal{N}$ .

Zum Beweis zeigen wir, daß es zu  $E \in \mathcal{L}$  ein  $B \in \mathcal{B}$  und eine Nullmenge  $N$  gibt mit  $E \setminus N = B \setminus N$ ; das heißt, es ist  $\chi_E = \chi_B$  f.ü.

O.B.d.A. können wir  $E \subset X_m$  für ein  $m$  annehmen, denn aus  $(E \cap X_m) \setminus N_m = B_m \setminus N_m$  folgt  $E \setminus N = B \setminus N$  mit  $N := \cup_m N_m$  und  $B := \cup_m B_m$ . Nach Lemma 11.5.2 gibt es  $E_k \in \mathcal{Q}$  mit

$$\int_X |\chi_E - \chi_{E_k}| d\mu \leq 2^{-k}.$$

Es sei auch  $E_k \subset X_m$  (sonst ersetze man  $E_k$  durch  $E_k \cap X_m$ ), und es gelte  $\chi_{E_k} \rightarrow \chi_E$  f.ü. Dann folgt aus  $x \in E \setminus N$  auch  $x \in E_j \setminus N$  für große  $j$ , also

$$E \setminus N \subset B \setminus N \quad \text{mit} \quad B := \bigcap_k \bigcup_{j>k} E_j$$

und

$$\mu(B \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{j>k} E_j \setminus E\right) \leq \sum_{j>k} \mu(E_j \setminus E) \leq \sum_{j>k} \int_X |\chi_{E_j} - \chi_E| d\mu \leq 2^{-k} \rightarrow 0.$$

Daher ist  $\tilde{N} := N \cup (B \setminus E)$  eine Nullmenge und  $E \setminus \tilde{N} = B \setminus \tilde{N}$ . □

Die Konstruktion einer Nullmenge  $N \in \mathcal{N}$  mit  $N \notin \mathcal{B}$  wird Beispiel 11.9.7 enthalten.

## 11.6 Meßbare Abbildungen

Wir betrachten nun Abbildungen

$$f : X \rightarrow Y$$

und denken dabei wieder an  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$ . Allgemeiner kann  $Y$  ein Banachraum sein. Man benötigt dann aber die Separabilität des Wertebereichs  $f(X \setminus N)$ , um im nächsten Abschnitt §11.7 wichtige Ergebnisse zu erhalten, zum Beispiel das Majorantenkriterium. Separabilität von  $f(X \setminus N)$  heißt, in  $f(X \setminus N)$  soll es eine abzählbare überall dichte Menge geben. Dabei ist  $N$  eine Nullmenge. Im Falle  $Y = \mathbb{R}^m$  ist das wegen  $\mathbb{Q}^m \subset \mathbb{R}^m$  immer erfüllt. Wir werden uns deshalb um diese Frage im folgenden nicht weiter kümmern.  $X$  denken wir uns mit dem Lebesgueschen Maß versehen, als Maßraum soll also  $(X, \mathcal{L}, \mu)$  zugrundeliegen. Nach Definition 10.3.4 ist  $f$  dann meßbar, wenn für alle offenen  $V \subset Y$  die Urbilder  $f^{-1}(V) \subset X$  meßbar sind. Weil  $\mathcal{L}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, gilt das dann auch für alle Borelmengen  $V \subset Y$  (Satz 10.3.7.2).

Es sei  $Z$  ein Banachraum. Dann heißt

$$\varphi : Y \rightarrow Z$$

„Borelfunktion“, wenn für alle offenen  $W \subset Z$  die Urbilder  $\varphi^{-1}(W)$  Borelmengen in  $Y$  sind. Stetige Funktionen sind Borelfunktionen. Es gilt:

### Satz 11.6.1:

1. Es seien  $X, Y, Z$  wie oben,  $f$  meßbar und  $\varphi$  eine Borelfunktion. Dann ist auch  $\varphi \circ f$  meßbar.
2. Es seien  $f_n$  meßbar und  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann ist auch  $f$  meßbar.
3. Es seien  $Y = \mathbb{R}$  und  $f_n$  meßbar. Es seien

$$f := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{bzw.} \quad g := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

fast überall endlich. Dann sind  $f$  bzw.  $g$  meßbar.

Beweis:

1. Es sei  $W \subset Z$  offen. Dann ist  $\varphi^{-1}(W)$  eine Borelmenge und  $f^{-1}(\varphi^{-1}(W)) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$  mithin meßbar.
2. Es sei für  $x \in X \setminus N$ ,  $N$  Nullmenge,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Es sei  $V \subset Y$  offen und

$$V_i := \{y \in V \mid B_{1/i}(y) \subset V\}.$$

Für  $x \in X \setminus N$  gilt dann

$$f(x) \in V \iff \exists i, k \quad \forall j \geq k \quad f_j(x) \in V_i$$

oder in Mengenschreibweise

$$f^{-1}(V) \setminus N = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(V_i) \setminus N \in \mathcal{L}.$$

3. Es sei für  $x \in X \setminus N$ ,  $N$  Nullmenge,

$$f(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > -\infty.$$

Dann gilt

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f^{-1}([a, \infty)) \setminus N = \bigcap_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([a, \infty)) \setminus N \in \mathcal{L}.$$

Mithin ist  $f$  meßbar und damit auch

$$g_k = \inf_{j \geq k} f_j.$$

Aus Aussage 2 folgt dann

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \in \mathcal{L}. \quad \square$$

Es seien nun  $E_i \in \mathcal{L}$  paarweise disjunkt und  $c_i \in Y$ . Dann nennen wir

$$g := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$$

eine „verallgemeinerte Treppenfunktion“. Es gilt

**Korollar 11.6.2:**  $f$  ist genau dann meßbar, wenn es verallgemeinerte Treppenfunktionen  $g_j$  gibt mit  $g_j \rightarrow f$  f.ü.

Beweis:

⇐: Nach Satz 11.6.1.2 ist eine verallgemeinerte Treppenfunktion  $g_j$  meßbar und damit auch  $f$ .

⇒: O.B.d.A. sei  $Y = \mathbb{R}$ . Es sei  $\nu \in \mathbb{Z}$  und

$$E_{n,\nu} := f^{-1}\left(\left[\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right)\right).$$

Bei festem  $n$  sind die  $E_{n,\nu}$  disjunkt. Es sei

$$g_n := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{2^n} \chi_{E_{n,\nu}}.$$

Dann gilt für alle  $x$

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0.$$

Damit haben wir sogar die gleichmäßige Konvergenz bewiesen (vgl. den Satz von Egorov weiter unten).

**Korollar 11.6.3:**  $f$  ist genau dann meßbar, wenn es Treppenfunktionen  $t_j \in \mathcal{T}(X, Y)$  gibt mit  $t_j \rightarrow f$  f.ü.

Zum Beweis genügt es, in  $X_m = (-m, m)$  eine verallgemeinerte Treppenfunktion  $g$  durch  $t \in \mathcal{T}(X, Y)$  zu approximieren.  $\chi_{E_i \cap X_m}$  läßt sich nach Lemma 11.5.2 in  $\mathcal{L}^1$  durch  $\chi_{E_{ij} \cap X_m}$  mit  $E_{ij} \in \mathcal{Q}$  approximieren. Es gilt also

$$\|\chi_{E_{ij} \cap X_m} - \chi_{E_i \cap X_m}\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0,$$

und aus dem Rieszschen Satz folgt die Konvergenz einer Teilfolge.

**Korollar 11.6.4:** Mit  $f, g \in \mathcal{L}$  und  $c \in \mathbb{R}$  sind auch

$$cf, \quad f \pm g, \quad f \cdot g, \quad |f|$$

und falls  $f \neq 0$  f.ü.

$$h(x) := \begin{cases} 1/f(x) & \text{wenn } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } f(x) = 0 \end{cases}$$

meßbar.

Der Beweis folgt aus Korollar 11.6.2.

**Satz 11.6.5:** Es seien  $f \in \mathcal{L}^1$  und für  $E \in \mathcal{L}$

$$\nu(E) := \int_E f d\mu.$$

Dann ist  $\nu$   $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{L}$  mit Werten in  $Y$ , und es gilt

$$|\nu(E)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \mu(E) \rightarrow 0.$$

Beweis:

1. Es seien  $E_i \in \mathcal{L}$  mit  $E_i \subset E_{i+1}$  und  $E = \cup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . Dann ist  $\chi_{E_i} f = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi_{E_i} f$  punktweise. Außerdem ist

$$\int_{E_i} |f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu < \infty,$$

also konvergent, und für  $i < j$  gilt

$$\int_X |\chi_{E_j} f - \chi_{E_i} f| d\mu = \int_{E_j \setminus E_i} |f| d\mu = \int_{E_j} |f| d\mu - \int_{E_i} |f| d\mu \rightarrow 0.$$

In  $\mathcal{L}^1$  gilt also  $\chi_{E_i} f \rightarrow \chi_E f$  oder  $\nu(E_i) \rightarrow \nu(E)$ .  $\nu$  ist deshalb  $\sigma$ -additiv.

2. Wir wählen nun

$$f_k := \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki} \chi_{E_{ki}} \in \mathcal{T}(X, Y)$$

mit  $\|f - f_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Dann ist

$$|\nu(E)| \leq \int_E |f - f_k| d\mu + \sum_{i=1}^{n_k} |\alpha_{ki}| \mu(E \cap E_{ki}).$$

Der erste Term konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null und der zweite bei festem  $k$  für  $\mu(E) \rightarrow 0$ . □

Wir wollen nun den Satz von D. Egorov (1869–1931) zeigen. Vorher definieren wir:

**Definition 11.6.6:**  $f_j \rightarrow f$  fast gleichmäßig auf  $X$   $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \in \mathcal{L} \quad \mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad f_j \rightarrow f \text{ gleichmäßig in } E_\varepsilon.$$

**Satz von Egorov:** Es seien  $f$  und  $f_j$  meßbar. Dann gilt:

1. Es konvergiere  $f_j \rightarrow f$  fast gleichmäßig. Dann folgt  $f_j \rightarrow f$  f.ü.
2. Es seien  $\mu(X) < \infty$  und  $f_j \rightarrow f$  f.ü. Dann folgt  $f_j \rightarrow f$  fast gleichmäßig.

Beweis:

1. Wir wählen  $E_\varepsilon$  zu  $\varepsilon = 1/n$  und  $E := \cup E_{1/n}$ . Dann ist  $\mu(X \setminus E) = 0$  und für  $x \in E$

$$f_j(x) \rightarrow f(x).$$

2. Es seien  $\varepsilon > 0$  sowie  $E \in \mathcal{L}$  mit  $\mu(X \setminus E) = 0$  und

$$f_j(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } x \in E$$

vorgegeben. Es seien ferner

$$E_{kn} := \left\{ x \in E \mid \forall j \geq k \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Dann gilt für alle  $n$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{kn} = E \quad \text{und} \quad E_{kn} \subset E_{k+1,n}.$$

Wegen  $\mu(X) < \infty$  gibt es deshalb  $k_n$  mit

$$\mu(E \setminus E_{k_n, n}) \leq \varepsilon 2^{-n}.$$

Es sei

$$E_\varepsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n, n} \subset E.$$

Dann ist  $X \setminus E_\varepsilon \subset (X \setminus E) \cup (E \setminus E_\varepsilon)$ , also

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{k_n, n}) \leq \varepsilon,$$

und auf  $E_\varepsilon$  konvergiert  $(f_j)$  gleichmäßig gegen  $f$ . Es sei nämlich  $\eta > 0$  gegeben. Wähle  $n := 1 + [1/\eta]$  und  $N := k_n$ . Dann gilt

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in E_\varepsilon \quad \forall j \geq N \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \leq \eta$$

wegen  $x \in E_{Nn}$ .

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts seien wichtige Konvergenzbegriffe noch einmal zusammengestellt:

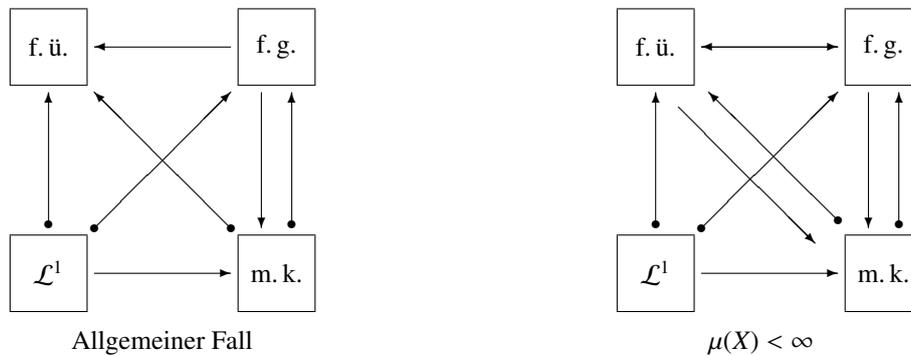
f. ü. „fast überall“:  $\forall x \in X \setminus N \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

f. g. „fast gleichmäßig“:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \in \mathcal{L} \quad f_n \rightarrow f$  gleichmäßig in  $E_\varepsilon$  und  $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

$\mathcal{L}^1$ :  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

m. k. „maßkonvergent“:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$ .

Aus der Konvergenz einer Folge in  $\mathcal{L}^1$  folgt auch ihre Konvergenz f. ü., f. g. und m. k., jedenfalls für eine Teilfolge. Den folgenden Abbildungen können Sie weitere wichtige Implikationen entnehmen. Dabei soll der fette Punkt am Fuße eines Pfeils bedeuten, daß die Implikation nur für eine Teilfolge gilt. Man zeige die hier nicht bewiesenen Implikationen!



**Beispiel 11.6.7:**

1. Erinnert sei noch einmal an das am Ende von §11.3 gegebene Beispiel zum Rieszschen Lemma: Es gibt  $f_n$  mit  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ ; aber nur für eine Teilfolge gilt  $f_n \rightarrow f$  f.ü.;  $(f_n(x))$  konvergiert also nicht punktweise. Dazu wähle man:

$$X = [0, 1], \quad f := 0 \quad \text{und} \quad f_1(x) := 1,$$

$$f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_3(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_4(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1/4 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_5(x) := \dots, \quad f_6(x) := \dots, \quad f_7(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 3/4 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_8(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1/8 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{usw.}$$

Die Teilfolge  $(f_1, f_2, f_4, f_8, \dots)$  konvergiert f.ü. gegen Null.

2. Es gibt ein  $f$  mit  $|f| \in \mathcal{L}$ , aber  $f$  ist nicht meßbar. Es sei nämlich  $V$  die Vitali-Menge (vgl. §10.2) und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in V \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es genügt also nicht, nur auf  $|f|$  zu achten!

## 11.7 Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Wir beginnen mit:

### Satz 11.7.1:

1. Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . Dann ist  $f$  meßbar.
2. Es seien  $f$  meßbar,  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$  und  $|f| \leq g$  f.ü. Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ .

Die zweite Aussage heißt „Majorantenkriterium“. Beweis des Satzes:

1. Es seien  $f_k \in \mathcal{T}(X, Y)$  mit  $\|f - f_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ . Aus dem Rieszschen Satz folgt dann die Existenz einer Teilfolge mit  $f'_k \rightarrow f$  f.ü. Nach Satz 11.6.1 ist  $f$  dann meßbar.
2. Man wähle zu  $k \in \mathbb{N}$  eine Überdeckung von

$$\partial B(0, 1) \subset Y = \mathbb{R}^m$$

mit disjunkten Borelmengen  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, j_k$ , und

$$\text{diam}(F_j) := \sup\{|x - y| \mid x, y \in F_j\} < \frac{1}{k}.$$

Daß das möglich ist, folgt aus der Überdeckungseigenschaft von Heine-Borel (vgl. §4.5).  $\partial B(0, 1)$  werde von den Kugeln  $B(x_1, \frac{1}{2k}), \dots, B(x_{j_k}, \frac{1}{2k})$  überdeckt. Dann leisten  $F_1 := B_1, F_2 := B_2 \setminus F_1, \dots$  das gewünschte. Es seien nun für  $i = 1, \dots, k$  und  $j = 1, \dots, j_k$

$$E_{ij} := \left\{ x \in X \mid g(x) \neq 0, \frac{i-1}{k} < \frac{|f(x)|}{g(x)} < \frac{i}{k}, \frac{f(x)}{|f(x)|} \in F_j \right\}.$$

Diese Mengen sind disjunkt. Aus Satz 11.6.1 und Korollar 11.6.4 folgt  $E_{ij} \in \mathcal{L}$ . Es sei

$$f_k := g \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{j_k} \frac{i-1}{k} \alpha_j \chi_{E_{ij}}$$

mit  $\alpha_j \in F_j$ . Dann gilt f.ü.

$$|f_k - f| \leq \frac{2}{k} g,$$

denn für  $x \in E_{ij}$  ist

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \left| \frac{i-1}{k} \underbrace{\left( \alpha_j - \frac{f(x)}{|f(x)|} \right)}_{< 1/k} g(x) \right| + \left| \left( \frac{i-1}{k} - \frac{|f(x)|}{g(x)} \right) \frac{f(x)}{|f(x)|} g(x) \right| \leq \frac{2g(x)}{k},$$

letzteres wegen

$$-\frac{1}{k} = \frac{i-1}{k} - \frac{i}{k} < \frac{i-1}{k} - \frac{|f(x)|}{g(x)} < 0.$$

Für  $E \in \mathcal{L}$  ist nun  $g \chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . Man approximiere nämlich  $g$  durch Treppenfunktionen  $g_k$ ,

$$\|g - g_k\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0.$$

Dann sind auch  $g_k \chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ , und  $(g_k \chi_E)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(X, Y)$ . Aus dem Rieszschen Satz folgt die Existenz einer f.ü. konvergenten Teilfolge  $g_k \chi_E \rightarrow g \chi_E$ , und Folgerung 11.4.2 liefert dann  $g \chi_E \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . Aus Satz 11.4.4 erhalten wir daher

$$\int_X |f_k - f| d\mu \leq \int_X \left( \frac{2}{k} + \frac{2}{l} \right) g d\mu \rightarrow 0.$$

Wegen  $f_k \rightarrow f$  f.ü. ergibt sich schließlich aus Folgerung 11.4.2 die Behauptung.  $\square$

Der Satz gilt auch in Banachräumen  $Y$ , wenn  $f(X \setminus N)$  separabel ist. Einen Beweis findet man in *Alt, l.c. S. 44*.

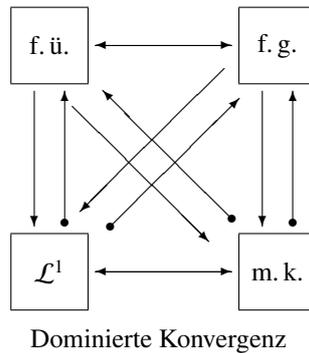
Funktionen aus  $\mathcal{L}^1(X, Y)$  sind also meßbar. Wir nennen sie kurz „integrierbar“. Die zweite Aussage des Satzes, das Majorantenkriterium, ist besonders wichtig. Wir wollen ähnliche Resultate für Folgen ableiten und definieren dazu:

**Definition 11.7.2:** Es sei  $(f_n)$  konvergent (in einem noch zu spezifizierenden Sinne). Es gebe ein  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$  mit

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \quad \text{f.ü.}$$

Dann nennen wir  $(f_n)$  dominiert konvergent.

Es sei an die schematische Darstellung der verschiedenen Konvergenzimplikationen gegen Ende des letzten Abschnitts erinnert. Für dominiert konvergente Folgen gilt entsprechend:



Die wichtigste der dargestellten Implikationen – die linke – wollen wir im folgenden beweisen.

Wir beginnen mit dem Lemma von Fatou, benannt nach PIERRE FATOU, 1878–1929.

**Lemma von Fatou:** Es seien  $f_j \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ ,  $f_j \geq 0$  f.ü. und

$$\int_X f_j d\mu \leq c < \infty.$$

Dann ist  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$  und

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu.$$

Beweis: Es sei

$$g_k := \inf_{i \geq k} f_i.$$

Es sei daran erinnert, daß dann  $g_k \leq g_{k+1}$  und im Falle beschränkter  $f_j$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

ist.

1. Für alle  $j \geq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gilt dann f.ü.

$$0 \leq g_k \leq f_j.$$

Nach Satz 11.6.1 ist  $g_k$  dann meßbar, und aus dem Majorantenkriterium folgt die Integrierbarkeit. Satz 11.4.4 besagt dann für alle  $j \geq k$ :

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_j d\mu \leq c$$

und

$$\int_X g_k d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu \leq c.$$

2. Die  $g_k$  sind f.ü. in  $k$  monoton und nicht fallend. Deshalb gilt für  $k < l$

$$\int_X |g_k - g_l| d\mu = \int_X g_l d\mu - \int_X g_k d\mu \rightarrow 0.$$

$(g_k)$  ist also eine  $\mathcal{L}^1$ -Cauchyfolge. Punktweise gilt f.ü.

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j,$$

und aus Folgerung 11.4.2 erhalten wir

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$$

sowie

$$\int_X \left| \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j - g_k \right| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Mithin gilt mit  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  nach 1

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \int_X g_k d\mu + \varepsilon_k \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu + \varepsilon_k,$$

und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Als Spezialfall erhalten wir den Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz, benannt nach BEPPO LEVI, 1875–1961:

**Satz von B. Levi:** Es seien  $f_j \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ ,  $f_j \geq 0$  f.ü.,  $\int_X f_j d\mu \leq c < \infty$  und  $f_j \nearrow f$  f.ü. Dann gilt  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$  und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu = \int_X f d\mu.$$

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen des Beweises des Lemmas von Fatou und erhalten

$$g_k := \inf_{i \geq k} f_i = f_k,$$

also

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$$

sowie

$$\int_X \left| \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j - g_k \right| d\mu = \int_X |f - f_k| d\mu \rightarrow 0,$$

also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu = \int_X f d\mu.$$

$\square$

Als nächstes zeigen wir den Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue:

**Satz von Lebesgue:** Es seien  $f_n, f$  meßbar und  $(f_n)$  konvergiere f.ü. dominiert gegen  $f$ . Dann sind  $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ , und es gilt

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Dieser Satz hat in den Anwendungen große Bedeutung erlangt. Er liefert ein wichtiges Kriterium für die Integrierbarkeit einer Grenzfunktion.

Beweis: Aus dem Majorantenkriterium folgt unmittelbar  $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . Es sei nun  $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$  und

$$g_n := g - \frac{1}{2}|f_n - f| \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}).$$

Dann gilt f.ü.  $g_n \rightarrow g$  und

$$g_n \geq g - \frac{1}{2}(|f_n| + |f|) \geq \frac{1}{2}(g - |f|) \geq 0,$$

also  $0 \leq g_n \leq g$ . Satz 11.4.4 zeigt dann

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty,$$

und aus dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\int_X g d\mu = \int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} g_j d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu - \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

□

**Beispiel 11.7.3:**

1. Es seien  $f_n(0) = 0$  und für  $x \in (0, \infty)$

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}.$$

Dann ist  $f_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , aber nicht gleichmäßig. Es ist jedoch

$$|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) \quad \text{mit } g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Deshalb folgt

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx \rightarrow 0.$$

2. Es sei  $f(x, t)$  bezüglich  $x \in X$  meßbar und bezüglich  $t$  stetig in  $[a, b]$ , und es gelte

$$|f(\cdot, t)| \leq g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}).$$

Dann ist

$$F(t) := \int_X f(x, t) dx$$

in  $[a, b]$  stetig. Das folgt aus

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_X |f(x, t) - f(x, t_0)| dx$$

mit  $|f(\cdot, t) - f(\cdot, t_0)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow t_0$  und

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq 2g(x).$$

3. Es seien  $f(x, t) := x^2 e^{-tx}$  für  $x \in [0, \infty)$  und  $t \in \mathbb{R}^+$ .

$$F(t) := \int_0^\infty f(x, t) dx$$

soll differenziert werden. Dazu bilden wir bei festem  $t$

$$\frac{F(t + \tau) - F(t)}{\tau} = \int_0^\infty \underbrace{x^2 e^{-tx} \frac{e^{-\tau x} - 1}{\tau}}_{=: h(x, \tau)} dx.$$

Nun ist für  $\tau \in [-t/2, t/2]$

$$\left| \frac{e^{-\tau x} - 1}{\tau} \right| = x \left| \frac{e^{-\tau x} - 1}{\tau x} \right| = x e^{-\theta \tau x} \leq x e^{\frac{tx}{2}},$$

also

$$|h(\cdot, \tau)| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) \quad \text{mit } g(x) = x^3 e^{-\frac{tx}{2}}.$$

Punktweise gilt

$$h(x, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} -x^3 e^{-tx}.$$

Damit erhalten wir

$$F'(t) = - \int_0^\infty x^3 e^{-tx} dx.$$

□

Schließlich zeigen wir noch den

**Konvergenzsatz von Vitali:** Es seien  $f_n \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  und  $f_n \rightarrow f$  f.ü. Dann sind äquivalent:

1.  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  und  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ .

2. Es seien  $E, E_\varepsilon \subset X$  meßbar, und es gelte

$$\sup_n \int_E |f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{für } \mu(E) \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \quad \text{mit } \mu(E_\varepsilon) < \infty \quad \text{und} \quad \sup_n \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f_n| d\mu \leq \varepsilon. \quad (**)$$

**Beweis:**

(1)  $\implies$  (2): Es ist

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |f| d\mu + \int_E |f_n - f| d\mu.$$

Das erste Integral rechts konvergiert nach Satz 11.6.5 gegen Null mit  $\mu(E) \rightarrow 0$ . Mithin gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \exists \delta_\varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall E, \mu(E) \leq \delta_\varepsilon \quad \int_E |f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

Außerdem folgt aus Satz 11.6.5

$$\forall n \quad \exists \delta_{n\varepsilon} \quad \forall E, \mu(E) \leq \delta_{n\varepsilon}, \quad \int_E |f_n| d\mu \leq \varepsilon,$$

also

$$\forall n < n_\varepsilon \quad \forall E, \mu(E) \leq \min_{m < n_\varepsilon} \delta_{m\varepsilon}, \quad \int_E |f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

Das beweist Gl. (\*). Zum Nachweis von Gl. (\*\*) benutzen wir bereits folgendes

**Lemma 11.7.4:** Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}), g \geq 0 \quad \exists E_{g\varepsilon}, \mu(E_{g\varepsilon}) < \infty \quad \int_{X \setminus E_{g\varepsilon}} g d\mu \leq \varepsilon,$$

das wir sofort anschließend zeigen werden, und wählen  $E_{f\varepsilon}$  zu  $\varepsilon/2 > 0$  und  $|f|$ . Dann ist für alle  $n \geq n_\varepsilon$

$$\int_{X \setminus E_{f\varepsilon}} |f_n| d\mu \leq \int_{X \setminus E_{f\varepsilon}} |f| d\mu + \int_X |f - f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

Zu  $n < n_\varepsilon$  gibt es ein  $E_{n\varepsilon}$  mit  $\mu(E_{n\varepsilon}) < \infty$  und

$$\int_{X \setminus E_{n\varepsilon}} |f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt Gl. (\*\*) mit

$$E_\varepsilon := E_{f\varepsilon} \cup \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} E_{n\varepsilon}.$$

(2)  $\implies$  (1): Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $E_\varepsilon$  aufgrund von (\*\*) gewählt. Aus dem Satz von Egorov folgt dann

$$f_n \rightarrow f \quad \text{f.g. in } E_\varepsilon,$$

das heißt, es gibt  $A_\varepsilon \subset E_\varepsilon$  mit  $\mu(E_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ , und  $(f_n)$  konvergiert in  $A_\varepsilon$  gleichmäßig. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f_m| d\mu &\leq \int_{A_\varepsilon} |f_n - f_m| d\mu + \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f_n - f_m| d\mu + \int_{E_\varepsilon \setminus A_\varepsilon} |f_n - f_m| d\mu \\ &\leq \mu(A_\varepsilon) \sup_{x \in A_\varepsilon} |f_n - f_m| + 2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f_k| d\mu + 2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{E_\varepsilon \setminus A_\varepsilon} |f_k| d\mu. \end{aligned}$$

Bei festem  $\varepsilon$  konvergiert der erste Term gegen Null mit  $n, m \rightarrow \infty$ , der zweite ist nach der Wahl von  $E_\varepsilon$  kleiner als  $2\varepsilon$ , und der dritte konvergiert wegen (\*) mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Null. Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  nach Folgerung 11.4.2.  $\square$

Es fehlt noch der Beweis zu Lemma 11.7.4: Für  $0 < \alpha \leq 1$  sei

$$E^\alpha := \left\{ \alpha \leq g \leq \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Dann ist

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_{E^\alpha} g \, d\mu \geq \alpha \mu(E^\alpha),$$

also  $\mu(E^\alpha) < \infty$ . Für  $\alpha_2 < \alpha_1$  ist  $E^{\alpha_1} \subset E^{\alpha_2}$ , und es gilt

$$E := \bigcup_{\alpha > 0} E^\alpha = \{0 < g < \infty\}.$$

Für  $\alpha \downarrow 0$  ist

$$\chi_{E^\alpha} g \geq 0, \quad \|\chi_{E^\alpha} g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^1}, \quad \chi_{E^\alpha} g \nearrow g = \chi_E g.$$

Mithin folgt aus dem Satz von B. Levi

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{E^\alpha} g \, d\mu = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_X \chi_{E^\alpha} g \, d\mu = \int_X \chi_E g \, d\mu = \int_E g \, d\mu$$

oder

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_\varepsilon \quad \forall \alpha \leq \alpha_\varepsilon \quad \int_{X \setminus E^\alpha} g \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Man wähle also  $E_{g\varepsilon} := E^{\alpha_\varepsilon}$ . □

## 11.8 Das Produktmaß

In diesem Abschnitt behandeln wir kurz Produktmaße. Es seien  $S_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, S_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$  jeweils kompakt und  $(S_l, \mathcal{L}_l, \mu_l), l = 1, 2$ , Maßräume mit  $\mu_l(S_l) < \infty$ . Dabei denken wir wieder an das Lebesguesche Maß oder allgemeiner an „reguläre“ Maße  $\mu_l$ ; das heißt, es soll für  $E^l \subset \mathcal{L}_l$

$$\inf \left\{ \mu_l(U \setminus A) \mid A \subset E^l \subset U, A \text{ abgeschlossen, } U \text{ offen} \right\} = 0$$

sein.  $\mu$  hat zum Beispiel im  $\mathbb{R}^1$  diese Eigenschaft, wenn es von einer monoton wachsenden Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

„erzeugt“ wird. Es ist dann  $\mu((a, b)) := f(b) - f(a)$ .

