Infinitesimalrechnung I

Vorlesung im Wintersemester 1992/93

von Prof. Dr. Rolf Leis

Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Begrüßung
Mathematik ist ein sehr altes Fach. Lesen, Schreiben und Rechnen zählen zu den ältesten Kulturleistungen. Ich erinnere nur an die ägyptischen Landvermesser. Es ist erstaunlich, wieviel Mathematik die alten Meister schon konnten.

Der Name Mathematik stammt aus dem Griechischen.

$$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$$

bedeutet Gelerntes, Kenntnis, Wissenschaft, Lehre.

Es ist wohl nicht nötig, hier zu betonen, wie lebendig die Mathematik auch heute noch ist. „Mathematisierung“ anderer Wissenschaften ist ja ein Schlagwort geworden. Besonders die modernen Rechentechniken – alles was mit dem Computer zusammenhängt – haben einen Schub auch in der reinen Mathematik ausgelöst. Sie sind ja damit groß geworden; als ich so alt war wie Sie jetzt, – ich habe 1952 Abitur gemacht – waren die Transistoren gerade erfunden. Ihre Bedeutung wurde, zumindest in Deutschland, noch gar nicht erkannt. Sie können sich kaum vorstellen, was in diesen Jahren alles passiert ist — auch in der Mathematik. Ich bin jetzt sechzig Jahre alt. Mein Beruf hat mir immer viel Freude gemacht, und die Mathematik hat mich fasziniert. Ich hoffe, Ihnen davon etwas vermitteln zu können.

Das Fach Mathematik gilt als schwer. Selbst gute Schüler haben oft anfangs große Schwierigkeiten an der Universität. Da möchte ich Ihnen Mut machen. Wenn Sie bereit sind, hart zu arbeiten, sollten Sie unbedingt durchhalten. Sie werden reichlich belohnt werden. Schulkenntnisse werden hier nicht vorausgesetzt, wir fangen also im Prinzip neu an. Leider ist die Schulmathematik doch recht verschieden von der Mathematik, wie wir sie hier lehren. Das hat verschiedene Gründe; irgendwie ist die Schulmathematik zurückgeblieben. In anderen Fächern, wie zum Beispiel in der Germanistik, bemerkt man das nicht so deutlich. Vielleicht hängt das eben damit zusammen, daß Mathematik als so schwer gilt. Ich möchte zwei Punkte dafür hervorheben, damit Sie sich von Anfang an darauf einstellen können.

1. Von vielen Menschen wird das, was Mathematik zur Mathematik macht, als unnatürlich, unmenschlich und unvollziehbar angesehen; ja, man lacht vielleicht über den Mathematiker. Wesentliche Merkmale der Mathematik sind *Helle und Schärfe der Begriffsbildungen*, die *pedantische Sorgfalt im Umgang mit Definitionen* (nicht zu viel — nicht zu wenig darf gesagt werden), die *Strenge der Beweise* (nur mit Mitteln der Logik, nicht aus der Anschauung) und schließlich die *abstrakte Natur der mathematischen Objekte*.

   All dies steht natürlich im großen Gegensatz zum täglichen Leben, wo man jemanden vielleicht überredet, ihn einschüchtert oder besticht. Denken Sie nur daran, wie im politischen Raum Entscheidungen fallen. Und die meisten Bürger finden das normal. So hat Nietzsche einmal *den denkenden Menschen als kranken Affen* bezeichnet.

   Diese mathematische Haltung ist für Sie ungewohnt, und Sie müssen sie erst lernen — oft mit großer Anstrengung. Das macht den Einstieg schwer. Es darf jetzt keine Rolle mehr spielen, ob Sie stärker oder schöner sind, oder ob Sie leicht jemanden charmant überreden können. Das formt uns. Und wenn Sie dann mein Alter haben, wird man Sie als Mathematiker erkennen. Goethe soll ja einmal gesagt haben: „Mit Dreißig ist jeder für sein Gesicht selbst verantwortlich!“

   Ich möchte nicht mißverstanden werden, deshalb lassen Sie mich an dieser Stelle etwas ausholen: Ich möchte hier ganz und gar nicht eine primitive Rationalität propagieren. Auch der Mathematiker glaubt. Diesbezüglich unterscheiden wir uns nicht von den Theologen. In der Mathematik nennt man diese Glaubenssätze Axiome. Worum es also geht, ist, diese Grundannahmen klar herauszustellen und daraus logische Schlüsse zu ziehen. Nun kommt man aber im allgemeinen mit einer Grundannahme nicht aus. Deshalb muß man, wenn man mehrere macht, überprüfen, ob sie sich nicht *widersprechen*, ob sie *unabhängig* und *vollständig* sind. Das ist gar nicht so einfach. So ist das Arbeitsgebiet der mathematischen Grundlagenforschung und Logik entstanden. Ich vergleiche unser Fach gerne mit einem Baum. Grundlagenforschung und Logik bilden die Wurzeln, in der Krone sitzen Geometer oder Numeriker. Und der Baum lebt; sowohl die Wurzeln als auch die Äste wachsen.

   Auch in der Mathematik hat es Meinungsverschiedenheiten und sogar große Krisen gegeben, und es gibt sie. Um ein Beispiel zu nennen, gehe ich einmal sehr weit zurück und zitiere Platon (428/7 –348/7 vor Chr.). Er schreibt in den „Gesetzen“
   Lieber Kleinias,
   ich habe ja wohl auch erst selbst recht spät etwas vernommen, und mußte mich über diesen Übelstand höchlich verwundern. Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern eher nur beim Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen.

Und er sagt weiter, daß ein Mensch, der nicht im Innersten erschüttert ist, wenn er erfährt, daß $\sqrt{2}$ nicht rational ist, gefühlsmäßig einem Rindvieh gleiche.

Dahinter steht der Zusammenbruch der damaligen grundlegenden Ideologie der Pythagoreer „Alles ist Zahl". Die griechischen Naturphilosophen sahen in den natürlichen Zahlen die äußerst erfolgreiche Grundlage aller damaligen Naturbeschreibungen. Denken Sie an Pythagoras' Musiktheorie, eine der ersten Darstellungen eines physikalischen Sachverhalts durch Mathematik. „Mathematisierung" ist ja heute das Schlagwort. Und da kam eben die Entdeckung, daß $\sqrt{2}$ – also die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten eins – nicht rational ist.

Auch in unserem Jahrhundert hat es eine schwere Grundlagenkrise in der Mathematik gegeben, wie in der Physik. Darauf werde ich später noch etwas eingehen; irgendwie haben wir inzwischen gelernt, mit solchen Krisen zu leben.

2. Doch nun zurück zur Frage, warum Mathematik schwer ist. Als zweiten wichtigen Punkt betone ich, daß ein Mathematiker viel Fantasie benötigt. Nur richtig zu schließen genügt nicht, man muß auch Ideen haben und sehen können, wohin die Reise wohl geht. Der berühmte Mathematiker David Hilbert (1862–1943) soll einmal auf die Frage, was aus einem seiner Schüler geworden sei, geantwortet haben: *Er ist Schriftsteller geworden, er hatte zu wenig Fantasie.* Mathematik ist eine hohe Kunst, und Sie sollten sich auch etwas als Künstler fühlen. Ich sage das nicht zum Spaß.

Also diese Polarität, einerseits fast pedantisch genau sein — und andererseits viel Fantasie haben, macht Mathematik schwer, denke ich. Aber noch einmal, ich möchte Ihnen Mut machen. Mit Fleiß läßt sich vieles lernen im Leben, zumindest bis zum Diplom. Aber hart arbeiten werden Sie müssen; von Anfang an, ohne Unterbrechung, jede einzelne Vorlesungsstunde sollten Sie sofort nacharbeiten.

So, jetzt habe ich aber allmählich genug geredet. Lassen Sie mich nur noch sagen, daß die Mathematik wie viele andere große Disziplinen auch – z.B. die Medizin – in Teilgebiete zerfällt. Ich nenne nur mal: *Algebra, Geometrie, Numerik* oder *Analysis.* Diese Vorlesung ist die große viersemestrige Einführungsvorlesung in die Analysis. Wir nennen sie – der Tradition folgend – Infinitesimalrechnung. Analysis ist der Teil der Mathematik, der die Methoden der Differential- und Integralrechnung benutzt. Das wichtigste Hilfsmittel ist der Begriff des Grenzwertes. Solche Probleme sind uralt. Denken Sie zum Beispiel daran, den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen, indem man diesen durch regelmäßige n-Ecke approximiert (4.–3. Jahrhundert vor Chr.), oder an das Tangentenproblem, oder an die Frage, ob man aus der Kenntnis einer Funktion im Kleinen (lokal) ihren Verlauf im Großen (global) bestimmen kann. Bei vielen Problemen kann man diese Frage bejahen (z.B. wenn ich jetzt die Kreide werfen würde); es gibt aber auch chaotisches Verhalten, und gerade solches Verhalten (nichtlineares) versteht man jetzt immer besser. Zur Analysis gehört auch die Theorie der Differentialgleichungen; partielle Differentialgleichungen sind mein persönliches Arbeitsgebiet.

Kurz etwas zur Geschichte der Analysis: Archimedes (287?–212 vor Chr.) konnte spezielle Flächen berechnen. Man muß aber sagen, daß die griechische Mathematik mit dem Grenzwertproblem nicht fertig geworden ist. Dann herrschte lange Ruhe. Die griechische Mathematik kam über die Araber zu uns. Die Stärke der Araber lag in der Bewahrung und Perfektionierung des Bekannten. Wesentlich neue und großartige Leistungen finden sich erst wieder bei Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Leibniz (1646–1716), den eigentlichen „Erfindern" der Infinitesimalrechnung. Jetzt konnte eine Fülle von Problemen gelöst werden, und viele Berechnungen wurden ausgeführt. Bedenken darüber, ob oder wieweit die Methoden streng begründet waren und ob die Ergebnisse als gesichert angesehen werden durften, wurden zunächst „verdrängt". Der Höhepunkt dieser Entwicklung findet sich etwa bei Leonhard Euler (1707–1783). In der Folge traten jedoch immer häufiger Fehler und Widersprüche auf. Ein interessantes Beispiel dafür ist das „Dirichletsche Prinzip", das auch von einem so hervorragenden Mathematiker wie Bernhard Riemann (1826–1866) benutzt wurde.

Ausgehend von Karl Weierstrass (1815–1897) setzte Ende des vergangenen Jahrhunderts die Kritik dann massiv ein und führte im folgenden zur „Grundlagenkrise in der Mathematik" am Anfang dieses Jahrhunderts, parallel zur Grundlagenkrise in der Physik. In der Mengenlehre waren nämlich Widersprüche aufgetreten. Sie entstanden durch leichtfertiges Definieren von Mengen wie „M sei die Menge aller Mengen". Mit dieser Problematik hängt der Umgang mit dem Unendlichen eng zusammen. Die Griechen waren hier sehr vorsichtig und akzeptierten nur „potentiell Unendliches". Wenn Euklid (um 300 vor Chr.) sagt, daß die Menge der Primzahlen unendlich sei, meint er, daß es zu jeder vorgelegten endlichen Menge von Primzahlen eine weitere gibt; und so beweist er das auch. Unsere Vorstellung von $\sqrt{2} = 1,4142135623\cdots$ als „aktual unendlichem" Dezimalbruch wäre ihm unerträglich. Hierhin gehört auch die Problematik des „Tertium non datur" oder auch der uralte Gegensatz zwischen „entdecken" und „erfinden". Seit der Zeit Platons gibt es die Vorstellung, daß die Mathematik unabhängig davon existiert, ob der Mensch sie kennt oder nicht. Sie wird also entdeckt. Allerdings teilen nicht alle Mathematiker diesen Glauben an eine gleichsam gottgegebene Mathematik. Beispielsweise war Leopold Kronecker (1821–1891) der Ansicht, daß nur das Zählen vorgegeben sei. *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk!*

Wie gesagt, inzwischen hat sich der Streit etwas gelegt; und wir haben gelernt, mit der Krise zu leben. Diese Vorlesung soll nicht Fragen der Grundlagenforschung behandeln, und diese ist auch nicht mein Arbeitsgebiet. Was ich aber tun möchte, ist Ihnen jeweils klar zu sagen, was geglaubt (vorausgesetzt) werden soll, und ich möchte so ein solides Fundament legen.

Literatur
Es gibt eine Fülle von Büchern über unsere Vorlesung. Schauen Sie sich in der Bibliothek selbst um. Ich nenne nur wenige:

Barner-Flohr: Analysis I–II; de Gruyter, Berlin 1987.
Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1–2; Springer-Verlag, Berlin 1971. (Erste Auflage 1927)
Heuser: Lehrbuch der Analysis 1–2; B.G. Teubner, Stuttgart 1991.
v. Mangoldt-Knopp: Höhere Mathematik 1–4; S. Hirzel, Stuttgart 1990. (Erste Auflage 1912)
Rudin: Analysis; Physik Verlag, Weinheim 1980.
Walter: Analysis 1–2; Springer-Verlag, Berlin 1992.

Organisatorisches
In dieser Vorlesung möchte ich die übliche Trennung in vierstündige Vorlesung und zweistündige Übung, letztere von Assistenten abgehalten, durchbrechen. Ich werde also selber sechsstündig lesen und dabei den Stoff ausführlicher darstellen, mit vielen Beispielen anreichern, vielleicht auch einmal eine Übungsaufgabe vorrechnen. Diese Vorlesungen finden statt

Montag und Dienstag um 8.15 Uhr sowie
Mittwoch um 13.30 Uhr.

Außerdem bieten wir Ihnen Betreuung in kleinen Gruppen an. Diese werden von Assistenten und älteren Studenten abgehalten. Hier werden die Übungen detailliert besprochen, und Sie können Fragen stellen.

Zu diesem Skriptum
Das Skriptum enthält meine eigenen Vorlesungsaufzeichnungen. Zu danken habe ich vor allem Frau R. Müller für die hervorragende TeX-Niederschrift und vielen Studenten für ihre Kommentare und Hilfe. Herr Ch. Bäumgen hat den Index hergestellt.

1 Grundlagen und Bezeichnungen

1.1 Mengen und Abbildungen

Sie alle kennen natürlich Mengen von der Schule her. Gerade zu Ihrer Zeit war die Mengenlehre ja „in“, wurde als neue Mathematik verkauft und war natürlich auch heiß umstritten.

Natürlich ist die Mengenlehre schon alt. Sie geht auf Georg Cantor (1845–1918) zurück. Ich möchte betonen, daß die Begründung der Mengenlehre von Anfang an kontrovers war und daß sie von der bald darauf einsetzenden Kritik, die zur Grundlagenkrise führte, voll betroffen war.

Wie gesagt, ich möchte in dieser Vorlesung auf solche Grundlagenprobleme nicht eingehen. Wir wollen also nicht definieren, was – allgemein – eine Menge eigentlich sein soll, sondern grundsätzlich – naiv – davon ausgehen, daß wir die Mengen, die wir behandeln, auch wirklich kennen. Die Operationen in ihnen sollen also überprüfbar sein; wir sollen wissen, wovon wir sprechen.

Das kann geschehen durch

a) Angabe der Elemente, z.B.

$$M := \{1, 5\}.$$

b) Angabe einer definierenden Eigenschaft E, z.B.

$$M := \{x \mid E(x)\}$$

etwa

$$M := \{x \mid x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\},$$

wobei wir voraussetzen, daß wir wissen, was eine natürliche Zahl ist.

Die „Menge aller Mengen“ ist also verboten.

Beispiele:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ die natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$
$\mathbb{Z} := \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\}$ die ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{m}{n} \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ die reellen Zahlen (sie werden noch definiert)
$\emptyset$ oder $\{\}$ die leere Menge.

Der Grund für die Einführung der Mengen in dieser Vorlesung liegt darin, daß wir uns mit ihrer Hilfe bequem und präzise ausdrücken können. Das hat viele Vorteile. Wir wollen sie also als eine Art „mathematischer Stenographie“ benutzen.

Tiefer sollten Sie aber die Mengenlehre in dieser Vorlesung nicht sehen. Auf Grundlagenprobleme werde ich nicht eingehen. Damit Sie aber doch eine Vorstellung von der Problematik erhalten, gebe ich Ihnen die berühmte Russelsche (1872–1970) Antinomie an. Viele von Ihnen werden sie sicher schon kennen.

Eine Menge M heiße normal $:\Longleftrightarrow M \notin M$. Sonst heiße sie anormal.

Beispiel:

$$\begin{aligned} S \quad := \quad & \{s \mid s \text{ ist eine Menge, die sich durch einen deutschen Satz} \\ & \qquad \text{von weniger als 30 Worten definieren läßt}\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $S \in S$, d.h. S ist anormal. Es sei nun

$$N := \text{die Menge aller normalen Mengen.}$$

Klären wir die Frage, ob N normal oder anormal ist:

α) Annahme: N sei normal. Dann folgt aus der Definition von N: $N \in N$. Also wäre N anormal.
β) Annahme: N sei anormal, also $N \in N$. Das ist nach Definition von N falsch.

Beide Annahmen führen also zum Widerspruch. Das „Tertium non datur“ gilt hier also nicht.

Wie gesagt, solche Mengen sind im folgenden verboten, und wir nehmen grundsätzlich an, daß das „Tertium non datur“ gilt.

Operationen mit Mengen

Vermutlich kennen Sie von der Schule her die gängigen Mengenoperationen. Ich gebe nur einige an:

$x \in M$ x Element von M, x enthalten in M
$M \subset N$ M Teilmenge von N
$M \subsetneq N$ M echte Teilmenge von N.

Beispiel:

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{lll} M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\} \qquad \text{Vereinigung} \\ M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\} \qquad \text{Durchschnitt} \\ M \backslash N & := & \{x \in M \,|\, x \notin N\} \qquad \text{Differenz.} \end{array}$$

M, N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ ist. Ist N eine Teilmenge von M, dann heißt $M \backslash N$ das Komplement von N in M, und man schreibt dafür auch $\complement N$, wenn M klar ist.

Einfache Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} A \cup A = A & A \cap A = A \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{array}$$

Abbildungen

Gegeben seien Mengen A und B, und es sei jedem $x \in A$ genau ein Element aus B, das wir $f(x)$ nennen, zugeordnet. Wir sagen dann, daß durch A, B und diese Zuordnung eine Abbildung f von A in B gegeben ist

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Statt Abbildung sagt man auch Funktion. Man unterscheide die Abbildung f vom Funktionswert $f(x) \in B$. „Die Abbildung $y = f(x)$“ ist sprachlich falsch. f ist eine Abbildung von A in B, aber $y = f(x)$ ein Element von B. Wir sagen auch

A ist Definitionsmenge (-bereich) von f
$R := \{y \in B \,|\, \exists\, x \in A \quad y = f(x)\}$ Wertemenge (-bereich) von f.

Es sei $C \subset A$. Dann ist

$$f(C) := \{y \in B \,|\, \exists\, x \in C \quad y = f(x)\}$$

das *Bild* von C. Entsprechend sei $D \subset B$. Dann ist

$$\{x \in A \,|\, f(x) \in D\} =: f^{-1}(D)$$

das *Urbild* von D. Das bedeutet natürlich nicht, daß es eine Umkehrabbildung

$$f^{-1} \quad : \quad D \longrightarrow A$$

gibt.

Rechenregeln

Für alle $U \subset A$ und $V \subset A$ gilt

$$\begin{array}{lcl} f(U \cap V) & \subset & f(U) \cap f(V) \\ f(U \cup V) & = & f(U) \cup f(V) \\ f(A \backslash U) & \supset & f(A) \backslash f(U). \end{array}$$

Für alle $U \subset B$ und $V \subset B$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cap V) &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ f^{-1}(B \backslash U) &= A \backslash f^{-1}(U). \end{aligned}$$

Es sei $f : A \longrightarrow B$ und $C \subsetneq A$. Dann ist

$$g := f|C \;:\; \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

die *Restriktion* von f auf C.

Umgekehrt seien $f : A \longrightarrow B$, $h : C \longrightarrow D$ mit $A \subset C$ und $h|A = f$. Dann heißt h *Fortsetzung* von f. Es kann natürlich mehrere Fortsetzungen von f geben.

Es seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ mit $f(A) \subset C$. Dann heißt

$$h := g \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

die *Verkettung* oder *Komposition* von f und g. Es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

wenn diese Verkettungen möglich sind.

Es sei $f : A \longrightarrow B$. Dann heißt

$$G(f) := \{(x, f(x)) \,\big|\, x \in A\} \subset A \times B$$

der *Graph* von f. Dabei ist die Menge aller Paare

$$A \times B := \{(a, b) \,\big|\, a \in A \text{ und } b \in B\}$$

das (direkte) *Produkt* von A und B. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ ist also eine Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft: $\forall\, x \in A \;\; \overset{1}{\exists}\, y \in B$ mit $(x, y) \in f$. Diese Auffassung entspricht der bekannten Darstellung einer Funktion durch ihre Wertetabelle.

Folgende Eigenschaften von Abbildungen sind noch wichtig.

1. $f : A \longrightarrow B$ heißt *injektiv* $:\Longleftrightarrow$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
   Zu jeder injektiven Abbildung $f : A \longrightarrow B$ mit der Wertemenge R existiert die *Umkehrabbildung*
   $$f^{-1} \;:\; R \longrightarrow A.$$
2. $f : A \longrightarrow B$ heißt *surjektiv* $:\Longleftrightarrow$ $f(A) = B$. Man sagt dann auch, f sei eine Abbildung auf B.
3. $f : A \longrightarrow B$ heißt *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv. Man sagt dann auch, f sei *umkehrbar eindeutig* oder *eineindeutig*.

1.2 Elemente der Logik

Im letzten Abschnitt haben wir eine gewisse Stenographie der Bezeichnungen eingeführt, die Sie ganz einfach lernen müssen. Nach meiner Erfahrung genügt das aber noch nicht. Man sollte auch einen Kalkül des formalen logischen Schließens zur Hand haben, mit dem man dann manches Nachdenken abkürzen kann. Ich habe immer wieder gesehen, wieviele Fehler gemacht werden, wenn man zum Beispiel bei Verneinungen die Umgangssprache benutzt. Sie ist einfach nicht präzise genug. Nehmen Sie nur den Satz: *Sie kennen natürlich alle Mengen von der Schule her*. Kennen Sie wirklich *alle Mengen* oder kennen *Sie alle* einige Mengen? Also, ich werde Sie noch ein wenig strapazieren, bevor wir zur eigentlichen Mathematik kommen.

Abkürzungen:

$\wedge$ und $\quad \vee$ oder $\quad \neg$ nicht $\quad \forall$ für alle $\quad \exists$ es gibt $\quad \overset{1}{\exists}$ es gibt genau ein

Jeder Aussage A sei ein Wahrheitswert zugeordnet, nämlich w (*wahr*) oder f (*falsch*). Wir verabreden ausdrücklich, daß das *Tertium non datur* gelten soll, das heißt

$$A \vee (\neg A) \quad \text{ist immer wahr.}$$

Wir verknüpfen nun Aussagen zu neuen Aussagen. Die *Operationen*

$$\begin{array}{rll} \neg A & \text{Negation} & \\ A \wedge B & \text{sowohl A als auch B} & \text{(A und B)} \\ A \vee B & \text{A oder B} & \\ A \Longrightarrow B & \text{Implikation} & \\ A \Longleftrightarrow B & \text{Äquivalenz} & \end{array}$$

definieren wir über *Wahrheitstafeln*:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Die letzte Spalte folgt aus $A \Longleftrightarrow B := (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$.

Besonders interessant sind nun Aussagen, die wie $A \vee (\neg A)$ immer wahr sind. Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \wedge B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \wedge (\neg B) \\ (A \Longrightarrow B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \vee B \\ (A \Longrightarrow B) & \Longleftrightarrow & ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A)). \end{array}$$

Die beiden ersten Regeln heißen DE MORGAN*sche Regeln* (1806–1871). Die vierte Regel ist besonders wichtig. Man benutzt sie zum *indirekten Beweis*. Viele Existenzsätze in der Mathematik lassen sich nur schwer oder gar nicht direkt beweisen. Man beweist dann indirekt. Hier geht besonders auffällig das Tertium non datur ein. Solche Schlüsse wurden von manchen Mathematikern abgelehnt. Der Beweis folgt aus

A	B	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(\neg A) \vee B$	$(\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Beispiel:

$\mathbb{Q}^+$ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen; für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt die folgende Aussage A.

A: Eine positive rationale Zahl läßt sich teilerfremd in der Form m/n mit $m, n \in \mathbb{N}$ darstellen.
B: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^+$.

Wir behaupten $A \Longrightarrow \neg B$ und zeigen dazu $B \Longrightarrow (\neg A)$:

$$\begin{aligned} B &\Longleftrightarrow \sqrt{2} = m/n \text{ mit } m, n \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ &\Longrightarrow 2n^2 = m^2 \\ &\Longrightarrow m = 2p \text{ mit } p \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow n = 2q \text{ mit } q \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow m, n \text{ haben den Teiler } 2 \\ &\Longrightarrow \neg A \end{aligned}$$

Weitere Abkürzungen:

$\forall\, x \in M \quad P(x)$	für alle $x \in M$ gilt $P(x)$
$\exists\, x \in M \quad P(x)$	es gibt ein $x \in M$, für das $P(x)$ gilt
$\overset{1}{\exists}\, x \in M \quad P(x)$	es gibt genau ein $x \in M$, für das $P(x)$ gilt.

Auch hierfür gelten Regeln von de Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(\forall\, x \in M \quad P(x)) &\Longleftrightarrow \exists\, x \in M \quad \neg P(x) \\ \neg(\exists\, x \in M \quad P(x)) &\Longleftrightarrow \forall\, x \in M \quad \neg P(x) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich Aussagenketten bequem negieren. Ich empfehle dringend, diesen Kalkül zu beherrschen.

Beispiel:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I = (a, b)$ ein Intervall und $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$A: \ (f_n) \text{ ist in } I \text{ gleichmäßig gleichartig stetig.}$$

Das bedeutet

$$A :\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_0 \in I \quad \forall\, x \in I,\ |x - x_o| < \delta \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Wir benötigen $\neg A$. Es ist

$$\neg A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_0 \in I \quad \exists\, x \in I,\ |x - x_0| < \delta \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Formulieren Sie das einmal in Worten und hantieren Sie damit! Ohne Kalkül macht man dann leicht Fehler.

2 Zahlen

2.1 Natürliche und rationale Zahlen

Hier möchte ich mich sehr kurz fassen und die natürlichen Zahlen im wesentlichen als bekannt voraussetzen. Es ist ja die Frage, wo man „einsteigt“, und nach Kronecker hat ja die ganzen Zahlen „der liebe Gott gemacht“. Ich gebe eine kurze axiomatische Einführung nach Giuseppe Peano (1858–1932), die um 1900 entstanden ist.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird folgendermaßen axiomatisch charakterisiert:
(1) $1 \in \mathbb{N}$.
(2) $\forall\, a \in \mathbb{N} \quad \overset{1}{\exists}\, a^+ \in \mathbb{N}$. $\quad a^+$ heißt „Nachfolger“ von a.
(3) $\forall\, a \in \mathbb{N} \quad a^+ \neq 1$.
(4) $a^+ = b^+ \Longrightarrow a = b$.
(5) Es sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $(a \in M) \Longrightarrow (a^+ \in M)$. Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Aus diesen Axiomen kann man die üblichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen folgern. Zum Beweis vgl. E. Landau: Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930. Ich gebe nur an:

1. Die *Summe* $a + b$ zweier Zahlen läßt sich eindeutig definieren, so daß $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$a + 1 = a^+ \text{ und } a + b^+ = (a + b)^+.$$

2. Es gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ und } a + b = b + a.$$

3. Das *Produkt* $a \cdot b$ oder ab zweier Zahlen läßt sich eindeutig definieren, so daß $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$a \cdot 1 = a \text{ und } a \cdot b^+ = a \cdot b + a.$$

4. Es gelten das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Multiplikation sowie das Distributivgesetz

$$(ab)c = a(bc),\ ab = ba \text{ und } a(b + c) = ab + ac.$$

Wichtig ist auch, daß sich in $\mathbb{N}$ eine *Ordnung* mit 1 als erstem Element definieren läßt. Wir holen etwas aus:

Eine *Relation* ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$ mit den folgenden drei Eigenschaften. Gilt $(x, y) \in R$, dann schreiben wir $x \sim y$.
1) $x \sim x$ (Die Relation ist reflexiv)
2) $(x \sim y \wedge y \sim z) \Longrightarrow x \sim z$ (Die Relation ist transitiv)
3a) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (Die Relation ist symmetrisch)
oder
3b) $x \sim y \wedge y \sim x \Longrightarrow x = y$ (Die Relation ist antisymmetrisch).

Eine *Ordnung* ist nun eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation (eine *Äquivalenz* ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation).

5. Vermöge

$$a \geq b \quad := \quad (a = b) \ \vee \ (\exists\, c \in \mathbb{N} \ \ a = b + c)$$

ist $\mathbb{N}$ vollständig geordnet. Das heißt, für $a, b \in \mathbb{N}$ ist $a \geq b$ oder $b \leq a$.

6. Es gilt

(i) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der Aussagen $a < b, \quad a = b, \quad a > b$

(ii) $((a < b) \wedge (b < c)) \Longrightarrow a < c$

(iii) $a < b \Longrightarrow (\forall\, c \in \mathbb{N} \quad a + c < b + c)$

(iv) $a < b \Longrightarrow (\forall\, c \in \mathbb{N} \quad ac < bc)$.

Eine Menge M heißt *wohlgeordnet*, wenn jede nicht leere Teilmenge (also auch M selbst) ein erstes Element besitzt. Es gilt der folgende wichtige Satz, der auch als Axiom benutzt werden kann:

Wohlordnungssatz: $\mathbb{N}$ *ist wohlgeordnet.*

Beweis: Es sei M eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ohne erstes Element. $n < M$ bedeute $\forall\, m \in M \;\; n < m$, und es sei $A := \{\, n \in \mathbb{N} \;\big|\; n < M \,\}$. Dann ist $1 \in A$, und aus $n < M$ folgt auch $n+1 < M$. Das fünfte Axiom liefert deshalb den Widerspruch $A = \mathbb{N}$.

Die Null und die negativen Zahlen definiert man durch Lösen der Gleichungen

$$a + x = a \quad \text{bzw.} \quad a + x = 0.$$

Das möchte ich nicht ausführen. So entstehen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$.

Zum Abschluß möchte ich noch eine wichtige Beweismethode herausstellen, nämlich das *Prinzip von der vollständigen Induktion*. Darunter versteht man folgendes:

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, und $\forall\, n \geq n_0$ seien $A(n)$ Aussagen mit

(i) $A(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang)

(ii) $\forall\, n \geq n_0$ ($A(n)$ ist wahr) $\Longrightarrow$ ($A(n+1)$ ist wahr).

Dann gilt: $\forall\, n \geq n_0$ ist $A(n)$ wahr.

Das Prinzip folgt aus dem fünften Axiom, oder einfacher aus dem Wohlordnungssatz. Es sei nämlich

$$S := \{x \in \mathbb{N} \,\big|\, x > n_0 \;\wedge\; A(x) \text{ ist falsch}\}.$$

Wäre $S \neq \emptyset$, dann würde es ein kleinstes Element $x_0 \in S$ geben. Also wäre $x_0 > n_0$ und $A(x_0 - 1)$ wahr, aber $A(x_0)$ falsch. Das geht nicht.

Beispiele:

1. $A(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   $A(1)$ ist wahr, d.h. (i) gilt für $n_0 = 1$. Wir zeigen (ii): Es sei $A(n)$ wahr, dann folgt

$$1 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n+1}{2}\,(n+2),$$

   d.h. auch $A(n+1)$ ist wahr.

2. $\forall\, x \in \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$, beides wird sogleich definiert) mit $x \neq 0$ und $x > -1$ gilt die *Bernoullische Ungleichung*

$$A(n): \qquad \forall\, n \geq 2 \quad (1+x)^n > 1 + nx.$$

   $A(2)$ ist wahr wegen $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Es sei $A(n)$ wahr, dann folgt

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x.$$

   Damit gilt auch $A(n+1)$. Die Ungleichung ist nach Jakob Bernoulli, 1654–1705, benannt.

3. Es seien $0! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, und für $0 \leq k \leq n$ seien

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   die *Binomialkoeffizienten*. Aus der Definition folgen sofort

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ und } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *binomische Formel*

$$A(n): \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$A(0)$ und $A(1)$ gelten. Es sei $A(n)$ richtig, dann folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{x^{k+1}y^{n-k} + x^k y^{n-k+1}\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n-j+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left\{\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right\} x^j y^{n-j+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} x^j y^{n-j+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j},
\end{aligned}$$

d.h. $A(n+1)$ ist wahr.

Wir wollen noch kurz die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ einführen, also die Brüche von Zahlen. D.h. wir wollen auch Gleichungen der Form

$$a \cdot x = b$$

lösen können. Zur bequemeren Formulierung benutzen wir den Begriff der Gruppe, den Sie sicher schon kennen.

Eine *Gruppe* G ist eine Menge mit einer Abbildung $\circ$, die jedem Paar $x, y \in G$ ein Element von G zuordnet

$$(x, y) \longmapsto x \circ y \in G$$

mit
1. $\forall\, x, y, z \in G \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *(Die Abbildung ist assoziativ)*
2. $\exists\, n \in G \quad \forall\, x \in G \quad x \circ n = x$ *(Es gibt ein neutrales Element)*
3. $\forall\, x \in G \quad \exists\, y \in G \quad x \circ y = n$ *(Es gibt ein inverses Element)*.

Die Gruppe heißt *abelsch* [benannt nach Niels Henrik Abel, 1802–1829], wenn zusätzlich gilt

4. $\forall\, x, y \in G \quad x \circ y = y \circ x$ *(Die Abbildung ist kommutativ)*.

Damit ist $\mathbb{Q}$ bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe, $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ist bzgl. der Multiplikation eine abelsche Gruppe, und es gilt das *Distributivgesetz*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q} \quad x(y+z) = xy + xz.$$

Damit ist $\mathbb{Q}$ ein *Körper*. Auch die Ordnung läßt sich übertragen, und es gilt

Archimedisches Grundgesetz: *Es seien $p, q \in \mathbb{Q}$ positive Zahlen. Dann gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$np > q.$$

Man spricht daher auch von dem *archimedisch geordneten Körper* $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Das neutrale Element bzgl. der Addition nennen wir 0 und das neutrale Element bzgl. der Multiplikation 1.

Lassen Sie mich schließlich noch den *Absolutbetrag* einer Zahl einführen:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Für das Rechnen mit dem Absolutbetrag gelten folgende einfache Regeln
1) $\forall\, x \in \mathbb{Q} \quad |x| \geq 0$
2) $\forall\, x, y \in \mathbb{Q} \quad |xy| = |x| \cdot |y|$
3) $\forall\, x, y \in \mathbb{Q} \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*.

Die beiden ersten Regeln sind klar. Zum Beweis der dritten bemerken wir zunächst folgendes:

Es seien $a, b \geq 0$, $a < b$ und $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ mögen existieren. Dann ist $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Das folgt aus

$$0 < b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\underbrace{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}_{>0} \implies \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0.$$

Der rechte Teil von 3) folgt dann aus

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\le x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

und der linke aus

$$|x| = |x + y - y| \le |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

also

$$|x| - |y| \le |x + y|$$

und analog

$$|y| - |x| \le |y + x| = |x + y|.$$

Folgende Bezeichnungen werden wir verwenden (auch analog für $\mathbb{R}$)

$$\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\} \qquad \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{Q}_0^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \ge 0\} \qquad \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{Q} \text{ (bzw. } \mathbb{R}) \mid a < x < b\} \quad \textit{(offenes Intervall)}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{Q} \text{ (bzw. } \mathbb{R}) \mid a \le x \le b\} \quad \textit{(abgeschlossenes Intervall).}$$

2.2 Ein Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die bisher eingeführte Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist noch zu klein, weil ja z.B. $\sqrt{2}$ nicht existiert. Wir wollen daher die größere Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einführen. Diese sollen wieder einen archimedisch geordneten Körper bilden, und es soll außerdem das *Vollständigkeitsaxiom* gelten. Um es zu formulieren, benutzen wir noch folgende Bezeichnungen:

Es sei $S \subset \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$). Dann heißt S *von unten beschränkt* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in S \quad a \le x.$$

Entsprechend heißt S *von oben beschränkt* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists b \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in S \quad x \le b,$$

und S heißt *beschränkt*, wenn S sowohl von unten als auch von oben beschränkt ist.

c heißt *größte untere Schranke von S* $:\Longleftrightarrow$

(i) c ist untere Schranke

(ii) für alle unteren Schranken a von S gilt $a \le c$.

Die größte untere Schranke von S – sofern sie existiert – bezeichnet man als

$$\inf S,$$

das Infimum von S. Entsprechend wird $\sup S$, das Supremum von S, also die kleinste obere Schranke von S, definiert. Beide sind eindeutig bestimmt, wenn sie existieren. Es seien nämlich a_1 und a_2 Infima. Dann gilt, weil beide untere Schranken sind, sowohl $a_1 \le a_2$ als auch $a_2 \le a_1$.

Nun ist klar, daß es beschränkte Mengen $S \subset \mathbb{Q}$ gibt, die – in $\mathbb{Q}$ – kein Supremum besitzen. Man nehme nur

$$S := \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots\}.$$

Offenbar gilt $\forall x \in S \quad 1 \le x \le 2$. Das Infimum von S existiert ($\inf S = 1$), das Supremum jedoch nicht, es wäre ja gerade $\sqrt{2}$.

Wir fordern daher zusätzlich das

Vollständigkeitsaxiom: *Jede nicht leere von oben (unten) beschränkte Menge S reeller Zahlen besitzt ein Supremum (Infimum) in $\mathbb{R}$.*

Beachte: Es wird nicht $\sup S \in S$ gefordert, sondern nur die Existenz von $\sup S \in \mathbb{R}$. Falls $\sup S \in S$ existiert, nennt man es *Maximum* von S und schreibt $\max S$. Entsprechend wird das *Minimum* definiert. Bitte verwechseln Sie diese Begriffe nicht!

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sollen also im folgenden ein geordneter Körper sein, der $\mathbb{Q}$ enthält und in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt. (Man kann zeigen, daß er damit bis auf Isomorphie [lineare bijektive Abbildung] eindeutig bestimmt ist.) Das soll im Augenblick genügen. In §2.4 werde ich noch eine zweite, konstruktive Einführung der reellen Zahlen geben, die Ihnen vielleicht besser gefällt. Aber auch dort wird ein Axiom benötigt.

Bemerkung 2.2.1:

1. Betrachte $f : [0,4) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Es sei $S := R(f) = [-6, 6)$. Dann gilt

$$\sup S = 6, \quad \inf S = -6, \quad \min S = -6.$$

Das Maximum von S existiert nicht, wohl aber ein „lokales Maximum“ bei 1.42 und auch ein „lokales Minimum“ bei 2.58.

2. Es gibt keine reelle Zahl r mit $\forall\, n \in \mathbb{N}\;\; n \leq r$. Denn sonst wäre $\mathbb{N}$ von oben beschränkt, und $c := \sup \mathbb{N}$ würde existieren. Wegen $c - 1 < c$ ist $c - 1$ keine obere Schranke. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c - 1 < n_0 \leq c$ oder $c < n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Damit ist c kein Supremum. Widerspruch.

3. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a < 1/n$. Dann gilt $a = 0$. Denn es sei $a > 0$. Dann würde folgen $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n < 1/a$.

4. Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 = 2$. Zum Beweis sei

$$S := \{x \in \mathbb{R}_0^+ \;\big|\; x^2 \leq 2\}.$$

S ist nicht leer ($0 \in S$), und S ist von oben durch 2 beschränkt ($x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4 > 2$). Es sei $a := \sup S$. Dann ist $a^2 = 2$:

α) Es sei $a^2 < 2$. Dann ist $2 - a^2 > 0$. Wähle n mit

$$\frac{2a+1}{2-a^2} < n.$$

Dann folgt

$$(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2,$$

und a ist nicht obere Schranke.

β) Es sei $a^2 > 2$. Wähle n mit

$$\frac{2a}{a^2-2} < n.$$

Dann folgt

$$(a - \frac{1}{n})^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 - \frac{2a}{n} > 2,$$

und a ist nicht Supremum.

Es bleibt $a^2 = 2$, und das war zu zeigen.

5. Die Argumentation hat gezeigt: Es sei $a = \sup S$. Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in S \quad a - \varepsilon < x \leq a.$$

6. Approximation reeller Zahlen durch rationale. Es sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, q \in \mathbb{Q} \quad |r - q| < \varepsilon.$$

Zum Beweis wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ und zeigen die Existenz eines q mit $|r - q| < 1/n$.

α) Es sei $r \geq 0$. Wähle $M := \{m \in \mathbb{N} \;\big|\; m > rn\}$. M ist nicht leer, nach dem Wohlordnungssatz existiert das kleinste Element $m_0 \in M$. Dann folgt

$$m_0 - 1 \leq rn < m_0 \quad \text{oder} \quad \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} \leq r < \frac{m_0}{n}.$$

Wähle $q := \frac{m_0}{n}$. Dann gilt

$$-\frac{1}{n} \leq r - q < 0.$$

β) Für $r < 0$ dasselbe mit $-r$.

2.3 Folgen und Grenzwerte

Im letzten Abschnitt haben wir die Existenz von $\sqrt{2}$ aufgezeigt — jedenfalls axiomatisch. Wir haben auch bewiesen, daß man $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen approximieren kann. Aber wie berechnet man $\sqrt{2}$ praktisch?

Es war $\sqrt{2} = \sup S$, mit

$$S = \{x \in \mathbb{Q}_0^+ \mid x^2 \leq 2\}.$$

Die Definition des Supremums kann man zur Berechnung von $\sqrt{2}$ mit dem Taschenrechner ausnutzen. Etwa folgendermaßen

x	x^2	obere Schranke?
1.5	2.25	ja
$\underline{1.4}$	1.96	nein
$\underline{1.41}$	$1.98\cdots$	nein
1.42	2.01	ja
1.415	2.00225	ja
$\underline{1.414}$	1.999396	nein
1.4145	2.00081025	ja
1.4144	$2.0005\cdots$	ja
1.4143	$2.0002\cdots$	ja
$\underline{1.4142}$	1.99996164	nein
$\underline{1.41421}$	1.9999899241	nein
1.41422	2.0000182084	ja

Die unterstrichenen Werte (obere Schranke = nein) approximieren offenbar $\sqrt{2}$ von unten, und mein Taschenrechner lieferte

$$1.4142135623 < \sqrt{2} < 1.4142135624.$$

Das ist natürlich ein sehr mühsames Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$; wir werden uns nach besseren umsehen. Aber wir können doch etwas daran lernen. Nämlich, wir konstruierten eine „Folge“ von Zahlen,

$$1.4 \quad 1.41 \quad 1.414 \quad 1.4142 \quad \cdots,$$

die gegen den „Grenzwert“ $\sqrt{2}$ „konvergiert“. Das müssen wir präzisieren.

Definition 2.3.1: *Eine Folge von Elementen der Menge M ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in M*

$$n \longmapsto a_n.$$

Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz (a_n). Man findet auch $\{a_n\}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wenn $M = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ ist, handelt es sich speziell um Zahlenfolgen. Wird im folgenden nichts anderes gesagt, seien immer Zahlenfolgen gemeint.

Nach Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) erklärt man

Definition 2.3.2: *Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Man sagt auch, die Folge (a_n) sei „Cauchy-konvergent“.

Beispiele:

1. $a_n := 1. \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| = 0$. Wähle $n_0 := 1$.
2. $a_n := 1/n. \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n_0}$. Wähle $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.
3. $a_n := n$. (a_n) ist keine Cauchyfolge. Dazu zeigen wir

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Man wähle nur $n := n_0,\ \ m := n_0 + 1$. Dann ist $|a_n - a_m| = 1$.

4. $a_n := \sqrt{n}$. (a_n) ist keine Cauchyfolge. Denn man wähle $n := n_0^2$, $m := 4n_0^2$. Dann ist $|a_n - a_m| = n_0 \geq 1$. Aber aufpassen, es gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{Ď} \longrightarrow 0 \text{ Ş}.$$

Das bedeutet noch nicht Konvergenz.

Definition 2.3.3: *Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge* (a_n) $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Definition 2.3.4: *Eine Folge* (a_n) *heißt konvergent* $:\Longleftrightarrow$ (a_n) *besitzt einen Grenzwert.*

Definition 2.3.5: *Eine Folge mit dem Grenzwert Null heißt Nullfolge.*

Wenn der Grenzwert a einer Folge (a_n) existiert, dann schreibt man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder auch} \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beispiele:

1. (a_n) mit $a_n := 1$ hat den Grenzwert 1.
2. (a_n) mit $a_n := 1/n$ ist Nullfolge.

Wir können nun beweisen

Lemma 2.3.6: *Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Zum Beweis seien a und a' Grenzwerte von (a_n). Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$.

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a' - a_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq \max\left(n_0(\frac{\varepsilon}{2}), n_0'(\frac{\varepsilon}{2})\right)$.

Lemma 2.3.7: *Eine Cauchyfolge ist beschränkt, d.h.*

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq c.$$

Zum Beweis wählen wir ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \quad |a_n - a_{n_o}| < \varepsilon$$

oder

$$\forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \quad a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon.$$

Wähle

$$c := \max\{|a_1|,\ \cdots,\ |a_{n_0-1}|,\ |a_{n_0} - \varepsilon|,\ |a_{n_0} + \varepsilon|\}.$$

Lemma 2.3.8: *Eine konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Das folgt aus

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

Die Umkehrung von Lemma 2.3.8 gilt in $\mathbb{Q}$ natürlich nicht, wohl aber in $\mathbb{R}$. Bevor wir das zeigen, bringen wir noch

Definition 2.3.9: *Eine Folge* (a_n) *heißt*
monoton wachsend $:\Longleftrightarrow\ \ \forall\, n\ \ a_n \leq a_{n+1}$
streng monoton wachsend $:\Longleftrightarrow\ \ \forall\, n\ \ a_n < a_{n+1}$
monoton fallend $:\Longleftrightarrow\ \ \forall\, n\ \ a_n \geq a_{n+1}$
streng monoton fallend $:\Longleftrightarrow\ \ \forall\, n\ \ a_n > a_{n+1}$.

Satz 2.3.10: *Es sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$. Dann konvergiert (a_n) gegen* $\sup\{a_1, a_2, \cdots\}$.

Die analoge Aussage gilt natürlich für monoton fallende Folgen. Zum Beweis sei

$$a := \sup\{a_1, a_2, \dots\},$$

das nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert. Nach Bemerkung 2.2.1.5 gilt dann

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$$

und wegen der Monotonie sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < a_n \leq a,$$

also $|a - a_n| < \varepsilon$.

Wir zeigen nun

Satz 2.3.11: *In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchyfolge.*

Beweis: Nach Lemma 2.3.7 ist (a_n) beschränkt. Es gibt also ein $K \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall n \quad -K \leq a_n \leq K.$$

Es sei

$$c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Dann gilt

$$c_n \leq c_{n+1} \leq \cdots \leq K,$$

das heißt (c_n) wächst monoton und ist beschränkt. Nach Satz 2.3.10 konvergiert also

$$c_n \to c := \sup\{c_1, c_2, \dots\}.$$

Wir zeigen $a_n \to c$: Dazu halten wir fest

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$
3. Nach Bemerkung 2.2.1.5 gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists k(n) \geq n \quad |c_n - a_{k(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt

$$\forall n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\} \quad |a_n - c| \leq |a_n - a_{k(n)}| + |a_{k(n)} - c_n| + |c_n - c| < \varepsilon,$$

wobei wir $k(n)$ nach 3 gewählt haben. Damit ist der Satz bewiesen.

Beispiele:

1. $a_n := \frac{n^2}{n^2+2n+1} \to 1$, denn $\forall n > \frac{3}{\varepsilon}$ gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{2n+1}{n^2+2n+1}\right| < \frac{3}{n} < \varepsilon$$

2. $a_n := \sqrt[n]{p}$, $p \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt
   a) $p = 1 \implies a_n = 1,\ a_n \to 1$
   b) $p > 1 \implies a_n \to 1$, denn es sei $\sqrt[n]{p} = 1 + k_n$ mit $k_n > 0$.

$$\implies \quad p = (1+k_n)^n > 1 + n\,k_n$$
$$\implies \quad 0 < k_n < \frac{p-1}{n} \to 0.$$

   c) $p < 1 \implies a_n \to 1$, denn es sei $\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+k_n}$ mit $k_n > 0$.

$$\implies \quad \frac{1}{p} = (1+k_n)^n > 1 + n\,k_n$$
$$\implies \quad 0 < k_n < \frac{\frac{1}{p} - 1}{n} \to 0.$$

3. $a_n := p^n, \quad p \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt
   a) $p < 1 \implies a_n \to 0$, denn es sei $p = \frac{1}{1+k}$ mit $k > 0$.

$$\implies a_n = \Big(\frac{1}{1+k}\Big)^n < \frac{1}{1+nk} \to 0.$$

   b) $p = 1 \implies a_n = 1$
   c) $p > 1 \implies a_n \to \infty$, denn es sei $p = 1 + k$ mit $k > 0$.

$$\implies a_n = (1+k)^n > 1 + n\,k \to \infty.$$

4. $a_n := \sqrt[n]{n} \to 1$, denn es sei $a_n = 1 + k_n$ mit $k_n > 0$ für $n > 1$. Dann ist

$$(1+k_n)^n > n(n-1)k_n^2/2 \geq n^2 k_n^2/4$$

$$\implies \quad n = (1+k_n)^n > \frac{n^2}{4}k_n^2$$
$$\implies \quad 0 < k_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0.$$

5. $a_n := \frac{n}{2^n} \to 0$, denn

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \to 0.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen weiteren Resultaten

Satz 2.3.12: *Die Folgen (a_n) und (b_n) mögen gegen a bzw. b konvergieren. Dann gilt*
1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
3. *Es sei $b \neq 0$ und* $c_n := \begin{cases} a_n/b_n & \text{für } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{für } b_n = 0 \end{cases}$. *Dann gilt* $(c_n) \to \frac{a}{b}$.

Beweis:
1. $|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.
2. $\exists \beta$ mit $|b_n| \leq \beta$.

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq \beta|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

3. Da wir die Multiplikation bereits beherrschen, sei o.B.d.A. $a_n = 1$. $\forall\, n \geq n_0(\frac{|b|}{2})$ gilt dann

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| \leq \frac{|b|}{2}$$

$$\implies \quad |b| \leq 2|b_n|$$
$$\implies \quad \left|c_n - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \leq \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

Definition 2.3.13: *Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $f : D \to \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend* $:\iff$

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \quad \implies \quad f(x_1)\ (<) \leq f(x_2).$$

Definition 2.3.14: *Es seien (a_n) eine Folge und*

$$\varphi \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

streng monoton wachsend. Dann heißt

$$n \longmapsto a_{\varphi(n)}$$

eine Teilfolge von (a_n).

Dafür schreiben wir auch (a'_n). Es gilt also stets $\varphi(n) \geq n$. Wir notieren

Lemma 2.3.15: (a_n) *konvergiere* $\implies$ *jede Teilfolge* (a'_n) *konvergiert.*

Lemma 2.3.16: $a_n \to a \implies a'_n \to a$.

Lemma 2.3.17: (a_n) *konvergiere und* $a'_n \to a \implies a_n \to a$.

Lemma 2.3.18: $(a_n) \to a \implies (|a_n|) \to |a|$.

Das letzte folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|.$$

Schließlich gebe ich noch ein zweites Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$ an, das schon auf die Pythagoreer zurückgehen soll. Es seien

$$a_1 := b_1 := 1$$

und

$$a_n := a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_n := a_n + a_{n-1},$$

also

$$(a_n, b_n) = \big((1,1), (2,3), (5,7), (12,17), (29,41), \ldots\big).$$

Dann konvergiert

$$\alpha_n := \frac{b_n}{a_n} \longrightarrow \sqrt{2}.$$

Zum Beweis zeigen wir

$$\left(b_n^2 - 2a_n^2\right)^2 = 1 \tag{$*$}$$

$$a_n \ge n. \tag{$**$}$$

Daraus folgt dann

$$\frac{b_n^2}{a_n^2} = 2 \pm \frac{1}{a_n^2} \longrightarrow 2.$$

Wir zeigen Gln. $(*)$ und $(**)$ durch vollständige Induktion. Beide Aussagen sind für $n = 1$ richtig, Aussage $(**)$ auch für $n = 2$. Es ist

$$\begin{aligned}
(b_n^2 - 2a_n^2)^2 &= b_n^4 - 4a_n^2 b_n^2 + 4a_n^4 \\
&= (a_n + a_{n-1})^4 - 4a_n^2(a_n + a_{n-1})^2 + 4a_n^4 \\
&= (2a_{n-1} + b_{n-1})^4 - 4a_n^2(2a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2) \\
&= (2a_{n-1} + b_{n-1})^4 - 4(a_{n-1} + b_{n-1})^2(3a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1}) \\
&= 4a_{n-1}^4 - 4a_{n-1}^2 b_{n-1}^2 + b_{n-1}^4 \\
&= (2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Das beweist Gl. $(*)$. Zum Beweis von Gl. $(**)$ folgert man zunächst

$$\forall\, n \quad a_n \ge 1 \quad \text{und} \quad b_n \ge a_n$$

und erhält daraus für $n \ge 2$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \ge 2a_{n-1} \ge 2(n-1) \ge n.$$

2.4 Vervollständigung der rationalen Zahlen

Die reellen Zahlen haben wir axiomatisch eingeführt und dabei besonders das Vollständigkeitsaxiom herausgestellt. Verwandte Formulierungen (Dedekindscher Schnitt, Intervallschachtelung) werden am Ende dieses Abschnitts kurz angegeben bzw. in der Übung behandelt.