Es seien nun  $E^j \in \mathcal{L}_j$  und

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E^1 \times E^2) := \mu_1(E^1) \cdot \mu_2(E^2).$$

Dadurch wird auf

$$\mathcal{L}^0 := \left\{ \text{endliche Vereinigung disjunkter } E^1 \times E^2 \right\}$$

ein additives Maß erzeugt. Auf den Nachweis der Einzelheiten wollen wir hier verzichten (vgl. *Alt, l.c. S. 132f*). Mithin kann man wieder das Lebesguesche Integral zu  $(S_1 \times S_2, \mathcal{L}^0, \mu_1 \times \mu_2)$  konstruieren, und man gelangt so zum Maßraum

$$(S_1 \times S_2, \mathcal{L}, \mu) \quad \text{mit } \mu := \mu_1 \times \mu_2.$$

Es gilt:

**Satz 11.8.1:** *Es sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge. Dann ist für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1 \in S_1$*

$$\left\{ x_2 \in S_2 \mid (x_1, x_2) \in N \right\}$$

*eine  $\mu_2$ -Nullmenge.*

Der „ $x_1$ -Schnitt“ von  $N$  ist also f.ü. eine  $\mu_2$ -Nullmenge.

Beweis: Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $E_i^l \in \mathcal{L}_l, i \in \mathbb{N}$ , mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^1 \times E_i^2 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i^1 \times E_i^2) \leq \varepsilon.$$

Es seien

$$g_{\varepsilon n}(x_1, x_2) := \sum_{i \leq n} \chi_{E_i^1}(x_1) \chi_{E_i^2}(x_2).$$

Für alle  $x_1$  ist  $g_{\varepsilon n}(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(S_2, \mathbb{R})$ , und es folgt

$$G_{\varepsilon n}(x_1) := \int_{S_2} g_{\varepsilon n}(x_1, \cdot) d\mu_2 = \sum_{i \leq n} \chi_{E_i^1}(x_1) \mu_2(E_i^2)$$

und  $G_{\varepsilon n} \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathbb{R})$  mit

$$\int_{S_1} G_{\varepsilon n} d\mu_1 = \sum_{i \leq n} \mu_1(E_i^1) \mu_2(E_i^2) \leq \varepsilon.$$

Nun gilt:

1. Wegen  $G_{\varepsilon n}(x_1) \nearrow G_\varepsilon(x_1) := \sum_i \chi_{E_i^1}(x_1) \mu_2(E_i^2)$  folgt aus dem Satz von B. Levi  $G_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathbb{R})$  mit

$$\int_{S_1} G_\varepsilon d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_1} G_{\varepsilon n} d\mu_1 \leq \varepsilon.$$

Das bedeutet aber  $\|G_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(S_1, \mathbb{R})} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , und der Rieszsche Satz liefert eine Teilfolge  $\varepsilon' \rightarrow 0$  mit  $G_{\varepsilon'}(x_1) \rightarrow 0$  für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1 \in S_1$ . Im folgenden schreiben wir für  $\varepsilon'$  wieder  $\varepsilon$ .

2. Wir betrachten nun solche  $x_1, x_1$  sei also fest. Da für kleine  $\varepsilon$

$$\int_{S_2} g_{\varepsilon n}(x_1, \cdot) d\mu_2 = G_{\varepsilon n}(x_1) \nearrow G_\varepsilon(x_1) < \infty$$

und

$$g_{\varepsilon n}(x_1, x_2) \nearrow g_\varepsilon(x_1, x_2) := \sum_i \chi_{E_i^1}(x_1) \chi_{E_i^2}(x_2)$$

ist, folgt wieder aus dem Satz von B. Levi  $g_\varepsilon(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(S_2, \mathbb{R})$  mit

$$\int_{S_2} g_\varepsilon(x_1, \cdot) d\mu_2 = G_\varepsilon(x_1),$$

also  $\|g_\varepsilon(x_1, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1(S_2, \mathbb{R})} \rightarrow 0$ . Aus dem Rieszschen Satz erhalten wir dann

$$g_\varepsilon(x_1, x_2) \rightarrow 0 \text{ für } \mu_2\text{-fast alle } x_2 \in S_2.$$

Wegen  $g_\varepsilon(x_1, x_2) \geq \chi_N(x_1, x_2)$  muß somit gelten

$$\chi_N(x_1, x_2) = 0 \text{ für } \mu_2\text{-fast alle } x_2 \in S_2.$$

□

Wir zeigen nun das Hauptresultat dieses Abschnitts, nämlich den

**Satz von Fubini:** Es seien mit  $X := S_1 \times S_2$

$$f : X \rightarrow Y$$

und

$$\begin{aligned} J : \mathcal{L}^1(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{L}^1(S_2, Y)) \\ f &\longmapsto Jf := f. \end{aligned}$$

Dann ist  $J$  ein linearer isometrischer Isomorphismus, insbesondere existiert für  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$

$$F(x_1) := \int_{S_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$$

für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1 \in S_1$ . Es ist  $F \in \mathcal{L}^1(S_1, Y)$  mit

$$\int_{S_1} F(x_1) d\mu_1 = \int_X f(x_1, x_2) d\mu,$$

und es folgt

$$\int_{S_1} \left( \int_{S_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{S_2} \left( \int_{S_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Beweis: Zur Abkürzung setzen wir  $\mathcal{Z} := \mathcal{L}^1(S_2, Y)$ .  $\mathcal{Z}$  ist separabel.

1.  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  läßt sich durch Treppenfunktionen

$$f_k = \sum_{i,j=1}^{n_k} \alpha_{ij} \chi_{E_i^1 \times E_j^2}$$

approximieren. Dann ist für alle  $x_1$

$$(Jf_k)(x_1) = \sum_{i,j=1}^{n_k} \alpha_{ij} \chi_{E_i^1}(x_1) \chi_{E_j^2} \in \mathcal{Z}$$

und  $Jf_k \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \|Jf_k\|_{\mathcal{Z}} d\mu_1 &= \sum_{i=1}^{n_k} \mu_1(E_i^1) \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{ij} \chi_{E_j^2} \right\|_{\mathcal{L}^1(S_2, Y)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n_k} |\alpha_{ij}| \mu_1(E_i^1) \mu_2(E_j^2) = \int_X |f_k| d\mu. \end{aligned}$$

Analog folgt  $\int_{S_2} (Jf_k)(\cdot) d\mu_2 \in \mathcal{L}^1(S_1, Y)$  mit

$$\int_{S_1} \left( \int_{S_2} (Jf_k) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_X f_k d\mu.$$

Weil auch  $f_k - f_i$  Treppenfunktionen sind, gilt ebenfalls

$$\|Jf_k - Jf_i\|_{\mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})} = \|f_k - f_i\|_{\mathcal{L}^1(X, Y)} \rightarrow 0.$$

Wegen der Vollständigkeit gibt es also ein  $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})$  mit

$$Jf_k \rightarrow \hat{f} \text{ in } \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z}).$$

2. Aus dem Rieszschen Satz folgt die Existenz einer Teilfolge (o.B.d.A wieder die ursprüngliche Folge) mit

$$(Jf_k)(x_1, \cdot) \rightarrow \hat{f}(x_1, \cdot) \text{ in } \mathcal{Z}$$

für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1$ . Andererseits gibt es eine Teilfolge mit

$$f_k(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) \text{ für } \mu\text{-fast alle } (x_1, x_2).$$

Aus Satz 11.8.1 folgt dann für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1$

$$f_k(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) \text{ für } \mu_2\text{-fast alle } x_2.$$

Wegen  $f_k(x_1, \cdot) = Jf_k(x_1)$  erhalten wir daher für  $\mu_1$ -fast alle  $x_1$

$$\hat{f}(x_1, \cdot) = f(x_1, \cdot) \text{ in } \mathcal{Z}.$$

In  $\mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})$  folgt dann  $Jf = f$  und

$$\|Jf\|_{\mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})} = \|f\|_{\mathcal{L}^1(X, Y)}.$$

3. Mithin ist  $J$  wohldefiniert und isometrisch.  $R(J)$  ist abgeschlossen.  $J$  ist auch surjektiv. Zum Beweis zeigen wir die Dichte von  $R(J)$ : Jedes  $h \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})$  läßt sich durch Linearkombinationen von  $\chi_{E^1} g$  mit  $g \in \mathcal{Z}$  approximieren, und  $g$  wiederum durch  $\alpha \chi_{E^2}$  mit  $\alpha \in Y$ . Abbildungen der Form

$$F(x_1, x_2) = \alpha \chi_{E^1}(x_1) \chi_{E^2}(x_2) \in \mathcal{L}^1(S_1, \mathcal{Z})$$

liegen aber trivialerweise im Bild von  $J$ .

4. Zum Beweis der Integralformel nutzen wir aus, daß das Integral bezüglich  $\mu_2$  eine lineare stetige Abbildung  $T$  von  $\mathcal{Z}$  nach  $Y$  ist,

$$|Tg| = \left| \int_{S_2} g d\mu_2 \right| \leq \int_{S_2} |g| d\mu_2 = \|g\|_{\mathcal{Z}}.$$

Ist daher  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ , dann ist  $g := Jf \in \mathcal{L}^1(S_1, Z)$  und

$$\begin{aligned} G : S^1 &\longrightarrow Y \\ x_1 &\longmapsto \int_{S_2} g(x_1, \cdot) d\mu_2 = (Tg)(x_1) \end{aligned}$$

aus  $\mathcal{L}^1(S_1, Y)$ ,  $G = Tg \in \mathcal{L}^1(S_1, Y)$ , letzteres wegen

**Lemma 11.8.2:** *Es seien  $Y, Z$  Banachräume,  $T \in \mathcal{L}_b(Z, Y)$  und  $g \in \mathcal{L}^1(S_1, Z)$ . Dann ist  $Tg \in \mathcal{L}^1(S_1, Y)$  und*

$$\int_{S_1} Tg d\mu_1 = T \left( \int_{S_1} g d\mu_1 \right).$$

Wir beweisen das Lemma anschließend und fahren zunächst mit dem Beweis des Satzes von Fubini fort.

5. Weil außerdem  $Jf_k \rightarrow Jf$  in  $\mathcal{L}^1(S_1, Z)$  gilt, folgt aus dem Lemma

$$\int_{S_1} \left( \int_{S_2} Jf d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{S_2} \left( \int_{S_1} Jf d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Für die approximierende Folge  $f_k$  hatten wir bereits unter 1.

$$\int_{S_1} \left( \int_{S_2} Jf_k d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_X f_k d\mu.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis von Lemma 11.8.2: Wir schreiben  $S$  statt  $S_1$ ,  $\mu$  statt  $\mu_1$  und approximieren  $g$  in  $\mathcal{L}^1(S, Z)$  durch Treppenfunktionen

$$g_k = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki} \chi_{E_{ki}} \quad \text{mit } \alpha_{ki} \in Z, \mu(E_{ki}) < \infty.$$

Dann ist

$$\int_S Tg_k d\mu = \sum_{i=1}^{n_k} T\alpha_{ki} \mu(E_{ki}) = T \left( \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{ki} \mu(E_{ki}) \right) = T \left( \int_S g_k d\mu \right).$$

Wegen

$$\int_S |Tg_k - Tg_l| d\mu \leq \|T\| \int_S \|g_k - g_l\|_Z d\mu \rightarrow 0$$

ist  $(Tg_k)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^1(S, Y)$ , und es gilt

$$Tg_k \rightarrow Tg \quad \text{in } \mathcal{L}^1(S, Y)$$

sowie

$$g_k \rightarrow g \quad \text{in } \mathcal{L}^1(S, Z).$$

Daraus folgt

$$\int_S Tg d\mu = T \left( \int_S g d\mu \right).$$

□

Der folgende Satz, dessen Beweis im wesentlichen schon im Satz von Fubini enthalten ist, ist nach LEONIDA TONELLI, 1885–1946, benannt.

**Satz von Tonelli:** *Es sei  $f : S_1 \times S_2 \rightarrow Y$  meßbar,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ , und es existiere*

$$\int_{S_1} \left( \int_{S_2} |f| d\mu_2 \right) d\mu_1 \quad \text{oder} \quad \int_{S_2} \left( \int_{S_1} |f| d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

*Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$  mit  $X := S_1 \times S_2$ .*

Beweisskizze: Es seien

$$g_n := \min(|f|, n).$$

Die  $g_n$  sind meßbar und integrierbar. Es gilt f.ü.

$$g_n \nearrow |f|.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt deshalb

$$\int_X g_n d\mu = \int_{S_1} \left( \int_{S_2} g_n d\mu_2 \right) d\mu_1 \leq \int_{S_1} \left( \int_{S_2} |f| d\mu_2 \right) d\mu_1 \leq c < \infty.$$

Mithin folgt aus dem Satz von B. Levi

$$|f| \in \mathcal{L}^1(X, Y)$$

und damit  $f \in \mathcal{L}^1(X, Y)$ . □

Als Folgerung bringen wir das berühmte Cavalieri'sche Prinzip, benannt nach BONAVENTURA CAVALIÉRI, 1591–1647. Es soll schon auf Archimedes zurückgehen. Man vergleiche die linke Skizze auf der folgenden Seite.

**Das Cavalieri'sche Prinzip:** *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  beschränkt und meßbar sowie*

$$M(y) := \{(x_1, \dots, x_p) \mid (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in M\}.$$

*Dann ist für fast alle  $y \in \mathbb{R}^q$*

$$M(y) \subset \mathbb{R}^p$$

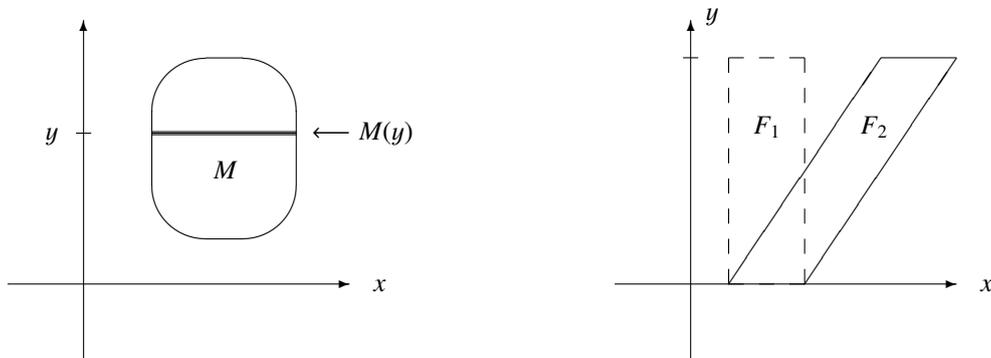
*meßbar. Es sei f.ü.*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \mu_p(M(y)). \end{aligned}$$

*Dann ist  $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ , und es gilt*

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}^q} h d\mu.$$

**Beispiel 11.8.3:** *Die beiden Mengen  $F_1$  und  $F_2$  in der rechten Skizze haben gleiches Maß.*



### 11.9 Reellwertige Abbildungen einer reellen Veränderlichen

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch einige spezielle Klassen von Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

angeben und diskutieren, zum Teil ohne jeweils alle Beweise wirklich auszuführen. Wir beginnen mit

**Satz 11.9.1:** *f sei auf E meßbar und f.ü. endlich. Dann gibt es es beschränkte meßbare Funktionen g mit*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \quad \mu(\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Eine f.ü. endliche meßbare Funktion muß nicht integrierbar sein. Man denke nur an  $f(x) := 1/x$  in  $[0, 1]$ .

Nach Korollar 11.6.3 läßt sich eine meßbare Funktion f.ü. durch Treppenfunktionen approximieren und nach Korollar 11.6.2 durch verallgemeinerte Treppenfunktionen. Diese letzte Aussage wollen wir noch etwas verschärfen und zeigen:

**Lemma 11.9.2:** Es sei  $f \geq 0$  meßbar. Dann gibt es eine Folge  $(\varphi_n)$  mit

1.  $\varphi_n = \sum_{k=1}^{N(n)} a_{nk} \chi_{E_{nk}}$  mit  $E_{nk} \subset \mathcal{L}$ .
2.  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  f.ü.
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$  f.ü.

Der Beweis erfolgt analog dem zu Korollar 11.6.2. Es seien  $k = 0, 1, \dots, n 2^n - 1, n 2^n$  und

$$E_{nk} := \begin{cases} f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) & \text{für } k < n 2^n \\ f^{-1}([n, \infty)) & \text{für } k = n 2^n. \end{cases}$$

Bei festem  $n$  sind die Mengen  $E_{nk}$  disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{k=0}^{n 2^n} E_{nk} = \mathbb{R}.$$

Es sei für  $x \in E_{nk}$

$$\varphi_n(x) := \frac{k}{2^n} \chi_{E_{nk}}(x).$$

Dann ist  $\varphi_n$  meßbar und hat die geforderten Eigenschaften.

Ein analoges Resultat erhält man mit  $\varphi_n \in \mathcal{T}$ . Diese Monotonie in der Approximation läßt sich ausnutzen, und nach RIESZ definiert man folgende Funktionenklassen:

1.  $\mathcal{K}_0 := \mathcal{T}$ . Mit  $f, g$  gehören auch  $\inf(f, g)$ ,  $\sup(f, g)$  und  $|f|$  zu  $\mathcal{K}_0$ . Es seien  $f^+ := \sup(f, 0)$  und  $f^- := -\inf(f, 0)$ . Dann ist  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$ .
2.  $\mathcal{K}_1 :=$  Menge aller  $f$ , für die es eine monoton steigende Folge von  $\varphi_n \in \mathcal{K}_0$  gibt mit  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  f.ü. und  $\int \varphi_n \leq c < \infty$ .  $f \in \mathcal{K}_1$  ist f.ü. endlich.
3.  $\mathcal{K}_2 :=$  Menge aller  $f = f_1 - f_2$  mit  $f_i \in \mathcal{K}_1$ .

$\mathcal{K}_2$  sind dann gerade die Lebesgue-integrierbaren Funktionen, es gilt also  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{L}^1$ .

Jetzt läßt sich auch die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen besser charakterisieren. Eine beschränkte Funktion  $f$  stimmt gerade dann f.ü. mit einer im Riemannschen Sinne (eigentlich) integrierbaren Funktion überein, wenn

$$f \in \mathcal{K}_1 \quad \text{und} \quad -f \in \mathcal{K}_1$$

gilt (oberes und unteres Darbouxches Integral). Damit ist wieder klar, daß eine Riemann-integrierbare Funktion zu  $\mathcal{L}^1$  gehört.

**Beispiel 11.9.3:** Wir betrachten jeweils in  $[0, 1]$ :

1.  $f(0) := 0$  und  $f(x) := \sin 1/x$  für  $x > 0$ .  $f$  ist keine Regelfunktion, aber Riemann-integrierbar (vgl. das Beispiel in §6.7).
2.  $f(0) := 0$  und  $f(x) := \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ .  $f$  ist erst recht keine Regelfunktion. Wegen

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y} dy = \infty$$

ist  $|f| \notin \mathcal{L}^1$ , damit auch  $f \notin \mathcal{L}^1$ , und  $f$  ist nicht Riemann-integrierbar. Das uneigentliche Riemannsches Integral existiert aber wegen

$$\int_\varepsilon^1 f(x) dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin y}{y} dy \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

3.  $f(0) := 0$  und  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  für  $x > 0$ .  $f$  ist keine Regelfunktion, nicht Riemann-integrierbar, wohl aber im Lebesgueschen Sinne integrierbar, und es existiert das uneigentliche Riemannsches Integral.

**Monotone Funktionen:** Es sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) \leq f(y)$  für  $x < y$ . Es sei  $a \leq x_0 < b$  und  $x_n \downarrow x_0$ . Dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =: f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x \leq b} \{f(x)\}.$$

$f(x_0+0)$  ist also von der speziellen Wahl der Folge  $(x_n)$  unabhängig (vgl. Satz 6.3.2). Analog definiert man  $f(x_0-0)$ .

Dann ist

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

und es folgt

**Lemma 11.9.4:** *Es seien  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ . Dann gilt*

$$0 \leq [f(a+0) - f(a)] + \sum_{i=1}^n [f(x_i+0) - f(x_i)] + [f(b) - f(b-0)] \leq f(b) - f(a).$$

**Folgerung 11.9.5:** *Es gilt*

1. *Zu festem  $p > 0$  hat  $f$  höchstens endlich viele Sprünge höher als  $p$ .*
2. *Die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $f$  ist höchstens abzählbar.*

Ferner gilt

**Satz 11.9.6:**  *$f$  besitzt f.ü. eine endliche Ableitung  $f'$ . Es gilt  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$  und*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Dieser Satz stammt von Lebesgue. Er wird in *Riesz & Sz.-Nagy, l.c., S. 3–7 und 47*, bewiesen.

**Beispiel 11.9.7:** *Wir konstruieren in  $[0, 1]$  eine monotone Funktion mit fast überall verschwindender Ableitung:*

Es sei  $S \subset [0, 1]$  mit

$$S := \left[ \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right] \cup \left[ \left( \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left( \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \right] \cup [\dots] \cup \dots$$

Es wird also jeweils das innere Drittel hinzugenommen, man vergleiche die Skizze auf der folgenden Seite. Es sei

$$C := [0, 1] \setminus S$$

die „Cantormenge“. Dann gilt

$$\mu(S) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right) = 1,$$

und  $\mu(C) = 1 - \mu(S) = 0$ .

$C$  ist also eine Nullmenge.  $C$  hat jedoch die Mächtigkeit des Kontinuums. Das sieht man so: Man stelle die Elemente von  $[0, 1]$  durch triadische Brüche dar,

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{mit } a_i \in \{0, 1, 2\}.$$

$x = 0, 12$  bedeute also  $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$ . Ein  $c \in C$  ist dann durch  $a_i \in \{0, 2\}$  charakterisiert. Wir schreiben nun  $C$  als  $C = C_1 \cup C_2$  mit  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ . Dabei sei  $C_2 \subset C$  die Menge der triadischen Brüche mit der Periode zwei. Offenbar ist  $C_2$  abzählbar. Es sei nun  $c \in C_1$ ,  $c = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  und

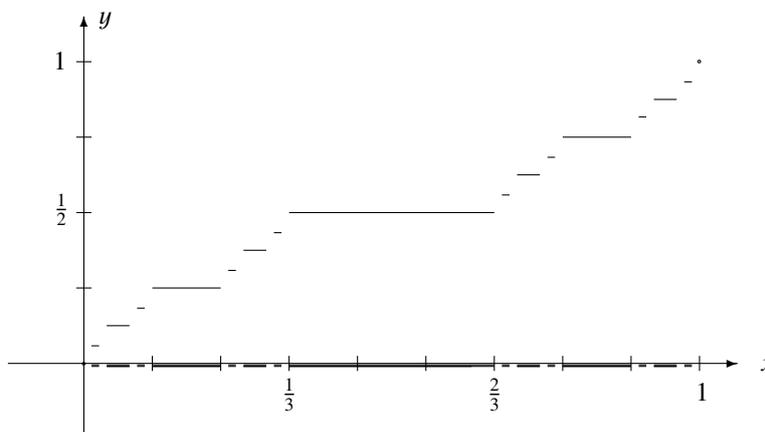
$$b_i := \begin{cases} 0 & \text{für } a_i = 0 \\ 1 & \text{für } a_i = 2. \end{cases}$$

Damit läßt sich  $c$  als Dualbruch schreiben. Jedes  $x \in [0, 1]$  läßt sich ebenfalls in dieser Form darstellen. Mithin gibt es eine bijektive Abbildung von  $[0, 1]$  auf  $C_1$ , und beide Mengen haben dieselbe Mächtigkeit. Damit hat  $C$  die Mächtigkeit des Kontinuums. Weil jede Teilmenge einer Cantormenge ebenfalls eine Nullmenge und damit meßbar ist, folgt im  $\mathbb{R}$

$$\# \mathcal{L} = \# \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}.$$

Wir definieren nun die Abbildung  $f(x)$ :

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{4} & \text{für } x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \\ \frac{3}{4} & \text{für } x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ \frac{1}{8} & \text{für } x \in \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \\ \text{usw.} \end{cases}$$



Damit ist  $f$  auf  $S$  definiert, und zwar konstant auf den einzelnen offenen Intervallen. Dort gilt  $f' = 0$ .  $f$  nimmt alle Werte der Form  $m/2^n < 1$  an. Wir erweitern nun den Definitionsbereich von  $f$  durch  $f(0) := 0, f(1) := 1$  und

$$\forall x \in C \quad f(x) := \sup_{\substack{y \in S \\ y < x}} f(y).$$

Man überzeuge sich, daß

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

dann eine monotone und stetige Abbildung ist. Für alle  $x \in S$  ist  $f' = 0$ . Mithin ist  $f$  fast überall differenzierbar mit verschwindender Ableitung.

Es sei nun

$$g : [0, 1] \longrightarrow [0, 2] \\ x \longmapsto x + f(x).$$

Dann wächst  $g$  streng monoton und ist stetig. Mithin existiert nach Satz 5.1.2 die Umkehrabbildung  $g^{-1}$ . Auch  $g^{-1}$  wächst streng monoton und ist stetig (Satz 5.1.14). Mithin ist  $g$  eine topologische Abbildung ( $g$  ist bijektiv,  $g$  und  $g^{-1}$  sind stetig). Für jedes offene Intervall  $O \subset S$  gilt dann

$$\mu(g(O)) = \mu(O),$$

also

$$\mu(g(S)) = \mu(S) = 1.$$

Wegen  $\mu([0, 2]) = 2$  folgt daraus

$$\mu(g(C)) = 1.$$

$g$  ist also eine topologische Abbildung, welche eine Nullmenge auf eine Menge mit positivem Maß abbildet.