Wegen der großen Bedeutung – gerade auch für ähnliche Fragestellungen in allgemeineren Räumen – möchte ich jetzt noch eine zweite Methode kurz skizzieren und die reellen Zahlen konstruktiv aus den rationalen herleiten. Diese Methode geht auf Georg Cantor zurück.

Wir betrachten Cauchyfolgen aus $\mathbb{Q}$. Offenbar können verschiedene Folgen denselben Grenzwert besitzen. Es liegt daher nahe, Äquivalenzklassen solcher Folgen zu erklären. In §2.1 haben wir schon Relationen eingeführt. Eine Äquivalenz ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation. Wir wählen hier

$$(a_n) \sim (b_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_n - b_n) \quad \text{ist Nullfolge.}$$

Offenbar wird dadurch in den Cauchyfolgen aus $\mathbb{Q}$ eine Äquivalenz definiert.

Es sei $\alpha = [(a_n)]$ die von (a_n) „erzeugte Äquivalenzklasse", d.h. α repräsentiert die Menge aller Cauchyfolgen (b_n) mit $(a_n - b_n)$ ist Nullfolge.

Es sei $\mathbb{A}$ die Menge dieser Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen aus $\mathbb{Q}$.

Mit diesen Äquivalenzklassen kann man wieder rechnen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &:= [(a_n + b_n)] \\ \alpha \cdot \beta &:= [(a_n \cdot b_n)]. \end{aligned}$$

Wir verzichten auf den Nachweis der arithmetischen Gesetze im einzelnen. Die Körperaxiome sind also erfüllt. o repräsentiert die Klasse der Nullfolgen.

Auch die Ordnung läßt sich übertragen. Dazu zerlegen wir disjunkt

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^- \cup O \cup \mathbb{A}^+ \text{ mit } O := \{o\}.$$

Es sei nämlich die Cauchyfolge (a_n) keine Nullfolge, also

$$\exists\, p > 0 \quad \forall\, k \quad \exists\, l \geq k \quad |a_l| \geq p.$$

Wähle $m_0 \geq n_0(\frac{p}{2})$ [aus der Konvergenz] mit

$$|a_{m_0}| \geq p.$$

Dann folgt

$$\forall\, n \geq n_0\left(\frac{p}{2}\right) \quad |a_n - a_{m_0}| < \frac{p}{2}$$

oder

$$a_{m_0} - \frac{p}{2} < a_n < a_{m_0} + \frac{p}{2}.$$

Nun können zwei Fälle auftreten. Wenn $a_{m_0} > 0$ ist folgt

$$\forall\, n \geq n_0\left(\frac{p}{2}\right) \quad a_n > \frac{p}{2},$$

und wenn $a_{m_0} < 0$ ist

$$\forall\, n \geq n_0\left(\frac{p}{2}\right) \quad a_n < -\frac{p}{2}.$$

Diese beiden Fälle schließen sich offenbar gegenseitig aus. Das liefert die gewünschte Zerlegung. $\alpha > \beta$ wird dann durch $\alpha - \beta \in \mathbb{A}^+$ definiert, und man kann nachweisen, daß auch die Ordnungsaxiome erfüllt sind.

Auch der Abstand (Absolutbetrag) läßt sich definieren:

$$|\alpha| := [(|a_n|)] \in \mathbb{A}_0^+ := \mathbb{A}^+ \cup O.$$

Der Absolutbetrag hat die üblichen Eigenschaften

1. $|\alpha| \in \mathbb{A}_0^+$. $|\alpha| \in \mathbb{A}^+ \implies \alpha \neq o$
2. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Wir betten nun $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{A}$ ein. Es sei $q \in \mathbb{Q}$. Wähle $q_n := q$ und

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ q &\longmapsto [(q_n)], \quad q_n = q. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv. f erhält auch die arithmetischen Operationen und die Ordnung

$$\begin{aligned} f(p+q) &= f(p) + f(q) \\ f(p \cdot q) &= f(p) \cdot f(q) \\ p < q &\implies f(p) < f(q) \\ |f(p)| &= [(|p_n|)_{p_n = p}] = f(|p|). \end{aligned}$$

Wir identifizieren daher $\mathbb{Q}$ mit

$$\{[(q_n)_{q_n=q}] \;\big|\; q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{A}$$

und schreiben einfach wieder q statt $[(q_n)_{q_n=q}]$. Dann ist auch $|f(q)| = |q|$.

Schließlich halten wir noch folgendes fest. Es sei $\alpha = [(a_n)]$ und

$$q_j := [(b_n)_{b_n=a_j}].$$

Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, j \geq n_0 \quad |\alpha - q_j| < \varepsilon.$$

Das folgt aus

$$\forall\, n, j \geq n_0 \;\; |a_n - a_j| < \varepsilon,$$

also

$$|\alpha - q_j| = |([a_n - a_j])| = ([|a_n - a_j|]) < \varepsilon.$$

Wir betrachten nun auch Folgen (α_n) aus $\mathbb{A}$. Cauchyfolgen und Konvergenz werden wie üblich definiert, zum Beispiel

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{A}^+ \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n, m \geq n_0 \quad |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon.$$

Wir zeigen, daß jede Cauchyfolge aus $\mathbb{A}$ auch in $\mathbb{A}$ einen Grenzwert besitzt, das heißt, daß $\mathbb{A}$ vollständig ist. Also

Satz 2.4.1: *$\mathbb{A}$ ist vollständig.*

Beweis: Es sei (α_n) eine Cauchyfolge, etwa $\alpha_n = [(a_{n,j})]$ mit $a_{n,j} \in \mathbb{Q}$. Wir wählen $j(n)$ so groß, daß

$$|\alpha_n - q_n| < \frac{1}{n} \;\text{ mit }\; q_n := [(a_{n,j})_{j=j(n)}]$$

gilt. Dann folgt

$$|q_n - q_m| < \frac{1}{n} + |\alpha_n - \alpha_m| + \frac{1}{m}.$$

Die q_n können wir mit rationalen Zahlen $q_n \in \mathbb{Q}$ identifizieren, (q_n) ist dann also selbst eine Cauchyfolge, und es sei

$$\alpha := [(q_n)] \in \mathbb{A}.$$

α ist Grenzwert von (α_n), denn es gilt

$$|\alpha - \alpha_n| \leq |\alpha - q_n| + |q_n - \alpha_n| \leq |\alpha - q_n| + \frac{1}{n}.$$

Das war zu zeigen.

$\mathbb{A}$ besitzt daher alle Eigenschaften der reellen Zahlen, und wir schreiben wieder $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{A}$.

Bemerkung 2.4.2:

1. Das Vollständigkeitsaxiom wurde bei dieser Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen nicht benötigt. Der „wunde Punkt“ bei dieser Einführung ist die etwas vage Definition der Menge $\mathbb{A}$. Es ist nicht unmittelbar klar, ob die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen nicht zu den Mengen gehört, in deren Bereich Widersprüche aufgetreten sind. Wir hatten ja verabredet, nur solche Mengen zu verwenden, deren Elemente wir auch wirklich kennen. Im Grunde lautet unser Axiom jetzt

   $\mathbb{A}$ ist korrekt definiert.

   Das heißt, auch bei dieser Konstruktion haben wir eine starke Annahme gemacht, die in dieser Vorlesung nicht weiter diskutiert oder überprüft werden soll.
2. Darstellung der Zahlen auf der Zahlengeraden g.
   Wählt man auf der Geraden zwei Punkte (Null und Eins) aus, dann lassen sich alle rationalen Punkte auf der Geraden darstellen. Genauer, es gibt eine injektive Abbildung

   $$f \;:\; \mathbb{Q} \longrightarrow g.$$

   Nun ist aber bekannt, daß es inkommensurable Strecken gibt ($\sqrt{2}$). Gerade dies war das Problem der Griechen. Anschaulich ausgedrückt, die rationalen Zahlen lassen auf der Geraden zuviele „Lücken“, die erst von den reellen ausgefüllt werden.

Diesen Zusammenhang zwischen Analysis und Geometrie wollen wir noch durch das Cantor-Dedekindsche Axiom schließen (R. Dedekind, 1831–1916). Vorher erklären wir

Definition 2.4.3: *Es seien (a_n) eine monoton steigende und (b_n) eine monoton fallende Zahlenfolge mit*

1. $\forall n \quad a_n \leq b_n$
2. $(a_n - b_n)$ *ist Nullfolge.*

Dann nennen wir die Folge (I_n) der Intervalle $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung.

Aufgrund der Definition der reellen Zahlen ist klar, daß es genau eine reelle Zahl r gibt mit

$$\forall n \quad r \in I_n.$$

Wir hätten diese Eigenschaft auch als Axiom anstelle des Vollständigkeitsaxioms zugrundelegen können.

Den Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}$ und der Geraden stellen wir nun her durch

Cantor-Dedekindsches Axiom: *Auf einer Geraden sei eine rationale Intervallschachtelung gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt, der allen Intervallen dieser Schachtelung angehört.*

Bemerkung 2.4.4: *Anstelle einer Intervallschachtelung kann man auch einen „ Dedekindschen Schnitt“ verwenden. Ein Schnitt ist eine Menge $S \subset \mathbb{Q}$ mit*

1. $S \neq \emptyset$ *und* $S \neq \mathbb{Q}$
2. $s \in S \ \wedge \ q \in \mathbb{Q} \ \wedge \ q < s \implies q \in S$
3. $\forall s \in S \quad \exists t \in S \quad s < t.$

2.5 Komplexe Zahlen

Unser System der reellen Zahlen weist noch einen Mangel auf, der sich aber rasch beheben läßt. Gleichungen der Form

$$x^2 = -2$$

können nämlich noch nicht gelöst werden. Um diesen Mangel zu beheben, führen wir die „komplexen Zahlen“ ein.

Wir betrachten Tupel $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und erklären die Rechenoperationen

$$x + y := (x_1 + y_1, \ \ x_2 + y_2)$$

$$x \cdot y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, \ \ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Man bestätigt leicht, daß die Axiome der Arithmetik wieder erfüllt sind. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} o &= (0, 0) \\ \mathrm{e} &= (1, 0) \\ x^{-1} &= \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \ , \ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \quad \text{für } x \neq o. \end{aligned}$$

Statt o schreiben wir wieder 0 und statt e wieder 1. Der Absolutbetrag

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

hat die üblichen Eigenschaften (vgl. §2.1). Insbesondere folgt die Dreiecksungleichung aus

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \operatorname{Re} (x + y)\overline{(x + y)} \\ &= \operatorname{Re} (x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y}) \\ &= |x|^2 + 2 \operatorname{Re} x\bar{y} + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x\bar{y}| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Man bezeichnet auch

$\bar{x}$	:=	$(x_1, -x_2)$	„konjugiert komplexe Zahl“
$\operatorname{Re} x$	:=	x_1	„Realteil von x“
$\operatorname{Im} x$	:=	x_2	„Imaginärteil von x“.

Es gilt

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{\bar{x}} & = & x \\
|x| & = & |\bar{x}| \\
x\bar{x} & = & |x|^2 \\
\overline{x \cdot y} & = & \bar{x} \cdot \bar{y}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}(x + \bar{x}) & = & (x_1, 0) \\
\frac{1}{2}(x - \bar{x}) & = & (0, x_2).
\end{array}
$$

Wenn der Imaginärteil verschwindet, können wir wie gewohnt reell rechnen. Für den allgemeinen Fall wollen wir aber die Notation etwas vereinfachen und verwenden die „imaginäre Einheit“

$$\mathrm{i} := (0, 1),$$

schreiben also $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$. Dann gilt folgende Multiplikationstabelle

$$
\begin{array}{c|cc}
\cdot & \mathrm{e} & \mathrm{i} \\
\hline
\mathrm{e} & \mathrm{e} & \mathrm{i} \\
\mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{e}
\end{array}\quad ,
$$

also $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{e}$.

Damit haben wir unser Problem gelöst. Die Gleichung

$$x^2 = -2$$

hat die Lösungen $x = \pm\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Es sei $\mathbb{C}$ diese Menge der komplexen Zahlen. Es sei

$$
\begin{array}{rcccl}
f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & & x & \longmapsto & x \cdot \mathrm{e}.
\end{array}
$$

f ist injektiv und erhält die Rechenoperationen. Damit ist $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ eingebettet.

Veranschaulichen kann man das in der Gaußschen Zahlenebene (Karl Friedrich Gauss, 1777–1855). Man kann dort Polarkoordinaten einführen vermöge

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad \varphi := \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Bemerkung 2.5.1: *Ein wichtiger Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ besteht darin, daß sich in $\mathbb{C}$ so einfach keine Ordnung einführen läßt. In $\mathbb{C}$ macht $x < y$ zunächst keinen Sinn, höchstens für „gewisse“ x und y. Auf die Konvergenzdefinitionen und die daraus abgeleiteten Sätze hat das aber keinen Einfluß, weil dort immer nur der Absolutbetrag verwandt wurde.*

3 Elemente der Topologie

In diesem Kapitel möchte ich einige Grundbegriffe aus der Topologie herausstellen. In der Topologie beschäftigt man sich – grob gesagt – mit den Invarianten, die bei stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Nun, da ich noch nicht definiert habe, was stetig ist, sagt das nicht viel. Also, im Spaß, Topologie ist die Mathematik mit Gummi und Schere.

3.1 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir wollen verschiedene Mengen vergleichen und sagen können, wie „groß" sie sind. Dazu erklären wir

Definition 3.1.1: *Es seien A und B zwei Mengen. Existiert eine bijektive Abbildung von A auf B, dann sagt man A und B haben dieselbe „ Kardinalzahl", oder auch A und B seien „ äquivalent" oder „ gleichmächtig".*

Wir schreiben dies als $A \sim B$. Diese Relation ist offenbar eine Äquivalenzrelation (vgl. §2.1), denn sie ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Es sei

$$\mathbb{N}(n) := \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Ist dann A irgendeine Menge, dann heißt A
(1) *endlich*, wenn $A \sim \emptyset$ oder $A \sim \mathbb{N}(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
(2) *unendlich*, wenn A nicht endlich ist
(3) *abzählbar*, wenn $A \sim \mathbb{N}$
(4) *höchstens abzählbar*, wenn A endlich oder abzählbar ist
(5) *überabzählbar*, wenn A weder endlich noch abzählbar ist.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.
Zum Beweis wählen wir folgende Anordnung von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N} & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \mathbb{Z} & : & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots . \end{array}$$

$$f(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für n gerade} \\ -(n-1)/2 & \text{für n ungerade} \end{cases}$$

liefert eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 3.1.2: *Eine endliche Menge ist zu keiner ihrer echten Teilmengen äquivalent. Dagegen ist dies im Falle unendlicher Mengen durchaus möglich, wie das letzte Beispiel gezeigt hat.*

Es gilt

Satz 3.1.3: *Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge A ist abzählbar.*

Es sei nämlich $E \subset A$, E unendlich. Man ordne die Elemente x von A als Folge (x_n) mit paarweise verschiedenen Gliedern an und konstruiere eine Folge (n_k) wie folgt:
1. n_1 sei die kleinste natürliche Zahl mit $x_{n_1} \in E$.
2. Sind $n_1, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt ($k = 2, 3, \dots$), dann sei $n_k > n_{k-1}$ die kleinste natürliche Zahl mit $x_{n_k} \in E$.

$$f(k) := x_{n_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

liefert dann eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und E.

Satz 3.1.4: *Es seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, abzählbare Mengen und*

$$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Dann ist M abzählbar.

Zum Beweis ordnen wir jede der Mengen A_n in der Form $\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$ und betrachten das folgende Schema:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

In der durch die Pfeile angedeuteten Weise können diese Elemente in der Folge

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ \ldots \tag{$*$}$$

angeordnet werden. Haben zwei der Mengen A_n gemeinsame Elemente, dann treten diese in $(*)$ mehrfach auf. Also existiert eine Teilmenge $T \subset \mathbb{N}$ mit $T \sim M$, d.h. M ist höchstens abzählbar. Wegen $A_1 \subset M$ ist M unendlich, also abzählbar.

Korollar 3.1.5: *Es sei A höchstens abzählbar, und zu jedem $a \in A$ gebe es eine höchstens abzählbare Menge B_a. Dann ist*

$$M := \bigcup_{a \in A} B_a$$

höchstens abzählbar.

Korollar 3.1.6: *Es sei A abzählbar und $B = A \times A$. Dann ist auch B abzählbar.*

Denn die Elemente von B bilden eine abzählbare Familie $(a_i,\ A)$ abzählbarer Mengen.

Korollar 3.1.7: *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Denn jede rationale Zahl hat die Form m/n, und die Menge der Paare (m, n) ist abzählbar.

Es gibt aber auch überabzählbare Mengen.

Beispiel 3.1.8: *Es sei M die Menge aller Folgen, deren Glieder entweder 0 oder 1 sind. M ist überabzählbar.*

Beweis: Es sei $A \subset M$ eine abzählbare Teilmenge, und es seien $a_1, a_2, a_3, \cdots$ die Folgen in A. Dann konstruieren wir eine Folge $a = (\alpha_n)$ mit

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn das } n\text{-te Glied von } a_n \text{ gleich 1 ist} \\ 1 & \text{wenn das } n\text{-te Glied von } a_n \text{ gleich 0 ist.} \end{cases}$$

Offenbar ist a verschieden von allen a_i, d.h. $a \notin A$. Andererseits gilt $a \in M$, also $A \subsetneq M$. Mithin kann M nicht abzählbar sein.

Die Grundidee des obigen Beweises wurde zuerst von Georg Cantor benutzt und ist als *Cantorsches Diagonalverfahren* bekannt.

Setzen wir die Darstellbarkeit (Äquivalenz) der reellen Zahlen durch Dezimalbrüche oder Dualbrüche als bekannt voraus (in §4.1 werden wir kurz darauf eingehen), dann folgt

Korollar 3.1.9: *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Es sei $\#A$ die Kardinalzahl der Menge A. Dann bezeichnen wir

1. $A \sim \mathbb{N}(n) \implies \#A = n$
2. $A \sim \mathbb{N} \implies \#A =: \aleph_0$ (Aleph, der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets)
3. $A \sim \mathbb{R} \implies \#A =: \aleph$ (die Mächtigkeit des Kontinuums).

Die Kontinuumhypothese besagt, daß es keine Menge mit einer Kardinalzahl zwischen $\aleph_0$ und $\aleph$ gibt. Nach den Ergebnissen von Kurt Gödel (1906–1978) und Paul J. Cohen (1934–) ist diese Hypothese aus den Axiomen der Mengenlehre weder zu beweisen noch zu widerlegen. Für $\aleph_0$ bzw. $\aleph$ schreibt man auch a bzw. c oder $\aleph_1$.

Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ von A. Es gilt $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. Das sieht man so: Es sei $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. N werde eine Folge $(a_1, a_2, \cdots)$ nach folgender Vorschrift zugeordnet:

$$a_k := \begin{cases} 1 & \text{für } k \in N \\ 0 & \text{für } k \notin N. \end{cases}$$

Offenbar erhält man so eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{P}(N)$ und $\mathbb{R}$ (in der Dualdarstellung).

Für endliche Mengen ist $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$. Nimmt man das im allgemeinen als Definition, dann folgt

$$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

3.2 Metrische Räume

Wenn man Analysis treiben will, muß man natürlich messen können. Dazu haben wir in §2.1 bereits den Absolutbetrag einer Zahl eingeführt und erhalten damit den Abstand zweier Zahlen durch

$$|x - y|.$$

Hieran stört vielleicht, daß man zum Messen addieren können muß, daß also eine algebraische Operation eingeht. Denkt man an das Schlagwort „Gummimathematik“, dann sollte ein Begriff wie „Umgebung“ unabhängig von der algebraischen Struktur formuliert werden. Deshalb definieren wir

Definition 3.2.1: *Es sei X eine Menge. Dann heißt*

$$d \;:\; X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Metrik auf X $:\Longleftrightarrow$ *für alle* $x_i \in X$ *gilt*

(i) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

(ii) $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$

(iii) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$.

Die dritte Eigenschaft heißt *Dreiecksungleichung*. Aus ihr folgt unmittelbar

(iv) $|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)$.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_3) \\ &\leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4) + d(x_4, x_3) \end{aligned}$$

also

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)$$

und analog

$$d(x_3, x_4) - d(x_1, x_2) \leq d(x_3, x_1) + d(x_4, x_2).$$

Definition 3.2.2: *Eine Menge X mit einer Metrik d heißt metrischer Raum* (X, d).

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ mit $d_1(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}$
2. $\mathbb{R}^n$ mit $d_2(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|$
3. $\mathbb{R}^n$ mit $d_3(x, y) := \max_{i=1,\cdots,n} |\xi_i - \eta_i|$
4. $\mathbb{R}^n$ mit $d_4(x, y) := \sqrt{|x - y|}$
5. $[0, 1]$ mit $d_1(x, y) = |x - y|$.

Besonders die beiden letzten Beispiele sind wichtig. Im vierten Beispiel gilt nicht mehr

$$d(sx, sy) = |s| d(x, y),$$

d_4 ist also in diesem Sinne nicht mehr linear. Der Nachweis der Dreiecksungleichung folgt in diesem Falle aus

$$\begin{aligned} |x - y| \leq |x - z| + |z - y| &\leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z| \cdot |z - y|} \\ &= \left(\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|}\right)^2 \end{aligned}$$

und der Monotonie der Wurzelfunktion (vgl. §2.1, im Beweis der Dreiecksungleichung).

Im fünften Beispiel kann man in der zugrundeliegenden Menge $X = [0, 1]$ nicht mehr beliebig addieren, man kann also gar nicht rechnen. Das tritt bei Approximationen in der Praxis besonders häufig auf.

Definition 3.2.3: *Es sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $x_0 \in X$. *Dann heißt*

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

Kugel (Ball) um x_0 *mit dem Radius* $r \in \mathbb{R}^+$.

Beachte, eine „Kugel" kann anschaulich durchaus ein Quadrat sein (Beispiele 2 und 3 oben). Für $i = 1, 2$ gilt aber $d_3 \leq d_i \leq n d_3$.

Damit haben wir eine metrische Struktur definiert und können in metrischen Räumen Analysis treiben, ohne eine algebraische Struktur benutzen zu müssen. Die Definitionen von Cauchyfolge, Konvergenz, Grenzwert usw. übertragen sich wörtlich, zum Beispiel

Definition 3.2.4: *(X, d) sei ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Dann heißt (x_n) Cauchyfolge* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir für reelle Punktmengen weitere Eigenschaften herausstellen. Hier sollen nur noch zwei Punkte angesprochen werden. Einmal, wie bei den rationalen Zahlen stellt sich in metrischen Räumen das Problem der Vollständigkeit.

Definition 3.2.5: *Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig $:\Longleftrightarrow$ Jede Cauchyfolge besitzt einen Grenzwert in (X, d).*

Einen unvollständigen metrischen Raum vervollständigt man nun wie die rationalen Zahlen (§2.4). Dazu benötigt man nur die Metrik und – axiomatisch – die Existenz der Menge der Äquivalenzklassen von konvergenten Cauchyfolgen. Benutzt man

Definition 3.2.6: *(X, d_x) und (Y, d_y) sind isometrisch* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\, f \;\; : \;\; X \longrightarrow Y \quad \textit{bijektiv}$$

mit $d_x(x_1, x_2) = d_y(f(x_1), f(x_2))$,

dann folgt wie in §2.4

Satz 3.2.7: *Es sei (X, d_x) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (Y, d_y) und einen dichten Teilraum (Y_0, d_y), $Y_0 \subset Y$ mit*

$$(X, d_x) \textit{ und } (Y_0, d_y) \textit{ sind isometrisch.}$$

In diesem Sinne unterscheiden wir dann X und Y_0 nicht mehr. Dabei heißt Y_0 *dicht* in Y $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, y \in Y \quad \forall\, \varepsilon \quad \exists\, y_0 \in Y_0 \quad d_Y(y, y_0) < \varepsilon.$$

In §2.4 waren die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$.

Als zweiter Punkt soll noch ein wichtiges Resultat bewiesen werden. Sowohl in der reinen als auch in der angewandten Mathematik möchte man immer wieder Gleichungen lösen, und zwar oft möglichst konstruktiv, d.h. es soll ein Lösungsverfahren mit angegeben werden. Nun kann man solche Gleichungen leicht als *Fixpunktgleichung*

$$T(x) = x$$

schreiben, und man möchte *Fixpunktsätze* beweisen. Ein sehr einfaches und doch immer noch sehr schlagkräftiges Ergebnis in dieser Richtung ist der folgende Satz, der auf Stefan Banach (1892–1945) zurückgeht. Zu seiner Formulierung benötigen wir

Definition 3.2.8: *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und*

$$T \;\; : \;\; X \longrightarrow X.$$

Dann heißt T kontrahierend $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\, k \in [0, 1) \quad \forall\, x, y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y).$$

Banachscher Fixpunktsatz: *Es seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und*

$$T \;\; : \;\; (X, d) \longrightarrow (X, d)$$

eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt die Gleichung

$$T(x) = x$$

genau eine Lösung $\hat{x}$, und es gilt mit $x_n := T(x_{n-1})$, $x_0 \in X$ beliebig

$$d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{k^n}{1 - k}\, d(x_1, x_0).$$

Wir beweisen den Satz in vier Schritten.