Wir benutzen nun  $g$ , um auch die Existenz einer Nullmenge  $N \notin \mathcal{B}$  zu zeigen. Wegen  $\#\mathcal{B} = \aleph < \#\mathcal{L}$  muß es solche Mengen geben. In §10.2 haben wir eine nichtmeßbare Vitali-Menge in  $[0, 1]$  angegeben. Sie entstand durch Bilden von Äquivalenzklassen und durch Verwendung des Auswahlaxioms. Es sei nun  $A \subset \mathbb{R}$  eine beliebige meßbare Teilmenge des  $\mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{L}$ , mit positivem Maß  $\mu(A)$ . Dann läßt sich die Konstruktion in §10.2 wörtlich übertragen, und man findet wieder eine nichtmeßbare Teilmenge von  $A$ . Es seien nun  $V$  eine solche nichtmeßbare Teilmenge von  $g(C)$  und  $N := g^{-1}(V)$ . Dann ist  $N$  eine Nullmenge wegen  $g^{-1}(V) \subset C$ .

$$g : N \longrightarrow V \\ x \longmapsto x + f(x)$$

ist also eine topologische Abbildung zwischen der Nullmenge  $N$  und der nichtmeßbaren Menge  $V$ . Dann ist aber  $N \notin \mathcal{B}$ , weil topologische Abbildungen Borelmengen auf Borelmengen abbilden.

Das soeben vorgestellte Beispiel wird oft zitiert. Man verwendet es, um ein Maß anzugeben, das auf einer Lebesgue-Nullmenge „lebt“. Beim Lebesgueschen Maß waren wir von Quadvolumen, im  $\mathbb{R}^1$  also von

$$\mu([a, b]) = b - a$$

ausgegangen. Wählen wir nun

$$\nu([a, b]) := f(b) - f(a),$$

dann können wir hiermit ein Maß erzeugen, analog zum Lebesgueschen. Auch jetzt gilt  $\nu([0, 1]) = 1$ , aber zum Beispiel  $\nu(E) = 0$  für  $E \subset S$ . Beide Maße  $\mu$  und  $\nu$  „leben“ auf verschiedenen Mengen,  $\nu$  lebt auf einer Lebesgue-Nullmenge und ist bezüglich  $\mu$  „singulär“.

**Funktionen endlicher Variation:** Es seien

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Partition  $P_n(a, b)$  von  $[a, b]$  und

$$V_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

**Definition 11.9.8:** Das Supremum  $V_a^b(f) := \sup_n V_n(f)$  heißt vollständige Variation von  $f$  über  $[a, b]$ . Ist  $V_a^b(f) < \infty$ , dann heißt  $f$  von beschränkter Variation, und man schreibt  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$ .

Es gilt

**Satz 11.9.9:** Eine monotone Funktion ist von beschränkter Variation.

Beweis: O.b.d.A. sei  $f$  monoton wachsend. Dann ist

$$V_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a). \quad \square$$

Auch Lipschitz-stetige Funktionen sind von beschränkter Variation. Das folgt aus

$$V_n(f) \leq L \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \leq L(b - a).$$

Die Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(0) := 0$  und

$$f(x) := x \cos \frac{\pi}{2x}$$

ist stetig, jedoch nicht von beschränkter Variation.

Es gilt

**Satz 11.9.10:** Es sei  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$ . Dann ist  $f$  beschränkt.

Beweis: Für  $a \leq x \leq b$  ist

$$V := |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f),$$

also

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq |f(a)| + V_a^b(f).$$

Es gilt auch

**Satz 11.9.11:** Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Funktionen beschränkter Variation sind von beschränkter Variation (letzterer, sofern der Nenner nirgends verschwindet). Mit  $a < c < b$  gilt auch

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

**Satz 11.9.12:**  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$  gilt genau dann, wenn  $f$  Differenz zweier monoton wachsender Funktionen ist.

Beweis:

$\Leftarrow$ : Das folgt aus Satz 11.9.9.

$\Rightarrow$ : Es sei  $v(a) := 0$  und

$$v(x) := V_a^x(f).$$

Dann wächst  $v$  monoton. Es sei

$$w(x) := v(x) - f(x).$$

Aus  $a \leq x < y$  folgt dann

$$w(y) = v(y) - f(y) = v(x) + V_x^y(f) - f(y)$$

und

$$w(y) - w(x) = V_x^y(f) - \underbrace{(f(y) - f(x))}_{\leq V_x^y(f)} \geq 0.$$

Also wächst auch  $w$  monoton, und wir haben

$$f(x) = v(x) - w(x).$$

**Folgerung 11.9.13:**  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$  ist f.ü. differenzierbar mit  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .

Das folgt aus Satz 11.9.6.

**Folgerung 11.9.14:** Die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$  ist höchstens abzählbar. Die Grenzwerte von rechts bzw. links existieren dort.

Es gilt auch

**Satz 11.9.15:** Es sei  $f \in \mathcal{BV}([a, b])$  stetig in  $x_0 \in [a, b]$ . Dann ist auch

$$v(x) := V_a^x(f)$$

in  $x_0$  stetig.

**Absolut stetige Funktionen:** Es sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definition 11.9.16:**  $f$  heißt absolut stetig  $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), \text{ disjunkt und mit } \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \varepsilon.$$

Absolut stetige Funktionen sind stetig. Die angegebene Bedingung ist äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Die eine Richtung ist trivial. Zum Nachweis der anderen wähle man  $\delta$  so, daß mit  $\sum (b_k - a_k) < \delta$

$$\left| \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Es seien nun

$$A := \{k \mid f(b_k) - f(a_k) \geq 0\},$$

$$B := \{k \mid f(b_k) - f(a_k) < 0\}.$$

Dann ist

$$\sum_A |\dots| = \left| \sum_A (\dots) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_B |\dots| = \left| \sum_B (\dots) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

insgesamt also

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Zum Beispiel sind Lipschitz-stetige Funktionen absolut stetig. Es gilt:

**Satz 11.9.17:** *Eine absolut stetige Funktion ist von beschränkter Variation.*

Beweis Es sei  $\delta = \delta(1)$ . Dann ist für alle  $(a_k, b_k)$  mit  $\sum(b_k - a_k) < \delta$

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Es seien  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_N = b$  mit  $c_{k+1} - c_k < \delta$ . Dann ist

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^N V_{c_{k-1}}^{c_k}(f) \leq N. \quad \square$$

**Folgerung 11.9.18:** *Eine absolut stetige Funktion ist fast überall differenzierbar mit  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .*

**Satz 11.9.19:**  *$f$  sei absolut stetig und  $f' = 0$  f.ü. Dann ist  $f$  konstant.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in Natanson: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie-Verlag, Berlin 1961, S. 274.*

**Das unbestimmte Integral:** Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar. Es sei ferner mit  $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) := c + \int_a^x f(t)dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

das „unbestimmte Lebesguesche Integral“ von  $f$ . Dann gilt

**Satz 11.9.20:**  *$F$  ist absolut stetig.*

Beweis: Nach Satz 11.6.5 gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall E, \mu(E) < \delta \quad \left| \int_E f \right| < \varepsilon.$$

Es seien  $(a_k, b_k)$  disjunkt mit  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ . Dann ist

$$\left| \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f \right| < \varepsilon.$$

Nun ist

$$\int_{a_k}^{b_k} f = F(b_k) - F(a_k),$$

also

$$\left| \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k)) \right| < \varepsilon. \quad \square$$

**Folgerung 11.9.21:** *Fast überall existiert  $F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .*

**Satz 11.9.22:** *Fast überall ist  $F' = f$ .*

Beweis: Es seien  $f \in \mathcal{K}_1$ ,  $\varphi_n$  monoton wachsend mit  $\int \varphi_n < \infty$  und  $\varphi_n \rightarrow f$  f.ü. Es seien ferner

$$F_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t) dt.$$

Dann ist f.ü.  $F'_n = \varphi_n$  und

$$F_n(x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (F_{k+1}(x) - F_k(x)) \rightarrow F(x).$$

Der Rest folgt aus dem „Satz von Fubini über die Differentiation von Reihen mit monotonen Gliedern“:

**Satz 11.9.23:** *Es seien in  $[a, b]$   $f_1, f_2, \dots$  monotone Funktionen (desselben Typs).*

$$s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konvergiere. Dann gilt f.ü.

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

Beweis: O.B.d.A. seien die  $f_k$  nicht abnehmend und  $f_k(a) = 0$ . Es sei  $s_n := \sum_{k=1}^n f_k$ . Jedes  $f_k$  ist f.ü. differenzierbar, sagen wir in  $[a, b] \setminus N_k$ . Dann ist auch  $s_n$  f.ü. differenzierbar, nämlich in  $[a, b] \setminus \cup_{k=1}^n N_k$ , und es gilt f.ü.

$$s'_n(x) \leq s'_{n+1}(x) \leq s'(x),$$

letzteres, weil  $s'$  existiert. Mithin konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

fast überall, und wir müssen nur noch

$$s'(x) - s'_n(x) \rightarrow 0$$

für eine passend gewählte Teilfolge zeigen. Dazu wählen wir  $n_k$  mit

$$s(b) - s_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k}.$$

Dann gilt auch

$$s(x) - s_{n_k}(x) \leq s(b) - s_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k},$$

und es folgt f.ü.

$$\frac{1}{h} \left\{ (s(x+h) - s(x)) - (s_{n_k}(x+h) - s_{n_k}(x)) \right\} \rightarrow s'(x) - s'_{n_k}(x).$$

Für die linke Seite ist

$$\frac{1}{h} \left\{ (s(x+h) - s_{n_k}(x+h)) - (s(x) - s_{n_k}(x)) \right\} \leq \frac{2}{h2^k} \rightarrow 0$$

für  $h := 2^{-k/2}$ . Damit folgt f.ü.

$$s'(x) - s'_{n_k}(x) \rightarrow 0.$$

□

Eine monotone stetige Funktion mit f.ü. verschwindender Ableitung haben wir bereits kennengelernt. Dafür ist natürlich

$$f(x) \neq \int_a^x f'(t) dt.$$

Es gilt aber

**Satz 11.9.24:**  *$F$  ist genau dann absolut stetig, wenn*

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) dt$$

*gilt mit  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .*

Beweis:

$\Leftarrow$ : Das wurde in Satz 11.9.20 gezeigt.

$\Rightarrow$ : Es sei  $f := F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$  und

$$W(x) := F(x) - \int_a^x f(t) dt.$$

Dann ist  $W$  absolut stetig und  $W' = 0$  f.ü.  $W$  ist somit nach Satz 11.9.19 konstant.

□

Es folgt

**Satz 11.9.25:** *Es sei  $f$  monoton und stetig. Dann ist*

$$f(x) = a(x) + s(x)$$

mit absolut stetiger Funktion  $a$  und  $s' = 0$  f.ü.

Die Funktion  $s$  nennt man auch „singulär stetig“.

Beweis: Fast überall existiert  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ . Es seien

$$\begin{aligned} a(x) &:= \int_a^x f'(t) dt \\ s(x) &:= f(x) - a(x). \end{aligned}$$

Dann ist  $a$  absolut stetig, und f.ü. gilt

$$s'(x) = f'(x) - a'(x) = 0.$$

Eine beliebige monotone Funktion läßt sich entsprechend zerlegen. Dann kommt nur noch eine verallgemeinerte Treppenfunktion hinzu. Diese Zerlegung ist in der Spektraltheorie sehr wichtig. Man erhält dort ein Punktspektrum und ein kontinuierliches Spektrum. Letzteres zerfällt in das absolut und das singulär stetige Spektrum.

## 12 Integration II

In diesem Kapitel soll eine Reihe von klassischen Resultaten, die ein Mathematiker kennen muß, vorgestellt werden. Wegen der Fülle des Stoffes ist die Darstellung knapp gehalten. Ich werde auch nicht immer die Beweise in allen Einzelheiten ausführen, sondern gelegentlich verweisen.

### 12.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir greifen §9.9 wieder auf und wollen die Behandlung von Kurven und Flächen im Raum fortsetzen. In §9.9 trat schon die Frage auf, wie man solche Kurven oder Flächen möglichst einfach beschreiben kann. Es geht also um das Problem der Parametrisierung. Denkt man an die Sphäre im Raum, dann ist klar, daß die in §9 gewählte Darstellung nicht global gültig ist, sondern nur lokal. Ein ähnliches Problem trat in §9.8 bei den impliziten Funktionen und auch in §9.10 bei den Extrema mit Nebenbedingungen auf. Auch hier haben wir ja implizite Funktionen nur lokal charakterisiert. Um Ordnung und Präzision in diese Begriffswelt zu bringen, hat man das Konzept der Mannigfaltigkeit eingeführt. Es hat sich bewährt, ich möchte es kurz schildern:

Wir beginnen allgemein. Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine topologische – oder homöomorphe – Abbildung von  $U \subset X$  auf  $V \subset X$  ist eine bijektive stetige Abbildung  $h : U \rightarrow V$ , für die auch  $h^{-1}$  stetig ist. Unter einer „ $n$ -dimensionalen Karte“ für  $X$  verstehen wir dann einen Homöomorphismus

$$h : U \subset X \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$$

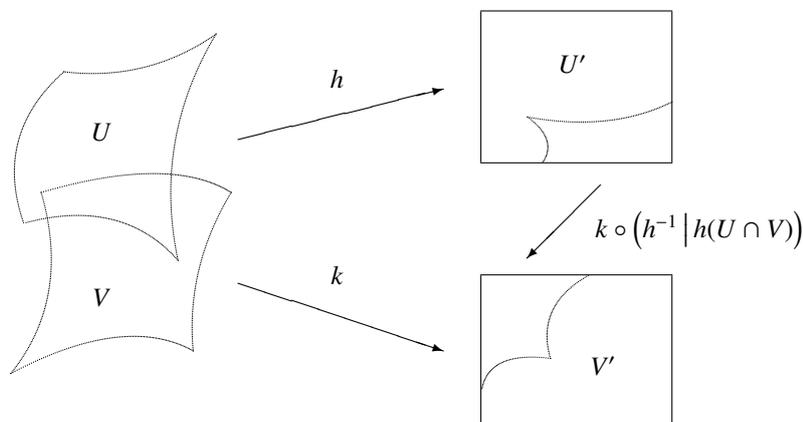
von einer offenen Teilmenge  $U \subset X$ , dem „Kartengebiet“, auf eine offene Teilmenge  $U' \subset \mathbb{R}^n$ .

Gehört jeder Punkt von  $X$  einem möglichen Kartengebiet von  $X$  an, dann nennt man den Raum  $X$  „lokal euklidisch“. Natürlich hat nicht jeder topologische Raum diese schöne Eigenschaft.

Wir sprechen auch von der Karte  $(U, h)$ . Es seien nun  $U, V \subset X$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$  und  $(U, h), (V, k)$  zwei  $n$ -dimensionale Karten für  $X$ . Dann heißt der Homöomorphismus

$$k \circ (h^{-1} |_{h(U \cap V)}) : h(U \cap V) \rightarrow k(U \cap V)$$

der „Kartenwechsel“ von  $h$  nach  $k$ . Ist er sogar ein Diffeomorphismus (gemeint ist  $C_\infty$ ), dann sagt man, daß die beiden Karten differenzierbar wechseln.



**Definition 12.1.1:** Eine Menge  $n$ -dimensionaler Karten für  $X$ , deren Kartengebiete  $X$  überdecken, heißt  $n$ -dimensionaler Atlas für  $X$ . Der Atlas heißt differenzierbar, wenn alle seine Karten differenzierbar miteinander wechseln, und zwei differenzierbare Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  nennt man äquivalent, wenn auch  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  differenzierbar ist.

Man kann nun in den  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Atlanten Äquivalenzklassen einführen oder zum maximalen Atlas übergehen. Auf diese Weise gelangt man zu

**Definition 12.1.2:** Unter einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit verstehen wir ein Paar  $(M, \mathcal{A})$ , bestehend aus einem Hausdorffraum  $M$ , in dem das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, und einem maximalen  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Atlas  $\mathcal{A}$  für  $M$ .

In  $M$  soll also das Trennungsaxiom gelten, und  $M$  soll eine abzählbare Basis der Topologie besitzen. Es soll also auch

$$\exists B_n, \text{ offen, } \forall t \in \mathcal{T} \exists n \in \mathbb{N} \quad t = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$$

richtig sein. Das ist im  $\mathbb{R}^n$  erfüllt, denn die Kugeln  $B(x, r)$  mit rationalen Mittelpunkten  $x$  und rationalen Radien  $r$  bilden eine abzählbare Basis. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweise ich auf *Jänich: Vektoranalysis. Springer-Verlag 1992*.

Im folgenden wird  $M$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  sein. Bevor wir uns darauf spezialisieren, besprechen wir noch kurz einige allgemeine Eigenschaften von Abbildungen

$$f : M \longrightarrow Y.$$

Dabei seien  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $Y$  eine zunächst beliebige Menge. Wir wollen  $f$  in einer Umgebung von  $p \in M$  studieren. Dann wählen wir eine Karte  $(U, h)$  mit  $p \in U \subset M$  und können die Abbildung  $f$  „herunterholen“, das heißt wir betrachten

$$f \circ h^{-1} : U' \longrightarrow Y.$$

Von allen Eigenschaften, die  $f \circ h^{-1}$  lokal an der Stelle  $h(p)$  hat, sagen wir dann,  $f$  habe sie in  $p$  bezüglich der Karte  $(U, h)$ . Insbesondere interessieren natürlich Eigenschaften, welche unabhängig von der speziellen Wahl der Karte sind. Man sagt dann kurz,  $f$  habe diese Eigenschaft in  $p$ . Eine solche Eigenschaft ist beispielsweise die Differenzierbarkeit der Abbildung

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Jacobi-Matrix der heruntergeholtten Abbildung ist nicht unabhängig von der Kartenwahl, sie wird ja gemäß der Kettenregel transformiert. Wohl aber ist der Rang der Jacobi-Matrix invariant, denn die Kartenwechsel sind Diffeomorphismen. Man kann also definieren:

**Definition 12.1.3:** Ist  $f : M \rightarrow N$  differenzierbar, so heißt der Rang der Jacobi-Matrix bezüglich Karten „Rang von  $f$  in  $p$ “.

Satz 9.7.1 von der Umkehrabbildung läßt sich dann folgendermaßen formulieren:

**Umkehrsatz:** Es seien  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  der gleichen Dimension  $n$ ,  $p \in M$ , und  $f$  habe in  $p$  den Rang  $n$ . Dann ist  $f$  in  $p$  ein lokaler Diffeomorphismus.

Es seien wieder  $M$  und  $N$  Mannigfaltigkeiten und

$$f : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $p \in M$  „regulärer Punkt von  $f$ “, wenn in  $p$

$$\text{Rang } f = \dim N$$

ist. Die nichtregulären Punkte heißen „kritische“ oder „singuläre Punkte“. Ihre Bildpunkte heißen „kritische“ oder „singuläre Werte“, während die übrigen Bildpunkte „reguläre Werte“ genannt werden.

Wir wollen noch kurz Untermannigfaltigkeiten einführen:

**Definition 12.1.4:** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann nennt man eine Teilmenge  $M_0 \subset M$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es um jeden Punkt von  $M_0$  eine Karte  $(U, h)$  von  $M$  mit  $h(M_0 \cap U) = \mathbb{R}^m \cap h(U)$  gibt. Eine solche Karte heißt „Untermannigfaltigkeitskarte“ oder salopp ein „Flachmacher“ für  $M_0$  in  $M$ . Die Zahl  $n - m$  nennt man Kodimension von  $M_0$  in  $M$ .

Die Menge der aus den Flachmachern gewonnenen Karten  $(M_0 \cap U, h|(M_0 \cap U))$  ist ein  $m$ -dimensionaler differenzierbarer Atlas für  $M_0$ . Satz 9.8.1 von der impliziten Funktion besagt dann:

**Satz vom regulären Wert:** Ist  $q \in N$  regulärer Wert einer Abbildung

$$f : M \longrightarrow N,$$

dann ist sein Urbild  $f^{-1}(q) \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit mit der Kodimension  $\dim N$ .

Im folgenden interessieren wir uns besonders für „ $C_l$ -Untermannigfaltigkeiten“ des  $\mathbb{R}^n$ . Dabei soll sein  $h \in C_l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ .

**Beispiel 12.1.5:**

1. Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x|^2. \end{aligned}$$

Dann hat

$$J_f(x) = 2(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

außer bei  $x = 0$  überall den Rang 1. Insbesondere ist 1 ein regulärer Wert und sein Urbild

$$S^n := f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\},$$

also die  $n$ -Sphäre, damit eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2. Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$J_f(x) = 2(x_1, x_2, -x_3)$$

nur bei  $x = 0$  singular. Deshalb ist jedes  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  regulärer Wert von  $f$  und das Hyperboloid

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = c \neq 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , also eine „Fläche im Raum“.

3. Es seien  $M$  der Vektorraum der reellen  $n \times n$ -Matrizen ( $M \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ) und  $N$  der Unterraum der symmetrischen Matrizen ( $N \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ). Eine Matrix  $A$  mit  $A^t A = id$  heißt orthogonal. Dann gilt: Für die Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N \\ A &\longmapsto A^t A \end{aligned}$$

ist  $id$  ein regulärer Wert. Folglich ist die orthogonale Gruppe

$$f^{-1}(id) = \{A \in M \mid A^t A = id\}$$

eine  $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Zum Beweis zeigen wir:

$$\forall A \in M, \text{ invertierbar}, \quad \forall B \in N \quad \exists X \in M \quad J_f(A)X = B.$$

Es ist

$$J_f(A)X = \frac{d}{d\lambda} f(A + \lambda X)|_{\lambda=0} = X^t A + A^t X.$$

Es soll also

$$X^t A + A^t X \stackrel{!}{=} B$$

gelöst werden. Nun ist  $X^t A = (A^t X)^t$ . Wegen der Symmetrie von  $B$  genügt es deshalb

$$A^t X \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} B$$

zu lösen, und das ist durch

$$X := \frac{1}{2}(A^t)^{-1} B$$

möglich.

4. Es seien  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C_\infty$ -Funktion und  $p \in U$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Dann lautet die Taylorentwicklung in der Umgebung von  $p$

$$f(y) = f(p) + f''(p, y-p, y-p) + \dots$$

□

Interessant ist nun das folgende Resultat, das auf M. MORSE (1892–1977) zurückgeht:

**Morse-Lemma:** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C_\infty(U, \mathbb{R})$ ,  $p$  kritischer Punkt von  $f$  und  $f''(p, \cdot, \cdot)$  nicht ausgeartet. Dann gibt es eine Umgebung  $V(p) \subset U$  und einen  $C_\infty$ -Diffeomorphismus  $\varphi : V \rightarrow V'$  mit  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi'(p) = id$  und

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(p) + f''(p, x, x).$$

Eine solche Abbildung läßt sich also lokal in diese Normalform überführen. Einen Beweis findet man in *Th. Bröcker: Analysis II. B.I. Mannheim 1992, S. 111.*

Als letztes soll in diesem allgemeinen Teil noch der Tangentialraum definiert werden: Es sei  $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$  eine  $C_1$ -Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Nach Definition haben wir einen Atlas der Untermannigfaltigkeit mit Karten  $(U_\lambda, h_\lambda)$

$$\{h_\lambda : U_\lambda \rightarrow U'_\lambda \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\} \quad \text{mit } M \cap U_\lambda = h_\lambda^{-1}((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'_\lambda).$$

Ähnlich wie für Kurven wollen wir im Punkt  $p \in M$  den Raum der Tangentialvektoren erklären:

**Definition 12.1.6:** Es sei  $\gamma : (-d, d) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^{m+n}$  eine stetig differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = p \in M$ . Ein Tangentialvektor in  $p$  ist ein Vektor

$$v = \gamma'(0).$$

Die Menge  $T_p M$  aller Tangentialvektoren heißt Tangentialraum von  $M$  in  $p$ .

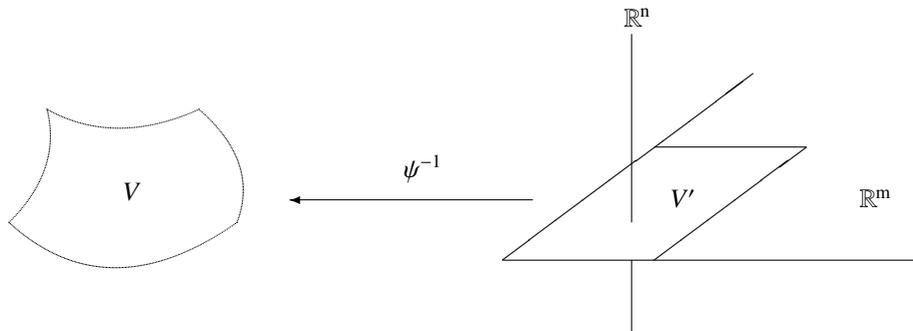
**Satz 12.1.7:** Der Tangentialraum  $T_p M$  ist ein  $m$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Ist  $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  eine Karte um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$ , dann gilt

$$T_p M = (\varphi'(p))^{-1} \cdot \mathbb{R}^m = (\varphi^{-1})'(0) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Ist  $U$  eine offene Umgebung von  $p$  im  $\mathbb{R}^{m+n}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar vom Rang  $n$  (also  $\forall u \in U \operatorname{rg} g'(u) = n$ ) mit  $g(U \cap M) = 0$ , dann ist

$$T_p M = \ker g'(p).$$

**Beweis:** Es seien  $V := U \cap M$ ,  $V' := U' \cap \mathbb{R}^m$  und  $\varphi|_V =: \psi$ . Dann ist  $\psi : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\psi(p) = 0$ , ein Homöomorphismus.  $\psi$  besitzt die stetig differenzierbare Umkehrabbildung  $\psi^{-1} = \varphi^{-1}|_{V'} : V' \rightarrow V$ , die  $M$  lokal um  $p$  durch Koordinaten in  $V' \subset \mathbb{R}^m$  parametrisiert.



1. Die erste Aussage ist

$$T_p M = (\psi^{-1})'(0) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Ist nämlich  $\gamma$  eine Kurve wie in der Definition von  $T_p M$ , dann ist  $\psi \circ \gamma$  lokal um  $t = 0$  definiert und eine stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^m$  mit  $\psi(\gamma(0)) = 0$ . Ist umgekehrt  $\eta : (-d, d) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\eta(0) = 0$ , stetig differenzierbar, so ist  $\psi^{-1} \circ \eta$  lokal um 0 definiert, verläuft in  $M$  und  $(\psi^{-1} \circ \eta)(0) = p$ . Als Kurve in der Definition von  $T_p M$  hat man also die Kurven  $\psi^{-1} \circ \eta$  zu betrachten. Ihre Geschwindigkeitsvektoren sind die Vektoren

$$(\psi^{-1})'(0) \cdot \eta'(0),$$

und  $\eta'(0)$  durchläuft offenbar ganz  $\mathbb{R}^m$ . Das zeigt die erste Behauptung. Insbesondere ist  $\dim T_p M = m$ , denn  $(\psi^{-1})'(0) = (\varphi^{-1})'(0)|_{\mathbb{R}^m}$  hat den Rang  $m$ .

2. Ist nun  $g$  wie im Satz und  $\gamma$  eine Kurve wie in der Definition von  $T_p M$ , dann ist  $g \circ \gamma$  lokal um  $t = 0$  definiert und konstant gleich Null, also

$$(g \circ \gamma)'(0) = g'(p) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

das heißt  $\gamma'(0) \in \ker g'(p)$ . Das gilt für jeden Tangentialvektor, also

$$T_p M \subset \ker g'(p).$$

Es ist aber  $\dim T_p M = m$ ,  $\operatorname{rg} g'(p) = n$ , mithin  $\dim \ker g'(p) = m + n - n = m$ , also  $T_p M = \ker g'(p)$ .

Zusammenfassung:  $M$  wird lokal um  $p$  durch eine Karte

$$\mathbb{R}^m \supset V' \xrightarrow{\psi^{-1}} V \subset M \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

parametrisiert, und der Tangentialraum durch ihre lineare Approximation

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{(\psi^{-1})'(0)} T_p M \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

Ist  $M$  lokal um  $p$  durch Gleichungen  $g$  beschrieben,

$$g : p \in U \subset \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad M \cap U = \{x \mid g(x) = 0\}, \quad \operatorname{rg}_p g = n,$$

dann wird  $T_p M \subset \mathbb{R}^{m+n}$  durch die lineare Approximation dieser Gleichungen beschrieben:

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^{m+n} \mid g'(p) \cdot v = 0\}.$$

Im Falle  $n = 1$  wird daraus

$$((\nabla g)(p), v) = 0,$$

also  $T_p M = (\nabla g)(p)^\perp$ .