1. (x_n) konvergiert. Das folgt aus

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\le d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le (k^{n+m-1} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \\ &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

2. Es sei $\hat{x} := \lim x_n$. Dann ist $\hat{x}$ Fixpunkt. Das folgt aus

$$\begin{aligned} d(\hat{x}, T(\hat{x})) &\le d(\hat{x}, x_n) + d(x_n, T(\hat{x})) \\ &\le d(\hat{x}, x_n) + k\, d(x_{n-1}, \hat{x}) \to 0. \end{aligned}$$

3. $\hat{x}$ ist eindeutig bestimmt. Denn aus $\tilde{x} = T(\tilde{x})$ folgt

$$d(\hat{x}, \tilde{x}) = d(T(\hat{x}), T(\tilde{x})) \le k\, d(\hat{x}, \tilde{x})$$

oder

$$\underbrace{(1-k)}_{>0} d(\hat{x}, \tilde{x}) \le 0.$$

4. Aus dem ersten Schritt folgt für $j > n$

$$d(x_j, x_n) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0),$$

also

$$d(\hat{x}, x_n) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, x_n) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Man beachte, daß dieser Satz nicht nur die eindeutige Lösbarkeit liefert, sondern daß auch ein Iterationsverfahren

$$x_0 \text{ beliebig}, \quad x_n := T(x_{n-1})$$

angegeben wird mit der Fehlerabschätzung

$$d(x_n, \hat{x}) \le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0).$$

Beispiel:

Wir berechnen wieder $\sqrt{2}$. Dazu sei $X := [1, 2]$ mit der üblichen Metrik, denn wir wissen ja, daß $\sqrt{2}$ in diesem Intervall liegt. Wir konstruieren dann eine möglichst gut kontrahierende Abbildung T mit dem Fixpunkt $\sqrt{2}$. Wir wollen hier an dieser Stelle grob vorgehen, im nächsten Kapitel werden wir das Verfahren noch etwas verfeinern. Jetzt setzen wir an

$$T(x) = x + c(2 - x^2) = -c\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \frac{1 + 8c^2}{4c}.$$

Die Konstante c muß so gewählt werden, daß gilt:

1. $T : [1, 2] \longrightarrow [1, 2]$
2. $\exists\, k \in [0, 1)\ \ |T(x) - T(g)| \le k|x - y|$.

Nun ist

$$\begin{aligned} T(1) = 1 + c &\implies 0 \le c \le 1 \\ T(2) = 2 - 2c &\implies \frac{1}{2} \le 1 - c \le 1 \implies 0 \le c \le \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es sei nun $c \in [0, \frac{1}{2}]$. Dann gilt

$$x < \sqrt{2} \implies 1 \le x \le T(x) = x + c\underbrace{(2 - x^2)}_{>0} \le x + \frac{1}{2} < 2$$

$$x > \sqrt{2} \implies 2 \ge x \ge T(x) \ge x - \frac{1}{2}(x^2 - 2) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2} \ge 1.$$

Die erste Bedingung wird also $\forall\, c \in [0, \frac{1}{2}]$ erfüllt. Zum Nachweis der zweiten berechnen wir

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \cdot |1 - c(x + y)|.$$

Wir müssen also dafür sorgen, daß auch

$$\forall\, x, y \in [1, 2] \quad |1 - c(x + y)| \leq k < 1$$

wird. Wegen $2 \leq x + y \leq 4$ ist

$$1 - 4c \leq 1 - c(x + y) \leq 1 - 2c.$$

Wählen wir, ohne weiter nach dem günstigsten Wert zu fragen, $c := \frac{1}{3}$, dann folgt

$$-\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{x + y}{3} \leq \frac{1}{3},$$

also $k = \frac{1}{3}$.

Damit erfüllt also

$$T(x) = x + \frac{2 - x^2}{3}$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes in $[1, 2]$ mit $k = \frac{1}{3}$. Die Rechnung liefert

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{38}{27} = 1.\overline{407},$$

und für $n = 10$ erhält man

$$|\sqrt{2} - x_{10}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \leq 8.5 \cdot 10^{-6}.$$

3.3 Reelle Punktmengen

In diesem Abschnitt möchte ich noch einige Begriffe aus der Theorie der metrischen Räume bringen und sie gegebenenfalls auf reelle Punktmengen – mit denen wir es zunächst zu tun haben werden – spezialisieren.

Im folgenden sei immer ein vollständiger metrischer Raum (X, d) zugrunde gelegt. Denken Sie an $\mathbb{R}$ mit der üblichen Abstandsmetrik.

Definition 3.3.1: *$x \in M \subset X$ heißt innerer Punkt von M $:\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \subset M.$$

Definition 3.3.2: *$M \subset X$ heißt offen $:\Longleftrightarrow$ M besteht nur aus inneren Punkten.*

Definition 3.3.3: *Es sei $M \subset X$. Dann heißt $x_0 \in X$ Häufungspunkt von M $:\Longleftrightarrow$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in M,\ x \neq x_0 \quad x \in B(x_0, \varepsilon).$$

Beachten Sie die Forderung $x \neq x_0$! x_0 soll nicht isolierter Punkt von M sein.

Definition 3.3.4: *$x_0 \in M \subset X$ heißt isolierter Punkt von M $:\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \big(B(x_0, \varepsilon) \backslash \{x_0\}\big) \cap M = \emptyset.$$

Definition 3.3.5: *$M \subset X$ heißt abgeschlossen $:\Longleftrightarrow$ alle Häufungspunkte von M gehören zu M.*

Definition 3.3.6: *$M \cup \{$alle Häufungspunkte von $M\}$ $\Longleftrightarrow:$ Abschluß $\bar{M}$ von M in X.*

Beachten Sie, daß sprachlich leicht Mißverständnisse auftreten können:

$\mathbb{R}$ selbst ist in $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen.

$(0, 1]$ ist in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Es gilt aber

$$M \subset X \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad \complement M \subset X \text{ abgeschlossen}$$

und umgekehrt.

Definition 3.3.7: *$x_0 \in X$ heißt Randpunkt von $M \subset X$, $x_0 \in \partial M$, $:\Longleftrightarrow$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \Big(\exists\, x \in B(x_0, \varepsilon) \cap M\Big) \wedge \Big(\exists\, y \in B(x_0, \varepsilon) \backslash M\Big).$$

Definition 3.3.8: *Ein Berührungspunkt ist ein Häufungspunkt oder ein isolierter Punkt.*

$\bar{M}$ ist also die Menge der Berührungspunkte von M. Schließlich erinnern wir noch an

Definition 3.3.9: *$M \subset X$ ist beschränkt $:\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \in X \quad M \subset B(x_0, \varepsilon)$$

und

Definition 3.3.10: *M ist in X dicht $:\Longleftrightarrow \bar{M} = X$.*

Beispiel: Es sei $M := (0, 1] \cup \{2\}$. Dann sind

$(0, 1)$ innere Punkte
$[0, 1]$ Häufungspunkte
$\{0, 1, 2\}$ Randpunkte
$\{2\}$ isolierter Punkt
$[0, 1] \cup \{2\}$ Berührungspunkte.

Anstelle von Kugeln (oder Kugelumgebungen) spricht man oft auch von Umgebungen schlechthin.

Definition 3.3.11: *Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung des Punktes $x_0 \in X$, $U = U(x_0)$, $:\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B(x_0, \varepsilon) \subset U.$$

Offenbar gilt

Satz 3.3.12: *U, V seien Umgebungen von x_0. Dann ist auch $U \cap V$ Umgebung von x_0*

sowie

Satz 3.3.13: *Es seien $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Dann gibt es Umgebungen $U(x_1)$, $U(x_2)$ mit*

$$U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset.$$

In allgemeineren Räumen ist das das *Hausdorffsche Trennungsaxiom* (Benannt nach Felix Hausdorff, 1868–1942 in Bonn). Zum Beweis des Satzes wählen wir $\rho := |x_1 - x_2|$. Kugeln um x_1, x_2 mit den Radien $\rho/2$ trennen dann x_1 und x_2.

Satz 3.3.14:
1. Die Vereinigung beliebiger offener Mengen ist offen.
2. Der Durchschnitt endlicher vieler offener Mengen ist offen.

Beweis:
1. Es sei F eine Familie offener Mengen und

$$\tilde{M} := \bigcup_{M \in F} M.$$

Es sei $x_0 \in \tilde{M}$. Dann gibt es ein $M_0 \in F$ mit $x_0 \in M_0$. M_0 ist offen, also eine Umgebung von x_0. Erst recht ist dann $\tilde{M}$ eine Umgebung von x_0.

2. Es sei $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Dann folgt $x_0 \in M_i$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$. Jedes M_i ist offen und damit Umgebung von x_0. Nach Satz 3.3.12 ist dann auch $\tilde{M}$ eine Umgebung von x_0.

Die zweite Aussage ist für unendlich viele Mengen falsch! Beispiel:

$$M_i := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 1 + \frac{1}{i} \right\}.$$

Dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = (0, 1]$$

nicht offen.

Schließlich erinnern wir noch an einen Satz, der auf Bernard Bolzano (1781–1848) und Karl Weierstrass (1815–1897) zurückgeht.

Satz von Bolzano-Weierstraß *: Jede unendliche beschränkte Menge M reeller Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.*

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Vollständigkeitsaxiom. Es seien $x_1, x_2, \cdots$ verschiedene Punkte aus M und

$$c_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Wie im Beweis zu Satz 2.3.11 folgt

$$c_n \to c = \sup\{c_1, c_2, \dots\},$$

und c ist Häufungspunkt.

Schließlich komme ich noch einmal kurz auf Folgen zurück. Wir wollen sagen

Definition 3.3.15: *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n) :* $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overset{\infty}{\exists}\, n \in \mathbb{N} \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Zum Beispiel hat (a_n) mit $a_n := (-1)^n$ die Häufungspunkte 1 und -1.

Es sei A die Menge der Häufungspunkte von (a_n), dann nennt man – sofern vorhanden –

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim}\, a_n := \lim_{k\to\infty} \Big(\sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \Big) = \sup A$$

den „Limes superior" und entsprechend

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim}\, a_n := \lim_{k\to\infty} \Big(\inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \Big) = \inf A$$

den „Limes inferior" von (a_n). Beide Limites gehören zu A, denn A ist abgeschlossen. Man spricht deshalb auch vom größten oder kleinsten Häufungspunkt. Es ist $\overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \{ \sup_{i>n}\{a_i\}\}$.

Offenbar besitzen beschränkte Folgen (a_n) Häufungspunkte, ihre Limites superior und inferior existieren, und es gilt

$$(a_n) \text{ konvergiert} \iff (a_n) \text{ besitzt genau einen Häufungspunkt.}$$

Zum Abschluß gebe ich noch – einer gewissen Vollständigkeit wegen – eine Definition des topologischen Raumes

Definition 3.3.16: *Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen. Dann heißt $\mathcal{T}$ Topologie auf X oder $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum* $:\Longleftrightarrow$

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) $\forall\, O_\lambda \in \mathcal{T},\ \ \lambda \in \Lambda$ *eine beliebige Indexmenge, gilt*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$$

(iii) $\forall\, O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ *gilt* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

Also, eine beliebige Vereinigung „offener" Mengen und der endliche Durchschnitt sind offen.

Es sei M eine beliebige Menge. Dann gibt es stets zwei Topologien auf M, nämlich die „triviale Topologie"

$$\mathcal{T}_t := \{\emptyset, M\}$$

und die „diskrete Topologie"

$$\mathcal{T}_d := \mathcal{P}(M).$$

Die triviale Topologie ist die „gröbste", und die diskrete ist die „feinste".

3.4 Normierte Räume und Hilberträume

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die topologische Struktur in den Vordergrund gestellt. Natürlich hat man sehr oft – etwa im $\mathbb{R}$ oder im $\mathbb{R}^n$ – auch eine algebraische Struktur, und beide zusammen bringen den Reichtum der Ergebnisse. Ich möchte also nicht unnötig trennen. Deshalb gebe ich noch kurz die Definition für zwei Räume mit algebraischer und analytischer Struktur. Sicher wissen Sie inzwischen, was ein linearer Raum (Vektorraum) X über dem Körper $\mathbb{K}$ ist ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). In X sind zwei Abbildungen definiert

$$\begin{array}{rcl} + & : & X \times X \longrightarrow X \\ \cdot & : & \mathbb{K} \times X \longrightarrow X \end{array}$$

mit

(i) X ist eine abelsche Gruppe bzgl. der Addition.

(ii) Die Multiplikation mit den „Skalaren“ $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ hat die üblichen Eigenschaften

$$\begin{array}{rcl} \alpha(x+y) & = & \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x & = & \alpha x + \beta x \\ \alpha(\beta x) & = & (\alpha\beta)x \\ 1 \cdot x & = & x. \end{array}$$

Daraus folgt $0 \cdot x = 0$.

Beispiele:

1. $\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n,\ \mathbb{C}^n$
2. $\ell^2 := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty \right\}$.

   Man erklärt nun

Definition 3.4.1: *Es sei X über $\mathbb{K}$ ein Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung*

$$\|\cdot\| \;:\; X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Norm auf X $:\Longleftrightarrow$

(i) $\forall\, x \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall\, \alpha, x \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(iii) $\forall\, x, y \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ heißt dann normierter Raum. Mit

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

ist er offenbar ein metrischer Raum, und in diesem Sinne soll alles vorher Gesagte gelten. Einen vollständigen normierten Raum nennt man *Banachraum*.

Oft treten in den Anwendungen Räume auf, die noch eine zweite besonders schöne algebraische Struktur besitzen, nämlich ein Skalarprodukt.

Definition 3.4.2: *X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt*

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \;:\; X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

Skalarprodukt $:\Longleftrightarrow$

(i) $\forall\, x, y, z \quad \forall\, \alpha, \beta \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$

(ii) $\forall\, x, y \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$

(iii) $\forall\, x \quad (x,x) \geq 0$ *und* $((x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$.

Beispiele sind der $\mathbb{R}^n$, der $\mathbb{C}^n$ und auch der Folgenraum ℓ^2 mit $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$.

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

definiert wieder eine Norm, und ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum* (nach David Hilbert, 1862–1943). Wir notieren einige Eigenschaften:

1. $\forall\, x, y \in X \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$

   Denn o.B.d.A. sei $y \neq 0$. Es sei ferner $\alpha := \|y\|^2$ und $\beta := -(x, y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha x + \beta y, \ \ \alpha x + \beta y) \\ &= \alpha\bar{\alpha}(x, x) + \alpha\bar{\beta}(x, y) + \beta\bar{\alpha}(y, x) + \beta\bar{\beta}(y, y) \\ &= \|y\|^2 \{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2\}, \end{aligned}$$

   also

$$\|x\|^2 \|y\|^2 \geq |(x, y)|^2.$$

2. Es gilt der Satz von Pythagoras

$$\forall\, x, y \in X \quad (x, y) = 0 \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

3. Es gilt die Parallelogrammgleichung

$$\forall\, x, y \in X \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

4. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall\, x, y \in X \quad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

5. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\forall\, x, y \in X \quad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \mathrm{i}\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x - \mathrm{i}y\|^2).$$

Das Skalarprodukt läßt sich also durch „Polarisieren“ aus der induzierten Norm zurückgewinnen.

4 Ergänzungen und Beispiele

4.1 Darstellung der Zahlen

Zum praktischen Hantieren mit den reellen Zahlen ist das Problem ihrer Darstellung besonders wichtig. Es gibt viele Möglichkeiten, und Zweckmäßigkeitsüberlegungen werden dabei natürlich eine große Rolle spielen.
Zur Geschichte:

Die ältesten Darstellungen erfolgten durch Steine, Kerben oder Knoten. Dabei war der Zahlbegriff noch nicht abstrakt gefaßt. 5 Sack Korn oder 5 Vögel konnten durchaus verschieden markiert sein.

Die Babylonier benutzten ab 2000 v. Chr. das Sexagesimalsystem. Warum, weiß man nicht ($6 \cdot 60 = 360$ Tage sind ungefähr ein Jahr). Der Kreis hat heute noch 360 Grad, die Stunde 60 Minuten usw. Jedenfalls läßt sich in diesem System gut teilen. Auch Systeme mit der Basis 12 wurden verwandt. Auch das spürt man heute noch bei uns. Man spricht von einem Dutzend; 11, 12 haben noch eigene Namen. Zwölf gilt als Symbol der Vollkommenheit (zwölf Apostel, Flagge des Europarats, Tierkreiszeichen).

Schon sehr früh gab es *Dezimalsysteme*, wohl weil wir zehn Finger haben. Es gab auch Systeme zur Basis 20 (Finger + Zehen), erinnert sei an das französische „quatre-vingt“. Es gab Striche mit Fünferbündelung oder bei den Griechen

$$\Delta = 10 \quad H = 100 \quad X = 1000.$$

Die Römer benutzten noch mehr Zeichen

$$V = 5 \quad X = 10 \quad L = 50 \quad C = 100 \quad D = 500 \quad M = 1000,$$

die sich ja bis heute erhalten haben. Diese Zeichen wurden als Abkürzungen verwandt, und das praktische Rechnen damit war nicht leicht. So gab es schon im Altertum Hilfsmittel, insbesondere den Abakus.

Ein wesentlicher Fortschritt gegenüber solchen Systemen wurde durch die Erfindung des Positionssystems (Stellenwertsystem) erreicht. Das ist das System, das wir heute noch verwenden. Es gibt Einer, Zehner, Hunderter usw. Jetzt war auch schriftliches Rechnen möglich. Das hatte ungeheure Vorteile; schon allein, weil die einzelnen Rechenschritte nachvollziehbar und kontrollierbar wurden.

Auch das Positionssystem wurde von den Babyloniern erfunden, ab 2000 v. Chr., und zwar zunächst als Sexagesimalsystem. Verwandt wurde es zunächst nur von den Mathematikern und Astronomen. Es dauerte über 1000 Jahre, bis es sich durchsetzte. Wichtig war hierbei die Erfindung der Null, der Ziffer Null also. Zunächst ließ man sie aus. Dadurch war die Darstellung natürlich vieldeutig, und der Wert einer Zahl konnte nur aus dem Zusammenhang erkannt werden. Dann ließ man Plätze frei. Das war schon besser, aber immer noch unklar, wenn mehrere freie Plätze hintereinander kamen. Ein eigenes Zeichen (Trennungszeichen) gab es erst etwa ab 300 v. Chr. Damit beherrschten die Babylonier dann auch im Sexagesimalsystem die Bruchrechnung.

Von den Babyloniern kam das Rechnen im Positionssystem zu den Indern, und man ging zum Dezimalsystem über. Aus dem Jahre 595 stammt der älteste bekannte indische Text mit den neun Ziffern und der Null im Positionssystem. Dieses Zahlensystem setzte sich dann rasch durch. Von den Indern übernahmen es die Araber, wobei sie die Zeichen ihrer Schrift anglichen. Von den Arabern kamen diese Ziffern dann nach Europa. Die älteste bekannte spanische Handschrift mit den indisch-arabischen Ziffern stammt aus dem Jahre 976. Ab 1200 wurde schriftlich gerechnet, ab 1400 gab es den Buchdruck und damit die Normierung der Schreibweise der Zahlen.

Wie gesagt, ein uraltes Rechenhilfsmittel ist der Abakus, der heute noch überall in China oder Rußland benutzt wird. Dieses Rechengerät hat sich über Jahrtausende erhalten und spielte auch bei uns eine große Rolle. So lautet der Titel des berühmten Rechenbuchs von Adam Ries (1492–1559) „Rechnung auff der Linien vnnd Federn“ aus dem Jahre 1522 (d.h. Rechnen auf dem Rechenbrett und schriftlich). Das ist das älteste deutsche Rechenbuch; es fand große Verbreitung, Faksimileausgaben können Sie heute noch kaufen. In diesem Buch wird besonders auch das schriftliche Rechnen propagiert. In Frankreich wurde der Abakus dann während der französischen Revolution als rückständig verboten. In Westeuropa benutzt man ihn heute nicht mehr, glaube ich. Aber schriftliches Rechnen ist vielen inzwischen auch zu schwer geworden; wir haben jetzt den Taschenrechner.

Ich denke, auf unsere Darstellung der Zahlen im Dezimalsystem, insbesondere der Brüche, brauche ich nicht besonders einzugehen. Den rationalen Zahlen entsprechen die periodischen Dezimalbrüche, z.B.

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{1\,4\,2\,8\,5\,7}\,,$$

denn nach spätestens endlich vielen Divisionen muß sich ja ein Rest wiederholen. Umgekehrt, es sei

$$a = 0.\underbrace{a_1 a_2 \cdots a_r}_{=:A}\, \underbrace{\overline{b_1 b_2 \cdots b_s}}_{=:B}\,,$$

also

$$\begin{aligned} a &= 10^{-r}\{A + B\,10^{-s}(1 + 10^{-s} + 10^{-2s} + \cdots)\} \\ &= 10^{-r}\{A + \frac{B}{10^s - 1}\}. \end{aligned}$$

Erinnert sei an die „Mehrdeutigkeit“

$$0.\overline{9} = 1$$

dieser Darstellung. Es ist

$$0.\overline{x} = \frac{x}{10}\{1 + \frac{1}{10} + \cdots\} = \frac{x}{10}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{x}{9}.$$

Die Periode 9 lassen wir deshalb nicht zu.

Durch die Entwicklung des Computers in den letzten Jahren sind besonders Dualzahlen und auch Hexadezimalzahlen wichtig geworden, also Darstellungen zur Basis 2 und 16. Der Vorteil der Basis 2 ist natürlich, daß man nur zwei Basiselemente benötigt („Schalter aus“, „Schalter ein“), und der Nachteil ist, daß die Darstellungen sehr lang werden. Bei den großen Speichern moderner Computer spielt das aber keine große Rolle. Der Kompromiß ist eben, $2^4 = 16$ als Basis zu wählen (also mehrere Zweierpotenzen).

Die kleinste Informationseinheit nennt man heute ein *bit* (nein oder ja, 0 oder 1). In den Registern der Rechner werden nun jeweils 8 bit als kleinste adressierbare Speichereinheit zusammengefaßt. Man nennt

$$1 \text{ byte} \;:=\; 8 \text{ bit},$$

zum Beispiel ist

$$1010\,0111_{dual} \;\hat{=}\; A7_{hex.} \;\hat{=}\; 167_{dez.}$$

Ein Byte wird als zweistellige Hexadezimalzahl geschrieben.

dezimal	dual	hexadezimal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
.	.	.
.	.	.
15	1111	F
16	1 0000	10
17	1 0001	11
.	.	.

Diese Bezeichnungen sind inzwischen standardisiert.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kbyte} &:= 2^{10} \text{ byte} = 1\,024 \text{ byte} && \text{„Kilobyte“} \\ 1 \text{ Mbyte} &:= 2^{20} \text{ byte} = 1\,048\,576 \text{ byte} && \text{„Megabyte“}. \end{aligned}$$

Das schriftliche Rechnen in einem System zu einer Basis verschieden von zehn erfolgt nun in völliger Analogie zum Rechnen im Dezimalsystem. Besonders im Dualsystem ist das natürlich am leichtesten. Hier hat man die einfachsten „Einsundeins-Tafeln“ bzw. „Einmaleins-Tafeln“, nämlich:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} .$$

Beispiele:

1. $7 \cdot 3$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \cdot \; 1 \; 1 \; = 1\,0101 \;\hat{=}\; 21_{Dez}$$

2. $1 / 3$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ \hline & & 1 \end{array} \quad : \; 1 \; 1 \; = 0.\overline{01} \;\hat{=}\; 0.\overline{3}_{Dez}$$

4.2 Reihen

Im letzten Abschnitt haben wir unendliche Dezimalbrüche $a = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ betrachtet, also

$$a = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^2} + \cdots \text{ mit } q = \frac{1}{10}.$$

Diese Darstellung führt nun allgemeiner auf den Begriff der Reihe.

Es seien $a_1, a_2, \cdots$ Zahlen. Dann nennt man

$$\sum_j a_j \quad \text{oder auch kurz} \quad \sum a_j$$

Reihe mit den Summanden a_j.

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n =: \sum_{j=1}^{n} a_j$$

heißt n-te Partialsumme. Das macht natürlich nur Sinn, wenn wenigstens n Summanden wirklich vorhanden sind. Oder anders herum, mit „endlichen" Reihen wollen wir uns hier nicht weiter aufhalten, sondern denken sofort an „unendliche" Reihen. Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Solchen Reihen wollen wir einen Grenzwert zuordnen. Dazu erklären wir

Definition 4.2.1: *$\sum a_j$ heißt konvergent $:\Longleftrightarrow$ (s_n) konvergiert. In diesem Falle heißt $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Summe der Reihe $\sum a_j$.*

Man schreibt dann auch

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \quad \text{oder} \quad s = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Es gilt

Satz 4.2.2: *$\sum a_j$ konvergiere $\Longrightarrow$ (a_n) ist Nullfolge.*

Für alle ε und alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ ist nämlich

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Leider ist die Umkehrung falsch! $\sum \frac{1}{n}$ divergiert nämlich, obwohl $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Das sieht man so:

$$\sum a_j \text{ divergiert} \iff \exists\,\varepsilon \quad \forall\, n_0 \quad \exists\, n, m \geq n_0 \quad |s_n - s_m| \geq \varepsilon.$$

Wähle $m := n_0$ und $n := 2\,n_0$. Dann gilt

$$|s_m - s_n| = \sum_{n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{j} \geq \sum_{n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

oder anschaulich

$$\begin{array}{llllllllllll} & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} & + & \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)} & + & \underbrace{\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)} & + & \cdots \\ \geq & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \cdots \end{array}$$

Bemerkung 4.2.3: *Natürlich ist es unwesentlich, wo die Numerierung beginnt. Wir verwenden zum Beispiel also auch*

$$\sum_{n=k}^{l} a_n.$$

Satz 4.2.4: *Die geometrische Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$.

Es ist nämlich für $q \neq 1$

$$(1-q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

also

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Daraus folgt

$$\left| s_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{q^{n+1}}{1-q} \right| \to 0 \quad \text{für } |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Definition 4.2.5: $\sum a_n$ *heißt absolut konvergent* $:\Longleftrightarrow$

$$\sum |a_n| \quad \textit{konvergiert}$$

Satz 4.2.6: $\sum a_n$ *konvergiere absolut. Dann konvergiert auch* $\sum a_n$.

Das folgt aus

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j|.$$

Speziell interessiert man sich deshalb für Reihen mit nicht-negativen Gliedern. Es sei

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Dann heißen

$$\begin{array}{lll} \sum a_n & \text{„Minorante“ zu} & \sum b_n \\ \sum b_n & \text{„Majorante“ zu} & \sum a_n. \end{array}$$

Majoranten-Kriterium: $\sum |a_n|$ *besitze eine konvergente Majorante. Dann konvergiert* $\sum a_n$ *absolut.*

Der Beweis folgt aus

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{m+1}^{n} a_j \right| \leq \sum_{m+1}^{n} |a_j| \leq \sum_{m+1}^{n} b_j.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgen wichtige Konvergenzkriterien, zum Beispiel durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Ich nenne zwei:

Quotienten-Kriterium:

$$\exists k \quad \forall n \geq k \quad a_n \neq 0 \quad \textit{und} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1.$$

Dann konvergiert $\sum a_n$ *absolut.*

Für $n \geq k$ gilt nämlich

$$|a_{n+m}| \leq q|a_{n+m-1}| \leq q^m |a_n|.$$

Mithin hat $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{k+j}|$ die konvergente Majorante

$$|a_k| \sum_0^{\infty} q^j.$$

Wurzel-Kriterium:

$$\exists k \quad \forall n \geq k \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1.$$

Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Für $n \geq k$ ist $|a_n| \leq q^n$, weil das Potenzieren eine streng monotone Abbildung ist. Denn für $0 < x < y$ gilt zum Beispiel

$$x^n - y^n = (x-y) \underbrace{\{x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\}}_{>0}.$$

Mithin folgt

$$\sum_k^{\infty} |a_j| \leq \sum_k^{\infty} q^j.$$

Zuweilen versagen diese Kriterien jedoch, denn es gibt absolut konvergente Reihen, die „schlechter" als eine geometrische Reihe konvergieren.