Es sei um  $p$  noch ein anderes Koordinatensystem

$$V_1 \xrightarrow{\psi_1} V'_1 \subset \mathbb{R}^m, \quad \psi_1(p) = 0$$

gegeben. Dann wird der Koordinatenwechsel durch

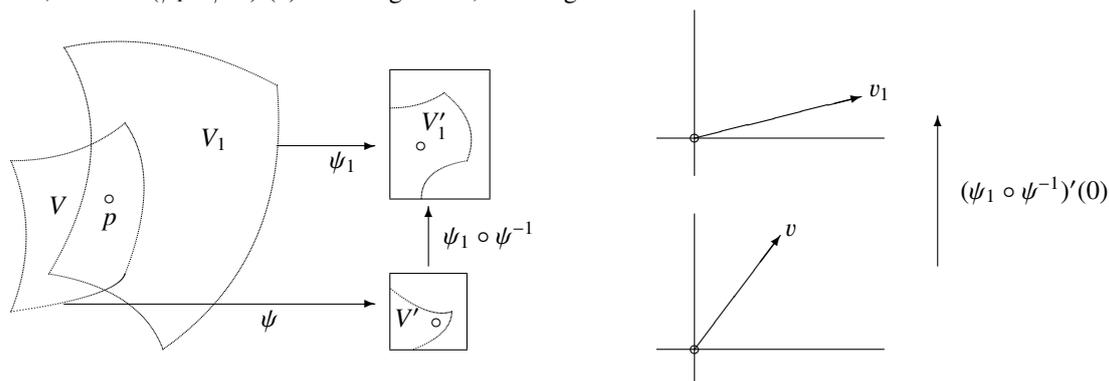
$$\psi_1 \circ \psi^{-1}$$

beschrieben, und die Tangentialvektoren transformieren sich folgendermaßen: Einem  $v \in \mathbb{R}^m$  entspricht bezüglich der Koordinaten  $\psi$  der Tangentialvektor  $(\psi^{-1})'(0) \cdot v \in T_p M$  und diesem

$$v_1 = \psi'_1(p)(\psi^{-1})'(0) \cdot v = (\psi_1 \circ \psi^{-1})'(0) \cdot v \in \mathbb{R}^m$$

bezüglich der Koordinaten  $\psi_1$ .

Es sei also in lokalen Koordinaten ein Tangentialvektor in  $T_p M$  durch  $v \in \mathbb{R}^m$  gegeben, nämlich durch  $(\psi^{-1})'(0)v$ . Wechselt man das Koordinatensystem, dann wird  $v$  mit der Jacobischen des Kartenwechsels transformiert, also mit  $(\psi_1 \circ \psi^{-1})'(0)$ . Man sagt dafür, ein Tangentialvektor werde kontravariant transformiert.



### 12.1.1 Kurven im Raum

In diesem Abschnitt wollen wir §9.9 fortsetzen. Es sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve im Raum, also eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Es sei

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

lokal eine Parameterdarstellung. Eine solche stetige Abbildung heißt Weg. Es sei noch einmal daran erinnert, daß Wege noch sehr exotisch verlaufen können. Von Peano stammt das Beispiel einer  $C_0$ -Funktion  $\gamma$  mit  $R(\gamma) = Q$ , einem Quadrat, (vgl. *Barner & Flohr II, l.c. S. 40*); und in *v. Mangoldt & Knopp II, l.c. S. 412* finden Sie das Beispiel der „von Koch-Kurve“, einer Kurve ohne Tangente.

Nach CAMILLE JORDAN, 1838–1922, sind die „Jordanschen Kurvenstücke“ benannt, nämlich die injektiven stetigen Bilder einer Strecke. Eine „geschlossene Jordankurve“ ist eine bijektive stetige Abbildung einer Kreislinie. Der Jordansche Kurvensatz besagt, daß jede geschlossene Jordankurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  den  $\mathbb{R}^2$  in zwei Gebiete zerlegt, nämlich in das Innere und das Äußere von  $\Gamma$ . Der Beweis ist lang und schwierig, ich kann ihn hier nicht bringen. Weitere Angaben finden sie ebenfalls in *v. Mangoldt & Knopp II, l.c. S. 412*.

Im folgenden wollen wir uns wie in §9.9 wieder auf  $C_1$ -Kurven beschränken. Wir wollen einen Kalkül und klassische Resultate bereitstellen; unser Ziel ist es nicht, etwaige Differenzierbarkeitsvoraussetzungen möglichst gering zu halten.

In §9.9 haben wir bereits die Länge von  $\Gamma$  definiert. Es war

$$L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

wenn  $\gamma$  eine Darstellung von  $\Gamma$  ist.  $L$  hing nicht vom speziellen  $\gamma$  ab.

**Kurvenintegrale:** Wir wollen allgemeiner Integrale über  $\Gamma$  einführen und berechnen. Denken Sie zum Beispiel wieder an die Darstellung

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$$

für  $\Gamma$ . Auf  $\Gamma$  sei ein Vektorfeld  $v$ , etwa eine Kraft, gegeben

$$v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Dann weiß man aus der Physik, daß Arbeit gleich „Kraft mal Weg“ ist, und man möchte das Integral

$$A := \int_a^b (v(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt$$

berechnen, also  $v$  „längs  $\Gamma$ “ integrieren. Symbolisch:  $A = \int_{\Gamma} (v(x), dx)$ .

Zur Berechnung solcher Integrale haben sich die „Pffafschen Differentialformen“ sehr bewährt. Ihre volle Tragweite wird erst bei der Behandlung von Flächenintegralen richtig klar werden. Ich möchte aber doch schon jetzt – zur Einübung – mit ihnen beginnen. Folgende Namen sind in diesem Zusammenhang zu nennen: JOHANN FRIEDRICH PFAFF (1765–1825), HENRI POINCARÉ (1854–1912) und ÉLIE CARTAN (1869–1951).

**Definition 12.1.8:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit und

$$\omega : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Abbildung, die bezüglich des zweiten Arguments linear ist. Dann heißt  $\omega$  eine 1-Form auf  $M$ .

Dabei denken wir in diesem Abschnitt an  $\Gamma$ , wenn  $M$  auftritt. Explizit läßt sich  $\omega$  beschreiben, indem man die zweite Variable  $h$  bezüglich der Standardbasis darstellt, etwa

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i.$$

Dabei sei  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor. Dann ist

$$\omega(x, h) = \sum_{i=1}^n \omega(x, e_i) h_i.$$

Setzen wir  $w_i(x) := \omega(x, e_i)$ , dann ist

$$\omega(x, h) = \sum_{i=1}^n w_i(x) h_i = (w(x), h).$$

$\omega$  heißt stetig bzw. differenzierbar, wenn  $w$  stetig bzw. differenzierbar ist.

Im folgenden möchte man in  $\omega(x, h)$  als zweites Argument Elemente von  $T_x M$  eintragen. Um das anzudeuten, verwendet man auch die speziellen Formen „ $dx$ “:

$$\begin{aligned} dx_i &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto h_i \end{aligned}$$

und erhält damit

$$\omega(x, \cdot) = \sum_{i=1}^n w_i(x) dx_i = (w(x), dx).$$

Beim Beispiel der Arbeit war

$$\omega(x, \cdot) = (v(x), dx)$$

mit  $x = \gamma(t)$ .

Nun können wir das Kurvenintegral über  $\Gamma$  einführen:

**Definition 12.1.9:** Es seien  $A, B$  zwei Punkte aus einem Kartengebiet von  $\Gamma$ ,  $\gamma$  eine Darstellung mit  $\gamma(a) = A$  und  $\gamma(b) = B$ , sowie  $\Gamma(A, B)$  der Weg von  $A$  nach  $B$  längs  $\Gamma$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma(A, B)} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Man hat also in  $\omega(x, h)$  die Argumente  $x = \gamma(t)$  und  $h = \gamma'(t)$  einzutragen und bezüglich  $t$  zu integrieren.

Diese Definition des Kurvenintegrals ist von der speziellen Darstellung unabhängig, solange nur dieselbe Orientierung gewählt wird. Es seien also  $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  und

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma} &: [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit äquivalenten  $\gamma, \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  und  $\varphi' > 0$ . Dann ist

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}') = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\gamma, \gamma') \circ \varphi \cdot \varphi' = \int_a^b \omega(\gamma, \gamma').$$

Offenbar gilt mit  $c_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) &= c_1 \int_{\Gamma} \omega_1 + c_2 \int_{\Gamma} \omega_2 \\ \int_{\Gamma} \omega &= \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega \quad \text{für } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

**Beispiel 12.1.10:**

1. Im  $\mathbb{R}^2$  sei  $\Gamma$  ein Weg, der aus den Wegstücken  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zusammengesetzt ist,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , mit

$$\Gamma_1 = \left\{ x = \gamma_1(t) \mid 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ x = \gamma_2(t) \mid 1 \leq t \leq 2 \right\}$$

und

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

$\Gamma$  verbindet also  $(1, 0)$  mit  $(0, 2)$ . Es sei

$$v(x) := \frac{x}{|x|^2}.$$

Wir wollen die Arbeit

$$A = \int_{\Gamma} \omega \quad \text{mit } \omega(x, \cdot) = (v(x), dx)$$

berechnen. Wegen

$$(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)) = 0$$

verschwindet das Integral über  $\Gamma_1$ , und wir erhalten

$$A = \int_{\Gamma_2} \omega = \int_1^2 \left( \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dt = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2.$$

2. Es seien analog  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  mit

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -1+t \\ -t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

und

$$\omega(x, \cdot) = -\frac{x_2}{|x|^2} dx_1 + \frac{x_1}{|x|^2} dx_2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \omega &= \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \pi, \\ \int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^1 \left\{ -\frac{-t}{t^2 + (1-t)^2} - \frac{-1+t}{t^2 + (1-t)^2} \right\} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (1-t)^2} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\tau}{(\tau + \frac{1}{2})^2 + (\tau - \frac{1}{2})^2} = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\tau}{4\tau^2 + 1} = \int_{-1}^1 \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und

$$\int_{\Gamma_3} \omega = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (1-t)^2} = \frac{\pi}{2},$$

also

$$\int_{\Gamma} \omega = 2\pi. \quad \square$$

Im ersten Beispiel würde das Integral, über die geschlossene Kreislinie erstreckt, verschwinden. Im zweiten Beispiel ist  $\Gamma$  geschlossen, das Integral verschwindet aber nicht. Natürlich hätten wir gerne Kriterien dafür, daß ein solches Integral nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht aber vom speziellen Verbindungsweg, oder wann solche Integrale über geschlossene Wege verschwinden.

Beispielsweise seien  $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C_1(U, \mathbb{R})$  und

$$\omega(x, h) := f'(x, h).$$

Dann ist mit  $A := \gamma(a)$  und  $B := \gamma(b)$

$$\int_{\Gamma(A,B)} \omega = \int_a^b f'(\gamma, \gamma')(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a),$$

also

$$\int_{\Gamma(A,B)} \omega = f(B) - f(A).$$

Das Integral von  $A$  nach  $B$  längs  $\Gamma$  hängt in diesem Falle also nur von  $A, B$  und nicht von  $\Gamma$  ab.

Das wollen wir noch etwas formalisieren: Wir nennen  $f$  selbst eine „0-Form“ und schreiben

$$df := (f', dx)$$

$df$  ist dann wieder eine 1-Form, und in diesem Falle gilt

$$\int_{\Gamma(A,B)} df = f(B) - f(A).$$

**Definition 12.1.11:** Existiert zur 1-Form

$$\omega : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine 0-Form

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $\omega(x, h) = f'(x, h) = (df)(x, h)$ , dann heißt  $\omega$  exakt und  $f$  eine Stammfunktion zu  $\omega$ .

**Bemerkung 12.1.12:** Es sei  $\omega(x, h) = (w(x), h)$ . Dann bedeutet die Exaktheit von  $\omega$

$$w = \nabla f.$$

Wenn  $\omega$  nämlich exakt ist, dann gibt es ein  $f$  mit  $\omega = f'$ , also

$$(w(x), h) = f'(x, h) = ((\nabla f)(x), h).$$

Es gilt

**Satz 12.1.13:** Eine stetige 1-Form  $\omega$  ist exakt  $\iff$

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$$

für alle  $\Gamma_1, \Gamma_2$  in  $U$  mit denselben Anfangs- und Endpunkten.

Beweis:

$\Rightarrow$ : Wurde soeben bewiesen.

$\Leftarrow$ : Es sei  $x_0 \in U$  fest gewählt.  $\Gamma(x_0, x) \subset U$  verbinde  $x_0$  mit  $x$ . Dann ist für alle  $x \in U$

$$f(x) := \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega$$

eindeutig definiert, weil das Integral nicht vom Wege abhängt.  $f$  ist die gesuchte Funktion: Wir zeigen ihre Differenzierbarkeit. Dazu verbinden wir  $x$  mit  $x + h$  geradlinig. Es sei  $\Gamma_1 \subset U$  diese Verbindungsstrecke. Dann ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_{\Gamma_1} \omega = \int_0^1 \omega(x+th, h) dt,$$

und der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert ein  $\tau \in (0, 1)$  mit

$$\int_0^1 \omega(x+th, h) dt = \omega(x+\tau h, h).$$

Nun ist  $\omega$  stetig und im zweiten Argument linear, also gilt bei festem  $x$  mit  $0 < \tau(h) < 1$

$$\omega(x+\tau h, h) - \omega(x, h) = |h| \cdot r(\tau h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} r(\tau h) = 0.$$

Damit ist  $f$  differenzierbar, und wir erhalten

$$f'(x, h) = \omega(x, h).$$

□

Im Beispiel 12.1.10.1 war

$$w(x) = \frac{x}{|x|^2} = \nabla \ln|x| \quad \text{in} \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$\omega$  ist also in  $U$  exakt. Im zweiten Beispiel war

$$w(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dieses  $\omega$  ist nicht exakt, denn wir haben einen geschlossenen Weg mit nicht verschwindendem Integral angegeben.

Es gibt eine notwendige Bedingung für die Exaktheit von  $C_1$ -Formen  $\omega$ . Es sei nämlich

$$\omega(x, h) = f'(x, h).$$

Dann ist

$$w_i(x) = \partial_i f(x),$$

und aus der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von  $f$  folgt die Integrabilitätsbedingung

$$\partial_j w_i(x) = \partial_i w_j(x). \tag{*}$$

Das ist die notwendige Bedingung. Sie reicht nicht hin, wie das zweite Beispiel zeigt. Dort ist nämlich

$$\partial_2 w_1(x) = \partial_1 w_2(x) = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{|x|^4}.$$

Aus Bedingung (\*) wird nun eine hinreichende Bedingung, wenn man zusätzliche Voraussetzungen an  $U$  macht. Ich formuliere sie zunächst nur lokal (global wird das schwieriger; dann kommen auch topologische Bedingungen mit ins Spiel). Es sei nämlich  $U$  konvex oder – etwas allgemeiner – sternförmig.

**Definition 12.1.14:**  $U$  heißt sternförmig bezüglich eines Punktes  $p \in U$  : $\iff$

$$\forall x \in U \quad \overline{px} \subset U.$$

Dabei sei  $\overline{px}$  die Verbindungsstrecke von  $p$  nach  $x$ . Dann gilt

**Satz 12.1.15:** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine sternförmige offene Menge,  $\omega$  eine  $C_1$ -1-Form, und es gelte Gl. (\*). Dann ist  $\omega$  exakt.

Beweis: O.B.d.A. sei  $U$  sternförmig bezüglich des Nullpunktes. Wir geben durch geradliniges Integrieren explizit eine Stammfunktion an: Es sei  $\Gamma(0, x)$  dargestellt durch  $\gamma(t) = tx$  für  $0 \leq t \leq 1$  und

$$f(x) := \int_{\Gamma(0,x)} \omega = \int_0^1 \omega(tx, x) dt = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i(tx) \right) dt.$$

Dann ist

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 w_j(tx) dt + \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i t \underbrace{\partial_j w_i(tx)}_{=\partial_i w_j(tx)} \right) dt.$$

Nun ist

$$w_j(tx) + t \sum_{i=1}^n x_i \partial_i w_j(tx) = w_j(tx) + t \frac{d}{dt} w_j(tx) = \frac{d}{dt} (t w_j(tx)).$$

Deshalb folgt

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t w_j(tx)) = w_j(x).$$

□

Das erste Beispiel wiederum zeigt, daß die Sternförmigkeit für die Aussage des Satzes nicht notwendig ist, denn es war

$$w(x) = \frac{x}{|x|^2} = \nabla \ln |x| \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Wir berechnen für das zweite Beispiel in  $U = \{x \mid x_1 > 0\}$  die Stammfunktion: Es war

$$w(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen den Weg  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  zwischen  $(1, 0)$  und  $x$  mit  $\Gamma_1 = \Gamma_1((1, 0), (x_1, 0))$  und  $\Gamma_2 = \Gamma_2((x_1, 0), x)$ , jeweils geradlinig. Dann ist

$$f(x) = \int_{\Gamma} \omega = \int_1^{x_1} 0 dt + \int_0^{x_2/x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + t^2} dt = \int_0^{x_2/x_1} \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Man darf also nicht beliebig um den Nullpunkt herum integrieren, weil man sonst einen einmal gewählten Ast der arctan-Funktion womöglich verlassen wird.

Die eigentliche Bedeutung der Differentialformen wird erst klarer werden, wenn wir Flächenintegrale behandeln. Hier nur soviel: Im  $\mathbb{R}^n$  definiert man für jedes  $0 \leq p \leq n$   $p$ -Formen

$$\begin{aligned} \omega &: U \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, h_1, \dots, h_p) &\longmapsto \omega(x, h_1, \dots, h_p), \end{aligned}$$

die bezüglich der Argumente  $h_1, \dots, h_p$  linear und „alternierend“ sein sollen. Für  $C_1$ -Formen führt man den Differentiationsoperator

$$d : p\text{-Form} \longrightarrow (p+1)\text{-Form}$$

ein, speziell für 0-Formen  $\omega(x) = w(x)$

$$d\omega := (w', dx),$$

also

$$(d\omega)(x, h) = w'(x, h) = (\nabla w(x), h).$$

Eine  $p$ -Form  $\omega$  heißt nun exakt, wenn es eine  $(p-1)$ -Form  $\pi$  gibt mit

$$\omega = d\pi.$$

Man zeigt, daß für alle  $\omega$

$$d(d\omega) = 0$$

gilt. Somit lautet die Integrierbarkeitsbedingung (\*) dann

$$d\omega = 0. \tag{**}$$

Unser letzter Satz besagt, daß  $\omega$  genau dann lokal exakt ist, wenn (\*\*) gilt. Um globale Aussagen zu erhalten, wird man versuchen, eine beliebige Menge  $U$  durch konvexe auszuschöpfen. Dabei muß man aber sicherstellen, daß man nach einer Fortsetzung – im  $\mathbb{R}^2$  etwa längs eines Kreises – den alten Wert zurückerhält, es dürfen also keine Mehrdeutigkeiten auftreten. Unsere Beispiele verdeutlichen das. Beispielsweise möchte man jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt in  $U$  zusammenziehen können. Im  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  geht das für  $n = 2$  nicht, wohl aber für  $n \geq 3$ . Solche topologische Fragen kann ich hier aber nicht vertiefen.

### 12.1.2 Flächen im Raum

In diesem Abschnitt möchte ich kurz analog zur Bogenlänge das Flächenmaß einführen. Es sei also jetzt  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und

$$\gamma : T \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

eine Parameterdarstellung. Um das Flächenmaß zu definieren, erinnere ich an das Maß eines  $m$ -dimensionalen Parallelotops  $P$  im  $\mathbb{R}^m$ . Es seien  $a_1, \dots, a_m$  Kantenvektoren von  $P$ . Dann ist

$$\text{Vol}(P) = |\det(a_1, \dots, a_m)|.$$

Daraus folgt

$$(\text{Vol}(P))^2 = \det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_m^t \end{pmatrix} \cdot \det(a_1, \dots, a_m) = \det G$$

mit

$$G(a_1, \dots, a_m) := \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_m) \\ \vdots & \searrow & \vdots \\ (a_m, a_1) & \cdots & (a_m, a_m) \end{pmatrix}.$$

$G$  ist die Gramsche Matrix der  $a_i$ , benannt nach JÖRG GRAM, 1850–1916.

Es seien nun  $P$  ein von den Tangentialvektoren  $\partial_i \gamma$  im Punkte  $p$  aufgespanntes Parallelotop in  $T_p \Gamma$  und  $g(\gamma) := G(\partial_1 \gamma, \dots, \partial_m \gamma)$ . Dann liegt folgende Definition nahe:

**Definition 12.1.16:** Es seien  $\Gamma$  eine  $m$ -dimensionale  $C_1$ -Untermannigfaltigkeit und  $\gamma$  eine Darstellung von  $\Gamma$ . Dann heißt

$$A(\Gamma) := \int_T \sqrt{\det g(\gamma)}$$

das Flächenmaß von  $\Gamma$ .

Dabei steht  $A$  für „Areal“. Es gelten wieder  $A(\Gamma) \geq 0$ ,  $A(\Gamma) = A(\Gamma_1) + A(\Gamma_2)$  für  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , und  $A$  ist invariant gegenüber Isometrien des  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere muß aber wieder bewiesen werden, daß  $A(\Gamma)$  nicht von der speziellen Darstellung abhängt. Es sei also  $\varphi : \tilde{T} \rightarrow T$  und

$$\begin{aligned} \gamma &: T \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma} &: \tilde{T} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit äquivalenten  $\gamma, \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  und  $\det \varphi' > 0$ . Dann ist

$$\det G(\tilde{\partial}_1 \tilde{\gamma}, \dots, \tilde{\partial}_m \tilde{\gamma}) = \det G(\partial_1 \gamma, \dots, \partial_m \gamma) \cdot (\det \varphi')^2$$

oder

$$\sqrt{\det g(\tilde{\gamma})} = \sqrt{\det g(\gamma)} \circ \varphi \cdot \det \varphi'.$$

Daraus folgt

$$\int_{\tilde{T}} \sqrt{\det g(\tilde{\gamma})} = \int_{\tilde{T}} \sqrt{\det g(\gamma)} \circ \varphi \cdot \det \varphi' = \int_T \sqrt{\det g(\gamma)},$$

also die Invarianz von  $A(\Gamma)$ . Die letzte Gleichung erhält man aus der „Transformationsformel“, die wir sofort anschließend in §12.2 beweisen werden.

**Beispiel 12.1.17:** Wir berechnen eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ :

Es seien  $T \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C_1(T, \mathbb{R})$  gegeben und

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ f(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Es seien ferner  $p := \partial_1 f$  und  $q := \partial_2 f$ . Dann ist

$$g(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq \\ pq & 1 + q^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\det g(\gamma) = (1 + p^2)(1 + q^2) - p^2 q^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Damit erhalten wir

$$A(\Gamma) = \int_T \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int_T \sqrt{1 + (\nabla f)^2}.$$

Berechnen wir speziell die Oberfläche einer Halbkugel: Es seien  $T := \{t \mid |t| < r\}$  und

$$f(t) = \sqrt{r^2 - |t|^2}.$$

Dann ist

$$p = \frac{-t_1}{\sqrt{r^2 - |t|^2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{-t_2}{\sqrt{r^2 - |t|^2}}.$$

Es folgt also

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{r^2}{r^2 - |t|^2}$$

oder

$$A(\Gamma) = \int_T \frac{r}{\sqrt{r^2 - |t|^2}} dt.$$

Aus der Transformationsformel im nächsten Abschnitt folgt daraus durch Einführen von Polarkoordinaten

$$t = \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$A(\Gamma) = r \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = -2\pi r \sqrt{r^2 - \rho^2} \Big|_0^r = 2\pi r^2.$$

### 12.2 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt zeigen wir

**Die Transformationsformel:** *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  ein  $C_1$ -Diffeomorphismus und  $J_\varphi = \varphi'$  die Jacobi-Matrix von  $\varphi$ . Dann ist  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann integrabel, wenn  $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'| : U \rightarrow \mathbb{R}$  es ist. Es gilt*

$$\int_V f(y) dy = \int_U (f \circ \varphi)(x) \cdot |\det J_\varphi(x)| dx. \tag{*}$$

Die Transformation  $\varphi$  ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der Borelalgebren. Nimmt man für  $f$  die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge  $\varphi(A) \subset V$ , und bezeichnet  $\mu$  das Lebesguemaß, dann besagt die Transformationsformel:

**Satz 12.2.1:** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für jede meßbare Menge  $A \subset U$*

$$\mu(\varphi(A)) = \int_A |\det J_\varphi(x)| dx. \tag{**}$$

Beweis der Transformationsformel in sechs Schritten:

1. Es sei  $\varphi$  wie in der Voraussetzung zur Transformationsformel. Dann folgt (\*) aus (\*\*). Für  $f \in \mathcal{T}(V, \mathbb{R})$  ist das klar; ein beliebiges  $f \in \mathcal{L}^1(V, \mathbb{R})$  läßt sich durch Treppenfunktionen approximieren; daraus folgt eine Richtung. Ist umgekehrt  $(f \circ \varphi) \cdot |\det J_\varphi| \in \mathcal{L}^1(U, \mathbb{R})$ , so transformiere man mit  $\varphi^{-1}$  zurück.
2. Es genügt, folgendes zu beweisen:

$$\forall p \in U \exists W, \text{ offen, mit } p \in W \text{ und Gl. (**) gilt für } \varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W).$$

$U \subset \mathbb{R}^n$  läßt sich nämlich durch abzählbare  $W_j$  mit dieser Eigenschaft überdecken (etwa durch Kugeln mit rationalen Mittelpunkten). Dann zerlege man  $A$  disjunkt in Teile  $A_j \subset W_j$ . Beide Seiten von (\*\*) sind für solche Zerlegungen  $\sigma$ -additiv.

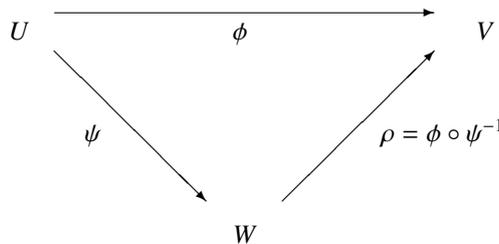
3. Gl. (\*\*) gilt, wenn  $\varphi$  eine Permutation von Koordinaten ist.
4. Gl. (\*\*) gilt im  $\mathbb{R}^1$ : Die Maße  $A \mapsto \mu(\varphi(A))$  und  $A \mapsto \int_A |\det \varphi'| dx$  auf  $U$  stimmen dann nämlich auf Intervallen überein, also auch für endliche disjunkte Vereinigungen davon. Sie haben endlichen Wert für kompakte Intervalle und sind auf  $U$   $\sigma$ -finit. Damit lassen sie sich eindeutig zu einem Maßraum fortsetzen; das heißt, es gilt Gl. (\*\*) im  $\mathbb{R}^1$ .
5. Gilt Gl. (\*\*) und damit Gl. (\*) für die Transformationen  $\psi : U \rightarrow W$  und  $\rho : W \rightarrow V$ , dann gelten beide Gleichungen auch für  $\rho \circ \psi : U \rightarrow V$ . Dies folgt aus

$$\det J_{\rho \circ \psi} = \det J_\rho \cdot \det J_\psi.$$

6. Wir beweisen Aussage 2 durch Induktion nach  $n$ . Der Induktionsanfang ist Aussage 4. Wir betrachten  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  lokal um einen Punkt  $p \in U$  mit  $\varphi(p) \in V$ . Wegen  $J_\varphi \neq 0$  dürfen wir nach Permutation der Koordinaten in  $U$  und  $V$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

annehmen. Dann zerlege man  $\varphi$  lokal um  $p$  wie folgt:



$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_n), \quad \rho(y) = (y_1, \rho_2(y), \dots, \rho_n(y)).$$

$\psi$  ist um  $p$  lokal invertierbar, denn die Jacobische Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \partial \varphi_1 / \partial x_1 & * \\ 0 & id \end{pmatrix}.$$

Diese Zerlegung von  $\varphi$  zusammen mit Aussage 5 zeigt: Man darf annehmen, daß  $\varphi$  eine Koordinate festläßt, und zwar nach Permutation der Koordinaten o.B.d.A. die erste. Also

$$\begin{aligned} \varphi &: (t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (t, \varphi_t(t, x_2, \dots, x_n)), \\ \varphi_t &: U_t := U \cap \{x_1 = t\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

Dann hat die Jacobische Matrix von  $\varphi$  die Gestalt

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{\varphi_t} \end{pmatrix},$$

und es ist  $\det J_\varphi = \det J_{\varphi_t}$ . Damit folgt aus dem Satz von Fubini (Cavalieri'sches Prinzip), der Induktionsannahme und  $\varphi(A)|_{x_1=t} = \{t\} \times \varphi_t(A_t)$

$$\begin{aligned} \mu_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(\varphi(A)(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(\varphi_t(A_t)) dt = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{A_t} |\det J_{\varphi_t}| d\mu_{n-1} \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t} \cdot |\det J_\varphi(t, \cdot)| d\mu_{n-1} \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \cdot |\det J_\varphi| d\mu_n. \end{aligned}$$

□

Wir beschließen diesen Abschnitt mit drei Anmerkungen:

**Satz 12.2.2:** *Es seien  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge und  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig. Dann ist auch  $f(N)$  eine Nullmenge.*

Für stetige Abbildungen ist diese Aussage im allgemeinen falsch, wie Beispiel 11.9.7 gezeigt hat.

Beweis: Es sei  $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Würfelüberdeckung von  $N$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(W_j) < \varepsilon$ . Jeder Würfel  $W_j$  enthalte einen Punkt  $a_j \in N$ . Hat  $W_j$  die Kantenlänge  $s_j =: s$ , dann ist  $\mu(W_j) = s^n$  und

$$\forall x \in W_j \quad |x - a_j| \leq \sqrt{n} \cdot s.$$

Aus  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  folgt deshalb

$$\forall x \in W_j \cap N \quad |f(x) - f(a_j)| \leq Ls\sqrt{n}.$$

Daher liegt  $f(W_j \cap N)$  in einem Würfel mit der Kantenlänge  $2Ls\sqrt{n}$  und dem Volumen  $k\mu(W_j)$ , wobei  $k = (2L\sqrt{n})^n$  von  $j$  unabhängig ist. Also liegt  $f(N)$  in der Vereinigung einer Folge von Würfeln mit der Volumensumme  $\leq k\varepsilon$ . □

Das folgende Lemma geht auf ARTHUR SARD, 1909–1980, zurück.

**Lemma von Sard:** *Es seien  $U \in \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi \in C_1(U, \mathbb{R}^n)$  und  $C$  die Menge der kritischen Punkte von  $\varphi$ . Dann ist die Menge der kritischen Werte  $\varphi(C)$  eine Nullmenge.*

Das Lemma gilt auch für Abbildungen aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$ . Wir begnügen uns hier mit dem Fall  $n = m$ .

Beweis: Da  $U$  als abzählbare Vereinigung von Würfeln dargestellt werden kann (Satz 10.2.2), genügt es, die kritischen Punkte in einem abgeschlossenen Würfel  $W$  zu untersuchen. Es seien  $c$  eine kritische Stelle und  $W'$  ein Würfel mit dem Durchmesser  $\delta$  und  $c \in W' \subset W$ . Dann ist  $\varphi(W')$  in einem Zylinder enthalten, dessen Grundfläche und Höhe wir abschätzen wollen:

1. Es gilt

$$\exists L > 0 \quad \forall x, y \in W \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|.$$

Es sei  $r$  definiert durch

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi'(x, y - x) + |y - x| \cdot r(x, y).$$

Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y, |x - y| < \delta \quad |r(x, y)| < \varepsilon.$$

Es sei

$$\psi(y) := \varphi(c) + \varphi'(c, y - c).$$

Dann ist

$$|\varphi(y) - \psi(y)| = |y - c| |r(c, y)|,$$

und wegen  $\det J_\varphi(c) = 0$  ist  $R(\psi)$  ein affiner Unterraum der Dimension  $\leq (n-1)$ , also in einer Hyperebene enthalten.

2. Es seien nun  $\delta = \delta(\varepsilon)$  und  $W'$  entsprechend gewählt. Dann liegt  $\varphi(W')$  in einem Parallelstreifen der genannten Hyperebene mit der Höhe  $2\varepsilon\delta(\varepsilon)$ . Andererseits liegt  $\varphi(W')$  in einer Kugel um  $\varphi(c)$  mit dem Radius  $L\delta(\varepsilon)$ . Diese Kugel schneidet die Hyperebene in einer höchstens  $(n-1)$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $L\delta(\varepsilon)$ . Die Menge  $\varphi(W')$  liegt also in einem Zylinder über dieser Grundfläche mit der Höhe  $2\varepsilon\delta(\varepsilon)$ , das heißt, es gilt ( $\omega_n$  sei die Fläche der  $(n-1)$ -Sphäre)

$$\mu(\varphi(W')) \leq \omega_{n-1} (L\delta(\varepsilon))^{n-1} \cdot 2\varepsilon\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon \omega_{n-1} L^{n-1} (\delta(\varepsilon))^n.$$

3. Es sei  $a$  der Durchmesser von  $W$ . Man wähle  $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad a < k(\varepsilon) \delta(\varepsilon) < 2a$$

und zerlege  $W$  in  $k^n$  kongruente Teilwürfel  $W_k$ . Dann ist der Durchmesser der  $W_k$  kleiner als  $\delta(\varepsilon)$ , und es gilt

$$\mu(\varphi(C)) \leq k^n 2\varepsilon \omega_{n-1} L^{n-1} \left(\frac{2a}{k}\right)^n \leq \text{const} \cdot \varepsilon.$$

Also ist  $\mu(\varphi(C)) = 0$ .

**Folgerung 12.2.3:** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar mit  $\det J_\varphi(x) \geq 0$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\varphi$  bilde  $U \setminus C = \{x \in U \mid \det J_\varphi(x) > 0\}$  umkehrbar eindeutig ab. Dann gilt

$$\int_{\varphi(U)} f(y) dy = \int_U (f \circ \varphi)(x) \det J_\varphi(x) dx,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.

### 12.3 Beispiele

Zur Übung sollen nun einige Kurven- und Flächenintegrale wirklich ausgerechnet werden:

1. Es seien  $G := \{(x, y) \mid x^2 < y < x + 2\}$  und  $f(x, y) = xy$ . Dann ist

$$\int_G f = \int_{-1}^2 x \left( \int_{x^2}^{x+2} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 x ((x+1)^2 - x^4) dx = 5,625.$$

2. Es sei  $G := \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ .  $\mu(G)$  soll berechnet werden. Dazu substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} a\xi \\ b\eta \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $G = \varphi(M)$  mit

$$M = \{(\xi, \eta) \mid \xi > 0, \eta > 0, \xi^2 + \eta^2 < 1\}.$$

Wir erhalten

$$\mu(G) = \int_G 1 = \int_M |\det J_\varphi| = ab \int_M 1 = \frac{1}{4} ab\pi.$$

3. Der Schwerpunkt von  $G$  wird durch

$$x_s := \frac{1}{\mu(G)} \int_G x$$

definiert. Es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  und  $G$

$$G := \left\{ (x, y) \mid -a < x < b, 0 < y < \begin{cases} c(1 - \frac{x}{b}) & \text{für } x \geq 0 \\ c(1 + \frac{x}{a}) & \text{für } x < 0 \end{cases} \right\}.$$

Dann ist  $\mu(G) = \frac{1}{2}c(a+b)$  und

$$\int_G x_1 = \int_0^c \left( \int_{-a+\frac{a}{c}t}^{b-\frac{b}{c}t} s ds \right) dt = \frac{b-a}{3} \mu(G).$$

Es folgt

$$x_s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}.$$

4. Es sei  $G := \{(x, y) \mid 0 < x < a, y^2 < 2px\}$ . Wir berechnen wieder  $x_s$ : Es ist

$$\begin{aligned} \int_G x_2 &= 0 \\ \int_G x_1 &= \int_0^a \left( s \int_{-\sqrt{2ps}}^{\sqrt{2ps}} dt \right) ds = 2 \int_0^a \sqrt{2ps} s ds = \frac{4}{5} \sqrt{2p} a^{5/2}. \\ \mu(G) &= \int_0^a \left( \int_{-\sqrt{2ps}}^{\sqrt{2ps}} dt \right) ds = \frac{4}{3} \sqrt{2p} a^{3/2}, \end{aligned}$$

also

$$x_s = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Das Trägheitsmoment von  $G$  in Bezug auf die Gerade  $g$  wird definiert als

$$T_g(G) := \int_G \rho^2$$

mit  $\rho(x) := \text{dist}(x, g)$ . Es sei  $G$  wie im dritten Beispiel und  $g$  die  $x$ -Achse. Dann ist  $\rho(x) = x_2$ , und wir erhalten

$$T_g(G) = \int_0^c \left( \int_{-a+\frac{a}{c}t}^{b-\frac{b}{c}t} t^2 ds \right) dt = \int_0^c t^2(a+b) \left(1 - \frac{t}{c}\right) dt = \frac{(a+b)c^3}{12}.$$

6. Uneigentliche Integrale werden wie in  $\mathbb{R}^1$  definiert. In  $p \in G$  liege eine isolierte Singularität vor. Es seien  $(U_n(p))$  eine Folge von Umgebungen von  $p$  mit  $\mu(U_n) \rightarrow 0$ . Dann erklären wir

$$\int_G f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G \setminus U_n} f.$$

Entsprechend geht man im Unendlichen vor.  $f$  ist dort uneigentlich integrierbar, wenn

$$\int_{G \cap V_n} f$$

für beliebige beschränkte  $V_j$  mit  $\bigcup_j V_j = \mathbb{R}^n$  konvergiert.

## 12.4 Alternierende Differentialformen

Mit der Transformationsformel haben wir soeben die Substitutionsregel für Integrale im  $\mathbb{R}^1$  auf den  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Uns fehlt aber noch eine andere wichtige Regel, nämlich die Regel für das partielle Integrieren. Dahinter steht natürlich die Frage nach der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Ein entsprechendes Resultat fehlt uns im  $\mathbb{R}^n$  noch.

Im folgenden wollen wir uns mit diesem Fragenkreis beschäftigen. In §12.1.1 haben wir damit bereits begonnen und erste Ergebnisse hergeleitet. Physikalisch interpretiert haben wir dort die Arbeit berechnet, also Skalarprodukte der Form Vektorfeld mal Tangente längs einer Kurve integriert. Für solche speziellen Integrale haben wir die Frage gestellt, ob sie vom Weg unabhängig sind oder ob sie, über einen geschlossenen Weg erstreckt, verschwinden. Für solche Integrale konnten wir auch Stammfunktionen angeben und den Hauptsatz beweisen – jedenfalls lokal. Natürlich war das nur ein Spezialfall, und wir sind an allgemeineren Resultaten interessiert. Wenn wir dabei nicht nur über Kurven, sondern auch über Flächen oder allgemein über Mannigfaltigkeiten integrieren, dann treten Randintegrale auf. Diese Problematik hatte im  $\mathbb{R}^1$  und bei Kurvenintegralen noch keine große Bedeutung.

Zur Behandlung solcher Fragen wollen wir in diesem Abschnitt zunächst einen geeigneten Kalkül bereitstellen und „Alternierende Differentialformen“ einführen. Sie haben sich zur Darstellung der Problematik um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  bestens bewährt, und sie führen auch zu einem Verfahren, mit dem sich vorgegebene Integrale berechnen lassen.

Unter einer Differentialform der Stufe  $p$ , kurz einer  $p$ -Form, auf einer Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  verstehen wir eine Zuordnung  $\omega$ , welche jedem  $x \in M$  eine alternierende  $p$ -Form auf einem Vektorraum  $V$  zuweist.  $V$  soll später der Tangentialraum  $T_x M$  werden. Wir definieren:

**Definition 12.4.1:** Eine stetige Abbildung

$$\omega : M \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, h_1, \dots, h_p) \longmapsto \omega(x, h_1, \dots, h_p),$$

die bezüglich der Argumente  $h_1, \dots, h_p$  linear und alternierend ist, heißt  $p$ -Form auf  $M$ .

Dabei ist  $0 \leq p \leq n$ ; für  $p > n$  soll  $\omega$  verschwinden. Alternierend soll bedeuten, daß  $\omega$  bei Vertauschung zweier beliebiger  $h_i$  das Vorzeichen wechselt,

$$\omega(x, h_1, \dots, h_i, \dots, h_l, \dots) = -\omega(x, h_1, \dots, h_l, \dots, h_i, \dots).$$

Es seien  $\sigma$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $1, \dots, p$  und

$$\varepsilon(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } \sigma \text{ ungerade ist} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\omega(x, h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \omega(x, h_1, \dots, h_p).$$

Wie im Falle  $p = 1$  in §12.1.1 kann man explizite Darstellungen durch Ausrechnen bezüglich der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  angeben. Mit

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \quad \text{und} \quad k = \sum_{i=1}^n k_i e_i$$

folgt im Falle  $p = 2$ :

$$\omega(x, h, k) = \sum_{i,j=1}^n \omega(x, e_i, e_j) h_i k_j.$$

Wegen  $\omega(x, e_i, e_j) = -\omega(x, e_j, e_i)$  erhält man daraus

$$\omega(x, h, k) = \sum_{i < j} \omega(x, e_i, e_j) \begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}.$$

Analog zu  $dx_i$  in §12.1.1 bezeichnen wir die Abbildung

$$(h, k) \longmapsto \begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}$$

mit  $dx_i \wedge dx_j$ . Es sei also

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \longmapsto \begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}.$$

Dabei soll das Zeichen „ $\wedge$ “ das äußere Produkt (das „Dachprodukt“) symbolisieren. Es gilt

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

also  $dx_i \wedge dx_i = 0$ . Mit

$$w_{ij}(x) := \omega(x, e_i, e_j)$$

wird also

$$\omega(x, \cdot, \cdot) = \sum_{i < j} w_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j.$$

Die Summe hat  $\binom{n}{2}$  Summanden. Die  $dx_i \wedge dx_j$  bilden die Basisformen.

Bei beliebigem  $p$  definieren wir analog

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, \dots, h_p) \longmapsto \begin{vmatrix} h_{1i_1} & \cdots & h_{pi_1} \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ h_{1i_p} & \cdots & h_{pi_p} \end{vmatrix}$$

mit

$$h_k = \sum_{i=1}^n h_{ki} e_i,$$

und  $k = 1, 2, \dots, p$ . Es sei  $\sigma$  wieder eine Permutation der Zahlen  $1, \dots, p$ . Dann ist

$$dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma(p)}} = \varepsilon(\sigma) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Es gibt  $\binom{n}{p}$  Basisformen  $p$ -ter Stufe, und mit

$$w_{i_1 \dots i_p}(x) := \omega(x, e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

folgt

$$\omega(x, \dots) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} w_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

**Beispiel 12.4.2:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:

1. Eine 0-Form ist:  $\omega(x) = w(x)$ .
2. Eine 1-Form ist:  $\omega(x, \cdot) = w_1(x) dx_1 + w_2(x) dx_2 + w_3(x) dx_3$ .
3. Eine 2-Form ist:  $\omega(x, \cdot, \cdot) = w_{12}(x) dx_1 \wedge dx_2 + w_{23}(x) dx_2 \wedge dx_3 + w_{31}(x) dx_3 \wedge dx_1$ .
4. Eine 3-Form ist:  $\omega(x, \cdot, \cdot, \cdot) = w_{123}(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

Formen gleicher Stufe lassen sich addieren und mit einer reellwertigen stetigen Funktion (0-Form) multiplizieren. Wir wollen auch eine Multiplikation für Formen beliebiger Stufe einführen, nämlich das „äußere Produkt“

$$\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Wir definieren sie für Basisformen durch

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \wedge (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}) := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$$

Diese Multiplikation ist assoziativ, es gilt also

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

Es seien  $\omega_p, \tilde{\omega}_p$   $p$ -Formen. Dann gelten folgende

Rechenregeln:

- (1)  $(\omega_{p_1} + \tilde{\omega}_{p_1}) \wedge \omega_{p_2} = \omega_{p_1} \wedge \omega_{p_2} + \tilde{\omega}_{p_1} \wedge \omega_{p_2}$ .
- (2)  $\omega_{p_1} \wedge (\omega_{p_2} + \tilde{\omega}_{p_2}) = \omega_{p_1} \wedge \omega_{p_2} + \omega_{p_1} \wedge \tilde{\omega}_{p_2}$ .
- (3)  $(\omega_{p_1} \wedge \omega_{p_2}) \wedge \omega_{p_3} = \omega_{p_1} \wedge (\omega_{p_2} \wedge \omega_{p_3})$ .
- (4)  $\omega_{p_1} \wedge \omega_{p_2} = (-1)^{p_1 p_2} \omega_{p_2} \wedge \omega_{p_1}$ .
- (5)  $\omega_0 (\omega_{p_1} \wedge \omega_{p_2}) = (\omega_0 \omega_{p_1}) \wedge \omega_{p_2} = \omega_{p_1} \wedge (\omega_0 \omega_{p_2})$ .

**Beispiel 12.4.3:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:

1.  $\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1 = (w_1 \tilde{w}_2 - w_2 \tilde{w}_1) dx_1 \wedge dx_2 + (w_2 \tilde{w}_3 - w_3 \tilde{w}_2) dx_2 \wedge dx_3 + (w_3 \tilde{w}_1 - w_1 \tilde{w}_3) dx_3 \wedge dx_1$ .
2.  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (w_1 w_{23} + w_2 w_{31} + w_3 w_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .
3.  $\omega_1 \wedge \omega_3 = 0$ .
4.  $\omega_2 \wedge \tilde{\omega}_2 = 0$ .

**Der Differentiationsoperator  $d$ :** Die  $\omega$  seien nun bezüglich  $x$  stetig differenzierbar. Dann definieren wir für 0-Formen  $\omega_0 = w$

$$d\omega_0 := \sum_{i=1}^n \partial_i w dx_i.$$

Dabei ist  $\partial_i w$  die übliche Ableitung.  $d\omega_0$  ist eine 1-Form.

Entsprechend definiert man für eine  $p$ -Form  $\omega$  die Ableitung  $d\omega$  als  $(p+1)$ -Form, nämlich für ein beliebiges Monom

$$\omega = w dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

als

$$d\omega := dw \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Für

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} w_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

ist also

$$d\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_p} dw_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

$d$  nennt man „äußere Ableitung“.

**Beispiel 12.4.4:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:

1. Für eine 0-Form  $\omega$  ist:  $d\omega = (\partial_1 w) dx_1 + (\partial_2 w) dx_2 + (\partial_3 w) dx_3$ .

2. Für eine 1-Form  $\omega$  ist:

$$d\omega = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3) dx_3 \wedge dx_1.$$

3. Für eine 2-Form  $\omega$  ist:  $d\omega = (\partial_1 w_{23} + \partial_2 w_{31} + \partial_3 w_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

4. Für eine 3-Form  $\omega$  ist:  $d\omega = 0$ .

Rechenregeln für das Differenzieren: Es seien  $\omega_p, \tilde{\omega}_p$  wieder  $p$ -Formen. Dann gilt

$$(1) d(\omega_p + \tilde{\omega}_p) = d\omega_p + d\tilde{\omega}_p.$$

$$(2) d(\omega_0 \omega_p) = d\omega_0 \wedge \omega_p + \omega_0 d\omega_p.$$

$$(3) d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q.$$

$$(4) d(d\omega) = 0.$$

Diese Regeln kann man einzeln (für Monome) leicht bestätigen. Besonders Regel (4) ist wichtig. Hier ein kurzer Beweis: Für eine 0-Form ist

$$d(d\omega_0) = d \sum_{i=1}^n (\partial_i w) dx_i = \sum_{i,j=1}^n (\partial_j \partial_i w) dx_j \wedge dx_i = 0$$

wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen. Allgemeiner folgt für ein beliebiges Monom

$$\omega = w dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$d(d\omega) = d(dw \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \underbrace{d(dw)}_{=0} \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots) - dw \wedge \underbrace{d(dx_{i_1} \wedge \cdots)}_{=0} = 0.$$

**Der \*-Operator:** Jeder  $p$ -Form läßt sich eindeutig eine  $(n-p)$ -Form zuordnen,

$$\begin{aligned} * : \{p\text{-Formen}\} &\longrightarrow \{(n-p)\text{-Formen}\} \\ \omega &\longmapsto * \omega \end{aligned}$$

vermöge

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) := \varepsilon(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p}) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-p}}.$$

Dabei seien  $j_1 < \cdots < j_{n-p}$  und  $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p})$  eine Permutation der Zahlen  $(1, \dots, n)$ .

Dieser Operator wird auch „Hodge-Sternoperator“ genannt, nach WILLIAM HODGE (1903–1975). Speziell gilt mit  $\omega_0 = w$

$$*\omega_0 = w dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{und} \quad *(*\omega_0) = \omega_0.$$

Rechenregeln:  $\omega_p, \tilde{\omega}_p$  seien wieder  $p$ -Formen. Dann gilt

- (1)  $*(\omega_0 \omega_p) = \omega_0(*\omega_p)$ .
- (2)  $*(\omega_p + \tilde{\omega}_p) = *\omega_p + *\tilde{\omega}_p$ .
- (3)  $**\omega_p = (-1)^{p(n-p)}\omega_p$ .
- (4)  $\omega_p \wedge (*\tilde{\omega}_p) = \tilde{\omega}_p \wedge (*\omega_p)$ .
- (5)  $\omega_p \wedge \omega_{n-p} = (*\omega_p) \wedge (*\omega_{n-p})$ .

Auch diese Regeln bestätigt man durch Nachrechnen.

**Beispiel 12.4.5:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:

- 1. Für eine 1-Form  $\omega$  ist:  $*\omega = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2$ .
- 2. Für eine 2-Form  $\omega$  ist:  $*\omega = w_{23} dx_1 + w_{31} dx_2 + w_{12} dx_3$ .

**Das Skalarprodukt:** Es seien  $\omega, \tilde{\omega}$  Formen gleicher Stufe. Dann definiert man das Skalarprodukt von  $\omega, \tilde{\omega}$  (das innere Produkt) als:

$$\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle := *(\omega \wedge *\tilde{\omega}).$$

Wir verzichten auf den Nachweis der üblichen Eigenschaften dieses Skalarproduktes. Es sei

$$|\omega| := \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}.$$

Aus Regel 5 folgt  $(*\omega) \wedge (**\tilde{\omega}) = \omega \wedge *\tilde{\omega}$ , also

$$\langle *\omega, *\tilde{\omega} \rangle = \langle \omega, \tilde{\omega} \rangle \text{ und } |*\omega| = |\omega|.$$

**Beispiel 12.4.6:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:

- 1. Für 1-Formen  $\alpha$  und  $\beta$  ist

$$\alpha \wedge *\beta = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

also

$$\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- 2. Für 2-Formen  $\alpha$  und  $\beta$  ist

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle *\alpha, *\beta \rangle = a_{23} b_{23} + a_{13} b_{13} + a_{12} b_{12}.$$

**Im  $\mathbb{R}^3$  gilt in klassischer Notation:**

- $p = 0:$   $\omega = f \rightsquigarrow d\omega = (\nabla f, dx)$ .
- $p = 1:$   $\omega = \sum_i w_i dx_i =: (w, dx)$  mit  $w = (w_1, w_2, w_3)$ .
- $p = 2:$   $\omega = w_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \dots =: f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$  mit

$$f := \begin{pmatrix} w_{23} \\ w_{31} \\ w_{12} \end{pmatrix} \simeq *\omega.$$

Jeder 2-Form läßt sich also im  $\mathbb{R}^3$  durch den \*-Operator kanonisch ein Vektor zuordnen. Darauf beruht die Möglichkeit, im  $\mathbb{R}^3$  neben dem Skalarprodukt auch das „Kreuzprodukt“ (das äußere Produkt) zweier Vektoren zu definieren. Es seien nämlich  $\alpha = \sum_i a_i dx_i$  und  $\beta = \sum_i b_i dx_i$  zwei 1-Formen mit den Vektoren  $a$  und  $b$ . Dann definiert man

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix},$$

also mit  $k := a \times b$ ,  $\kappa := \sum_i k_i dx_i$

$$\kappa := *(a \wedge b).$$

Im  $\mathbb{R}^3$  ist  $p(n-p)$  für alle  $p$  gerade, also  $** = id$ . Es sei vorübergehend  $\mathcal{D}(X, Y)$  die Menge der differenzierbaren Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Dann ist  $\nabla : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ,  $f \mapsto \nabla f \simeq df$ . Ferner definiert man die folgenden Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \text{div} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ a &\longmapsto (\nabla a) \simeq *d*a \text{ mit } a := (a, dx) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{rot} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ a &\longmapsto (\nabla \times a) \simeq *d\alpha \quad \text{mit } \alpha := (a, dx). \end{aligned}$$

Es folgen leicht die klassischen Regeln

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= 0 \\ \text{div rot } a &= 0 \\ \text{div}(fa) &= (\nabla f, a) + f \text{ div } a \\ \text{rot}(fa) &= (\nabla f) \times a + f \text{ rot } a \\ \text{div}(a \times b) &= (\text{rot } a, b) - (a, \text{rot } b) \\ \text{div grad } f &= \sum_i \partial_i^2 f =: \Delta f \\ a \times (b \times c) &= (a, c)b - (a, b)c \\ \text{rot rot } a &= \text{grad div } a - \Delta a. \end{aligned}$$

### 12.4.1 Geschlossene und exakte Formen

Wie in §12.1.1 definieren wir nun:

**Definition 12.4.7:** Es sei  $\omega$  eine  $p$ -Form.

1.  $\omega$  heißt geschlossen:  $\iff \omega$  ist  $C_1$ -Form mit  $d\omega = 0$ .
2.  $\omega$  heißt exakt und  $\pi$  Stammform zu  $\omega$  :  $\iff$  es gibt eine  $(p-1)$ -Form  $\pi$  mit  $\omega = d\pi$ .

Es gilt

**Lemma 12.4.8:** Jede exakte  $C_1$ -Form ist geschlossen.

Das folgt unmittelbar aus  $dd\pi = 0$ . Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Ich erinnere an das Beispiel

$$\omega(x, \cdot) = -\frac{x_2}{|x|^2} dx_1 + \frac{x_1}{|x|^2} dx_2$$

in §12.1.1. Es war  $d\omega = 0$ , aber  $\omega$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht exakt.

Unser Ziel ist der Nachweis des folgenden Resultats:

**Poincarésches Lemma:** Jede in einer sternförmigen Menge  $U$  stetig differenzierbare geschlossene Form ist exakt.

Lokal entsprechen sich also die Begriffe geschlossen und exakt.

Beweis: O.B.d.A. sei  $U$  sternförmig bezüglich des Nullpunktes. Wir betrachten ein Monom

$$\omega(x, \dots) = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p.$$

Es seien  $x \in U$  und  $tx \in U$  für alle  $0 \leq t \leq 1$ . In  $\omega$  ersetzen wir nun  $x$  durch  $tx$  und bilden

$$\Omega : ([0, 1] \times U) \times (\mathbb{R}^{n+1})^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega(t, x, \dots) := a(tx) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p$$

mit  $dy_i := x_i dt + t dx_i$ . Wir erhalten also

$$\Omega(t, x, \dots) = t^p a(tx) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p + t^{p-1} a(tx) dt \wedge \sigma_{1\dots p}(x, \dots).$$

Dabei ist

$$\sigma_{1\dots p}(x, \dots) := x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \pm \dots = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p - dx_1 \wedge \sigma_{2\dots p}(x, \dots)$$

eine  $(p-1)$ -Form. Nun integrieren wir bezüglich  $t$  und bilden die  $(p-1)$ -Form

$$(I\omega)(x, \dots) := \left( \int_0^1 t^{p-1} a(tx) dt \right) \sigma_{1\dots p}(x, \dots).$$

Für beliebige  $p$ -Formen  $\omega$  wird  $I(\omega)$  analog definiert. Wir zeigen

$$I(d\omega) + d(I\omega) = \omega. \tag{*}$$

Wegen  $d\omega = 0$  folgt das Poincarésche Lemma aus Gl. (\*).