Beispiel 4.2.7: *Die „ ζ-Funktion" wird definiert durch*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wir betrachten $\zeta(2)$. In diesem Falle gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \longrightarrow 1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \quad \text{(vgl. §2.3 Beispiel 4).}$$

Beide Kriterien versagen also. $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert aber, denn es gilt

1. $s_n = \sum_1^n \frac{1}{j^2}$ wächst monoton.
2. s_n ist beschränkt. Das folgt aus

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} \\ &= 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} < 2. \end{aligned}$$

Mithin konvergiert s_n nach Lemma 2.3.10, und zwar gegen $\pi^2/6$. Euler hat das als erster bewiesen, wir zeigen es als Folgerung 7.6.2.

Als letztes gebe ich noch ein Kriterium für alternierende Reihen.

Leibniz-Kriterium: *Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge ist.*

Zum Beweis sei etwa $a_{2j} \geq 0$ und $a_{2j+1} \leq 0$. Wir betrachten die beiden Teilfolgen (s_{2m}) und (s_{2m+1}) von (s_n). Die erste ist monoton fallend, die zweite wachsend:

$$s_{2m+2} = s_{2m} + (a_{2m+1} + a_{2m+2}) \leq s_{2m}$$

$$s_{2m+3} = s_{2m+1} + (a_{2m+2} + a_{2m+3}) \geq s_{2m+1}.$$

(s_{2m}) ist durch s_1 von unten und (s_{2m+1}) durch s_2 von oben beschränkt. Mithin konvergieren beide Teilfolgen. Wegen

$$s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} \longrightarrow 0$$

haben beide denselben Grenzwert s, also

$$\forall \varepsilon \quad \exists m_0 \quad \forall m \geq m_0 \quad |s_{2m} - s| + |s_{2m+1} - s| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch $|s_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0 := 2\,m_0$. Der Beweis liefert auch die Fehlerabschätzung

$$|s_n - s| \leq |a_{n+1}|.$$

4.3 Die Zahl e

Wir definieren

$$\mathrm{e} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Diese Reihe konvergiert. Das folgt aus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für $n \in \mathbb{N}$, und man berechnet

$$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,459\,0 \cdots.$$

Die Zahl e spielt eine große Rolle, und sie wird uns noch oft begegnen. Ihre Bezeichnung mit dem Buchstaben e (und auch die von π) stammt von Leonhard Euler (1739). Wir zeigen

Satz 4.3.1: e *ist irrational.*

Beweis: Für das Restglied r_n gilt

$$0 < r_n := \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \, \frac{n+2}{n+1}.$$

Daraus folgt die *Fehlerabschätzung*

$$\mathrm{e} = s_n + r_n$$

mit

$$|r_n| \leq \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Letzteres wegen $(n+2)/(n+1)^2 < 1/n$. Es sei

$$a_n := (\mathrm{e} - s_n)n \cdot n!.$$

Dann gilt also

$$0 < a_n < 1$$

und

$$\mathrm{e} = \frac{a_n}{n \cdot n!} + s_n.$$

Es sei nun e rational, also $\mathrm{e} = p/q$. Wähle $n := q$, dann folgt also

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q} = \frac{a_q}{q \cdot q!} + \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!}$$

oder

$$\underbrace{p(q-1)!}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{\frac{a_q}{q}}_{<1} + \underbrace{q!\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j!}}_{\in\mathbb{N}}.$$

Das ist ein Widerspruch.

Reelle Zahlen werden weiter unterteilt in *algebraische* und *transzendente* Zahlen. Es sei

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}$ und $a_n \neq 0$.

$$x_0 \text{ heißt algebraisch } :\Longleftrightarrow \quad \exists\, P_n \text{ mit } P_n(x_0) = 0.$$

Offenbar hat ein Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen. Damit sind die algebraischen Zahlen eines Intervalls abzählbar und die transzendenten überabzählbar. Beide Zahlen, e und π, sind transzendent. Für e wurde das 1873 von Charles Hermite (1822–1901) und für π 1882 von Ferdinand von Lindemann (1852–1939) bewiesen. Es läßt sich zeigen, daß für $\alpha \neq 0$ niemals die Zahlen α und $e(\alpha)$ beide algebraisch sein können ($e(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ behandeln wir in §5.3).

4.4 Fehlerabschätzungen

Wir haben soeben eine Restgliedabschätzung für die e-Reihe durchgeführt. Solche Abschätzungen sind äußerst wichtig. Denn natürlich möchte man approximativ Lösungen berechnen und dazu den entstandenen Fehler kennen.

Der wahre Wert sei x und $\bar{x}$ eine *Näherung*. Dann nennt man Δx den *absoluten Fehler*,

$$x = \bar{x} + \Delta x,$$

und, falls $x \neq 0$,

$$\frac{\Delta x}{x}$$

den *relativen Fehler*. Wir verabreden auch

$$x \text{ auf vier Stellen nach dem Komma genau } :\Longleftrightarrow \quad |\Delta x| < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}.$$

Für e soll das zum Beispiel bedeuten:

$$2.71825 \leq \mathrm{e} < 2.71835.$$

Beispiel:

Wir wollen e auf vier Stellen genau berechnen. Wieviele Glieder der Reihe benötigen wir dazu? Wir sehen zunächst einmal von den Rundungsfehlern des Computers ab (bedingt durch die fest vorgegebene Stellenzahl), obwohl diese beträchtlich sein können, besonders wenn Subtraktionen ausgeführt werden. Es war

$$r_n < \frac{1}{n\cdot n!} \overset{!}{<} 5\cdot 10^{-5}$$

oder

$$20000 \overset{!}{<} n\cdot n!.$$

Man findet leicht $7\cdot 7! = 35280$, also genügt $n = 7$. Es ist $r_7 < 2.2\cdot 10^{-5}$.

Fehlerrechnung: Es gelten

$$\begin{aligned}
\Delta(a \pm b) &= \Delta a \pm \Delta b \\
|\Delta(a\cdot b)| &= |a\,\Delta b + \bar{b}\,\Delta a| \;\leq\; |\bar{a}|\,|\Delta b| + |\bar{b}|\,|\Delta a| + |\Delta a|\cdot|\Delta b| \\
\left|\Delta\frac{1}{b}\right| &= \frac{|\Delta b|}{|b\bar{b}|} \;\leq\; \frac{|\Delta b|}{|\bar{b}|^2} + 2\frac{|\Delta b|^2}{|\bar{b}|^3} \quad \text{für } \frac{|\Delta b|}{|\bar{b}|} \leq \frac{1}{2} \\
\left|\frac{\Delta(a\cdot b)}{a\cdot b}\right| &= \left|\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a\cdot\Delta b}{a\cdot b}\right| \\
&\leq \left|\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right| + \left|\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right| + \left|\frac{\Delta a\cdot\Delta b}{\bar{a}\cdot\bar{b}}\right| + 2\frac{|\Delta a|^2}{|\bar{a}|^2} + 2\frac{|\Delta b|^2}{|\bar{b}|^2} + 4\frac{|\Delta a\cdot\Delta b|^2}{|\bar{a}\cdot\bar{b}|^2} \\
\frac{\Delta(1/b)}{1/b} &= -\frac{\Delta b}{\bar{b}}.
\end{aligned}$$

Die Beweise sind einfach, zum Beispiel

$$|\Delta(a \cdot b)| = |a \cdot b - \bar{a} \cdot \bar{b}| = |a(b - \bar{b}) + \bar{b}(a - \bar{a})| \leq \cdots$$

$$\Delta\frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{\bar{b}} = \frac{\bar{b} - b}{b\bar{b}}$$

oder

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{ab - \bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{ab - (a - \Delta a)(b - \Delta b)}{ab} = \frac{a\Delta b + b\Delta a - \Delta a\,\Delta b}{ab}.$$

Beispiel:

Wir hatten $\bar{\mathrm{e}} = 2.7183$ mit $|\Delta\mathrm{e}| < 2.2 \cdot 10^{-5}$ oder

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right| < 0.82 \cdot 10^{-5}.$$

Wir möchten e^{20} aus $\bar{\mathrm{e}}$ berechnen (ohne Rundungsfehler zu berücksichtigen) und den Fehler abschätzen. Es ist

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n+1}}\right| \leq \left|\frac{\Delta\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right| + \left|\frac{\Delta\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}}\right| + \left|\frac{\Delta\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}}\right|.$$

Mit $\alpha := 0.82$, $A := 10^{-5}$ und $|\Delta\mathrm{e}/\mathrm{e}| < \alpha A$ folgt daraus

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}}\right| < -1 + (1 + \alpha A)^n,$$

also für $n = 20$

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{e}^{20}}{\mathrm{e}^{20}}\right| < 1.65 \cdot 10^{-3}.$$

Experimentell habe ich gefunden

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{20} &= 4.851\,651\,9 \cdots \cdot 10^8 \\ \bar{\mathrm{e}}^{20} &= 4.852\,300\,6 \cdots \cdot 10^8 \end{aligned}$$

also

$$\frac{\bar{\mathrm{e}}^{20} - \mathrm{e}^{20}}{\mathrm{e}^{20}} = 1.337\,069\,6 \cdots \cdot 10^{-4}.$$

Unsere Fehlerabschätzung ist also durchaus realistisch.

Es sei aber noch einmal ausdrücklich auf die Problematik hingewiesen, die dadurch entsteht, daß z.B. beim Aufsummieren einer Reihe Rechenfehler entstehen, hervorgerufen durch die festgelegte Stellenzahl des Computers. Diesen Fehler will ich einmal *Rundungsfehler* nennen. Ein Beispiel soll das erläutern.

Wir werden in §5.3 ausführlich die *Exponentialfunktion* exp diskutieren. Soviel schon jetzt: Es sei

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$$

mit

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $\exp(x)$ schreibt man kürzer auch $e(x)$. Offenbar ist $e(1) = \mathrm{e}$. Diese Abbildung spielt in der Mathematik eine große Rolle.

Als erstes zeigen wir die absolute Konvergenz der Reihe für ein festes x. Es sei $|x| \leq R$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{R}{n+1} < 1$$

für alle $n \geq n_0 := \max(1, [R])$. Mithin konvergiert die Reihe. Es ist $e(0) = 1$, und wir zeigen in §5.3 das Additionstheorem

$$e(a) \cdot e(b) = e(a + b).$$

Daraus folgen

$$e(-x) = \frac{1}{e(x)},$$

also $\exp\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, und

$$e(x) = \mathrm{e}^x.$$

Daher rührt auch der Name *Exponentialfunktion*.

Im Augenblick sollen uns nur Fehlerabschätzungen für die Reihe interessieren. Es gilt

$$e(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

mit

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right| \le \sum_{n+1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{0}^{\infty} \frac{|x|^j}{(n+2)^j} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)}{(n+2-|x|)}$$

für $n > |x| - 2$. Das liefert für $|x| = 20$ und $n = 100$

$$|r_{100}| < 3.4 \cdot 10^{-29}.$$

Für positive x kann man $e(x)$ gut berechnen, obwohl die Zahlen groß werden. Gerade deswegen kann man aber für negative x leicht jeden Computer überfordern. Man sollte also unbedingt immer $e(-x) = 1/e(x)$ ausnutzen!

Zur Illustration habe ich mir von meinem PC-486 ein paar Zahlen ausgeben lassen. Mit dem Programm *Mathematica*, auf 20 Ziffern genau eingestellt, erhielt ich

$$\begin{aligned} e(20) &= 4.851\,651\,954\,097\,902\,78 \cdot 10^{8} \\ e(-20) &= 2.061\,153\,622\,438\,557\,83 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

und ein Programm in *Pascal* mit dem Variablentyp *real* (11–12 Ziffern) lieferte

$$\begin{aligned} s_{100}(20) &= 4.851\,651\,954\,106\,4 \cdot 10^{8} \\ s_{100}(-20) &= 3.508\,945\,507\,629\,8 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Ohne Rundungsfehler würden sich also die relativen Fehler

$$\left|\frac{r_{100}}{e(20)}\right| < 7 \cdot 10^{-38} \quad \text{und} \quad \left|\frac{r_{100}}{e(-20)}\right| < 2 \cdot 10^{-20}$$

ergeben, während wir in der Praxis (mit Rundungsfehlern) nur

$$\left|\frac{e(20) - s_{100}(20)}{e(20)}\right| < 1.8 \cdot 10^{-13} \quad \text{und} \quad \left|\frac{e(-20) - s_{100}(-20)}{e(-20)}\right| < 1.7 \cdot 10^{4}$$

erhalten. Besonders der zweite Wert ist extrem falsch. Das wird auch nicht besser, wenn man $n = 200$ wählt.

Zum Verständnis beachten Sie, daß das größte Glied in der $e(\pm 20)$-Reihe

$$\frac{20^{19}}{19!} = \frac{20^{20}}{20!} = 4.3 \cdots \cdot 10^{7}$$

ist. Um also fünf Ziffern von $e(-20)$ zu erhalten, müßte man mit mehr als $7 + 9 + 5 = 21$ Ziffern rechnen.

So liefert das Programm in *Pascal* mit dem Variablentyp *extended* (19–20 Ziffern) immerhin

$$s_{100}(-20) = 2.060\,199\,406 \cdots \cdot 10^{-9}.$$

mit dem relativen Fehler

$$\left|\frac{e(-20) - s_{100}(-20)}{e(-20)}\right| < 4.63 \cdot 10^{-4}.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Hinweis auf spezielle Approximationsverfahren.

1. In §3.2 haben wir bereits den Banachschen Fixpunktsatz besprochen. Der Beweis war konstruktiv. Er lieferte explizit ein Approximationsverfahren mit Fehlerabschätzung. Als Beispiel hatten wir mit diesem Verfahren $\sqrt{2}$ berechnet.
2. Es gibt natürlich andere Möglichkeiten der Approximation als die dort gewählte. Für $a > 1$ wollen wir zum Beispiel $\sqrt{a}$ berechnen und verwenden jetzt

$$f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Betrachten wir $f : [\sqrt{a}, a] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, das heißt $\sqrt{a}$ ist Fixpunkt. Für diejenigen, die bereits differenzieren können: Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2}),$$

also $f'(\sqrt{a}) = 0$, und das ist ein großer Vorteil. Zeichnen Sie den Graphen von f! Es ist

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{2}\left|1 - \frac{a}{xy}\right|.$$

Je näher man also mit x, y an den Fixpunkt $\sqrt{a}$ herankommt, desto stärker wird die Kontraktion. Startet man für $a = 2$ mit $x_0 = 2$, dann erhält man bereits in vier Schritten eine Genauigkeit von 10^{-10}.

3. Das ist das *Newtonverfahren*. Die Gleichung $g(x) = 0$ soll gelöst werden, soeben war $g(x) = x^2 - a$. Dazu wählt man ein $h(x)$ mit $h \neq 0$ und setzt an

$$f(x) := x + g(x)\, h(x).$$

Für f muß man also wieder einen Fixpunkt $\hat{x}$ bestimmen, möglichst mit $f'(\hat{x}) = 0$. Nun ist

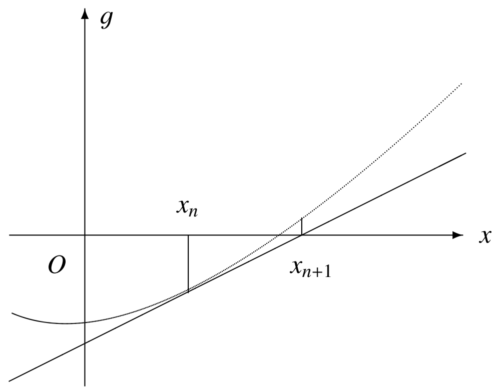
$$f'(x) = 1 + g'(x)\, h(x) + g(x)\, h'(x).$$

Man wählt deshalb $h := -1/g'$ (falls $g'(\hat{x}) \neq 0$, sonst muß man das Verfahren modifizieren). Es ist also

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)},$$

und dieses f liefert das Newtonsche Iterationsverfahren. Man kann es sich gut veranschaulichen. Es ist $x_{n+1} = f(x_n)$ und

$$g'(x_n) = -\frac{g(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$



Die Tangente an g in x_n ist nun durch

$$y = (x - x_n)\, g'(x_n) + g(x_n)$$

gegeben. Sie schneidet die x-Achse gerade im Punkte x_{n+1}. Durch fortlaufendes Tangentenlegen erreicht man also die gesuchte Lösung $\hat{x}$.

4.5 Kompakte Mengen

Kompakte Mengen spielen eine bedeutende Rolle in der Analysis. Wir formulieren diese Eigenschaft sofort in metrischen Räumen. Es sei also in diesem Abschnitt (X, d) ein metrischer Raum.

Es sei Λ eine beliebige Indexmenge und

$$\mathcal{U} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \text{ und } U_\lambda \subset X \text{ offen}\}.$$

Dann heißt $\mathcal{U}$ *offene Überdeckung* von $M \subset X :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in M \quad \exists\, U_\alpha \in \mathcal{U} \quad x \in U_\alpha.$$

Definition 4.5.1: *$M \subset X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Das heißt, es soll endlich viele $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ geben mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Diese Eigenschaft nennt man *Heine-Borel-Eigenschaft*, nach Eduard Heine (1821–1881) und Emile Borel (1871–1956). Wir verwenden die Abkürzung $A \Subset X$, wenn $\bar{A}$ kompakt und in X enthalten ist.

Es ist klar, daß jede endliche Menge kompakt ist. Wir zeigen als erstes

Satz 4.5.2: *In einem metrischen Raum ist eine kompakte Menge beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $M \subset X$ kompakt und $x_0 \in X$. Dann überdeckt

$$\{B(x_0, n), \quad n \in \mathbb{N}\}$$

die Teilmenge M. Wegen der Kompaktheit genügen endlich viele dieser $B(x_0, n)$ zur Überdeckung. Mithin gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$M \subset B(x_0, n_0),$$

d.h. M ist beschränkt. Zum Nachweis von $M = \bar{M}$ zeigen wir,daß $X \setminus M$ offen ist. Es sei also $x \in X \setminus M$. Dann wollen wir ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B(x, \varepsilon) \subset X \setminus M$$

konstruieren. Dazu halten wir fest:

$$\forall\, m \in M \ \ \exists\, \varepsilon_m > 0 \quad B(x, \varepsilon_m) \cap B(m, \varepsilon_m) = \emptyset,$$

denn man wähle etwa $\varepsilon_m := \frac{1}{4} d(x, m)$. Nun ist

$$M \subset \bigcup_{m \in M} B(m, \varepsilon_m).$$

Wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele $m_1, \cdots, m_k$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(m_i, \varepsilon_{m_i}).$$

Es sei

$$\varepsilon := \min_{i=1,\ldots,k} \varepsilon_{m_i} > 0$$

und

$$B(x, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} B(x, \varepsilon_{m_i}).$$

$B(x, \varepsilon)$ ist offen, und es folgt

$$B(x, \varepsilon) \cap M \ \subset \ \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{B(x, \varepsilon) \cap B(m_i, \varepsilon_{m_i})}_{=\emptyset} \ = \ \emptyset.$$

Daraus folgt $B(x, \varepsilon) \subset X \backslash M$, und das war zu zeigen.

Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen aber falsch.

Beispiele:

1. Es sei X eine unendliche Menge mit der *diskreten Metrik*, d.h. es sei

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Es sei $y \in X$ fest gewählt. Dann gilt

$$\forall\, x \in X \quad d(x, y) \leq 1,$$

das heißt X ist beschränkt. X ist auch abgeschlossen, weil der ganze Raum stets offen und abgeschlossen ist. Nun ist

$$B\left(x, \tfrac{1}{2}\right) = \{x\}$$

offen, und es gilt

$$X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \tfrac{1}{2}\right).$$

Diese Überdeckung enthält aber keine endliche Teilüberdeckung.

2. Es sei ℓ^2 die Menge aller unendlichen Tupel $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, mit der durch das Skalarprodukt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$$

induzierten Metrik, d.h.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^2}.$$

Es seien nun e_i der i–te Einheitsvektor und $S \subset \ell^2$ die Einheitssphäre in ℓ^2. Dann gilt

$$d(e_i, e_j) = \sqrt{2} \text{ für } i \neq j$$

und

$$\forall\, x, y \in S \quad d(x, y) \leq d(x, 0) + d(0, y) = 2.$$

Offenbar ist S beschränkt und abgeschlossen. Wir wählen nun $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ und

$$M_s := B(s, \varepsilon) \text{ mit } s \in S.$$

Es gebe eine endliche Teilüberdeckung

$$M_{s_1}, M_{s_2}, \ldots, M_{s_k}$$

der Überdeckung $\{M_s \mid s \in S\}$ von S. Dann gibt es ein $s \in \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ und wenigstens zwei verschiedene e_i, e_j mit

$$e_i \in M_s \text{ und } e_j \in M_s.$$

Das ist ein Widerspruch wegen

$$\sqrt{2} = d(e_i, e_j) \leq d(e_i, s) + d(s, e_j) < 2\varepsilon < \sqrt{2}.$$

Wir werden sofort zeigen, daß im $\mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre kompakt ist. Allgemein gilt, daß die Kompaktheit der Sphäre gerade das Kriterium dafür ist, ob ein zugrundeliegender normierter Raum endlich dimensional ist oder nicht.

Wir beginnen mit drei Hilfssätzen. Es sei J ein abgeschlossenes Intervall im $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$J := \{x = (\xi_i, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_j \leq \xi_j \leq \beta_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Dann gelten

Lemma 4.5.3: *Es sei (J_i) eine Folge von abgeschlossenen Intervallen mit*

$$J_i \supset J_{i+1}.$$

Dann ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$ nicht leer.

Beweis: Das Lemma gilt im $\mathbb{R}^1$ (vgl. das Intervallschachtelungsprinzip am Ende von §2.4). Mithin gilt es für jede der endlich vielen Komponenten von J.

Lemma 4.5.4: *J ist kompakt.*

Zum Beweis setzen wir

$$\delta := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)^2}.$$

Für alle $x, y \in J$ gilt dann $|x - y| \leq \delta$. Es sei $\{M_\lambda\}$ eine offene Überdeckung von J, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Es sei

$$\gamma_j := \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}.$$

Die Intervalle $[\alpha_j, \gamma_j]$ und $[\gamma_j, \beta_j]$ bestimmen dann 2^n Intervalle Q_i, deren Vereinigung J ist. Mindestens eine dieser Mengen Q_i, nennen wir sie J_1, kann von keiner endlichen Teilfamilie der $\{M_\lambda\}$ überdeckt werden. Als nächstes unterteilen wir J_1, und so fort. Wir erhalten so eine Folge (J_i) von abgeschlossenen Intervallen mit

(i) $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots$

(ii) J_i wird nicht „endlich überdeckt“

(iii) $\forall\, x, y \in J_i \quad |x - y| \leq 2^{-i}\delta.$

Es sei nun z ein Punkt, der in allen J_i liegt. Dann gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $z \in M_\lambda$. Weil M_λ offen ist existiert ein $r > 0$ mit $B(z, r) \subset M_\lambda$. Wähle i so groß, daß $2^{-i}\delta < r$ ist. Dann folgt aus (iii)

$$J_i \subset M_\lambda.$$

Das ist ein Widerspruch zu (ii).

Schließlich zeigen wir

Lemma 4.5.5: *Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt.*

Beweis: Es sei K eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes X und A abgeschlossen mit

$$A \subset K \subset X.$$

Es sei $\{M_\lambda\}$ eine offene Überdeckung von A. Es sei $\{N_\lambda\}$ definiert, indem man zu $\{M_\lambda\}$ $\complement A$ hinzufügt. Dann ist $\{N_\lambda\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von K, die somit auch A überdeckt. Gehört $\complement A$ dazu, dann können wir es wieder fortlassen.

Nun beweisen wir das angekündigte Resultat:

Satz 4.5.6: *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist beschränkt und abgeschlossen.*

(ii) *M ist kompakt.*

(iii) *Jede unendliche Teilmenge von M hat einen Häufungspunkt in M.*

Beweis: Es sei (i) erfüllt. Dann gibt es ein J mit $M \subset J$. J ist kompakt, mithin auch M (Lemmata 4.5.4 und 4.5.5), also gilt (ii).

Aus (ii) folgt (iii): Es sei nämlich E eine unendliche Teilmenge ohne Häufungspunkt in M. Jedes $m \in M$ ist also nicht Häufungspunkt von E, d.h.

$$\forall\, m \in M \quad \exists\, \varepsilon_m > 0 \quad \text{mit} \quad B(m, \varepsilon_m) \cap E = \begin{cases} \{m\} & \text{falls } m \in E \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

E wird von keiner endlichen Teilmenge der $\{B(m, \varepsilon_m)\}$ überdeckt. Dasselbe gilt dann auch für M wegen $E \subset M$. Widerspruch.

Aus (iii) folgt (i): Wäre nämlich M unbeschränkt, dann würde es $x_n \in M$ geben mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| > n.$$

(x_n) hätte dann keinen Häufungspunkt im $\mathbb{R}^n$. Wäre M nicht abgeschlossen, dann würde es einen Häufungspunkt $z \in \mathbb{R}^n$ von M geben mit $z \notin M$, und es würde

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in M \quad |x_n - z| < \frac{1}{n}.$$

folgen. Die Menge $E \subset M$ der Punkte x_n ist unendlich. E hat z als Häufungspunkt und keinen weiteren Häufungspunkt im $\mathbb{R}^n$. Somit hat E keinen Häufungspunkt in M im Widerspruch zu (iii).

5 Funktionen einer reellen Veränderlichen

5.1 Stetige Funktionen

Abbildungen haben wir schon in §1.1 eingeführt. Sie sind seitdem immer wieder aufgetreten. Insbesondere wiederhole ich noch einmal Definition 2.3.13, nämlich

Definition 5.1.1: *Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend*

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt f streng monoton wachsend.

Analog erklärt man monoton fallende Funktionen. Als erstes zeigen wir

Satz 5.1.2: *Es seien $S, T \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to T$ streng monoton. Dann ist f injektiv und auch*

$$f^{-1} \quad : \quad R(f) \longrightarrow S$$

streng monoton.

Zum Beweis sei f o.B.d.A. streng monoton wachsend, also $(x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) < f(x_2))$. Es sei nun $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist sowohl $x_1 < x_2$ als auch $x_1 > x_2$ nicht möglich, d.h. es ist $x_1 = x_2$, und die Abbildung ist injektiv. Mithin existiert

$$f^{-1} \quad : \quad R(f) \longrightarrow S.$$

Es seien nun $y_1, y_2 \in R(f)$ mit $y_1 < y_2$. Dann folgt $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, denn aus der Monotonie von f folgt

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 \geq y_2.$$

Die strenge Monotonie reicht zur Umkehrbarkeit einer Abbildung hin, sie ist aber nicht notwendig dafür. Das sieht man an folgendem
Beispiel: Es seien $S := [0, 1]$ und

$$\begin{array}{rcccl} f & : & S & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}, \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap S \\ 1 - x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \cap S. \end{cases} \end{array}$$

f ist bijektiv, aber nicht monoton.