Wir zeigen nun Gl. (\*): Es ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^n (\partial_j a) dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

und

$$I(d\omega)(x, \dots) = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^p (\partial_j a(tx)) dt \right) \sigma_{j1\dots p}(x, \dots)$$

mit

$$\sigma_{j1\dots p}(x, \dots) = x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p - dx_j \wedge \sigma_{1\dots p}(x, \dots).$$

Aus

$$d\sigma_{1\dots p}(x, \dots) = p dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p,$$

erhalten wir

$$d(I\omega)(x, \dots) = p \left( \int_0^1 t^{p-1} a(tx) dt \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p + \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^p \partial_j a(tx) dt \right) dx_j \wedge \sigma_{1\dots p}(x, \dots).$$

Daraus folgt

$$(d(I\omega) + I(d\omega))(x, \dots) = \int_0^1 \left\{ p t^{p-1} a(tx) + \sum_{j=1}^n t^p x_j \partial_j a(tx) \right\} dt dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

Nun ist

$$\left\{ p t^{p-1} a(tx) + \sum_{j=1}^n t^p x_j \partial_j a(tx) \right\} = \frac{d}{dt} t^p a(tx),$$

also

$$(d(I\omega) + I(d\omega))(x, \dots) = a(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = \omega(x, \dots).$$

Das war zu zeigen. □

**Folgerung 12.4.9:** Es seien  $p \geq 2$  und  $\omega$  eine  $p$ -Form. Dann läßt sich jede Stammform  $\pi$  von  $\omega$  in der Form

$$\pi = I\omega + d\eta$$

mit einer  $C_2$ - $(p-2)$ -Form  $\eta$  darstellen. Im Falle  $p = 1$  ist

$$\pi = I\omega + \text{const.}$$

Beweis: Für  $i = 1, 2$  seien  $d\pi_i = \omega$ . Dann ist

$$d(\pi_2 - \pi_1) = 0.$$

Es existiert also (lokal) eine Stammform  $\eta$  mit

$$\pi_2 - \pi_1 = d\eta.$$

Im Falle  $p = 1$  ist die Behauptung klassisch.

**Beispiel 12.4.10:** Im  $\mathbb{R}^3$  gilt für  $p = 2$

$$\omega = w_{12} dx_1 \wedge dx_2 + w_{23} dx_2 \wedge dx_3 + w_{31} dx_3 \wedge dx_1.$$

Gesucht ist ein  $\pi$  mit  $d\pi \stackrel{!}{=} \omega$ , also  $\pi = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$  mit

$$d\pi = (\partial_1 p_2 - \partial_2 p_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 p_3 - \partial_3 p_2) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 p_1 - \partial_1 p_3) dx_3 \wedge dx_1 \stackrel{!}{=} \omega.$$

Im  $\mathbb{R}^3$  verwendet man auch

$$\alpha = * \omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 =: (a, dx),$$

also

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{23} \\ w_{31} \\ w_{12} \end{pmatrix}.$$

Mithin ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} \partial_1 p_2 - \partial_2 p_1 &\stackrel{!}{=} w_{12} \\ \partial_2 p_3 - \partial_3 p_2 &\stackrel{!}{=} w_{23} \\ \partial_3 p_1 - \partial_1 p_3 &\stackrel{!}{=} w_{31}, \end{aligned}$$

und die Integrabilitätsbedingung lautet

$$0 = d\omega = (\partial_1 w_{23} + \partial_2 w_{31} + \partial_3 w_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \iff 0 = *d*\alpha \iff 0 = \operatorname{div} a = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3.$$

In klassischer Notation lautet unser Gleichungssystem daher ( mit  $\pi =: (p, dx)$  )

$$\operatorname{rot} p \stackrel{!}{=} a, \quad \text{wobei } \operatorname{div} a = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (I\omega)(x, \dots) &= \\ &= \int_0^1 t w_{12}(tx) dt (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \int_0^1 t w_{23}(tx) dt (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \\ &+ \int_0^1 t w_{31}(tx) dt (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) = \left( x_3 \int_0^1 t w_{31}(tx) dt - x_2 \int_0^1 t w_{12}(tx) dt \right) dx_1 + \\ &+ \left( x_1 \int_0^1 t w_{12}(tx) dt - x_3 \int_0^1 t w_{23}(tx) dt \right) dx_2 + \left( x_2 \int_0^1 t w_{23}(tx) dt - x_1 \int_0^1 t w_{31}(tx) dt \right) dx_3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung erhält man dann durch

$$\pi = I\omega + d\eta$$

mit einer beliebigen 0-Form  $\eta$  oder

$$\pi = I\omega + (f', dx)$$

mit einer beliebigen  $C_1$ -Funktion  $f$ .

Es sei speziell

$$\omega(x, \dots) = x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 dx_2 \wedge dx_3 - 2x_2 dx_3 \wedge dx_1.$$

Dann ist  $a = (x_1, -2x_2, x_3)$  und  $\operatorname{div} a = 0$ . Die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} (I\omega)(x, \dots) &= \frac{x_3}{3}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \frac{x_1}{3}(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) - \frac{2x_2}{3}(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) \\ &= -x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_2 dx_3, \end{aligned}$$

also

$$p(x) = \begin{pmatrix} -x_2 x_3 \\ 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} + \nabla f(x)$$

mit einer beliebigen  $C_1$ -Funktion  $f$ .

## 12.5 Flächenintegrale

Wir setzen nun §12.1.2 fort und definieren analog zu den Kurvenintegralen auch Flächenintegrale. Es sei  $\Gamma$  eine  $C_1$ - $p$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , kurz eine „ $p$ -Fläche“, und

$$\gamma : T \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

eine Darstellung. Es sei  $\omega = \omega(x, h_1, \dots, h_p)$  eine  $p$ -Form. Dann definieren wir

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_T \omega(\gamma, \partial_1 \gamma, \dots, \partial_p \gamma)(t) dt.$$

$dt$  steht hier für das Lebesguesche Maß von  $T$  ( $dt \simeq d\mu(t) \simeq dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$ ).

Wir müssen als erstes zeigen, daß diese Definition nicht von der speziellen Darstellung abhängt. Es sei also wieder  $\varphi : \tilde{T} \rightarrow T$  und

$$\begin{aligned} \gamma &: T \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma} &: \tilde{T} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit äquivalenten  $\gamma, \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  und  $\det \varphi' > 0$ . Dann folgt

$$\int_{\tilde{T}} \omega(\tilde{\gamma}, \dots) = \int_{\tilde{T}} \omega(\gamma, \dots) \circ \varphi \cdot \det \varphi' = \int_T \omega(\gamma, \dots).$$

Das hat man nachzurechnen und dabei das Alternieren von  $\omega$  und die Transformationsformel zu benutzen.

Das Ergebnis läßt sich als Variablentransformation deuten. Wir wollen das noch etwas klarer herausstellen und allgemeiner fassen: Es sei

$$\begin{aligned} \Phi &: V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto x = \Phi(y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Wir machen keine Voraussetzung über den Rang der Jacobi-Matrix von  $\Phi$ . Es sei nun  $\omega$  eine  $p$ -Form auf  $U$ ,

$$\omega(x, \dots) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} w_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

In  $\omega$  setzen wir  $\Phi(y)$  ein, das heißt, wir ersetzen  $x$  durch  $\Phi(y)$  und  $dx_i$  durch

$$\sum_{j=1}^m (\partial_j \Phi_i)(y) dy_j$$

und erhalten auf diese Weise  $(\Phi^* \omega)(y, \dots)$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} \Phi &: V \longrightarrow U \\ \mathcal{A}(V) &\longleftarrow \mathcal{A}(U) : \Phi^*, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{A}(U)$  die Algebra der  $p$ -Formen in  $U$  bezeichnet.

Für 0-Formen  $\omega = w$  ergibt sich

$$\Phi^* \omega = w \circ \Phi$$

und für 1-Formen  $\omega = \sum_{i=1}^n w_i dx_i$

$$(\Phi^* \omega)(y, \dots) = \sum_{i=1}^n w_i(\Phi(y)) \left( \sum_{j=1}^m (\partial_j \Phi_i)(y) dy_j \right) = \sum_{j=1}^m a_j(y) dy_j$$

mit

$$a_j := \sum_{i=1}^n (w_i \circ \Phi) \partial_j \Phi_i.$$

Im Falle  $n = m = p$  erhält man als Bild von

$$\omega = w(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

die  $n$ -Form

$$\Phi^* \omega = (w \circ \Phi) \det \Phi' dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Für den Einsetzungsoperator  $\Phi^*$  gelten folgende Rechenregeln:

1.  $\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^* \omega_1 + \Phi^* \omega_2$ .
2.  $\Phi^*(f\omega) = (\Phi^* f) \cdot \Phi^* \omega$  für 0-Formen  $f$ .
3.  $\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^* \omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2$ .

Nützlich ist der folgende Satz:

**Satz 12.5.1:** Es seien  $\Phi \in C_2(V, U)$  und  $\omega$  eine  $C_1$ - $p$ -Form in  $U$ , dann gilt

$$d(\Phi^* \omega) = \Phi^*(d\omega).$$

Beweis: Für 0-Formen  $f$  gilt  $df = \sum_{i=1}^n \partial_i f dx_i$ , also

$$\Phi^*(df) = \sum_{i=1}^n ((\partial_i f) \circ \Phi) \cdot \sum_{j=1}^m \partial_j \Phi_i dy_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n ((\partial_i f) \circ \Phi) \partial_j \Phi_i \right) dy_j.$$

Nun liefert die Kettenregel

$$\partial_j(f \circ \Phi) = \sum_{i=1}^n ((\partial_i f) \circ \Phi) \partial_j \Phi_i.$$

Es ist also

$$\Phi^*(df) = \sum_{j=1}^m \partial_j(f \circ \Phi) dy_j = d(\Phi^* f).$$

Für spezielle 1-Formen der Gestalt  $\omega = dx_i$  ist  $d\omega = 0$ . Wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen gilt auch hier

$$d(\Phi^* \omega) = - \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \partial_k \partial_j \Phi_i dy_j \right) \wedge dy_k = 0.$$

Für Basisformen höherer Stufe  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$  folgt das Resultat dann aus Regel 3. Wir haben daher nur noch zu zeigen: Gilt die Behauptung für irgendein  $\omega$ , so gilt sie auch für  $f\omega$ . Das sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} d(\Phi^*(f\omega)) &= d(\Phi^* f \cdot \Phi^* \omega) = d(\Phi^* f) \wedge \Phi^* \omega + \Phi^* f \cdot d(\Phi^* \omega) \\ &= \Phi^*(df) \wedge \Phi^* \omega + \Phi^* f \cdot \Phi^*(d\omega) \\ &= \Phi^*(df \wedge \omega) + \Phi^*(fd\omega) = \Phi^*(df \wedge \omega + fd\omega) = \Phi^*(d(f\omega)). \end{aligned}$$

□

Ist nun speziell  $m = n$  und  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, dann bildet  $\Phi^*$  die Algebra  $\mathcal{A}(U)$  isomorph auf  $\mathcal{A}(V)$  ab.

Betrachten wir nun wieder unsere Ausgangssituation

$$\gamma : T \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

$\omega$  sei eine  $p$ -Form. Dann ist auch  $\gamma^* \omega$  eine  $p$ -Form und läßt sich als

$$(\gamma^* \omega)(t, \dots) = \omega(\gamma(t), \dots) =: f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p$$

schreiben, mit  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ . Für ein Monom

$$\omega(x, \dots) = w(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

ist

$$\begin{aligned} f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p &= w(\gamma(t)) \left( \sum_{j=1}^p (\partial_j \gamma_1)(t) dt_j \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{j=1}^p (\partial_j \gamma_p)(t) dt_j \right) \\ &= \omega(\gamma, \partial_1 \gamma, \dots, \partial_p \gamma)(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p. \end{aligned}$$

Das rechne man nach. Damit wird aus dem Flächenintegral

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\gamma^{-1}(\Gamma)} \gamma^* \omega = \int_T f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p =: \int_T f(t) dt.$$

**Beispiel 12.5.2:** Es seien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  die obere Halbsphäre und

$$\omega(x, \dots) = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Zur Berechnung des Flächenintegrals  $\int_{\Gamma} \omega$  wählen wir  $T := \{(t_1, t_2) \mid |t| \leq 1\}$  und

$$\gamma(t) = (t_1, t_2, \sqrt{1 - |t|^2}).$$

Dann ist

$$\partial_1 \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -t_1 / \sqrt{1 - |t|^2} \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -t_2 / \sqrt{1 - |t|^2} \end{pmatrix}$$

und

$$dx_i \wedge dx_j = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_k \gamma_i)(\partial_l \gamma_j) dt_k \wedge dt_l = \{(\partial_1 \gamma_i)(\partial_2 \gamma_j) - (\partial_2 \gamma_i)(\partial_1 \gamma_j)\} dt_1 \wedge dt_2,$$

also mit  $dt := dt_1 \wedge dt_2$

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 &= dt \\ dx_2 \wedge dx_3 &= (t_1 / \sqrt{1 - |t|^2}) dt \\ dx_3 \wedge dx_1 &= (t_2 / \sqrt{1 - |t|^2}) dt. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f(t) = \frac{t_1^2}{\sqrt{1 - |t|^2}} + \frac{t_2^2}{\sqrt{1 - |t|^2}} + \sqrt{1 - |t|^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - |t|^2}},$$

also

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_T \gamma^* \omega = \int_T \frac{dt}{\sqrt{1 - |t|^2}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r d\varphi dr}{\sqrt{1 - |r|^2}} = 2\pi.$$

□

In §12.1.2 hatten wir das Flächenmaß von  $\Gamma$  als

$$A(\Gamma) = \int_T \sqrt{\det g(t)} dt$$

definiert. Dabei war  $g$  die Gramsche Matrix von  $\gamma$ , also

$$(g_{ij}) = ((\partial_i \gamma, \partial_j \gamma)).$$

$A(\Gamma)$  hängt nicht von der speziellen Darstellung ab. Das legt es nahe, den Integranden als

$$dA(t) := \sqrt{\det g(t)} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p = \sqrt{\det g(t)} dt$$

zu schreiben. Dies ist die klassische Notation. Dann ist also

$$A(\Gamma) = \int_T dA,$$

und mit  $(\gamma^* \omega)(t, \dots) = f(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p$  sowie

$$F(t) := \frac{f(t)}{\sqrt{\det g(t)}}$$

wird

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_T F(t) dA(t).$$

Im Falle  $p = 1$  schreibt man statt  $dA$  meist  $ds$  (Bogenlänge) und im Falle eines beliebigen  $p$  im Deutschen  $do$ ,  $dO$  oder  $dF$  (Oberfläche) und im Englischen  $dS$  (surface).  $dV$  steht für das Lebesguesche Volumenmaß im  $\mathbb{R}^p$ . Es sei darauf hingewiesen, daß man auf diese Weise auch  $p$ -Flächenintegrale für Funktionen  $F$  erklären kann, die nicht in der angegebenen Weise aus einer  $p$ -Form  $\omega$  entstehen, nämlich

$$\int_{\Gamma} F = \int_T F \circ \gamma dA.$$

In unserem Beispiel ist

$$\det g(t) = \frac{1}{1 - |t|^2},$$

also

$$dA(t) = \frac{dt_1 \wedge dt_2}{\sqrt{1 - |t|^2}}.$$

Ferner hatten wir

$$(\gamma^*\omega)(t, \dots) = \frac{1}{\sqrt{1-|t|^2}} dt_1 \wedge dt_2.$$

In diesem Falle ist also  $F(t) = 1$  oder

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_T \gamma^*\omega = \int_T dA = 2\pi.$$

Für die  $S^2$  erhält man daraus analog

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi.$$

## 12.6 Die Integralsätze von Gauß und Stokes

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels, nämlich dem Gaußschen Satz, der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Dabei soll  $\Gamma$  wieder eine  $C_{1-p}$ -Untermannigfaltigkeit sein mit dem Rand  $\partial\Gamma$  und  $\omega$  eine  $(p-1)$ -Form. Bevor wir den Satz präziser formulieren, müssen wir kurz über berandete Mannigfaltigkeiten sprechen und, damit zusammenhängend, über die Orientierung des Randes.

Wir gehen wie in §12.1 vor. Dort betrachteten wir Karten

$$h : U \subset X \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir lassen nun auch „berandete Karten“ zu, also homöomorphe Abbildungen

$$h : U \subset X \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$$

und (zum Beispiel)

$$h : U \subset X \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$$

mit  $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$  und relativ  $X$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  offenen  $U, U'$ . Wir lassen also auch Abbildungen auf einen Halbraum zu. Entsprechend definiert man wieder einen Atlas und kommt damit zur berandeten Mannigfaltigkeit. Die Menge  $\partial M$  der Randpunkte heißt Rand der berandeten Mannigfaltigkeit.

Es sei hervorgehoben, daß wir in den letzten Abschnitten immer  $C_l$ -Untermannigfaltigkeiten zugrundegelegt haben, mit  $l \geq 1$ . Hier tritt eine Schwierigkeit auf, denn ein Homöomorphismus  $h$  ist ja nur aus  $C_0$ , und wir können  $h$  im allgemeinen nicht aus  $C_l$  (bis zum Rande!) wählen. Denken Sie an ein Quadrat; sie können es lokal nicht  $C_1$ -geradebiegen. Für die Formulierung des Gaußschen Satzes bedeutet das, daß man sehr genau angeben muß, welche Singularitäten am Rande (Ecken, Kanten, Spitzen) man im einzelnen zulassen will, und man muß die Beweise entsprechend führen. Leichter hat man es mit „glatt berandeten“ Mannigfaltigkeiten, also  $C_l$ -Mannigfaltigkeiten bis zum Rand. Es sind viele Arbeiten geschrieben worden, in denen versucht wird, den Gaußschen Satz für Gebiete mit möglichst irregulären Rändern zu beweisen. Hierauf kann ich in dieser Vorlesung aber nicht weiter eingehen.

Wir verabreden noch, daß der Tangentialraum  $T_p M$  in Randpunkten  $p \in \partial M$  wie in inneren Punkten erklärt wird.

Doch nun zur Orientierung: Eine Mannigfaltigkeit wird dadurch orientiert, daß man jeden ihrer Tangentialräume orientiert, aber so, daß die Orientierungen sich vertragen und nicht plötzlich umschlagen.

**Definition 12.6.1:** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Familie  $\{or_p\}_{p \in M}$  von Orientierungen ihrer Tangentialräume  $T_p M$  lokal verträglich, wenn sich um jeden Punkt von  $M$  eine orientierungserhaltende Karte finden läßt, also eine Karte  $(U, h)$  mit

$$\forall p \in U \quad h'(p) : T_p M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n.$$

Wir übernehmen also die Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ . Unter einer Orientierung von  $M$  verstehen wir eine lokal verträgliche Familie  $\{or_p\}_{p \in M}$  von Orientierungen ihrer Tangentialräume. Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M, or)$ , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Orientierung  $or$  von  $M$ . Wir sprechen auch von orientierungserhaltenden Diffeomorphismen

$$f : M \xrightarrow{\cong} \tilde{M},$$

denken Sie an  $\varphi : \tilde{T} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow T \subset \mathbb{R}^p$  mit  $\det \varphi' > 0$  im letzten Abschnitt. Man spricht dann von positiver Orientierung.

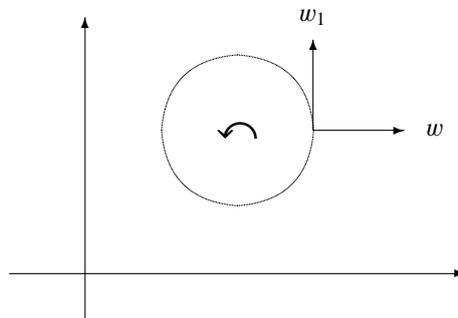
Für berandete Mannigfaltigkeiten wird die Orientierung ebenso definiert. Man sieht leicht, daß der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit  $M$  jedenfalls orientierbar ist, was aber nicht bedeutet, daß  $\partial M$  auch schon kanonisch orientiert sei. Wir verabreden vielmehr eine

**Orientierungskonvention:** Es seien  $M$  eine orientierte  $n$ -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit,  $p \in \partial M$  und  $(w_1, \dots, w_{n-1})$  eine Basis von  $T_p \partial M$ . Dann heißt diese Basis „positiv orientiert“, wenn für einen (und damit für jeden) nach außen weisenden Vektor  $w$  die Basis  $(w, w_1, \dots, w_{n-1})$  von  $T_p M$  positiv orientiert ist.

Im folgenden sei  $\partial M$  immer positiv orientiert. Das „nach außen weisen“ ist ganz anschaulich gemeint. Präziser: Es seien  $T_p^\pm M := h'(p)^{-1}(\mathbb{R}_\pm^n)$ . Dann ist

$$T_p \partial M \subset T_p M \quad \text{und} \quad T_p^+ M \cap T_p^- M = T_p \partial M.$$

Die Elemente von  $T_p^+ M \setminus T_p \partial M$  heißen nach außenweisend. Weitere Einzelheiten finden Sie in *Barner & Flohr*, l.c. S.387 und *Jänich*, l.c. S.73.



Wir zeigen nun:

**Gaußscher Integralsatz:** Es seien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte  $n$ -dimensionale glatt berandete  $C_1$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine  $(n - 1)$ -Form auf  $\Gamma$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial \Gamma} \omega.$$

Dabei bedeutet

$$\int_{\partial \Gamma} \omega := \int_{\partial \Gamma} i^* \omega,$$

$i : \partial \Gamma \hookrightarrow \Gamma$  ist die Inklusion. Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Wir benutzen dabei eine „Partition der Eins“ nach Satz 12.6.2, den wir anschließend beweisen.

1. Es seien  $\Gamma = \mathbb{R}_+^n$  ein Halbraum und für  $j = 1, \dots, n$

$$\omega_j(x, \dots) = w_j \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

ein Monom der Stufe  $(n - 1)$ . Dann ist

$$d\omega_j = (-1)^{j-1} (\partial_j w_j) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und

$$i^* \omega_j = \begin{cases} (i^* w_j) \cdot dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} d\omega_j &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (-1)^{j-1} (\partial_j w_j) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ \int_{\partial \Gamma} \omega_j &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_j(0, x_2, \dots) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{für } j = 1, \text{ Null sonst.} \end{aligned}$$

Dies sind gewöhnliche Mehrfachintegrale, und die Behauptung folgt durch partielles Integrieren.

2. Beweis für ein Kartengebiet: Es seien  $(U, h)$  eine Karte von  $\Gamma$  und  $\text{supp } \omega \subset U$  (ein berandetes  $U$  ist zugelassen). Dann gilt

$$\int_U d\omega = \int_{h(U)} (h^{-1})^* d\omega = \int_{h(U)} d((h^{-1})^* \omega).$$

Wir setzen nun  $(h^{-1})^* \omega$  durch Null außerhalb  $h(U)$  zu einer Form  $\tilde{\omega}$  auf  $\mathbb{R}^n$  fort. Das ist möglich wegen der Kompaktheit des Trägers

$$\text{supp}(h^{-1})^* \omega = h(\text{supp } \omega).$$

Es folgt

$$\int_U d\omega = \dots = \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\omega} = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \tilde{\omega} = \int_{h(\partial U)} (h^{-1})^* \omega = \int_{\partial U} \omega,$$

letzteres aus der Transformationsformel für den Einsetzungsoperator.

3. Allgemeiner Fall: Wir wollen nun  $\omega$  in eine Summe

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_r$$

differenzierbarer  $(n-1)$ -Formen zerlegen mit  $\text{supp } \omega_i \subset U_i$ , einem passenden Kartengebiet. Wenn das möglich ist, ist der Gaußsche Satz bewiesen. Solche Zerlegungen verwendet man in der Analysis oft. Man bezeichnet sie als „Zerlegung der Eins“ oder „Partition der Eins“. Halten wir unsere Situation fest: Es sei  $X := \text{supp } \omega \Subset \mathbb{R}^n$ . Zu jedem  $x \in X$  gibt es eine Karte  $(U_x, h_x)$  mit relativ  $X$  offenem  $U_x$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es endlich viele Kugeln  $B_1, \dots, B_r$ , die  $X$  überdecken, und für die  $B_j \cap X$  jeweils in einem Kartengebiet liegt. Es gilt also

$$X \subset \bigcup_{i=1}^r B_i =: B,$$

und die Behauptung folgt dann mit

$$\omega_i := f_i \cdot \omega$$

aus folgendem Satz:

**Satz 12.6.2:** Es seien  $B_1, \dots, B_r$  offene Kugeln in  $\mathbb{R}^n$  und  $B := \bigcup_{i=1}^r B_i$ . Dann gibt es  $f_i \in C_\infty(B)$  mit

1.  $\text{supp } f_i \subset \overline{B_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$
2.  $f_i|_{B_i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, r$
3.  $f_1(x) + \dots + f_r(x) = 1$  für  $x \in B$ .

Beweis: Es sei mit  $B_i = B(x_i, r_i)$

$$h_i(x) := \begin{cases} \exp\left(1/(|x-x_i|^2 - r_i^2)\right) & \text{für } |x-x_i| < r_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $\text{supp } h_i \subset \overline{B_i}$  und

$$0 < h_i(x) \quad \text{für } x \in B_i,$$

also

$$\forall x \in B \quad 0 < h(x) := \sum_{i=1}^r h_i(x).$$

Wählen wir nun für  $x \in B$

$$f_i(x) := \frac{h_i(x)}{h(x)},$$

dann leisten die Funktionen  $f_i$  das gewünschte. □

**Bemerkung:** Es sei noch einmal an die einleitend gemachten Bemerkungen bezüglich der Glattheit von  $\partial\Gamma$  erinnert. Im allgemeinen ist es nicht nötig,  $\Gamma$  als  $C_1$ -Mannigfaltigkeit vorauszusetzen (bis zum Rand). Zum Beispiel läßt sich der Gaußsche Satz leicht elementar für Quader oder Halbkugeln beweisen. Damit gilt er dann für eine große Klasse stückweise glatt berandeter Gebiete.

Die zum Gaußschen Satz analoge Aussage für  $p$ -Formen wird meist nach GEORGE STOKES, 1819–1903, benannt. Sie lautet:

**Stokesscher Integralsatz:** Es seien  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte glatt berandete  $C_1$ - $p$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine  $(p-1)$ -Form auf  $\Gamma$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Der Beweis erfolgt analog.

**Folgerung 12.6.3:** Wir betrachten geschlossene Formen und Mannigfaltigkeiten:

1. Es sei  $\omega$  geschlossen, also  $d\omega = 0$ , dann gilt

$$\int_{\partial\Gamma} \omega = 0.$$

Es sei  $p = 1$ : In jede geschlossene Kurve  $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$  lasse sich ein Flächenstück  $M \subset U$  einspannen. Dann folgt aus  $d\omega = 0$  mit  $\partial M = \Gamma$

$$\forall \Gamma \quad \int_{\Gamma} \omega = 0$$

und damit  $\omega = df$ .

2. Wir nennen  $\Gamma$  „geschlossen“, wenn  $\partial\Gamma = \emptyset$  ist. Zum Beispiel ist die Sphäre geschlossen. Es sei  $\Gamma$  geschlossen. Dann folgt

$$\int_{\Gamma} d\omega = 0.$$

## 12.7 Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

In diesem Abschnitt spezialisieren wir die erhaltenen Ergebnisse auf den  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  und verwenden die dort üblichen klassischen Bezeichnungen.

**Der zweidimensionale Fall:** Es sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und

$$\omega = w_1 dx_1 + w_2 dx_2$$

eine 1-Form. Dann ist

$$d\omega = (-\partial_2 w_1 + \partial_1 w_2) dx_1 \wedge dx_2.$$

Es sei

$$w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt mit  $\text{rot} := *d$

$$\text{rot } w = \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1,$$

und es ist in der klassischen Darstellung von  $\partial\Gamma$  ( $\gamma : T \rightarrow \partial\Gamma$ )

$$\gamma^* \omega = \omega(\gamma, \gamma') = (w, t) ds$$

mit dem Bogenelement  $ds = |\gamma'(\tau)| d\tau$  und dem Tangentialvektor

$$t = \frac{1}{|\gamma'|} \gamma'.$$

Der Gaußsche Satz lautet dann:

$$\int_{\Gamma} \text{rot } w = \int_{\partial\Gamma} (w, t) ds.$$

Dabei habe ich unter dem rechten Integral salopp  $\partial\Gamma$  statt  $\gamma^{-1}(\partial\Gamma)$  geschrieben. Ich werde in diesem Abschnitt weiter so verfahren. Das Integral

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (w, t) ds$$

liefert die Arbeit längs  $\partial\Gamma$  von  $\gamma(a)$  bis  $\gamma(b)$ . Ist  $\Gamma \subset U$ ,  $U$  einfach zusammenhängend, und  $\text{rot } w = 0$ , dann ist  $\omega = df$ , also

$$w = \nabla f.$$

Man wähle nur

$$f(x) = \int_0^{x_1} w_1(s, 0) ds + \int_0^{x_2} w_2(x_1, s) ds.$$

Mit  $\omega$  ist auch  $*\omega$  eine 1-Form. Es gilt also auch

$$\int_{\Gamma} d*\omega = \int_{\partial\Gamma} *\omega.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} *\omega &= -w_2 dx_1 + w_1 dx_2 \\ d*\omega &= (\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2) dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

und es folgt mit  $\operatorname{div} := *d*$  und dem Normalenvektor

$$n := \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} w = \int_{\partial\Gamma} (w, n) ds.$$

$n$  ist nach außen gerichtet, es ist

$$\det(n, t) = \begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ -t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Das Integral

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} (w, n) ds$$

liefert den Fluß durch  $\partial\Gamma$  von  $\gamma(a)$  bis  $\gamma(b)$ . Ist  $U$  wieder einfach zusammenhängend, dann ist der Fluß vom Wege unabhängig, wenn  $\operatorname{div} w$  verschwindet. Dann ist  $*\omega = df$ , also

$$\omega = -*df$$

oder

$$w = -\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{pmatrix}.$$

Mit  $\omega = f$ ,  $d\omega = (\partial_1 f) dx_1 + (\partial_2 f) dx_2$  folgt aus dem Stokesschen Satz für Kurven  $\Gamma$  unser altes Resultat

$$\int_{\Gamma} (\nabla f, t) ds = \int_{\partial\Gamma} f.$$

**Der dreidimensionale Fall:** Es seien jetzt  $\Gamma$  eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\omega = w_{12} dx_1 \wedge dx_2 + w_{23} dx_2 \wedge dx_3 + w_{31} dx_3 \wedge dx_1.$$

Dann ist

$$d\omega = (\partial_1 w_{23} + \partial_2 w_{31} + \partial_3 w_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

und

$$*\omega = w_{23} dx_1 + w_{31} dx_2 + w_{12} dx_3.$$

Es sei

$$v := (w_{23}, w_{31}, w_{12}).$$

Dann ist

$$\operatorname{div} v = *d**\omega = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3,$$

und aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} v dV = \int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Das letzte Integral wollen wir parameterabhängig schreiben. Mit

$$n := \frac{\partial_1 \gamma \times \partial_2 \gamma}{|\partial_1 \gamma \times \partial_2 \gamma|}$$

und  $|a, b, c| = a(b \times c)$  ist  $\det(n, \partial_1 \gamma, \partial_2 \gamma) > 0$ , und man rechnet

$$|\partial_1 \gamma \times \partial_2 \gamma| = \sqrt{\det g}$$

nach. Wir bilden  $\gamma^* \omega$ : Es geht  $dx_1 \wedge dx_2$  über in

$$(\partial_1 \gamma_1 dt_1 + \partial_2 \gamma_1 dt_2) \wedge (\partial_1 \gamma_2 dt_1 + \partial_2 \gamma_2 dt_2) = (\partial_1 \gamma_1 \cdot \partial_2 \gamma_2 - \partial_2 \gamma_1 \cdot \partial_1 \gamma_2) dt_1 \wedge dt_2 = n_3 dA$$

mit  $dA = \sqrt{\det g} dt_1 \wedge dt_2$ . Analog berechnen sich die anderen Komponenten, und man erhält

$$\gamma^* \omega = (v, n) dA,$$

also wie im  $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} v dV = \int_{\partial \Gamma} (v, n) dA.$$

Diese Formel gilt auch im  $\mathbb{R}^n$ .

**Folgerung 12.7.1:** Wählt man für  $v$  der Reihe nach

$$(f, 0, 0), \quad (0, f, 0), \quad (0, 0, f),$$

dann erhält man für  $i = 1, 2, 3$

$$\int_{\Gamma} \partial_i f dV = \int_{\partial \Gamma} n_i f dA$$

oder

$$\int_{\Gamma} \nabla f dV = \int_{\partial \Gamma} n f dA.$$

Das sind die klassischen Formeln für den Gaußschen Satz. Sie gelten im  $\mathbb{R}^n$  analog. Mit  $U, V \in C_2$  folgen daraus die „Greenschen Formeln“. Man erhält nämlich mit  $v = U \nabla V$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} v = \int_{\Gamma} \{(\nabla U)(\nabla V) + U \Delta V\} = \int_{\partial \Gamma} U (n, \nabla V),$$

also mit  $\frac{\partial}{\partial n} V := (n, \nabla V)$

$$\int_{\partial \Gamma} U \frac{\partial V}{\partial n} = \int_{\Gamma} \{(\nabla U)(\nabla V) + U \Delta V\}$$

und

$$\int_{\partial \Gamma} \left\{ U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right\} = \int_{\Gamma} \{U \Delta V - V \Delta U\}.$$

Die Formel für das partielle Integrieren lautet nun

$$\int_{\Gamma} f (\partial_i g) = - \int_{\Gamma} (\partial_i f) g + \int_{\partial \Gamma} n_i f g.$$

Wir wollen auch den Stokesschen Satz klassisch formulieren. Es seien jetzt  $\Gamma$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit und  $\omega$  eine 1-Form,

$$\omega = w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3.$$

Dann ist

$$d\omega = (\operatorname{rot} w)_3 dx_1 \wedge dx_2 + (\operatorname{rot} w)_1 dx_2 \wedge dx_3 + (\operatorname{rot} w)_2 dx_3 \wedge dx_1$$

mit

$$w := (w_1, w_2, w_3) \text{ und } \operatorname{rot} w := (\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2, \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3, \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1).$$

Deshalb ist

$$\gamma^* d\omega = (\operatorname{rot} w, n) dA,$$

und es folgt

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{rot} w, n) dA = \int_{\partial \Gamma} (w, t) ds.$$

Für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten erhält man wieder

$$\int_{\Gamma} (\nabla f, t) = \int_{\partial \Gamma} f.$$

**Beispiel 12.7.2:**

1. Es sei  $B = B(0, r)$ . Dann folgt

$$\int_{\partial B} x \, dA = r \int_{\partial B} n \, dA = r \int_B \nabla 1 = 0.$$

2. Im  $\mathbb{R}^k$  ist  $\operatorname{div} x = k$ , und es folgt

$$k \mu(\Gamma) = \int_{\Gamma} \operatorname{div} x = \int_{\partial \Gamma} (n, x) \, dA.$$

Speziell für  $\Gamma = B = B(0, r)$  folgt also

$$k \mu(B) = r \mu(\partial B).$$

und für  $k = 3$

$$\mu(B) = \frac{r}{3} \mu(\partial B) = \frac{4\pi}{3} r^3,$$

man vergleiche Beispiel 12.5.2.

## 12.8 Anwendungen

Aus der Fülle möglicher Anwendungen greife ich nun drei heraus, nämlich den Fundamentalsatz der Algebra, den Brouwerschen Fixpunktsatz und eine Aussage über Flächenfelder.

### 12.8.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Es seien  $n \geq 1$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wir zeigen

**Lemma 12.8.1:**  $P_n$  besitzt eine Nullstelle.

Beweis: Wir zerlegen  $P_n$  in seinen Real- und Imaginärteil,

$$P_n(z) = v_1(z) + i v_2(z),$$

und betrachten das Vektorfeld  $v := (v_1, v_2)$ . Es sei  $C$  eine geschlossene Kurve und  $v \neq 0$  auf  $C$ . Dann heißt

$$I(v, C) := \frac{1}{2\pi} \oint_C df$$

der Index von  $v$  in Bezug auf  $C$ . Dabei ist

$$f := \arctan \frac{v_2}{v_1}, \quad df = \frac{1}{|v|^2} (v_1 dv_2 - v_2 dv_1).$$

Beispielsweise ist für  $C = \partial B(0, 1)$  und  $v = r^2(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$

$$I(v, C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\arctan \tan 2\varphi) = 2.$$

Anschaulich:  $I$  ist die Änderung des Winkels, den das Vektorfeld  $v$  mit einer festen Richtung bildet, bei einmaligem Umlauf längs  $C$  entgegen dem Uhrzeigersinn.

Es sei nun  $C = \partial B(0, r)$ . Wir benutzen Polarkoordinaten und berechnen  $I(v, C)$  für große und kleine  $r$ : Zunächst sei  $r$  groß. Dann ist

$$v = r^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi \left\{ 1 + \frac{1}{r}[\cdots] \right\} \\ \sin n\varphi \left\{ 1 + \frac{1}{r}[\cdots] \right\} \end{pmatrix},$$

und wir erhalten für  $r \rightarrow \infty$

$$\frac{v_2}{v_1}(r, \varphi) = \tan n\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

sowie

$$f(r, \varphi) = n\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Es folgt

$$\int_C df = \int_C (t, \nabla f) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi) d\varphi,$$

also für  $r \rightarrow \infty$

$$I(v, \partial B(0, r)) = n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Es sei nun  $P_n(z) \neq 0$  für alle  $z$ . Dann ist insbesondere  $a_0 \neq 0$ , und wir erhalten für  $r \rightarrow 0$

$$v = a_0 + \mathcal{O}(r)$$

und mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$df = c_1(1 + r[\dots])dr + c_2(1 + r[\dots])rd\varphi,$$

also

$$\lim_{r \rightarrow 0} I(v, \partial B(0, r)) = 0.$$

Weil wir  $v \neq 0$  angenommen haben, ist  $I(v, \partial B(0, r))$  in  $r$  stetig, und es ist  $I \in \mathbb{Z}$ . Mithin ist  $I$  konstant. Das steht im Widerspruch zu

$$\lim_{r \rightarrow 0} I(v, \partial B(0, r)) = 0 \neq n = \lim_{r \rightarrow \infty} I(v, \partial B(0, r)).$$

Aus dem Lemma folgt dann der

**Fundamentalsatz der Algebra:**  $P_n$  hat genau  $n$  Nullstellen.

Beweis: Aus Lemma 12.8.1 folgt die Existenz einer Nullstelle  $z_1 \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(z) - P_n(z_1) = a_1(z - z_1) + \dots + (z^n - z_1^n) \\ &= (z - z_1)\{a_1 + \dots\} = (z - z_1)P_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Letzteres wegen

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + z_1^{k-1}).$$

Nun hat  $P_{n-1}(z)$  wieder eine Nullstelle. Man kann also auf diese Weise fortfahren und erhält schließlich

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

### 12.8.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wie wir schon gesehen haben, spielen Fixpunktsätze in der Analysis eine große Rolle. Wir wollen nun einen weiteren Satz dieser Art herleiten. Er ist nach LUITZEN BROUWER, 1881–1966, benannt. Im folgenden soll  $u \in C_2(\bar{G}, W)$  bedeuten, daß es eine offene Obermenge  $U$  von  $\bar{G}$  gibt, in der  $u$  erklärt und zweimal stetig differenzierbar ist. Wir zeigen dann der Reihe nach:

1. Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet. Dann gibt es keine glatte Retraktion von  $\bar{G}$  auf seinen Rand, das heißt, es gibt kein  $f \in C_2(\bar{G}, \partial G)$  mit  $f(x) = x$  für  $x \in \partial G$ , also

$$f|_{\partial G} = id.$$

2. Es seien  $B := B(0, 1)$ ,  $v \in C_2(\bar{B}, \bar{B})$  und

$$\forall x \in \partial B \quad v(x) \neq 0 \text{ und } \frac{v(x)}{|v(x)|} = x.$$

Dann hat  $v$  eine Nullstelle in  $B$ .

3.  $v \in C_2(\bar{B}, \bar{B})$  besitzt einen Fixpunkt.
4. Zur Aussage 3 genügt bereits die Voraussetzung  $v \in C(\bar{B}, \bar{B})$ . Es gilt also:

**Der Brouwersche Fixpunktsatz:** Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel in sich besitzt einen Fixpunkt.

5. Dieses Resultat gilt auch für zu  $\bar{B}$  homöomorphe Gebiete.  
 6. Es gibt keine stetige Retraktion der Kugel auf ihren Rand.

Beweis:

1. Wir schließen indirekt: Es sei  $f$  eine solche Abbildung und für  $0 \leq t \leq 1$

$$g(x, t) := x + t(f(x) - x).$$

Wir haben also  $id$  und  $f$  stetig miteinander verbunden. Für  $x \in \partial G$  gilt auch  $g(x, t) = x$ . Es seien

$$dg_i := \sum_{j=1}^n (\partial_j g_i) dx_j = dx_i + t(df_i - dx_i)$$

und

$$F(t) := \int_G dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n.$$

$F(t)$  ist ein Polynom in  $t$  vom Grade  $\leq n$ . Es ist

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^n \int_G dg_1 \wedge \cdots \wedge (df_i - dx_i) \wedge \cdots \wedge dg_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_G (df_i - dx_i) \wedge \{dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{i-1} \wedge dg_{i+1} \wedge \cdots \wedge dg_n\} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_G d((f_i - x_i) \{ \cdots \}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\partial G} \underbrace{(f_i - x_i)}_{=0} \{ \cdots \} = 0. \end{aligned}$$

Mithin ist  $F(t)$  konstant. Nun ist

$$F(0) = \int_G dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \mu(G) > 0.$$

Es gilt also für alle  $t \in [0, 1]$

$$F(t) = \mu(G) > 0,$$

also auch  $F(1) > 0$ . Nun folgt aber ein Widerspruch: Für  $x \in G$  ist

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = (\det f') dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0,$$

also

$$F(1) = \int_G df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = 0.$$

Wäre nämlich für ein  $x_0 \in G$   $\det f'(x_0) \neq 0$ , dann würde es eine Umgebung  $U(x_0) \subset G$  geben, die auf eine offene Umgebung von  $f(x_0)$  abgebildet wird (Satz 9.7.1 von der lokalen Umkehrbarkeit). Das steht im Widerspruch zu  $f : G \rightarrow \partial G$ .

2. Angenommen,  $v$  habe keine Nullstelle in  $B$ . Dann wäre

$$f(x) := \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

eine glatte Retraktion von  $B$  auf  $\partial B$ .

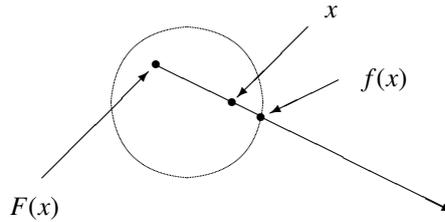
3. Indirekt,  $F \in C_2(\bar{B}, \bar{B})$  habe keinen Fixpunkt, es sei also

$$\forall x \in \bar{B} \quad F(x) \neq x.$$

Dann existiert für alle  $x \in \bar{B}$  die Verbindungsgerade durch  $F(x)$  und  $x$ . Die von  $x$  ausgehende Halbgerade mit dem Richtungsvektor

$$x - F(x)$$

schneide  $\partial B$  in  $f(x)$ . Dadurch ist  $f(x)$  eindeutig definiert:



Es sei nämlich mit  $\lambda \geq 0$

$$x + \lambda(x - F(x))$$

diese Halbgerade. Dann können wir  $\lambda$  aus  $|f(x)| = 1$  bestimmen: Mit  $a(x) = x - F(x)$

$$1 = |x + \lambda a(x)|^2 = \lambda^2 |a(x)|^2 + 2\lambda \langle x, a(x) \rangle + |x|^2.$$

Diese Gleichung besitzt genau eine nichtnegative Lösung  $\lambda(x)$ , nämlich mit  $a_0 := a/|a|$

$$\lambda(x) = \frac{1}{|a(x)|} \left\{ -\langle x, a_0(x) \rangle + \sqrt{\langle x, a_0(x) \rangle^2 + 1 - |x|^2} \right\}.$$

Es war  $F \in C_2(U)$  mit  $U \supset \bar{B}$  und  $|F(x) - x| > 0$  in  $\bar{B}$  und damit in  $U$ . Also ist  $\lambda \in C_2(U)$ . Der Radikand ist positiv. Außerdem ist  $\lambda| \partial G = 0$ . Mithin ist  $f : \bar{B} \rightarrow \partial B$  mit

$$f(x) = x + \lambda(x)(x - F(x))$$

eine glatte Retraktion. Das ist ein Widerspruch;  $F$  besitzt also einen Fixpunkt.

4. Es sei  $v \in C(\bar{B}, \bar{B})$ . Wir approximieren  $v$  durch glatte Funktionen und verwenden dazu Folgerung 9.3.4. Dann gilt

$$\forall v \in C(\bar{B}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in C_\infty(\bar{B}) \quad \forall x \in \bar{B} \quad |v(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

Dann ist  $|u| \leq |v| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$ . Es sei

$$w(x) := \frac{u(x)}{1 + \varepsilon}.$$

Dann ist  $w \in C_\infty(\bar{B}, \bar{B})$ , und es gilt in  $\bar{B}$

$$|w - v| = \frac{|u - v - \varepsilon v|}{1 + \varepsilon} \leq \frac{|u - v|}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} |v| \leq \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} < 2\varepsilon.$$

$v$  habe nun keinen Fixpunkt in  $\bar{B}$ . Es sei

$$f(x) := |v(x) - x|.$$

$f$  nimmt in  $\bar{B}$  ein positives Minimum  $m$  an. Es gilt also

$$\forall x \in \bar{B} \quad f(x) \geq m.$$

Man wähle  $\varepsilon := m/2$  und  $w$  zu diesem  $\varepsilon$ . Dann folgt

$$\forall x \in \bar{B} \quad |v(x) - w(x)| < m$$

und

$$|v(x) - x| - |w(x) - x| \leq |v(x) - w(x)| < m,$$

also

$$0 \leq |v(x) - x| - m < |w(x) - x|.$$

Mithin besitzt  $w$  keinen Fixpunkt. Das steht im Widerspruch zur dritten Aussage. Damit ist der Brouwersche Fixpunktsatz bewiesen.

5. Es seien  $K \in \mathbb{R}^n$  und

$$h : \bar{B} \longrightarrow K$$

ein Homöomorphismus. Es sei  $f \in C(K, K)$ . Dann ist

$$F : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$$

mit  $F := h^{-1} \circ f \circ h$  stetig, besitzt also einen Fixpunkt

$$x = (h^{-1} \circ f \circ h)(x).$$

Dann ist mit  $y := h(x)$

$$y = f(y).$$

6. Wir schließen wieder indirekt. Es sei

$$f : \bar{B} \rightarrow \partial B$$

eine stetige Retraktion. Dann ist auch

$$\begin{aligned} g : \bar{B} &\rightarrow \bar{B} \\ x &\mapsto -f(x) \end{aligned}$$

stetig und besitzt folglich einen Fixpunkt  $x$ . Wegen  $f : \bar{B} \rightarrow \partial B$  gilt  $x \in \partial B$ , also

$$x = g(x) = -f(x) = -x \neq 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

### 12.8.3 Vektorfelder auf der Sphäre $S^2$

Zum Abschluß möchte ich noch kurz Vektorfelder auf der Sphäre  $S^2 \in \mathbb{R}^3$  darstellen und insbesondere den Beweis des folgenden Satzes andeuten:

**Satz 12.8.2:** *Auf der Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  gibt es kein tangenciales, nirgends verschwindendes Vektorfeld.*

Es sei  $v$  ein solches Feld; dann können wir offenbar o.B.d.A.  $|v| = 1$  annehmen. Salopp ausgedrückt besagt der Satz, daß sich „ein Igel nicht ohne Wirbel frisieren“ läßt. Zum Beweis soll zunächst die Technik des Hantierens mit solchen Feldern etwas vorgeführt werden. Es sei  $P \in S^2$  und

$$\gamma : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2,$$

wie gehabt, eine Darstellung einer Umgebung des Punktes  $P$  mit dem Koordinatenursprung in  $P$ , etwa

$$\gamma(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ f(t_1, t_2) \end{pmatrix} \text{ mit } f(t) = 1 - \sqrt{1 - |t|^2}$$

und

$$T := \{(t_1, t_2) \mid t_1^2 + t_2^2 < r\}.$$

Dann spannen  $\partial_1 \gamma =: \gamma_{11}$  und  $\gamma_{12}$  den Tangentialraum in  $U(P)$  auf, und es sei

$$n := \frac{\gamma_{11} \times \gamma_{12}}{|\gamma_{11} \times \gamma_{12}|} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{1 - |t|^2}$$

der Normalenvektor. Es seien ferner  $\gamma_{ij}$  und  $\gamma^{ij}$  definiert durch<sup>1</sup>

$$\gamma_{ij} := (\gamma_{|i}, \gamma_{|j}) \quad \text{und} \quad \gamma^{ij} \gamma_{jk} := \delta_k^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Mit  $g := \det(\gamma_{ij})$  hatten wir

$$dA = \sqrt{g} dt_1 dt_2.$$

Eine Umgebung  $U(P) \subset \mathbb{R}^3$  des Punktes  $P$  läßt sich dann in der Form

$$x(t_1, t_2, t_3) = \gamma(t_1, t_2) + t_3 n(t_1, t_2)$$

darstellen, und man setzt analog zu  $\gamma_{ij}$

$$g_{\mu\nu} := (x_{|\mu}, x_{|\nu}).$$

<sup>1</sup>Wir summieren über gleiche gegenüberstehende Indizes. Lateinische stehen für 1, 2; griechische für 1, 2, 3.

Es seien nun  $v$  ein tangentiales Feld auf der Sphäre  $S^2$ . Dann läßt sich  $v$  in der Form

$$v = v^1 \gamma_1 + v^2 \gamma_2$$

darstellen.  $v^1, v^2$  nennt man *kontravariante Komponenten* von  $v$  und

$$v_i := \gamma_{ij} v^j = (\gamma_i, v)$$

*kovariante Komponenten*. Es seien  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$  neue Koordinaten,  $t = t(\tilde{t})$ . Dann werden letztere vermöge

$$\tilde{v}_i = \left( v, \frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{t}_i} \right) = \frac{\partial t_j}{\partial \tilde{t}_i} \left( v, \frac{\partial \gamma}{\partial t_j} \right) = \frac{\partial t_j}{\partial \tilde{t}_i} v_j$$

transformiert. Das Skalarprodukt der Vektoren  $v$  und  $w$  erhält man durch

$$(v, w) = (v^i \gamma_i, w^j \gamma_j) = v^i w^j \gamma_{ij} = v^i w_i.$$

Es seien ferner  $L_j^i$  und  $\Gamma_{ij}^k$  definiert durch

$$n_i := -L_j^i \gamma_j$$

und

$$\gamma_{i|j} := \Gamma_{ij}^k \gamma_k + \Gamma_{ij}^3 n,$$

allgemein  $g_{|\alpha|\beta} := \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda g_{\lambda}$ . Dann ist  $\Gamma_{ij}^3 = L_j^k \gamma_{ik} := L_{ij}$  und

$$v_{|i} = \left( v^j \gamma_{|j} \right)_i = v_{|i}^j \gamma_{|j} + v^j \gamma_{|j|i} = (v_{|i}^k + v^j \Gamma_{ji}^k) \gamma_k = v_{|i}^k \gamma_k$$

mit

$$v_{|i}^k := v_{|i}^k + v^j \Gamma_{ji}^k.$$

$v_{|i}^k$  bezeichnet man als *i-te kovariante Ableitung* von  $v^k$  und

$$v_{k||i} := v_{k|i} - v_j \Gamma_{ki}^j = (v_{|i}, \gamma_k)$$

als kovariante Ableitung von  $v_k$ .

Es sei  $a$  ein Vektor. Dann ist

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a^\gamma x_{\alpha|\gamma} = \frac{\partial t_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial t_\beta} a^\gamma x_{\alpha|\gamma} = \frac{\partial t_\beta}{\partial x_\alpha} a_{||\beta}^\lambda x_{\alpha|\lambda} = a_{||\beta}^\lambda \delta_\lambda^\beta = a_{||}^\lambda$$

und damit auf der Fläche  $\operatorname{div} v = v_{||}^k$ .

Skizzieren wir nun den Beweis des Satzes: Mit  $K := \det(L_k^i)$ , der *Gaußschen Krümmung* – für die Sphäre ist  $K = 1 -$ , zeigt man zunächst

$$\Gamma_{kj|i}^i - \Gamma_{ki|j}^i = K \gamma_{kj}.$$

Daraus folgt

$$v_{||j||i}^i - v_{||i||j}^i = K v_j.$$

Wegen  $|v| = 1$  ist  $0 = (v, v)_{|j} = (v^i v_i)_{|j} = 2v_i v_{||j}^i$ , und deshalb gilt

$$\det(v_{||j}^i) = 0.$$

Es sei nun

$$w^j := v^i v_{||i}^j - v^j v_{||i}^i.$$

Dann folgt aus dem Vorangegangenen

$$w_{||j}^j = K v^i v_i = K = 1.$$

All diese Rechnungen werden dadurch erleichtert, daß auf beiden Seiten der Gleichungen jeweils Invarianten oder Größen mit bekanntem Transformationsverhalten stehen. Man hat die Aussagen deshalb nur im Ursprung des Koordinatensystems – also in  $P$  – zu überprüfen. Mit

$$w = w^i \gamma_i$$

ist dann

$$\operatorname{div} w = 1.$$

Weil  $S^2$  geschlossen ist, folgt aber aus dem Stokesschen Satz

$$\int_{S^2} \operatorname{div} w = 0.$$

Das ist ein Widerspruch; es gibt also kein Tangentialfeld mit  $|v| = 1$  auf der Sphäre  $S^2$ .