Wenn wir den Gesichtspunkt der Umkehrbarkeit einer Abbildung noch etwas im Auge behalten wollen, dann müssen wir solche Beispiele also ausschließen, die Abbildungen also etwas „glatter" wählen. Eine solche Glattheitseigenschaft ist die Stetigkeit. Bevor wir sie einführen, bezeichnen wir noch

Definition 5.1.3: *$\mathcal{F}(S, T)$ sei die Menge aller Abbildungen*

$$f \quad : \quad S \longrightarrow T.$$

Für $S, T \subset \mathbb{R}$ erklären wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x).$$

Damit ist $\mathcal{F}(S, T)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
In der Analysis beschäftigt man sich nun mit Unterräumen von $\mathcal{F}$ und klärt ihre Struktur.

Beispiele:

1. $\mathcal{F}(S, T)$ selbst. Man spricht dann auch von der Menge aller endlichen (finiten) Abbildungen, denn aus $T \subset \mathbb{R}$ folgt
$$f \in \mathcal{F}(S, T) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x \in S \quad |f(x)| < \infty.$$
2. $\mathcal{B}(S, T) \subset \mathcal{F}(S, T)$ ist der Teilraum der beschränkten Abbildungen, d.h.
$$f \in \mathcal{B}(S, T) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, c = c(f) > 0 \quad \forall\, x \in S \quad |f(x)| \leq c.$$
3. Die monoton wachsenden Funktionen bilden keinen Vektorraum, denn $-f$ würde fallen. Man erhält aber einen Vektorraum, wenn man f als Differenz zweier monotoner Funktionen wählt. So erhält man die Funktionen mit „endlicher Variation", die uns später noch beschäftigen werden.

4. Die Menge aller „Lipschitz-beschränkten“ Funktionen (nach Rudolf Lipschitz, 1832–1903 in Bonn):

$$\exists\, c = c(f) > 0 \quad \forall\, x, y \in S \quad |f(x) - f(y)| \le c|x - y|.$$

5. Die Menge aller Polynome.

Hinweis: Durch

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

läßt sich in $\mathcal{F}$ auch die Multiplikation erklären. Man erhält so eine kommutative, assoziative Algebra mit Einselement. Es gibt jedoch „Nullteiler“, d.h. es gibt $f, g \neq 0$ mit $f \cdot g = 0$. Beispielsweise ist $f \cdot g = 0$ für $S = \mathbb{R}$, $f = H$ und $g = 1 - H$. Dabei ist

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

die „Heaviside-Funktion“ (benannt nach Oliver Heaviside, 1850–1925). Man nennt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}}$$

den „Träger“ von f (support).

Einen anderen wichtigen Teilraum von $\mathcal{F}$ bilden nun die stetigen Funktionen. Es seien in diesem Kapitel S und T immer Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann erklären wir

Definition 5.1.4: *$f \in \mathcal{F}(S,T)$ heißt in $x_0 \in S$ stetig* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in S,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beispiele, jeweils für $S = (-1, 1)$:

1. $f(x) = x$. Wähle $\delta := \varepsilon$.
2. $f(x) = x^2$. Wähle $\delta := \varepsilon/2$, denn

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \le 2|x - x_0|.$$

3. $f(x) = |x|$. Wähle $\delta := \varepsilon$, denn

$$\big|\, |x| - |x_0| \,\big| \le |x - x_0|.$$

Aus der Definition folgt, daß f in x_0 nicht stetig ist, wenn folgendes gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in S,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon.$$

Beispiele dafür, wieder in $S = (-1, 1)$:

1. $f = H$ und $x_0 = 0$. Wähle $x < 0$, $\rightsquigarrow$

$$\forall\, \delta > 0 \quad |f(x) - f(x_0)| = 1.$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, Null sonst; und $x_0 = 0$. Wähle $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, wobei $n :> \frac{1}{2}(\frac{2}{\delta\pi} - 1)$, $\rightsquigarrow$

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left|\sin \frac{2n+1}{2}\pi\right| = 1.$$

3. $f(x) = 1/x$ für $x \neq 0$, Null sonst; und $x_0 = 0$. Wähle $x \neq 0$ $\rightsquigarrow$

$$\forall\, \delta > 0 \quad |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x}\right| \ge 1.$$

Eine in x_0 stetige Funktion darf also in x_0 nicht „springen“, nicht „zu stark oszillieren“ und auch nicht „singulär“ werden.

Definition 5.1.5: *$f \in \mathcal{F}(S,T)$ heißt in S stetig* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in S \quad f \text{ ist in } x \text{ stetig.}$$

Dafür schreiben wir auch $f \in C(S,T)$. Das bedeutet also

$$\forall\, x \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, y \in S,\ |y - x| < \delta \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Offenbar gilt für $f, g \in C(S,T)$

$$f + g \in C(S,T) \quad \text{und} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha f \in C(S,T),$$

d.h. $C(S,T)$ ist wieder ein Vektorraum.

Die Definition der Stetigkeit ähnelt der Definition des Grenzwertes. Wir wollen den Zusammenhang herausarbeiten:

Definition 5.1.6: *Es sei a Häufungspunkt von S und $f \in \mathcal{F}(S,T)$ oder $f \in \mathcal{F}(S \setminus \{a\},T)$. Dann heißt $b \in \bar{T}$ Grenzwert von f an der Stelle a,*

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x_n \in S \setminus \{a\},\ x_n \to a \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b.$$

Das heißt also

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, (x_n),\ x_n \neq a,\ x_n \to a \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

f braucht also an der Stelle a selbst zunächst nicht definiert zu sein; auch $f(a) \neq b$ ist zugelassen.

Folgerung 5.1.7: *f ist in $x_0 \in S$ stetig* $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beweis: Wenn x_0 kein Häufungspunkt von S ist, dann sind die Aussagen leer, es ist also auch nichts zu beweisen. Deshalb sei x_0 Häufungspunkt von S. Dann zeigen wir
$\Longrightarrow$: Es seien

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, \delta \quad \forall\, x,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und $x_n \to x_0$, d.h.

$$\forall\, n \geq n_1(\varepsilon) \quad |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Wähle $n_0(\varepsilon) := n_1(\delta(\varepsilon))$. Dann folgt

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$: Wir beweisen indirekt. Es sei f nicht stetig, also

$$\exists\, \varepsilon \quad \forall\, \delta \quad \exists\, x,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Für $\delta = \frac{1}{n}$ folgt daraus

$$\exists\, \varepsilon \quad \exists\, (x_n),\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert dann also nicht.

Bemerkung 5.1.8:
1. Es sei noch einmal daran erinnert, daß zur Definition von

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

f in a nicht definiert zu sein brauchte. Man spricht von der stetigen Ergänzung *bzw.* Fortsetzung *von f in a, wenn das möglich ist. Man spricht auch von der stetigen Ergänzung von rechts (oder links), wenn diese Limites nur für $x > a$ bzw. $x < a$ existieren.*
2. Es seien f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$. Dann ist auch

$$h := g \circ f$$

stetig in x_0.

Für $x_n \to x_0$ konvergiert nämlich $z_n := f(x_n) \to z_0 := f(x_0)$, also $g(z_n) \to g(z_0)$.

Satz 5.1.9: *Es seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(K,\mathbb{R})$. Dann ist f beschränkt, also $f \in \mathcal{B}(K,\mathbb{R})$.*

Wir beweisen diesen Satz indirekt. Es sei

$$\forall\, n \quad \exists\, x_n \in K \quad |f(x_n)| > n.$$

K ist kompakt, mithin gibt es eine konvergente Teilfolge (x'_n) von (x_n) [Satz 4.5.6]. Es sei $x'_n \to x \in K$. Dann gilt

$$|f(x'_n) - f(x)| \geq |f(x'_n)| - |f(x)| > n - |f(x)| \geq 1$$

für alle $n \geq n_1 := 2 + [|f(x)|]$. f wäre dann also in x nicht stetig.

Es sei nun wieder $f \in \mathcal{F}(S,T)$. Wie bei den Punktmengen definieren wir dann für $I \subset S$

$$\sup_{x \in I} f(x) := \sup\left\{y = f(x) \;\middle|\; x \in I\right\},$$

wenn f von oben beschränkt ist, und analog, wenn f von unten beschränkt ist,

$$\inf_{x \in I} f(x) := \inf\left\{y = f(x) \;\middle|\; x \in I\right\}.$$

Die Frage nach der Annahme dieser Werte ist sehr wichtig.

Definition 5.1.10: *f sei von oben bzw. von unten beschränkt. Dann heißt*

$$M := \max_{x \in I} f(x) \quad \textit{bzw.} \quad m := \min_{x \in I} f(x)$$

das Maximum bzw. das Minimum von f in I $:\Longleftrightarrow$

(i) $M = \sup_{x \in I} f(x) \quad \textit{bzw.} \quad m = \inf_{x \in I} f(x)$

(ii) $\exists\, x_0 \in I$ *mit* $M = f(x_0) \quad \textit{bzw.} \quad m = f(x_0)$.

Sie sollten also nicht das Supremum mit dem Maximum verwechseln. Wichtig ist

Satz 5.1.11: *K sei kompakt und $f \in C(K, \mathbb{R})$. Dann ist auch $R(f)$ kompakt, und es existieren*

$$\max_{x \in K} f(x) \quad \textit{und} \quad \min_{x \in K} f(x).$$

<u>Beweis</u>: Es ist

$$R(f) = \left\{y \in f(x) \;\middle|\; x \in K\right\} \subset \mathbb{R}.$$

$R(f)$ ist beschränkt (das hat der letzte Satz gezeigt) und abgeschlossen. Es sei nämlich y_0 ein Häufungspunkt von $R(f)$. Dann gibt es eine Folge (y_n) mit $y_n \to y_0$ und $y_n = f(x_n)$. (x_n) enthält wieder eine konvergente Teilfolge (x'_n), etwa mit $x'_n \to x_0 \in K$. Weil f stetig ist, folgt

$$\lim_{x'_n \to x_0} f(x'_n) = y_0$$

oder $f(x_0) = y_0$. Das heißt $y_0 \in R(f)$, und $R(f)$ ist kompakt.

$$s := \sup_{x \in K} f(x)$$

ist nun entweder ein isolierter Punkt oder ein Häufungspunkt von $R(f)$. In beiden Fällen gilt $s \in R(f)$, d.h. $\exists\, x \in K$ mit $f(x) = s$.

Als nächstes zeigen wir den

Zwischenwertsatz: *Es seien $J := [a,b]$ und $f \in C(J, \mathbb{R})$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad f(x_0) = 0.$$

Der Zwischenwertsatz läßt sich leicht umformulieren zu

Satz 5.1.12: *Es seien $J := [a,b]$, $f \in C(J, \mathbb{R})$, $f(a) < f(b)$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < z < f(b)$. Dann gilt*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad f(x_0) = z.$$

Denn es sei $g := f - z$. Dann ist

$$g(a) = f(a) - z < 0, \quad g(b) = f(b) - z > 0,$$

und der Zwischenwertsatz liefert ein x_0 mit $g(x_0) = 0$, also $f(x_0) = z$.

Beweis des Zwischenwertsatzes: Es sei

$$M := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; f(x) < 0 \right\}.$$

Dann ist $M \neq \emptyset$. M ist beschränkt mit $\bar{M} \subset [a,b]$. Es sei nun $x_0 = \sup M \in (a,b)$. Dann ist $f(x_0) = 0$. Die Alternativen können nämlich nicht auftreten:

1. Es sei $f(x_0) < 0$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f die Existenz einer Umgebung $U(x_0)$ mit $f|U(x_0) < 0$, d.h. x_0 wäre nicht obere Schranke.
2. Es sei $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $U(x_0)$ mit $f|U(x_0) > 0$, und x_0 wäre kein Supremum.

Man interessiert sich natürlich auch für Funktionen, die „glatter" sind als stetige. Die Lipschitz-stetigen Funktionen habe ich schon genannt. Man sagt $f \in C_{0,1}(S,\mathbb{R})$, wenn

$$\exists\, c \quad \forall\, x,y \in S \quad |f(x) - f(y)| \le c\,|x - y|$$

ist. Allgemeiner nennt man f Hölder-stetig mit dem Hölder-Exponenten α, $f \in C_{0,\alpha}(S,\mathbb{R})$, wenn

$$\exists\, c \quad \forall\, x,y \in S \quad |f(x) - f(y)| \le c\,|x - y|^{\alpha}$$

ist mit $0 < \alpha \le 1$. Diese Bedingung ist nach Otto Hölder (1859–1937) benannt. Im nächsten Abschnitt definieren wir $C_1(S,\mathbb{R})$, die stetig differenzierbaren Abbildungen. Jetzt wollen wir aber erst die „gleichmäßig stetigen" Funktionen einführen.

Die Aussage $f \in C(S,T)$ bedeutete

$$\forall\, x_0 \in S \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

d.h. es ist $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Diese Abhängigkeit des δ von x_0 ist oft lästig. Man definiert deshalb glattere Funktionen

Definition 5.1.13: *$f \in C(S,T)$ heißt gleichmäßig stetig in S :$\Longleftrightarrow$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_0 \in S \quad \forall\, x,\ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Es sind also „nur" die Quantoren vertauscht, deshalb aufpassen!

Beispiele: Es sei $I = (0,1)$.

1. $f(x) = x^2$. Dann folgt mit $\delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{3}$ die gleichmäßige Stetigkeit aus

$$|f(x) - f(x_0)| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| \le 2\;\; |x - x_0|.$$

2. $f(x) = 1/x$. f ist in I stetig, aber nicht gleichmäßig. Nicht gleichmäßig stetig bedeutet nämlich

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, x \quad \exists\, y, |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon.$$

Man wähle nun $n :\ge \frac{1}{\delta}$, $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{2n}$. Dann ist $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \delta$ und

$$|f(x_n) - f(y_n)| = n \ge 1.$$

In diesem Zusammenhang formulieren wir noch

Definition 5.1.14: *Es sei $w : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ monoton wachsend mit*

$$\lim_{x \downarrow 0} w(x) = w(0) = 0.$$

Dann heißt w Stetigkeitsmodul von $f \in C(S,T)$:$\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x,y \in S \quad |f(x) - f(y)| \le w(|x - y|).$$

Offenbar besitzen die Hölder- oder Lipschitz-stetigen Funktionen den Stetigkeitsmodul $w(x) = cx^\alpha$. Ist f in I gleichmäßig stetig, dann hat f ebenfalls einen Stetigkeitsmodul, nämlich

$$w(s) := \sup\left\{|f(x) - f(y)| \;\middle|\; x, y \in I,\ \ |x - y| \le s\right\}.$$

Denn w wächst monoton, und wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist für alle $x, y \in I$, $|x - y| < \delta$, dann folgt

$$\forall\, 0 \le s < \delta \quad w(s) \le \varepsilon.$$

Also gilt $w(s) \to 0$ für $s \to 0$. Umgekehrt ist ein $f \in \mathcal{F}(S, T)$, das einen Stetigkeitsmodul besitzt, auch gleichmäßig stetig.

Wir zeigen nun

Satz 5.1.15: *Es sei $f : S \to T$ gleichmäßig stetig. Dann kann f auf $\bar{S}$ stetig fortgesetzt werden.*

Es sei also a ein Häufungspunkt von S, $a \notin S$. Dann existiert

$$\lim_{x\to a} f(x) =: f(a).$$

Zum Beweis wählen wir eine Folge $x_n \to a$, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1(\varepsilon) \quad \forall\, n, m \ge n_1(\varepsilon) \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Außerdem wissen wir

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_n, x_m,\ |x_n - x_m| < \delta \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

also gilt mit $n_0(\varepsilon) := n_1(\delta(\varepsilon))$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n, m \ge n_0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

das heißt

$$\lim_{x_n\to a} f(x_n)$$

existiert. Dieser Grenzwert ist eindeutig bestimmt. Es seien nämlich (x_n) und (x_n') zwei Folgen, die gegen a konvergieren, und b bzw. b' die entsprechenden Grenzwerte von $f(x_n)$ bzw. $f(x_n')$. Dann ist

$$|b - b'| \le |b - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_n')| + |f(x_n') - b'|.$$

Mit (x_n) und (x_n') konvergiert auch die Folge (y_n) mit $y_{2n} := x_n,\ y_{2n-1} := x_n'$ gegen a. Deshalb wird auch der mittlere Term für große n beliebig klein.

Folgerung 5.1.16: *Es sei $B \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $C^*(B, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(B, \mathbb{R})$.*

Dabei sei $C^*(G, \mathbb{R})$ die Menge der gleichmäßig stetigen Funktionen in G. Man beachte, daß $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$, gleichmäßig stetig, aber unbeschränkt ist. Wichtig ist nun

Satz 5.1.17: *Es seien K kompakt und $f \in C(K, \mathbb{R})$. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Wir beweisen den Satz indirekt, gehen also von

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x, y,\ |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$$

aus. Zu $\delta = \frac{1}{n}$ gibt es daher x_n, y_n mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon.$$

K war kompakt. Mithin gibt es eine Teilfolge (x_n') mit $x_n' \to z$. Dann konvergiert auch $y_n' \to z$ wegen

$$|y_n' - z| \le |x_n' - z| + \frac{1}{n}.$$

Es sei $z_{2n} := x_n'$, $z_{2n-1} = y_n'$. Dann konvergiert (z_n) gegen z, und es gilt

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \quad \exists\, n, m \ge n_0 \quad |f(z_n) - f(z_m)| \ge \varepsilon,$$

denn man wähle nur $n := n_0$ und $m := n_0 + 1$. $(f(z_n))$ wäre also keine Cauchyfolge im Widerspruch zur Stetigkeit.

Wir wollen nun die Stetigkeit der Umkehrabbildung zeigen, sofern sie existiert. Wir beginnen mit dem

Satz 5.1.18: *Es seien $J := [a,b]$ und $f \in C(J,\mathbb{R})$ injektiv. Dann ist f streng monoton.*

Zum Beweis sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Wir wollen zeigen

$$\forall\, x < y \quad f(x) < f(y).$$

Zunächst ist klar, daß $m = \min_J f$ existiert. Es ist $m = f(a)$, denn es sei $m = f(c) < f(a)$. Dann gibt es ein $d \in (c,b)$ mit $f(d) = f(a)$ [Zwischenwertsatz], im Widerspruch zur Injektivität. Es gebe nun $x, y \in [a,b]$ mit

$$x < y \text{ und } f(x) > f(y).$$

Dann existiert ein $z < x$ mit $f(z) = f(y)$, weil das Minimum von f ja in a angenommen wird. Dann ist aber $z < y$ im Widerspruch zur Injektivität. $f(x) = f(y)$ ist ebenfalls nicht möglich.

Satz 5.1.19: *Es seien S offen und $f \in C(S,\mathbb{R})$ injektiv. Dann ist*

$$f^{-1} \;:\; R(f) \longrightarrow S$$

stetig.

Daß f^{-1} existiert, ist klar. Wir beweisen den Satz zunächst für kompaktes S und anschließend für offenes.

1. Es sei K kompakt und $f \in C(K,\mathbb{R})$. Es seien ferner $x_0 \in K$ und $y_0 := f(x_0)$. Wir beweisen indirekt, gehen also von

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, y,\ |y - y_0| < \delta \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon$$

aus. Zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ gibt es daher ein $y_n \in R(f)$ mit $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$ und

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \quad \exists\, y_n,\ |y_n - y_0| < \frac{1}{n} \quad |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon.$$

Es seien $x_n := f^{-1}(y_n) \in K$. Dann existiert eine Teilfolge (x'_n) und ein $x \in K$ mit

$$x'_n \longrightarrow x.$$

Wegen $|x'_n - x_0| \geq \varepsilon$ ist $x_0 \neq x$. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{x'_n \to x} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} y'_n = y_0.$$

Es wäre also $x \neq x_0$ und $f(x) = y_0 = f(x_0)$ im Widerspruch zur Injektivität.

2. Es seien nun S offen, $f \in C(S,\mathbb{R})$ und $y_0 = f(x_0)$. Weil S offen ist, gibt es ein $[a,b] \subset S$ mit $x_0 \in (a,b)$. Das Intervall $[a,b]$ wird durch f streng monoton auf ein Intervall $[f(a), f(b)]$ abgebildet mit $y_0 \in \big(f(a), f(b)\big)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $[f(a), f(b)] \subset R(f)$, und aus dem ersten Teil des Beweises folgt die Stetigkeit von

$$f^{-1}\Big|[f(a), f(b)]$$

in y_0. Das war zu zeigen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts betone ich noch, daß sich $C(X,Y)$ für beliebige metrische Räume völlig analog definieren läßt.

$$f \;:\; D(f) \subset X \longrightarrow Y$$

heißt stetig in $x_0 \in D(f) :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ d_x(x, x_0) < \delta \quad d_y(f(x), f(x_o)) < \varepsilon,$$

und $f \in C(X,Y) :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in X \quad f \text{ ist in } x \text{ stetig.}$$

Es gilt

Satz 5.1.20: *$f : X \to Y$ ist stetig $\Longleftrightarrow$*

$$\Big(\forall\, V \subset Y,\ V \textit{offen} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \subset X \ \textit{offen}\Big).$$

Das Urbild einer offenen Menge soll also offen sein. Wir beweisen in zwei Schritten

$\Longrightarrow$: Es seien V offen und $x_0 \in f^{-1}(V)$ mit $f(x_0) = y_0 \in V$.

$\rightsquigarrow$ $\exists\, B(y_0, \varepsilon) \subset V$, denn V ist offen.

$\rightsquigarrow$ $\exists\, \delta \quad f(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, \varepsilon)$, denn f ist stetig.

$\rightsquigarrow$ $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$.

$\Longleftarrow$: Es seien $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ und $\varepsilon > 0$.

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ ist offen.

$\rightsquigarrow$ $\exists\, B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$.

$\rightsquigarrow$ f ist in x_0 stetig.

Satz 5.1.19 besagt also, daß auch das Bild einer offenen Menge bei einer stetigen injektiven Abbildung offen ist.

5.2 Funktionenfolgen

Wir betrachten nun auch Folgen (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Definition 5.2.1: *(f_n) heißt in D Cauchy-konvergent* $:\Longleftrightarrow$

$$\text{für alle } x \in D \text{ konvergiert } (f_n(x)).$$

Analog definiert man die Konvergenz gegen einen Grenzwert $f(x)$, $f_n(x) \to f(x)$. Man spricht in diesem Falle auch von „punktweiser Konvergenz“.

Beispiele:

1. $D := [0, 1]$ und

$$f_n(x) := x^n \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

2. $D := [0, 2]$ und

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{für } 0 \le x < 1/n \\ 2 - nx & \text{für } 1/n \le x < 2/n \\ 0 & \text{für } 2/n \le x \le 2. \end{cases}$$

Dann gilt $f_n(x) \longrightarrow 0$.

Analog zur gleichmäßigen Stetigkeit erklärt man auch

Definition 5.2.2: *f_n ist in D gleichmäßig Cauchy-konvergent* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n, m \ge n_0 \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Die gleichmäßige Konvergenz gegen einen Grenzwert wird ähnlich definiert.

Beispiele

1. $f_n(x)$ sei wie im ersten Beispiel oben definiert. (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig. Man wähle nämlich $n = n_0$, $m = 2n_0$ und $x = 2^{-1/n_0}$. Dann ist

$$\forall\, n_0 \quad |x^n - x^m| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

2. $f_n(x)$ sei wie im zweiten Beispiel oben definiert. (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig. Man wähle nämlich $n = n_0$, $m = 2n_0$ und $x = 1/n_0$. Dann ist

$$\forall\, n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| = |1 - 0| = 1.$$

3. $D := \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := \frac{x^2}{1 + nx^2}.$$

(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen Null. Es ist nämlich $f_n(0) = 0$ und

$$\forall\, x \neq 0 \quad |f_n(x)| = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n} < \frac{1}{n},$$

also

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Man wähle also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

4. $D := \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die f_n sind also nicht stetig, und es gilt punktweise

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f_n) konvergiert in D gleichmäßig. Es gilt nämlich

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2})} |f_n(x) - f(x)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ist sehr wichtig bei der Behandlung von Konvergenzfragen. Um die Darstellung klarer und kürzer halten zu können, führen wir die Norm

$$\|f\| := \sup_{x\in D} |f(x)|$$

ein. Offenbar existiert $\|f\|$ für alle $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ und hat auch die Eigenschaften einer Norm (vgl. Definition 3.4.1). $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ wird daher mit dieser Norm zu einem normierten Vektorraum. Es gilt auch

$$\forall\, f, g \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R}) \quad \|f \cdot g\| \le \|f\| \cdot \|g\|.$$

Verwendet man diese Norm, dann gilt

Folgerung 5.2.3: *Es seien $f_n \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f $\Longleftrightarrow$*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Analoges gilt für die gleichmäßige Cauchy-Konvergenz.

Beweis der Folgerung: Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \ge n_0 \quad \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \ge n_0 \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ beinhaltet also $\forall\, n \ge n_0 \quad f_n - f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$.

Wir betrachten nun Folgen aus $C(D,\mathbb{R})$. Es gilt

Satz 5.2.4: *Es seien $f_n \in C(D,\mathbb{R})$, und (f_n) konvergiere gleichmäßig in D gegen f. Dann gilt auch $f \in C(D,\mathbb{R})$.*

Aus

$$\forall\, x_0 \;\; \forall\, n \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1 \;\; \forall\, x, |x - x_0| < \delta_1 \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_2 \;\; \forall\, n \ge n_2 \;\; \forall\, x \in D \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{$**$}$$

folgt nämlich mit $n := n_2(\frac{\varepsilon}{3})$ und $\delta(x_0, \varepsilon) := \delta_1(x_0, n_2(\frac{\varepsilon}{3}), \frac{\varepsilon}{3})$

$$\forall\, x_0 \quad \forall\, \varepsilon \quad \exists\, \delta \quad \forall\, x, |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Analog sieht man, daß eine gleichmäßig konvergente Folge gleichmäßig stetiger Funktionen gegen eine gleichmäßig stetige Grenzfunktion konvergiert. δ_1 und damit δ hängen dann nämlich nicht mehr von x_0 ab.

Korollar 5.2.5: *$\mathcal{BC}(D,\mathbb{R}) := \mathcal{B}(D,\mathbb{R}) \cap C(D,\mathbb{R})$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|$.*

Korollar 5.2.6: *Es sei K kompakt. Dann ist $C(K,\mathbb{R})$ vollständig bzgl. $\|\cdot\|$.*

Das folgt aus Satz 5.1.9. Es gilt auch

Satz 5.2.7: *$\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|$.*

Denn es sei $f_n \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$, $f_n \to f$. Dann gilt

$$\forall\, n \quad \exists\, c \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x)| \le c \tag{$*$}$$

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, n_0 \quad \forall\, n \ge n_0 \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{$**$}$$

Wählt man nun $n := n_0(1)$ und $k := 1 + c(n_0(1))$, dann folgt

$$\forall\, x \in D \quad |f(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \le k.$$

Von besonderem Interesse sind nun Reihen von Funktionen, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{mit } f_n \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}).$$

Alle Definitionen übertragen sich. Man betrachte nur die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}).$$

So gilt zum Beispiel

Satz 5.2.8: *Für alle n sei $\|f_n\| \le c_n$, und $\sum c_n$ konvergiere. Dann konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig.*

Der Beweis folgt aus

$$\left\| \sum_{n}^{m} f_j \right\| \le \sum_{n}^{m} \|f_j\| \le \sum_{n}^{m} c_j.$$

Beispiele:

1. Die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

konvergiert gleichmäßig in $D_c := \{x \,|\, x \ge c > 1\}$. $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ fällt nämlich streng monoton für $n > 1$. Es gilt also

$$\forall\, x \in D_c \quad \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^c} =: c_n$$

und $\sum c_n$ konvergiert. Das folgt aus

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c}\right) + \left(\frac{1}{4^c} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{8^c} + \cdots\right) + \cdots \\ \le\ & 1 + \frac{2}{2^c} + \frac{4}{4^c} + \frac{8}{8^c} + \cdots \\ \le\ & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^3 + \cdots \quad \text{mit } \alpha := c - 1 > 0 \\ =\ & \frac{1}{1 - \frac{1}{2^\alpha}} < \infty. \end{aligned}$$

In $(1,\infty)$ konvergiert die Zetareihe aber nicht gleichmäßig, und für $x = 1$ konvergiert sie nicht.

2. Wir betrachten Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Es existiere

$$a := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

und es sei

$$r := \frac{1}{a}$$

der „Konvergenzradius“ der Potenzreihe. Dann gilt

(a) $\sum a_n x^n$ konvergiert absolut in $|x| < r$.

(b) $\sum a_n x^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig in $|x| \le c < r$.

Es gilt nämlich

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < (a + \varepsilon).$$

Mit $\varepsilon := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|} - a\right)$ ist dann $|x| = \frac{1}{a+2\varepsilon}$, und es folgt

$$\forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{a+\varepsilon}{a+2\varepsilon} < 1.$$

Das zeigt (a). Aussage (b) folgt aus

$$\forall x, |x| \le c \ \ \forall n \ge n_0(\varepsilon) \quad \sqrt[n]{|a_n x^n|} \le c\sqrt[n]{|a_n|} \le c(a+\varepsilon) \ = (r-\eta)(a+\varepsilon) \le 1 + \frac{\varepsilon}{a} - \eta a < 1$$

mit $\eta := r - c > 0$ und für genügend kleines ε.

5.3 Elementare Funktionen

In §4.4 haben wir bereits die Exponentialfunktion

$$e(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

eingeführt. Mit $e(x) = s_n(x) + r_n(x)$ galt die Restgliedabschätzung

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right| \le \frac{(n+2)}{(n+2-|x|)} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Es seien

$$f_n(x) := \frac{x^n}{n!}.$$

Dann gilt für $|x| \le R$

$$|f_n(x)| \le \frac{R^n}{n!} =: a_n,$$

und die Reihe $\sum a_n$ konvergiert wegen

$$\forall n \ge n_0 := [R] \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{R}{n+1} < 1.$$

Mithin konvergiert $e(x)$ in $|x| \le R$ gleichmäßig, sogar absolut und gleichmäßig. Nach Satz 5.2.4 ist $e(x)$ daher in jedem Intervall $[-R, R]$ stetig, und es gilt $e(0) = 1$ und $e(1) = \mathrm{e}$.

Aus $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ folgt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} < \sqrt{\frac{2}{n}} \longrightarrow 0.$$

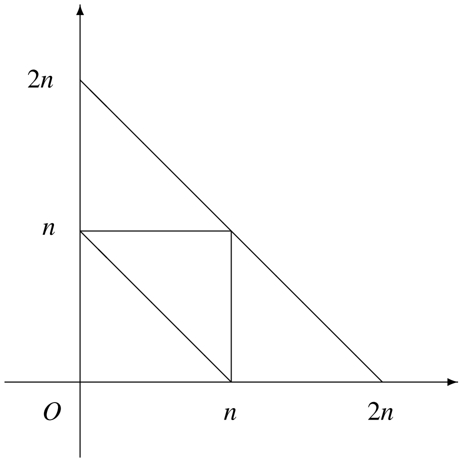
Die Reihe $e(x)$ hat also unendlichen Konvergenzradius.

Wir zeigen nun das Additionstheorem

$$e(x) \cdot e(y) = e(x+y).$$

Zum Beweis bilden wir

$$\begin{aligned} s_n(x)\, s_n(y) \quad &= \quad \sum_{j,k=0}^{n} \frac{x^j\, y^k}{j!\, k!} \quad = \quad \sum_{s=0}^{2n} \Big\{ \sum_{\substack{j=0,\dots,n \\ k=0,\dots,n \\ s=j+k}} \frac{x^j\, y^k}{j!\, k!} \Big\} \\ &= \quad \sum_{s=0}^{n} \Big\{ \sum_{j=0}^{s} \frac{x^j\, y^{s-j}}{j!\,(s-j)!} \Big\} + R_n(x,y). \end{aligned}$$



Nun ist

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{x^j\, y^{s-j}}{j!\,(s-j)!} = \frac{1}{s!} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j\, y^{s-j} = \frac{(x+y)^s}{s!}.$$

Deshalb gilt

$$s_n(x)s_n(y) = s_n(x+y) + R_n(x,y),$$

und wir müssen das Restglied $R_n(x,y)$ abschätzen. Offenbar ist (vgl. die Abbildung)

$$\begin{aligned} \left|R_n(x,y)\right| &\le \sum_{s=n+1}^{2n} \Bigg\{ \sum_{\substack{j=0,\cdots,n\\ k=0,\cdots,n\\ s=j+k}} \frac{|x|^j\,|y|^k}{j!\,k!} \Bigg\} \le \sum_{s=n+1}^{2n} \frac{(|x|+|y|)^s}{s!} \\ &= s_{2n}(|x|+|y|) - s_n(|x|+|y|) \le r_n(|x|+|y|) \to 0. \end{aligned}$$

Das beweist das Additionstheorem.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus unmittelbar

$$e(n) = \mathrm{e}^n \text{ und } e(-n) = \mathrm{e}^{-n},$$

letzteres wegen

$$e(-n)\,e(n) = e(0) = 1.$$

Aus

$$\left(e\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^n = e(1) = \mathrm{e}$$

folgt auch

$$e\Big(\frac{1}{n}\Big) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$$

und damit für alle $q \in \mathbb{Q}$

$$e(q) = \mathrm{e}^q.$$

Für rationale x haben wir damit $e(x)$ mit der Exponentialfunktion e^x identifizieren können. Für irrationale x muß e^x erst erklärt werden. Das geschieht natürlich naheliegend durch stetige Ergänzung. Damit haben wir, weil $e(x)$ ja stetig ist,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad e(x) = \mathrm{e}^x.$$

Wir geben noch einige Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt $e(x) > 0$, und $e(x)$ wächst streng monoton. Denn für $x \ge 0$ folgt unmittelbar $e(x) \ge 1$, und allgemein gilt $e(x) = 1/e(-x)$. Es sei $p \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $e(p) > 1$ und

$$e(x+p) = e(x)e(p) > e(x).$$

2. Mithin existiert eine stetige und streng monotone Umkehrfunktion (Satz 5.1.2 und Satz 5.1.19). Wir nennen sie ln oder auch $\log_e$, den „Logarithmus zur Basis e". Es gilt

$$\begin{aligned} \ln\ :\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \ln y := x, \end{aligned}$$

wobei $e^x = y$. Für den Logarithmus gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\ln(y_1 \cdot y_2) &= \ln y_1 + \ln y_2\\ \ln(y^\alpha) &= \alpha \cdot \ln y.\end{aligned}$$

Das machte diese Funktion über Jahrhunderte für das praktische Rechnen so nützlich. Ich habe in der Schule noch ausgiebig mit Logarithmentafeln arbeiten müssen. Dabei haben wir aber meist den Logarithmus zur Basis Zehn benutzt. Allgemein sei $a > 0$ die Basis. Dann gilt

$$y = a^x := \mathrm{e}^{x \ln a} \quad \longleftrightarrow \quad x = \log_a y, \tag{$*$}$$

und man schreibt auch kurz log, wenn die Basis nicht interessiert (ich denke vor allem an $a = 10$). Es ist also $\ln = \log_e$. Die Logarithmen zu verschiedenen Basen lassen sich natürlich leicht ineinander umrechnen. Denn aus ($*$) folgt

$$a^x = y = b^{\log_b y} = b^{\log_b a^x} = b^{x \log_b a}$$

oder

$$\log_b y = x \log_b a = \log_b a \cdot \log_a y. \tag{$**$}$$

3. Auch für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$, definieren wir

$$e(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Da bei den Konvergenzbetrachtungen in allen Abschätzungen nur die Absolutbeträge eingingen, gelten die Resultate entsprechend. $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist also eine stetige Funktion. Aus dem Additionstheorem folgt nun

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \tag{$***$}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &=: c(y) + \mathrm{i}s(y).\end{aligned}$$

Offenbar sind auch c und s stetige Funktionen in $\mathbb{R}$ (absolut konvergente Reihen mit derselben Majorante wie die Exponentialfunktion). Die Restgliedabschätzungen können sogar verbessert werden, weil beide Reihen alternieren und die einzelnen Summanden Nullfolgen bilden. Man vergleiche das Leibniz-Kriterium in §4.2.

4. Wir diskutieren nun die Funktionen c und s. Es gilt

$$\begin{gathered} c(0) = 1 \qquad\qquad s(0) = 0\\ c(-x) = c(x) \qquad\qquad s(-x) = -s(x)\\ s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)\\ c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)\\ c^2(x) + s^2(x) = 1.\end{gathered}$$

Der Beweis der Additionstheoreme folgt aus dem der Exponentialfunktion. Es ist

$$e^{\mathrm{i}(x+y)} = e^{\mathrm{i}x} \, e^{\mathrm{i}y},$$

also

$$\begin{aligned} & c(x+y) + \mathrm{i}\, s(x+y)\\ =\; & \{c(x) + \mathrm{i}\, s(x)\}\{c(y) + \mathrm{i}\, s(y)\}\\ =\; & \{c(x)c(y) - s(x)s(y)\} + \mathrm{i}\{s(x)c(y) + s(y)c(x)\}.\end{aligned}$$

Speziell folgt für $y = -x$

$$1 = c(x-x) = c^2(x) + s^2(x).$$

5. Wir definieren die Sinus- und Cosinusfunktion geometrisch. In der Gaußschen Zahlenebene seien

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi := \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi := \frac{x}{r}.$$

Der Winkel φ wird traditionell im *Grad* gemessen ($0 \le \varphi \le 360$) oder auch im *Bogenmaß*. Es sei π der Inhalt des Einheitskreises, $\pi = 3.141\,592\,653\,59\cdots$ (darauf gehen wir anschließend ein), dann setzt man

$$s := \frac{2\pi}{360}\varphi = 2 \cdot |G_\varphi|, \quad 0 \le s \le 2\pi.$$

Dabei ist $|G_\varphi|$ der Inhalt des Kreissektors

$$G_\varphi := \{(r,\psi) \;\big|\; 0 \le r \le 1,\ 0 \le \psi \le \varphi\}.$$

Die Wahl des Faktors 2 rührt daher, daß der Umfang des Einheitskreises gerade 2π ist. Das werden wir erst später zeigen. Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir die Winkel immer im Bogenmaß messen. Für $x^2+y^2 = 1$ gilt also

$$\cos(2\,|G_\varphi|) = x \quad \sin(2\,|G_\varphi|) = y.$$

Nun ist (vgl. die Abbildung auf der nächsten Seite)

$$|\,\text{Dreieck } (OAB)\,| < |\,\text{Sektor } (OAB)\,|$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot 1 < \frac{s}{2},$$

also

$$\forall\, s,\ 0 < s \le \frac{\pi}{2} \quad \sin s < s.$$

Die Funktionen cos und sin genügen demselben Additionstheorem wie c und s. Das läßt sich elementargeometrisch nachrechnen.

6. Wir identifizieren nun cos mit c und sin mit s. Dazu holen wir etwas aus.

a) Es ist $c(x) > 0$ für $0 \le x \le 1$. Das folgt aus

$$c(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5\cdot 6}\right) + \cdots > 0.$$

b) Es ist $c(2) < 0$, denn

$$\begin{aligned} c(2) &= \left(1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - (\cdots) - \cdots \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{4}{11\cdot 12}\right) - \cdots \quad < \quad 0. \end{aligned}$$

c) Aufgrund des Zwischenwertsatzes hat c dann in $(1,2)$ eine Nullstelle. Es sei

$$\alpha = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; c(x) = 0\right\}.$$

Weil c stetig ist, ist dann $c(\alpha) = 0$.

d) Es ist

$$s(2\alpha) = 2s(\alpha)c(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad s(\alpha) = 1.$$

Zunächst haben wir nur $s^2(\alpha) = 1$. Für $0 < x \le 2$ gilt aber

$$\begin{aligned} s(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \cdots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots \quad > \quad x\left(1 - \frac{4}{6}\right) + \cdots \quad > \quad 0. \end{aligned}$$

e) Für $\xi = \frac{2k+1}{2^n}$ bzw. $\xi = \frac{2k}{2^n}$ gilt

$$c(\xi\alpha) = \cos(\xi\frac{\pi}{2}) \quad \text{bzw.} \quad s(\xi\alpha) = \sin(\xi\frac{\pi}{2}).$$

Das folgt für $n = 0$ aus den Additionstheoremen, weil beide Seiten jeweils verschwinden. Nun gilt aber für kleine x

$$c(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 + c(x)}{2}} \quad \text{und} \quad s(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 - c(x)}{2}}$$

und Analoges für cos und sin. Daraus erhält man die Behauptung für $n = 1$ und durch vollständige Induktion dann allgemein.

f) $\{\frac{2k+1}{2^n}\}$ bzw. $\{\frac{2k}{2^n}\}$ ist in $[0,1]$ dicht. Wegen der Stetigkeit ist damit

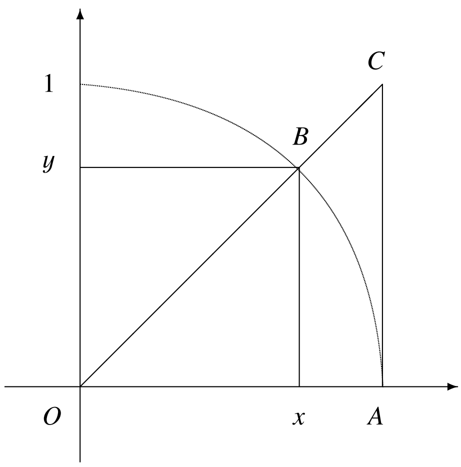
$$\forall\, x \in [0,1] \quad s(\alpha x) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \;\; c(\alpha x) = \cos(\frac{\pi}{2}x).$$

g) Wir zeigen schließlich $\pi = 2\alpha$. Dazu notieren wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(\alpha x)}{x} = \alpha$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$



Letzteres folgt anschaulich aus

$$|\,\text{Dreieck } (OAB)\,| < |\,\text{Sektor } (OAB)\,| < |\,\text{Dreieck } (OAC)\,|$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

oder

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

und damit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

7. Es ist nun

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\ \sin x &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}). \end{aligned}$$

Eine beliebige komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ schreibt man in Polarkoordinaten

$$a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a^n &= r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \\ &= r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\cos n\varphi &= \operatorname{Re}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n \\
&= \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi \pm \cdots \\
\sin n\varphi &= \operatorname{Im}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n \\
&= n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi \pm \cdots .
\end{aligned}$$

Das sind die Moivreschen Formeln (nach Abraham de Moivre 1667–1754).

8. Wir berechnen α und damit π.

Es war $1 < \alpha < 2$ die kleinste Nullstelle von $c(x)$. Zur Berechnung von α wählen wir die kontrahierende Abbildung

$$T(x) := x + \frac{c(x)}{s(x)}.$$

Man sieht leicht, daß $T : [1,2] \to [1,2]$ kontrahierend abbildet. Startet man mit $x_0 := 1.5$, dann erhält man in zwei Schritten

$$2\alpha = \pi = 3.141\,592\,654\,\cdots .$$

Hintergrund: Das ist das Newtonsche Verfahren

$$T(x) := x - \frac{c(x)}{c'(x)} = x + \frac{c(x)}{s(x)}$$

mit

$$T'(x) = -\frac{c^2(x)}{s^2(x)},$$

also $T'(\alpha) = 0$.

9. Umkehrfunktionen.

Offenbar besitzt $\sin x$ keine eindeutige Umkehrabbildung. Es läßt sich beispielsweise jedoch

$$\begin{array}{rcrcl} s & : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

umkehren. Diese Umkehrabbildung heißt arcsin. Analoges gilt für die übrigen trigonometrischen Funktionen.

10. Hyperbelfunktionen.

Im Gegensatz zu den *Kreis-Funktionen*, die wir bisher behandelt haben, definiert man auch *Hyperbel-Funktionen*, nämlich

$$\begin{array}{rcrcl} \cosh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} \sinh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}). \end{array}$$

Es ist also

$$\cosh x = \cos \mathrm{i}x, \quad \sinh x = -\mathrm{i}\,\sin \mathrm{i}x,$$

und es gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Zum Namen: Am Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ hatten wir

$$x = \cos(2\,|G|) \quad \text{und} \quad y = \sin(2\,|G|).$$

Analog gilt für die Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$

$$x = \cosh(2\,|G|) \quad \text{und} \quad y = \sinh(2\,|G|).$$

Dabei ist $|G|$ die Fläche zwischen $(0,0)$, $(0,1)$ und (x,y).

Hintergrund: Im Falle der Hyperbel ist mit $y(x) = \sqrt{x^2-1}$

$$|G| = \frac{x}{2}y(x) - \int_1^x y(s)\,ds = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

oder
$$e^{2|G|} = x + y(x),$$
also
$$\cosh(2|G|) = \frac{1}{2}\left(x + y + \frac{1}{x+y}\right) = x.$$

11. Im Vorangegangenen haben wir mehrfach vom Flächeninhalt gesprochen, so bei der Einführung von π. Mit der damit verbundenen Problematik, also mit Maßtheorie, werden wir uns erst später in §10 etwas beschäftigen. Wir wollen hier *naiv* annehmen, daß sich die Kreisfläche messen läßt. Etwa wie die Griechen es getan haben, indem man sie (von außen und von innen) durch regelmäßige n-Ecke approximiert. Man führe das einmal durch!

12. Ich beende diesen Abschnitt mit folgender Bemerkung. Offenbar gilt für alle $x \in \mathbb{R}$
$$1 + x \le e^x.$$
Daraus folgt
$$\forall\, x > -1 \quad e^{-x} \le \frac{1}{1+x}$$
oder
$$\forall\, x < 1 \quad 1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}.$$
Mithin gilt
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x, |x| < n \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le e^x \le \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n},$$
und beide Seiten konvergieren gegen e^x.

Das sieht man so: Die Folge
$$f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
wächst streng monoton, und es gilt $2 \le f_n < 3$. Es ist nämlich für $n \ge 2$
$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$
Aus der Bernoullischen Ungleichung (Beispiel 2.1.2) folgt deshalb
$$\frac{f_n}{f_{n-1}} > \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$
Die Beschränktheit ist klar; mithin konvergiert (f_n).

Die Folge
$$g_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n \ge 2$$
ist beschränkt und fällt monoton wegen
$$\frac{g_{n-1}}{g_n} = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{n-2}{n-1}\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)^n = \frac{n-2}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n(n-2)}\right)^n$$
oder
$$\frac{g_{n-1}}{g_n} > \frac{n-2}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-2}\right) = 1.$$
Mithin konvergiert auch (g_n). Ferner ist
$$\frac{f_n}{g_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - \binom{n}{1}\frac{1}{n^2} + \underbrace{\cdots}_{|\cdot| \le \frac{1}{n}} \longrightarrow 1.$$
Daraus folgt
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},$$
und damit wiederum die analoge Aussage für e^x. Zum Beweis diskutiere man die Abbildung
$$t \longmapsto \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$
und substituiere $t \to n/x$.

5.4 Differenzierbare Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir Abbildungen diskutieren, die noch glatter sind als die stetigen, nämlich die differenzierbaren. Dahinter steht anschaulich das uralte Tangentenproblem. Es seien $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, und man bilde den Differenzenquotienten

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Dann ist

$$y = y_0 + (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

die Sekante durch (x_0, y_0) und (x_1, y_1). Hieraus wird die Tangente, wenn man den Grenzübergang $x_1 \to x_0$ durchführen kann. Das setzt natürlich eine gewisse Glattheit von f voraus.

Definition 5.4.1: *Es seien I ein Intervall, $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ und $x \in I$. Dann heißt f in x differenzierbar, wenn*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$$

existiert. Ist f für alle $x \in I$ differenzierbar, dann heißt f in I differenzierbar.

Beispiele:

1. $f(x) := x^n$. Dann ist

$$(x+h)^n - x^n = \sum_1^n \binom{n}{j} h^j\, x^{n-j}$$

   also $f'(x) = n\, x^{n-1}$.

2. $f(x) := e(x)$. Es ist

$$e(x+h) = e(h) \cdot e(x)$$

   und

$$\frac{e(h) - 1}{h} = \sum_1^\infty \frac{h^{j-1}}{j!} = 1 + h \sum_0^\infty \frac{h^k}{(k+2)!} \to 1,$$

   also

$$e'(x) = e(x).$$

   Daraus folgt insbesondere

$$\frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} = e^{ix} \frac{e^{ih} - 1}{h} \to i\, e^{ix}$$

   oder

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\sin x \\ \sin'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

3. $f(x) := |x|$. Dann ist f ist im Nullpunkt nicht differenzierbar, denn es gelten

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \text{ und } \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h)}{h} = -1.$$

Bemerkung 5.4.2:

1. Wie bei der Stetigkeit kann man auch die Ableitung (Differenzierbarkeit) von rechts oder von links definieren. Das letzte Beispiel illustriert dies.
2. Man nennt $f'(x)$ die Ableitung (genauer: die erste Ableitung) von f in x und schreibt dafür auch (der Tradition folgend)

$$f'(x) =: \frac{df}{dx}(x).$$

   Rechts steht ein reines Symbol und kein Bruch!

3. Die (traditionelle) Definition der Differenzierbarkeit läßt sich nicht unmittelbar auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen, weil man nicht ohne weiteres durch einen Vektor h dividieren kann. Ich gebe deshalb schon jetzt die allgemeinere Definition, die Vorteile hat. Im $\mathbb{R}^1$ ist

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h \\ &= f(x) + f'(x)\cdot h + \underbrace{\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right]}_{=:\, r(x,h)} \cdot h, \end{aligned}$$

also mit $g(x) := f'(x)$

$$f(x+h) = f(x) + g(x)\cdot h + r(x,h)\cdot h. \tag{$*$}$$

f ist daher in x differenzierbar, wenn es ein $g(x)$ und ein $r(x,h)$ gibt mit $(*)$ und

$$\lim_{h\to 0} r(x,h) = 0.$$

Dann ist $f' = g$.

Es seien nun $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gehen wir analog vor und sagen, daß f in x_0 differenzierbar ist, wenn

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x, x_0)\cdot(x - x_0)$$

gilt mit $f_1(x, x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $f_1(\cdot, x_0) \in C(U(x_0), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ und

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x, x_0) =: f'(x_0).$$

Dabei ist $U(x_0)$ eine Umgebung des Punktes x_0 und $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Ableitung von f in x_0. $\mathcal{L}$ sind die linearen Abbildungen. Diese Definition läßt sich auf normierte Vektorräume übertragen.

Man interessiert sich nun speziell für stetig differenzierbare Funktionen.

Definition 5.4.3: *$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sei in I differenzierbar, und es sei $f' \in C(I, \mathbb{R})$. Dann heißt f in I stetig differenzierbar, und man schreibt*

$$f \in C_1(I, \mathbb{R}).$$

Es gilt

Satz 5.4.4: *$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sei in $x \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x stetig.*

Somit gilt $C_1 \subset C$, und man schreibt auch C_0 statt C. Beweis des Satzes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

existiert. Mit Grenzwerten kann man rechnen (vgl. Satz 2.3.12), es ist also

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x)) \\ = &\left\{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\} \cdot \left\{\lim_{h\to 0} h\right\} \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Aus demselben Grund kann man mit differenzierbaren Funktionen rechnen. Auch $C_1(I, \mathbb{R})$ ist ein Vektorraum, und es gilt

Satz 5.4.5: *Es seien f und g differenzierbar. Dann gelten:*

(i) $(f+g)' = f' + g'$

(ii) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

(iii) $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$ *für alle x mit $g(x) \neq 0$.*

Letzteres folgt aus

$$\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}.$$

Beispiele:

1.
$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig (vgl. §5.1). Die Funktion oszilliert im Nullpunkt zu stark. Sie ist also erst recht nicht differenzierbar im Nullpunkt.

2. Es sei $g(x) := x\,f(x)$. g ist im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar. Für $h_n := \frac{1}{n}$ folgt nämlich

$$\frac{g(h_n)}{h_n} = \sin(n\pi) = 0$$

und für $k_n := 1/(2n + \frac{1}{2})$

$$\frac{g(k_n)}{k_n} = \sin\Big((2n + \tfrac{1}{2})\pi\Big) = 1.$$

3. $h(x) := x^2 f(x)$ ist im Nullpunkt differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. Die Differenzierbarkeit folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von f. Es ist $h'(0) = 0$, und es gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\,f(x) + x^2\,f'(x) \\ &= 2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}. \end{aligned}$$

h' ist daher im Nullpunkt nicht stetig.