**Index**

Bedeutung der Druckart einer Seitenzahl für die Art des Stichwortes:

- schräg* : Personennamen  
**fett** : definierendes Vorkommen  
 von–bis : Abschnittsüberschriften  
 normal : angewandtes Vorkommen

Abbildung, *siehe auch unter* Funktion

- alternierende, **66**  
 Borel–meßbare, *siehe* Borelfunktion  
 differenzierbare, 51  
 homöomorphe, **50**, 76  
 meßbare, 12, 28–32  
 stetige, 66  
 topologische, 44, **50**

Ableitung

- ausere, **68**  
 kovariante, **87**

absolut stetige Funktion, 46–49

absolut stetiges Spektrum, 49

abstrakte Maßtheorie, 4

abzählbare Basis, 51

Abzählbarkeitsaxiom

- zweites, 50

additives Maß, **17**, 37

affiner Unterraum, 64

Ägypter, 3

Algebra, **16**

- $\sigma$ –, *siehe unter* Sigma–

Borel–, 62

der  $p$ –Formen, **73**

Alt, 16, 33

alternierende Abbildung, **66**

alternierende Differentialform, 60, 65–70

Approximation

- durch Treppenfunktionen, 62  
 lineare, 54

Approximationssatz, 15

äquivalente Atlanten, **50**

Äquivalenzklassen, 50

Äquivalenzrelation

- in  $\mathcal{L}^1$ , **20**  
 in  $\mathcal{T}(X, Y)$ , **19**

Archimedes, 3, 41

Areal, **61**

- invariantes, 61

Atlanten

- äquivalente, **50**

Atlas, 51, 53

- differenzierbarer, **50**

maximaler, **50**

$n$ –dimensionaler, **50**

ausere Ableitung, **68**

äuserer Inhalt, **4**

äuseres Lebesguesches Maß, **7**

Subadditivität, **7**

äuseres Maß, 4

äuseres Produkt, *siehe* Dachprodukt

Auswahlaxiom, **4**, 7, 44

Axiom

Auswahl–, **4**, 7, 44

Trennungs–, **14**, 50

zweites Abzählbarkeits–, 50

Banachraum, 18, 23, 28, 33, 40

Barner & Flohr, 55, 77

Basis, 51

positiv orientierte, **77**

Basisform, **67**

höherer Stufe, 74

$p$ –ter Stufe, **67**

berandete Karte, **76**

berandete Mannigfaltigkeit, 76

Bogenelement, 79

Bogenlänge, 60, 75

Borel, 4, 6

Borel–meßbare Abbildung, *siehe* Borelfunktion

Borelalgebra, 62

Borelfunktion, **9**, 10, 11, **28**

Borelmenge, **9**, 10, 14, 15, 27, 28, 45

Vervollständigung, **15**

Brouwerscher Fixpunktsatz, **83**

Beweis, 84–85

Bröcker, 53

$\mathring{C}$ –Funktion, 24

$C_1$ –Form, 60, 70

Differentiationsoperator, **60**

$C_1$ –Untermannigfaltigkeit, 61

Cantormenge, **43**

Carathéodory, 4, 7

Cartan, 55

Cauchy, 3

Cavaliéri, 41

Cavaliérisches Prinzip, **41**, 63

charakteristische Funktion, **9**, **18**, 62

$C_l$ –Untermannigfaltigkeit, **51**, 53

$C_\infty$ –Diffeomorphismus, 53

Dachprodukt, **66**

Darbouxches Integral, 42

Diagonalfolge, 19

Diffeomorphismus, **50**, 51, 62, 74

$C_\infty$ –Diffeomorphismus, 53

lokaler, 51

orientierungserhaltender, **77**

Differentialform, 60

alternierende, 60, 65–70

der Stufe  $p$ , **66**

Pfaffsche, 55

Differentiation von Formen

Rechenregeln, **68**

- Differentiationsoperator, **60, 68**
- differenzierbar wechselnde Karten, **50**
- differenzierbare Abbildung, **51**
  - kritischer Punkt, **51, 52, 53, 63**
  - kritischer Wert, **51, 63**
  - regulärer Punkt, **51**
  - regulärer Wert, **51, 52**
  - singulärer Punkt, **51**
  - singulärer Wert, **51**
- differenzierbare aquivalente Atlanten, **50**
- differenzierbare Mannigfaltigkeit, **50, 50–61**
- differenzierbarer Atlas, **50, 51**
- Differenzierbarkeit, **58**
- Dirac-Maß, **12**
- diskrete Topologie, **8**
- diskretes Maß, **12**
- Divergenz, **72**
- dominiert konvergente Folge, **33**
- 3-Form
  - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
- Egorov, **30**
- Eigenschaften
  - des Lebesgueschen Integrals, **13**
  - des Maßes, **5, 7, 11–12**
  - integrierbarer Funktionen, **32–37**
  - von Abbildungen, **51**
- eindimensionale Untermannigfaltigkeit, **55**
  - Parameterdarstellung, **55**
- einfache Funktion, **10**
- Einheitswürfel, **5**
- 1-Form, **57, 73**
  - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
- Einsetzungsoperator, **74**
  - Rechenregeln, **74**
- Euklid, **3**
- exakte Form, **58, 59, 70, 70–72**
  - hinreichende Bedingung, **59**
  - notwendige Bedingung, **58**
- exakte  $p$ -Form, **60**
- Exaktheit von  $C_1$ -Formen
  - hinreichende Bedingung, **59**
  - notwendige Bedingung, **58**
  - topologische Bedingungen, **59**
- Extrema mit Nebenbedingungen, **50**
- fast gleichmäßig konvergente Folge, **30**
- fast überall, **13, 47**
  - $\mu_0$ -fast überall, **20**
- fast überall konvergente Folge, **31**
- Fatou, **33**
- Feld
  - tangentiales, **87**
    - kontravariante Komponente, **87**
    - kovariante Komponente, **87**
- Fixpunkt, **84**
- Fixpunktsatz
  - Brouwerscher, **83**
  - Beweis, **84–85**
- Flachmacher, **51**
- Fläche, **65**
  - des Einheitskreises, **3**
  - im Raum, **50, 60–61**
  - im  $\mathbb{R}^3$ , **61**
  - Kreis-, **3**
  - krummlinig begrenzte, **3**
  - Oberfläche einer Halbkugel, **61**
  - $p$ -Fläche, **73**
  - Parametrisierung, **50**
  - polygonal berandete, **3**
  - Schwerpunkt, **64**
  - Trägheitsmoment, **65**
- Flächenintegral, **55, 60, 73, 73–76**
  - Beispiele, **64–65**
- Flächenmaß, **60, 61, 75**
- Form
  - alternierende Differential-, **65–70**
  - Basis-, **67**
  - $C_1$ -Form, **60, 70**
  - Differential-, **60**
  - Differentiation
    - Rechenregeln, **68**
  - 3-Form
    - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
  - $dx$ , **56**
  - 1-Form, **57, 73**
    - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
  - exakte, **58, 59, 70, 70–72**
    - hinreichende Bedingung, **59**
    - notwendige Bedingung, **58**
  - geschlossene, **70, 70–72, 79**
  - Multiplikation, **67**
    - Rechenregeln, **67**
  - 0-Form, **57, 58, 73**
    - Differentiationsoperator, **68**
    - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
  - $p$ -Form, **60, 66, 71, 73**
    - äußere Ableitung, **68**
    - Differentiationsoperator, **68**
    - exakte, **60**
    - lokal exakte, **60**
  - Pfaffsche Differential-, **55**
  - Stamm-, **70, 71**
  - 2-Form
    - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
- Formel
  - für das partielle Integrieren, **81**
  - für den Gaußschen Satz, **81**
  - Greensche, **81**
  - Transformations-, **62, 61–65, 73**
- Fortsetzung von  $\mu_0$ , **21**
- Fundamentalsatz der Algebra, **82, 83**
- Funktion
  - absolut stetige, **46–49**
  - Borel-, **9, 10, 11, 28**
  - $\mathring{C}$ -, **24**
  - charakteristische, **9, 18, 62**
  - einfache, **10**

- endlicher Variation, 45–46
- glatte, 85
- implizite, 50
- integrierbare, **20**
- Lebesgue–integrierbare, 15, **20**, 20–25, **42**
- Lipschitz–stetige, 45, 47, 63
- meßbare, **9**, 8–11, 29, 41
- monotone, 43–45
- $\mu$ –integrierbare, **20**
- Null–, 15
- Regel–, 42
- Riemann–integrierbare, 3, 42
- singulär stetige, **49**
- Stamm–, 3, **58**, 59, 65
- stetige, **9**, 28, 63
- Treppen–, **10**, **18**, 19, 29, 32, 39, 40, 62
- vollständige Variation, **45**
- von beschränkter Variation, **45**, 47
- Funktional
  - lineares, 13
  - positives, **14**
- Funktionenfolge
  - Konvergenz, *siehe* Konvergenzbegriffe
- Funktionenklasse  $\mathcal{L}^1$ , **20**
- Funktionenklassen  $(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ , **42**
- Gaußsche Krümmung, **87**
- Gaußscher Integralsatz, **77**, 76–80
- Gebiet
  - homöomorphes, 84
  - geschlossene Form, **70**, 70–72, 79
  - geschlossene Jordankurve, **55**
  - geschlossene Kreislinie, 57
  - geschlossene Kurve, 60, 79
  - glatt berandete Mannigfaltigkeit, 76
  - glatte Funktion, 85
  - glatte Retraktion, 85
  - Gram, 60
  - Gramsche Matrix, **60**, **75**
  - Greensche Formeln, **81**
  - Grenzwert, 46
  - Griechen, 3
  - griechische Mathematik, 3
  - großer Umordnungssatz, 7
  - Gruppe
    - orthogonale, 52
- Halbkugel
  - Oberfläche, 61
- Halbraum, 76, 77
- Halbsphäre, 75
- Hauptsatz
  - der Diff.– und Integralrechnung, 65, 76
- Hausdorffraum, **13**, 50
- Heine, 6
- Hilbertraum, 15
- hinreichende Bedingung
  - für die Exaktheit von  $C_1$ –Formen, **59**
- homöomorphes Gebiet, 84
- Homöomorphismus, **50**, 53, 62, 76, 85
- Hyperboloid, 52
- Hyperebene, 64
- implizite Funktion, 50
- Induktion, 62
- Inhalt
  - äusserer, **4**
  - innerer, **4**
- Inklusion, **77**
- innerer Inhalt, **4**
- inneres Lebesguesches Maß, **7**
  - Superadditivität, **7**
- inneres Maß, 4
- Integrabilitätsbedingung, 60, 72
- Integral, 65
  - Darbouxches, 42
  - Flächen–, 55, 60, **73**, 73–76
    - Beispiele, 64–65
  - für Regelfunktionen, 13, 15, 19
  - für Treppenfunktionen, 15
  - Kurven–, 55, **56**, 65, 73
    - Beispiele, 64–65
  - Lebesguesches, 5, **13**, 15, 20–24, 37
  - Mehrfach–, 78
  - $\mu_0$ –, **18**
  - $p$ –Flächen–, 75
  - parameterabhängiges, 81
  - Rand–, 65
  - Riemannsches, 15
    - uneigentliches, 42
  - Substitutionsregel, 65
  - über geschlossene Wege, 57
  - unbestimmtes, **47**
  - unbestimmtes Lebesguesches, **47**
  - uneigentliches, 65
- Integralsatz
  - von Gauß, **77**
  - von Stokes, **78**
- Integration, 50–87
  - partielle, 65, 78, **81**
  - positiver Funktionen, 12–13
- Integrationstheorie, 3, 13, 25
  - Lebesguesche, 13, 15–49
- integrierbare Funktion, **20**
- Integrierbarkeit
  - einer Grenzfunktion, 34
- invariantes Areal, 61
- isolierte Singularität, 65
- Isometrie, 23, 38, 39, 61
- Isomorphismus
  - der Borelalgebren, 62
  - linearer isometrischer, 38
- Jacobi–Matrix, 51, 54, 62, 63, 73
- Jordan, 4, 55
- Jordankurve
  - geschlossene, **55**
- Jordansche Kurvenstücke, **55**

- Jordanscher Kurvensatz, **55**  
 Jänich, *51, 77*
- Kalkül, *3, 15, 55, 65*  
 Karte, *54*  
   berandete, **76**  
    $n$ -dimensionale, **50**  
   Untermannigfaltigkeits-, **51**
- Karten  
   differenzierbar wechselnde, **50**
- Kartengebiet, **50, 56, 78**  
 Kartenwechsel, **50, 51, 54**  
 Kettenregel, *51, 74*  
 Kodimension, **51**  
 kontinuierliches Spektrum, *49*  
   absolut stetiges Spektrum, *49*  
   singulär stetiges Spektrum, *49*
- kontravariant transformierter  
 Tangentialvektor, **54**
- Konvergenzbegriffe  
   dominiert konvergent, **33, 34**  
   fast gleichmäßig, **30**  
   fast überall, **31**  
   Implikationen, **31, 33**  
    $\mathcal{L}^1$ , **31**  
   maßkonvergent, **22, 31**  
   monoton konvergent, *34*
- Konvergenzsatz von Vitali, **36**  
 konvexe Menge, *59*  
 Koordinatenwechsel, *54*  
 kovariante Ableitung, **87**  
 Kreisfläche, *3*  
 Kreislinie, *3, 55*  
   geschlossene, *57*
- kritischer  
   Punkt, **51, 52, 53, 63**  
   Wert, **51, 63**
- krummlinig begrenzte Fläche, *3*  
 Krümmung  
   Gaußsche, **87**
- Kugel, *64*  
 Kurve, *65*  
   geschlossene, *60, 79*  
   geschlossene Jordan-, **55**  
   im Raum, *50, 55–60*  
   Parametrisierung, *50*  
   stetig differenzierbare, *53*
- Kurvenintegral, *55, 56, 65, 73*  
   Beispiele, *64–65*
- Kurvensatz  
   Jordanscher, **55**
- Kurvenstücke  
   Jordansche, **55**
- $\mathcal{L}^1$ , **20**  
 $\mathcal{L}^1$ -Cauchyfolge, *25, 34*  
 $\mathcal{L}^1$ -konvergente Folge, **31**  
 $\mathcal{L}^1$ -Norm, **19, 23**
- Lebesgue, *4*  
 Lebesgue-integrierbare  
   Funktion, *15, 20, 20–25, 42*  
 Lebesgue-meßbare Menge, **14, 15, 27**  
 Lebesgue-Nullmenge, *15, 17, 45*  
 Lebesguesche  
   Integrationstheorie, *13, 15–49*  
   Majorantenkriterium, **16**  
   Maßtheorie, *3–14*
- Lebesguescher  
 Maßraum, **27**
- Lebesguesches  
 Integral, *5, 13, 15, 20–24, 37*  
   elementares, *16–19*  
 Maß, *7, 12, 14, 15, 25, 28, 37, 62, 73*  
   elementares, *16–19*
- Lebesguesches-Carathéodorysches Maß, *4*  
 Lemma  
   Morse-, **53**  
   Poincarésches, **70**  
   Rieszsches, **19, 21, 31**  
   von Fatou, **33, 34**  
   von Sard, **63**
- Levi, *34*  
 lineare Approximation, *54*  
 linearer isometrischer Isomorphismus, *38*  
 lineares Funktional, *13*  
 Lipschitz-stetige Funktion, *45, 47, 63*  
 lokal euklidischer Raum, **50**  
 lokal exakte  $p$ -Form, *60*  
 lokal kompakter Raum, **14**  
 lokaler Diffeomorphismus, *51*  
 $\mathcal{L}^p$ -Norm, *15*
- $m$ -dimensionale  
   Untermannigfaltigkeit, **51, 60**
- $m$ -dimensionaler  
 differenzierbarer Atlas, *51*
- Mächtigkeit des Kontinuums, *43*  
 Majorante, *16*  
 Majorantenkriterium, **16, 28, 32, 33, 34**  
 Mangoldt & Knopp, *55, 77*  
 Mannigfaltigkeit, *55, 65, 79*  
   berandete, *76*  
    $C^l$ -Unter-, **51, 53**  
   differenzierbare, *50–61*  
   glatt berandete, *76*  
    $p$ -Form, **66**  
   Unter-, **51, 55, 60**  
   Kodimension, **51**
- Mathematik  
   griechische, *3*  
   Struktur-, **4**
- Matrix  
   Gramsche, **60, 75**  
   Jacobi-, *51, 54, 62, 63, 73*  
   orthogonale, **52**
- maximaler Atlas, **50**  
 Maß  
   (un-)beschränkter offener Mengen, *7*

- abzählbar additives, 4
- additives, **17**, 37
- auseres, 4
- auseres Lebesguesches, **7**
- Dirac-, **12**
- diskretes, **12**
- Eigenschaften, **5**
- eines Parallelotops im  $\mathbb{R}^n$ , 60
- einfacher Mengen im  $\mathbb{R}^n$ , 5–8
- endlich additives, 4
- Erweiterung, 25–28
- Flächen-, 60, **61**, **75**
- Fortsetzung von  $\mu_0$ , **21**
- inneres, 4
- inneres Lebesguesches, **7**
- Lebesguesches, **7**, **12**, **14**, 15, 25, 28, 37, 62, 73
- Lebesguesches–Carathéodorysches, 4
- $\mu$ -Vervollständigung, **13**
- Normierung, **5**, **7**
- positives, **11**, **17**
- Produkt-, 37–41
- reguläres, **37**
- Riemann–Peanosches, 4
- $\sigma$ -Additivität, **5**, 6, 7, 11, 27
- $\sigma$ -additives, **11**, **17**, 30
- $\sigma$ -finites, **25**, 27
- $\sigma$ -subadditives, **17**, 22
- translationsinvariantes, 14
- Translationsinvarianz, **5**, 7
- vollständiges, **13**
- Zähl-, **12**
- maßkonvergente Folge, **22**, **31**
- Maßraum, 10, **11**, 12, 26, 28, 37
  - Lebesguescher, **27**
  - vollständiger, 14, 27
- Maßtheorie, 3–14, 25
  - abstrakte, 4
  - Lebesguesche, 3–14
- Maßzahl, 3
- Mehrfachintegral, 78
- Menge
  - (un-)beschränkte offene, 7
  - abzählbare, 4
  - Borel-, **9**, 10, 14, 15, 27, 28, 45
  - Cantor-, **43**
  - der kritischen Punkte, 63
  - der kritischen Werte, 63
  - der Nullmengen, **27**
  - der Riemann–integrablen Funktionen, **3**
  - der Treppenfunktionen, **18**
  - der Unstetigkeitsstellen, 43, 46
  - im Lebesgueschen Sinne nichtmeßbare, **7**
  - im Peanoschen Sinne nichtmeßbare, 4
  - konvexe, 59
  - Lebesgue–meßbare, 4, **14**, **15**, **27**
  - meßbare, **9**, 8–11, 15, 28, 62
  - $n$ -dimensionaler Karten, 50
  - Null-, **13**, 19, 21, 23, 28, 63
  - offene, **8**, 59
  - sternförmige, **59**, 70
  - Vitali-, 32, 44
  - von Borelmengen, **27**
- Methode
  - des Ausschöpfens, **3**
  - Pflasterstein-, **3**
- metrischer Raum, 8
- meßbare
  - Abbildung, 12, 28–32
  - Funktion, **9**, 8–11, 29, 41
  - Menge, **4**, **9**, 8–11, 15, 28
- meßbare Menge, 62
- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 58
- Monom, 68, 70, 74, 77
- monotone Funktion, 43–45
- Morse, 52
- Morse–Lemma, **53**
- $\mu$ -integrierbare Funktion, **20**
- $\mu$ -Nullmenge, 37
- $\mu$ -Vervollständigung, **13**
- $\mu_0$ -fast überall, **20**
- $\mu_0$ -Integral, **18**
- $\mu_0$ -Nullmenge, **17**, 27
- $\mu_2$ -Nullmenge, 37
- Multiplikation für Formen, **67**
  - Rechenregeln, **67**
- $n$ -dimensionale
  - differenzierbare Mannigfaltigkeit, **50**
  - Karte, **50**
  - Mannigfaltigkeit, 51
- $n$ -dimensionaler
  - Atlas, **50**
  - differenzierbarer Atlas, 50
  - Äquivalenzklassen, 50
- $n$ -Sphäre, **52**
- Nagy, 16
- Natanson, 47
- Newton, 3
- Norm
  - $\mathcal{L}^1$ -, **19**, **23**
  - $\mathcal{L}^p$ -, 15
  - Supremums-, 15, 19, 24
- Normalenvektor, 80, **86**
- normierter Raum, 19
- Normierung, **5**, 7
- notwendige Bedingung
  - für die Exaktheit von  $C_1$ -Formen, **58**
- 0-Form, **57**, 58, 73
  - Differentiationsoperator, **68**
  - im  $\mathbb{R}^3$ , **67**
- Nullfunktion, 15
- Nullmenge, **13**, 19, 21, 23, 28, 63
  - Lebesgue-, 15, **17**, 45
  - $\mu$ -Nullmenge, 37
  - $\mu_0$ -Nullmenge, **17**, 27
  - $\mu_2$ -Nullmenge, 37
- Oberfläche, 75

- einer Halbkugel, 61
- offene Menge, **8**, 59
- Operator
  - Differentiations-, **60**, 68
  - Einsetzungs-, **74**
- Orientierung, 56, 77
  - positive, **77**
- orientierungserhaltender Diffeomorphismus, **77**
- Orientierungskonvention, **77**
- orthogonale Gruppe, 52
- orthogonale Matrix, **52**
  
- $p$ -Fläche, **73**
- $p$ -Flächenintegral, 75
- $p$ -Form, **60**, **66**, 70, 71, 73
  - äußere Ableitung, **68**
  - Differentiationsoperator, **68**
  - exakte, **60**
- parabolische Segmente, 3
- Parallelotop, 60
- parameterabhängiges Integral, 81
- Parameterdarstellung, 60
- Parametrisierung, 50
- partielle Integration, 65, 78, **81**
- Partition der Eins, **77**
- Peano, 4, 55
- Pfaff, 55
- Pfaffsche Differentialformen, 55
- Pflasterstein-Methode, **3**
- Philosophiae naturalis
  - principia mathematica, 3
- Physik, 55, 65
- Poincarésches Lemma, **70**
- Poincaré, 55
- Polarkoordinaten, **61**
- polygonal berandete Fläche, 3
- positiv orientierte Basis, **77**
- positive Orientierung, **77**
- positives Funktional, **14**
- positives Maß, **11**, **17**
- Produkt
  - äußeres, **66**
  - Dach-, **66**
  - Skalar-, 87
- Produktmaß, 37–41
- Punkt
  - kritischer, **51**, 52, 53, 63
  - regulärer, **51**
  - singulärer, **51**
- Punktspektrum, 49
- Pythagoras, 3
  
- Quadervolumen, 5, 45
  - $\sigma$ -Additivität, **5**, 6, 7, 11
  
- Randintegral, 65
- Rang von  $f$  in  $p$ , **51**
- Raum
  - affiner Unter-, 64
  - Banach-, 18, 23, 28, 33, 40
  - Halb-, 76, 77
  - Hausdorff-, **13**, 50
  - Hilbert-, 15
  - lokal euklidischer, **50**
  - lokal kompakter, **14**
  - Maß-, 10, **11**, 12, 26, 28, 37
  - metrischer, 8
  - meßbarer Mengen, **9**, 11, 26
  - normierter, 19
  - Separabilität, **28**, 33, 39
  - Tangential-, **53**, 54, 66, 76, 86
  - topologischer, **8**, 10, 50
  - Vektor-, 66
  - vollständiger, 39
- Rechenregeln
  - für das Differenzieren von Formen, **68**
  - für den Einsetzungsoperator, **74**
  - für die Multiplikation von Formen, **67**, **68**
- Regelfunktion, 42
- regulärer
  - Punkt, **51**
  - Wert, **51**, 52
- reguläres Maß, **37**
- Retraktion, 84
  - glatte, 85
  - stetige, 86
- Riemann, 3
- Riemann-integrierbare Funktion, 3, 42
- Riemann-Peanosches Maß, 4
- Riemannsches Integral, 15
  - uneigentliches, 42
- Riesz, 16, 42
  - Funktionenklassen, **42**
- Rieszscher Darstellungssatz, **13**
- Rieszscher Satz, **23**, 27, 29, 32, 38, 39
- Rieszssches Lemma, **19**, 21, 31
- Rotation, 14, 72
- Rudin, 14, 16
  
- Sard, 63
- Satz
  - Approximations-, 15
  - Brouwerscher Fixpunkt-, **83**
  - Fundamentalsatz der Algebra, **83**
  - Gaußscher Integral-, 76–80
  - großer Umordnungs-, 7
  - Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung, 65, 76
  - Jordanscher Kurven-, **55**
  - Konvergenzsatz von Vitali, **36**
  - Mittelwertsatz der Integralrechnung, 58
  - Rieszscher, **23**, 27, 29, 32, 38, 39
  - Rieszscher Darstellungs-, **13**
  - Stokesscher Integral-, 76–79, **81**, 87
  - über die dominierte Konvergenz, **34**
  - über die monotone Konvergenz, **34**
  - Überdeckungssatz von Heine-Borel, 6, 32
  - von Beppo Levi, **34**, 37, 38, 41
  - von der lokalen Umkehrbarkeit, 84

- von der Umkehrabbildung, 51
- von Egorov, 29, **30**, 36
- von Fubini, **38**, 41, 63
- von Fubini (Differentiation von Reihen), **48**
- von Lebesgue, **34**
- von Pythagoras, 3
- von Tonelli, **40**
- Schwerpunkt einer Fläche, **64**
- Schäfer, 16
- Separabilität, **28**, 33, 39
- $\sigma$ -Additivität, **5**, 6, 7, 11, **17**, 27
- $\sigma$ -additives Maß, **11**, **17**, 30
- $\sigma$ -Algebra, **9**, 10, 13, **17**, 25, 28
  - kleinste, 9
  - von  $\mathcal{F}$  erzeugte, **9**
- $\sigma$ -finites Maß, **25**, 27
- $\sigma$ -subadditives Maß, **17**, 22
- Singularität
  - isolierte, 65
- singulär stetige Funktion, **49**
- singulär stetiges Spektrum, 49
- singulärer
  - Punkt, **51**
  - Wert, **51**
- Skalarprodukt, 65, 87
- Spektraltheorie, 49
- Spektrum
  - absolut stetiges, 49
  - kontinuierliches, 49
  - Punkt-, 49
  - singulär stetiges, 49
- Sphäre, 79, 86
  - im Raum, 50
  - $n$ -Sphäre, **52**
  - Vektorfeld, 86–87
- Stammform, **70**, 71
- Stammfunktion, 3, **58**, 59, 65
- sternförmige Menge, **59**, 70
- stetige Abbildung, 66
- stetige Funktion, **9**, 28, 63
- stetige Retraktion, 86
- Stokes, 78
- Stokesscher Integralsatz, **78**, 76–79, **81**, 87
- Strukturmathematik, **4**
- Subadditivität, 7, 8
- Substitutionsregel
  - für Integrale, 65
- Superadditivität, 7, 8
- Supremumsnorm, 15, 19, 24
- surface, 75
- Tangente, 65
- tangentiales Vektorfeld, 86
  - kontravariante Komponente, **87**
  - kovariante Komponente, **87**
- Tangentialraum, **53**, 54, 66, 76, 86
- Tangentialvektor, **53**, 54, 60, 79
  - kontravariant transformierter, **54**
- Taylorentwicklung, 52
- Theorie
  - abstrakte Maß-, 4
  - Integrations-, 3, 13, 25
  - Lebesguesche Integrations-, 13, 15–49
  - Lebesguesche Maß-, 3–14
  - Maß-, 3–14, 25
  - Spektral-, 49
  - Wahrscheinlichkeits-, 5
- Tonelli, 40
- Topologie, **8**, 10, 50
  - diskrete, **8**
  - triviale, **8**
- topologische Abbildung, 44, **50**
- topologische Bedingungen
  - für die Exaktheit von  $C_1$ -Formen, 59
- topologischer Raum, **8**, 10, 50
- Transformation, 62
- Transformationsformel, **62**, 61–65, 73
- translationsinvariantes Maß, 14
- Translationsinvarianz, **5**, 7
- Trennungssaxiom, **14**, 50
- Treppenfunktion, **10**, **18**, 19, 29, 32, 39, 40, 62
  - verallgemeinerte, **29**, 42, 49
- triadische Brüche, 43
- triviale Topologie, **8**
- Trägheitsmoment einer Fläche, **65**
- Überdeckungssatz von Heine–Borel, 6, 32
- Umordnungssatz
  - großer, 7
- unbestimmtes Integral, **47**
- unbestimmtes Lebesguesches Integral, **47**
- uneigentliches Integral, 65
- Untermannigfaltigkeit, **51**, 60
  - $C_1$ -, 61
  - $C_1$ -, **51**, 53
  - eindimensionale, 55
  - Kodimension, **51**
  - Parameterdarstellung, 55, 60
- Untermannigfaltigkeitskarte, **51**
- Unterraum
  - affiner, 64
- Variablentransformation, 73
- Variation
  - vollständige, **45**
- Vektor
  - Normalen-, 80, **86**
  - Tangential-, **53**, 54, 60, 79
    - kontravariant transformierter, **54**
- Vektorfeld, 55, 65
  - auf der Sphäre, 86–87
  - im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , 79–82
  - tangentiales, 86
    - kontravariante Komponente, **87**
    - kovariante Komponente, **87**
- Vektorraum, 66
  - der reellen  $n \times n$ -Matrizen, 52
- verallgemeinerte Treppenfunktion, **29**, 42, 49

Verbindungsweg, 57  
Vertauschung von Grenzprozessen, 15  
Vervollständigung  
  der Borelmengen, **15**  
  der Treppenfunktionen, 15, 19–20  
Vitali, 7  
Vitali-Menge, 32, 44  
vollständige Variation, **45**  
vollständiger Maßraum, 14  
vollständiger Raum, 39  
vollständiges Maß, **13**  
  
Wahrscheinlichkeitstheorie, 5  
Weg, **55**, 56, 57, 65  
  Orientierung, 56  
Wert  
  kritischer, **51**, 63  
  regulärer, **51**, 52  
  singulärer, **51**  
  
Zerlegung der Eins, **77**  
2-Form  
  im  $\mathbb{R}^3$ , **67**  
zweites Abzählbarkeitsaxiom, 50  
Zylinder, 63  
Zählmaß, **12**