4. Beispiel für eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion: Es seien

$$\begin{array}{rcl} \{\,\} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \text{Abstand von } x \text{ zur nächstgelegenen ganzen Zahl} \end{array}$$

eine „Sägezahnfunktion“ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Es sei $x \in [0, 1)$ eindeutig als Dezimalbruch geschrieben,

$$x = 0.\,x_1\,x_2\,x_3 \cdots$$

(vgl. §4.1). Dann ist entweder

$$0.\,x_{n+1}\,x_{n+2}\,x_{n+3} \cdots \leq \frac{1}{2} \tag{$*$}$$

oder

$$0.\,x_{n+1}\,x_{n+2}\,x_{n+3} \cdots > \frac{1}{2}. \tag{$**$}$$

Im ersten Fall folgt

$$\{10^n x\} = 0.\,x_{n+1}\,x_{n+2}\,x_{n+3} \cdots \leq \frac{1}{2}$$

und im zweiten

$$\{10^n x\} = 1 - 0.\,x_{n+1}\,x_{n+2}\,x_{n+3} \cdots < \frac{1}{2}.$$

Es seien nun

$$\varepsilon_m := \begin{cases} -1 & \text{für } x_m = 4 \text{ oder } 9 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h_m := \frac{\varepsilon_m}{10^m}.$$

Dann ist

$$\Delta_m := \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} = 10^m \varepsilon_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_{n,m}}{10^n}.$$

Nun gilt mit $Z_{n,m} := \{10^n(x + \varepsilon_m 10^{-m})\} - \{10^n x\}$

$$Z_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq m \\ \pm 10^{n-m} & \text{für } n < m, \end{cases}$$

also

$$\Delta_m = \sum_{n=0}^{m-1} a_n$$

mit $a_n = \pm 1$, d.h. $\Delta_m \in \mathbb{Z}$, und zwar

$$\begin{array}{lllll} \Delta_1 & = & a_0 & = & \pm 1 \\ \Delta_2 & = & a_0 + a_1 & = & 2, 0 \text{ oder } -2 \\ \Delta_3 & = & a_0 + a_1 + a_2 & = & 3,\ 1,\ -1 \text{ oder } -3. \end{array}$$

Δ_{2m} ist also gerade und Δ_{2m+1} ungerade. Mithin kann die Folge (Δ_m) nicht konvergieren. □

Wir wollen nun eine Komposition zweier Funktionen

$$f : S \longrightarrow T \qquad g : T \longrightarrow U,$$

also

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : S & \longrightarrow & U \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

differenzieren.

Satz 5.4.6: *Es seien f in x_0 differenzierbar, $t_0 := f(x_0)$ und g in t_0 differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel*

$$(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0).$$

Beweis: Es sei zunächst $f'(x_0) = 0$. Aus der Differenzierbarkeit von g folgt dann mit $c = c(t_0)$

$$|g(t_0 + k) - g(t_0)| \leq c\,|(t_0 + k) - t_0|,$$

also

$$\left|\frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h}\right| \leq c \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \to 0.$$

Es sei nun $f'(x_0) \neq 0$ und o.B.d.A. sogar $f'(x_0) > 0$. Aus

$$\left|\frac{f(x_0 \pm p) - f(x_0)}{\pm p} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

für alle $0 < p \leq p_0(\varepsilon)$ folgt dann

$$f(x_0 - p) < f(x_0) - p(f'(x_0) - \varepsilon).$$

Mithin ist für alle h mit $0 < |h| \leq h_0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \neq 0,$$

und wir erhalten mit $f(x_0 + h) =: f(x_0) + k(h) = t_0 + k(h)$

$$\begin{aligned} & \frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h} \\ = \; & \frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ = \; & \frac{g(t_0 + k) - g(t_0)}{k} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ \to \; & g'(t_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\lim_{h \to 0} k(h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right) = 0$$

verwandt.

Uns fehlt noch der Satz von der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Bevor wir ihn beweisen, zeigen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

5.5 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Wir beginnen mit dem Satz vom lokalen Extremum:

Satz 5.5.1: *$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sei in einer Umgebung $U(x)$ des Punktes x differenzierbar, und es gelte*

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, h,\ |h| \le c \quad f(x+h) \ge f(x) \quad (\textit{oder } f(x+h) \le f(x)).$$

Dann ist $f'(x) = 0$.

Zum Beweis wählen wir $p \in \mathbb{R}^+$. Dann ist einmal

$$\frac{f(x+p) - f(x)}{p} \ge 0 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) \ge 0$$

und zum anderen

$$\frac{f(x-p) - f(x)}{-p} \le 0 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) \le 0.$$

Mithin verschwindet $f'(x)$.

Der Satz gibt ein *notwendiges* Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums. Es reicht jedoch nicht hin! Als Beispiel betrachte man nur $f(x) = x^3$.

Der nächste Satz stammt von Michel Rolle (1652–1719).

Satz 5.5.2: *Es sei $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ in (a,b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann gilt*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \qquad f'(x_0) = 0.$$

Zum Beweis sei o.B.d.A. $f(a) = f(b) = 0$. Es sei ferner $M := \max f(x)$ für $x \in [a,b]$. Nach Satz 5.1.11 existiert M, und es ist $M \ge 0$. Nun können zwei Fälle auftreten:

1. Es sei $M = f(x_0) > 0$. Dann ist $x_0 \in (a,b)$, und der Satz vom lokalen Extremum liefert $f'(x_0) = 0$.
2. Es sei $M = f(x_0) = 0$. Nun betrachten wir $m := \min f = f(x_1) \le 0$, welches ebenfalls existiert. Wieder sind zwei Fälle möglich. Entweder ist $m < 0$. Dann folgt wie bei 1 $f'(x_1) = 0$. Oder es ist auch $m = 0$. Dann ist $f = 0$ und damit $f' = 0$.

Aus dem Satz von Rolle folgt der

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: *Es sei $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ in (a,b) differenzierbar. Dann gilt*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Zum Beweis wählen wir

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dann ist $F(a) = F(b) = 0$, und es gibt ein x_0 mit $F'(x_0) = 0$, also

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wir geben noch drei äquivalente Formulierungen des Mittelwertsatzes:

1. $\exists\, x_0 \in (a,b) \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(x_0)$
2. $\exists\, \theta \in (0,1) \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(a + \theta(b-a))$
3. $\forall\, h,\ |h| \le h_0 \quad \exists\, \theta \in (0,1) \quad f(x+h) = f(x) + h\, f'(x + \theta h)$,

letzteres mit $x \in [a,b)$ und $h_0 < \min(|x-a|, |b-x|)$.

Zum Beweis des Mittelwertsatzes brauchte die Ableitung der Funktion nicht stetig zu sein. Sie hat jedoch – wie die stetigen Funktionen – die Eigenschaft, jeden Zwischenwert anzunehmen. Es gilt nämlich

Satz 5.5.3: *Es sei $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ in $[a,b]$ differenzierbar mit $f'(a) \ne f'(b)$. Dann nimmt f' in (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.*

Es seien nämlich (o.B.d.A.) $f'(a) > c > f'(b)$ und

$$g(x) := f(x) - cx.$$

Wir haben zu zeigen, daß g' den Wert 0 annimmt. Es ist $g'(a) > 0$ und $g'(b) < 0$. Die stetige Funktion g besitzt in $[a, b]$ ein Maximum. Dieses kann nicht an den Endpunkten liegen. Denn dann wäre etwa

$$g(x) \leq g(a) \qquad \text{für } a \leq x < x_0,$$

und $g'(a) \leq 0$ würde folgen. Also wird das Maximum von g in $x_1 \in (a, b)$ angenommen. Aus dem Satz vom lokalen Extremum folgt dann $g'(x_1) = 0$. Das war zu zeigen.

Weil es differenzierbare Abbildungen gibt, deren Ableitung nicht stetig ist, ist damit gezeigt, daß die Zwischenwerteigenschaft die stetigen Abbildungen nicht charakterisieren kann.

Wir bringen nun eine Reihe von Folgerungen und Anwendungen des Mittelwertsatzes:

Folgerung 5.5.4:

1. Es sei I ein Intervall und $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ in I differenzierbar. Dann gilt

$$f' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = \text{const.}$$

Beweis: $\Longleftarrow$ ist klar. Wir zeigen $\Longrightarrow$: Es seien $x, x_0 \in I$. Dann ist auch $[x, x_0] \subset I$, und aus dem Mittelwertsatz folgt die Existenz eines $z \in (x, x_0)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(z) = f(x_0).$$

2. $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sei differenzierbar. Dann heißt F *Stammfunktion* zu $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) :\Longleftrightarrow F' = f$. Aus 1 folgt, daß sich Stammfunktionen zu f nur durch eine Konstante unterscheiden.
3. $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sei differenzierbar. Dann gilt: f wächst monoton $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in I \quad f'(x) \geq 0.$$

Beweis: $\Longrightarrow$:

$$\forall\, y > x \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad f' \geq 0.$$

$$\Longleftarrow: \qquad \forall\, y > x \;\; f(y) - f(x) = (y - x) f'(x + \theta(y - x)) \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ ist monoton.}$$

4. $f(x) := x^3 - 3x + c$ hat in $[0, 1]$ höchstens eine Nullstelle. Denn es seien $x_1, x_2 \in [0, 1]$ Nullstellen mit $x_1 < x_2$. Dann gibt es ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) = 0$. Nun ist aber

$$f'(x) = 3(x^2 - 1), \quad \text{also} \quad x_0 = 1 \notin (x_1, x_2).$$

5. Wir lösen eine „Differentialgleichung", nämlich $f' = f$ mit $f(0) = c \neq 0$. Die einzige Lösung dieser Aufgabe ist $f(x) = c\, e^x$. Beweis: Es sei auch $g' = g$ mit $g(0) = c$. Dann folgt

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'}{f} - \frac{gf'}{f^2} = \frac{g}{f} - \frac{gf}{f^2} = 0.$$

Also ist $g = kf$ und aus $g(0) = kf(0)$ folgt $k = 1$.
6. Wir zeigen den „erweiterten Mittelwertsatz". Es seien $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ in (a, b) differenzierbar und $g(a) \neq g(b)$. Dann gilt

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x_0) = f'(x_0).$$

Zum Beweis wählen wir

$$F(x) := f(x) - f(a) - \big(g(x) - g(a)\big)\, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dann ist $F(a) = F(b) = 0$ und

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad F'(x_0) = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

7. Wenn f mehrfach differenzierbar ist, kann man die „Entwicklung“ von f mit Hilfe des Mittelwertsatzes weitertreiben. Wir werden in §7.3 auf diese Weise eine „Taylorsche Reihenentwicklung“ für f herleiten. Es sei jetzt $f \in C_1([a,b],\mathbb{R})$ und in (a,b) zweimal differenzierbar. Es sei ferner mit $m \in \mathbb{R}$
$$F(x) := f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - m\frac{(b-x)^2}{2}.$$
Dann ist $F(b) = 0$ und
$$F(a) := f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - m\frac{(b-a)^2}{2}.$$
Wir wählen nun m so, daß auch $F(a) = 0$ ist. Dann ist F in $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar, und es gibt ein $c \in (a,b)$ mit
$$0 = F'(c) = (b-c)\{-f''(c) + m\}.$$
Es ist also $m = f''(c)$ mit $c \in (a,b)$ und
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(x) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c),$$
oder mit einem $\theta \in (0,1)$
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$$
8. Aus dem letzten Resultat können wir eine wichtige Folgerung ziehen. Es sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 zweimal stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Dann hat f in x_0 ein (lokales) Minimum. Es ist nämlich
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta h) > f(x_0)$$
in einer Umgebung $U_1(x_0)\backslash\{x_0\}$. Analog erhält man ein Maximum für $f''(x_0) < 0$. Wenn auch $f''(x_0)$ verschwindet, kann man versuchen, die Entwicklung weiterzutreiben.
9. Unter allen Rechtecken gegebenen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. Denn es seien a, b die Seiten. Dann ist $F = ab$ und $U = 2(a+b)$. Es sei $c := U/2 = (a+b)$ fest. Dann folgt
$$\begin{aligned} F(a) &= a(c-a) \\ F'(a) &= c-2a \\ F''(a) &= -2. \end{aligned}$$
Es ist also $F'(a_0) = 0$ für $a_0 = \frac{c}{2}$, und F hat in a_0 ein lokales Maximum. Dann ist auch $b_0 = \frac{c}{2}$ und $F(a_0) = \frac{c^2}{4}$. Wegen $F(0) = F(c) = 0$ gibt es keine Randmaxima, d.h. $F(a_0)$ ist Maximum.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem bereits angekündigten Satz von der Umkehrfunktion.

Satz 5.5.5: *In einer Umgebung des Punktes x_0 sei $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ stetig differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $V(f(x_0))$, in der die Umkehrabbildung*
$$\begin{aligned} g \; : \; V(f(x_0)) &\longrightarrow I \\ y &\longmapsto x = \left(f\big|U(x_0)\right)^{-1}(y) \end{aligned}$$
existiert. Dabei ist $U(x_0)$ eine Umgebung von x_0, g ist stetig differenzierbar, und es gilt
$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$
Zum Beweis sei o.B.d.A. $f'(x_0) > 0$. Es sei $y_0 := f(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von f' gibt es dann eine Umgebung $U(x_0)$ mit $f' \mid U(x_0) \geq p > 0$. Wir betrachten $f \mid U(x_0)$. f wächst dort streng monoton, denn für $x_1, x_2 \in U(x_0)$ gilt
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) \geq p > 0.$$
Nach Satz 5.1.2 existiert deshalb
$$g := f^{-1} \; : \; R(f \mid U(x_0)) \longrightarrow U(x_0)$$

und ist streng monoton. Nach Satz 5.1.19 ist g stetig. Wir haben also nur noch die Differenzierbarkeit zu beweisen. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(y_0+h)-y_0}{h} \\ &= \frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{h} \\ &= \frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{g(y_0+h)-g(y_0)}\cdot\frac{g(y_0+h)-g(y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Weil g stetig ist, folgt

$$\frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{g(y_0+h)-g(y_0)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} (f'\circ g)(y_0),$$

also

$$\frac{g(y_0+h)-g(y_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(f'\circ g)(y_0)}.$$

Aus der Stetigkeit von f' und g folgt dann schließlich auch die Stetigkeit von g'.

5.6 Die Regel von de L'Hospital

Wir beschließen dieses Kapitel mit einigen Regeln zur Berechnung von Grenzwerten — so sie existieren. Sie sind nach Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661–1704) benannt.

1. Es seien $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ differenzierbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Wir wollen

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnen. Aus dem erweiterten Mittelwertsatz folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{etwa mit } \; x_0 < t < x.$$

Wenn nun rechts der Grenzwert für $t \to x_0$ existiert, dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Das ist die Regel von de L'Hospital.

Beispiele:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2 \quad \text{(die Regel zweimal anwenden).}$$

2. Es sei $x_0 = \pm\infty$. Dann ist zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{\tau\to 0} \frac{(-\frac{1}{\tau^2})f'(\frac{1}{\tau})}{(-\frac{1}{\tau^2})g'(\frac{1}{\tau})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \tfrac{\ln x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{\frac{1}{x}}{1} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \tfrac{x}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{e^x} &= 0. \end{aligned}$$

3. Es sei $f(x_0) = g(x_0) = \pm\infty$. Wähle $x_1 < x < x_0$. Dann ist

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ mit } x_1 < t < x < x_0$$

also
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$
Es existiere
$$\gamma := \lim_{t \to x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$
Wir wählen dann $|x_1 - x_0|$ so klein, daß
$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - \gamma \right| < \varepsilon$$
wird. Damit ist x_1 festgelegt. Für $x \to x_0$ folgt dann
$$\frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} \to 1,$$
also
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma.$$

Beispiele:

1. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ wegen
$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = 1$
$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \sim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1 + x^2} \to 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ wegen $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ und
$$\frac{\ln(1 + x)}{x} \sim \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1 + x} \to 1.$$

6 Integration I

In diesem Kapitel werden wir elementares Integrieren behandeln. Das Thema wird in §10 und §11 wieder aufgegriffen.

6.1 Die Stammfunktion

In Folgerung 5.5.4.2 haben wir Stammfunktionen bereits kurz eingeführt; also

Definition 6.1.1: *Zu $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ gebe es eine differenzierbare Funktion $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ mit*

$$F' = f.$$

Dann heißt F Stammfunktion zu f.

Verschiedene Stammfunktionen zu $f \in \mathcal{F}((a, b), \mathbb{R})$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wir schreiben auch

$$F =: \int f =: \int f(x)\, dx$$

und nennen $\int f$ das unbestimmte Integral von f. Formal haben wir so die Operation des Differenzierens umgekehrt; aber natürlich wissen wir noch gar nicht, zu welcher Funktionenklasse es überhaupt Stammfunktionen gibt. Das wollen wir im folgenden etwas klären. Aber schon jetzt sei gewarnt. Im allgemeinen ist die Stammfunktion einer elementaren Funktion keine elementare Funktion mehr. Für das Integrieren gibt es keinen so einfachen Kalkül wie für das Differenzieren.

Natürlich können wir zu einer Reihe von elementaren Funktionen Stammfunktionen angeben, indem wir vom Ergebnis des Differenzierens ausgehen. Beispiele:

f	F
1	x
x^n für $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

Zu e^{x^2}, e^x/x, $\sin x/x$ oder $1/\ln x$ gibt es jedoch keine elementaren Stammfunktionen.

Als erstes wollen wir nun einige Integrationsregeln herleiten. Sie entstehen i.a. aus den entsprechenden Differentiationsregeln. Es sei im folgenden $c \in \mathbb{R}$, und zu f, g mögen Stammfunktionen F, G existieren. Dann gelten

1. Aus $(cF)' = cF'$ folgt für alle $c \in \mathbb{R}$
$$\int c\,f = c \int f.$$
2. Aus $(F + G)' = F' + G'$ folgt
$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$
3. Aus $(fg)' = f'g + fg'$ folgt
$$\int f'g + \int fg' = f\,g.$$

Dies nennt man “partielle Integration“. Beispiele dazu:

$$\int \ln\, x\, dx = \int 1 \cdot \ln\, x\, dx = x \cdot \ln\, x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln\, x - x.$$

$$\int \sin^2 x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\, dx,$$

also

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\{-\cos x \cdot \sin x + x\};$$

ferner

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x.$$

4. Aus $(f^2)' = 2\,f\,f'$ folgt

$$\int f f' = \frac{1}{2} f^2.$$

5. Aus $(\ln|f|)' = f'/f$ folgt

$$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|.$$

6. Aus $(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g'$ folgt

$$\int (f \circ g)g' = F \circ g.$$

Dies ist die „Substitutionsregel". Beispiele dazu:

$$\begin{aligned} \int x\,e^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int (x^2)' e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2}. \\ \int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx &= \int (\sin x)^3 \cdot (\sin x)'\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x. \end{aligned}$$

7. Aus $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ folgt

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

8. Aus $(\ln|ax+b|)' = a/(ax+b)$ folgt

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|.$$

9. Beispiel: Wir berechnen für $a \neq 0$

$$I := \int \frac{1}{ax^2 + 2bx + c}\,dx.$$

Es sei $ax^2 + 2bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit

$$x_{1,2} := -\frac{b}{a} \pm \frac{w}{a}, \quad \text{wobei} \quad w := \sqrt{b^2 - ac}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:
a) Es sei $w = 0$. Dann ist

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x - \frac{b}{a})^2}\,dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{(x - \frac{b}{a})} = \frac{-1}{ax - b}.$$

b) Es sei $w \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} &= \frac{1}{x_1 - x_2}\Big(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\Big) \\ &= \frac{a}{2w}\Big(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\Big), \end{aligned}$$

also

$$I = \frac{1}{2w}\ln\left|\frac{x - x_1}{x - x_2}\right| = \frac{1}{2w}\ln\left|\frac{ax + b - w}{ax + b + w}\right|.$$

c) Möglicherweise ist aber $w \neq 0$ imaginär. Auch in diesem Falle kann man das Resultat unter b) verwenden, man muß nur ins Reelle zurückrechnen. Aus

$$\sqrt{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{\cos y} \quad \text{und} \quad \sin y = \frac{\tan y}{\sqrt{1 + \tan^2 y}}$$

folgen
$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Mit $w =: \mathrm{i}p$, $p \in \mathbb{R}^+$, und $\alpha := (ax+b)/p$ folgt
$$\begin{aligned}
\frac{\alpha - \mathrm{i}}{\alpha + \mathrm{i}} &= \frac{\alpha^2 - 1 - 2\mathrm{i}\alpha}{1+\alpha^2} \\
&= \frac{\sqrt{(\alpha^2-1)^2 + 4\alpha^2}}{1+\alpha^2} \exp\left(\mathrm{i} \arctan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{i} \arctan \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right),
\end{aligned}$$
also
$$I = \frac{1}{2\mathrm{i}p} \ln\left\{\frac{\alpha - \mathrm{i}}{\alpha + \mathrm{i}}\right\} = \frac{1}{p} \arctan \alpha,$$
letzteres wegen
$$\tan 2y = \frac{2 \sin y \cdot \cos y}{\cos^2 y - \sin^2 y} = 2\, \frac{\tan y}{1 - \tan^2 y}$$
oder
$$\tan(2 \arctan x) = 2\, \frac{x}{1-x^2}.$$
Natürlich läßt sich das Resultat auch im Reellen durch Differenzieren direkt bestätigen.

10. Das letzte Beispiel führt uns allgemein auf die Methode der „Partialbruchzerlegung". Es seien $P_i(x)$ Polynome vom Grade i.
$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, dx$$
soll berechnet werden. Dazu geht man wie bei 9 vor. Wenn $m \geq n$ ist, dividiert man zunächst durch. Beispiel:
$$\begin{aligned}
\frac{x^3-2}{x(x-1)^2} &= 1 + \frac{-x(x-1)^2 + x^3 - 2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^2 - x - 2}{x(x-1)^2} \\
&= 1 - \frac{2}{x} + \frac{2(x-1)^2 + 2x^2 - x - 2}{x(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4x-5}{(x-1)^2} \\
&= 1 - \frac{2}{x} + \frac{4(x-1)-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2},
\end{aligned}$$
also
$$\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2}\, dx = x - 2\ln|x| + 4\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}.$$
Leichte Schwierigkeiten können dabei durch mehrfache Nullstellen im Nenner entstehen. Hier hilft der Mittelwertsatz, insbesondere Folgerung 5.5.4.7, und später die allgemeinere Taylorreihenentwicklung. In unserem Falle ist an der Stelle $x = 1$ (ohne Rest)
$$4x - 5 = -1 + 4(x-1).$$

Zusammenfassung:

Es seien P_n Polynome n-ten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ und
$$R := \frac{P_m}{P_n}$$
die „rationalen Funktionen". Es seien ferner exp bzw. id die Abbildungen
$$\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x, \quad id : x \longmapsto x.$$
Dann können wir integrieren

1. $\int R$
2. $\int R \circ \exp = \int \left((\frac{R}{id}) \circ \exp\right) \exp = \left(\int \frac{R}{id}\right) \circ \exp$
3. $\int R(\sinh, \cosh)$ analog 2

4. $\int R(\sin, \cos)$ analog 2 oder direkt substituieren mit

$$g(x) = \tan\frac{x}{2} \qquad \left(\cos x = \frac{1-g^2}{1+g^2} \text{ und } \sin x = \frac{2g}{1+g^2}\right)$$

5. $\int R(id, \sqrt{1-id^2}) = \int R(\sin, \cos)\cdot \cos$
6. $\int R(id, \sqrt{1+id^2}) = \int R(\sinh, \cosh)\cdot \cosh$
7. $\int R(id, f)$ mit $f(x) = \sqrt{ax^2+2bx+c}$, denn wegen

$$ax^2+2bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}$$

führt eine Substitution auf 5 oder 6.

6.2 Treppenfunktionen und ihre Integrale

Im letzten Abschnitt haben wir die Integration als formale Umkehroperation zur Differentiation eingeführt. Es ist aber noch nicht klar, zu welchen Funktionen es überhaupt Stammfunktionen gibt.

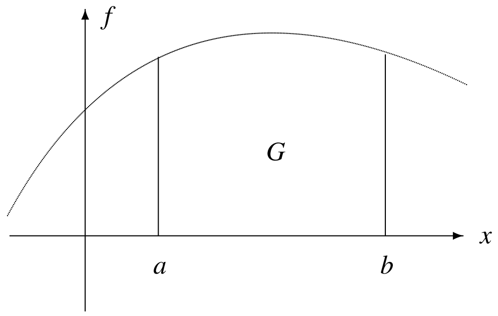
Wir wollen nun die Integration von einer anderen Seite her angehen. Es besteht nämlich ein Zusammenhang mit dem Problem des Messens von Flächeninhalten. Ziel ist etwa der folgende Sachverhalt: Es sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f > 0$, F eine Stammfunktion zu f und

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a < x < b,\ \ 0 < y < f(x)\right\}.$$

Dann ist

$$|G| = F(b) - F(a) =: \int_{(a,b)} f =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dabei sei $|G|$ der „Flächeninhalt“ oder das „Maß“ von G.



Der Aufbau einer Integrationstheorie ist wesentlich schwieriger als die Einführung des Differenzierens. Wir gehen daher langsam Schritt für Schritt vor und beginnen mit möglichst einfachen Funktionen.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird klassisch als Produkt der Seiten definiert. Wir erhalten daher für

$$f \ : \ x \longmapsto c \in \mathbb{R}$$

$$\int_{(a,b)} f := c(b-a).$$

Stammfunktionen zu f sind

$$F \ : \ x \longmapsto c\,x + const.$$

Mithin gilt für alle Stammfunktionen

$$\int_{(a,b)} f = F(b) - F(a).$$

In diesem einfachen Falle erhalten wir also das gewünschte Resultat.

Die nächst einfachen Funktionen sind die „Treppenfunktionen“. Es sei P eine *Partition* des Intervalls $I = (a,b)$, nämlich eine endliche Menge von Punkten $x_0, x_1, \cdots, x_n$ mit

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Ist nun $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ auf allen Intervallen (x_{i-1}, x_i) konstant, also

$$f \Big| (x_{i-1}, x_i) = f_i \in \mathbb{R},$$

dann heißt f *Treppenfunktion*.
Beachte:

1. Über die Werte von f an den Stellen x_i ist nichts gesagt. Zum Beispiel kann man zur Normierung die stetige Fortsetzung von rechts wählen, das ist aber für das Folgende ohne Belang.
2. Verschiedene Partitionen können dasselbe f liefern. Zum Beispiel kann man anstreben, für ein f eine Partition mit möglichst wenigen Punkten zu nehmen.
3. Mit Treppenfunktionen kann man rechnen. Es seien nämlich f und g zwei Treppenfunktionen. Dann wähle man eine Partition, die sowohl die Punkte der Partition für f als auch die für g enthält. Man sieht dann, daß $f + g$ und fg wieder Treppenfunktionen sind.

Wir bezeichnen daher mit $\mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ den Vektorraum der Treppenfunktionen von I. Mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

wird $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ zu einem normierten Vektorraum. Die Räume $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $C^*(I, \mathbb{R})$ oder $\mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$ waren unter dieser Norm vollständig (vgl. §5.2). Es sei $\tilde{\mathcal{T}}$ die Vervollständigung von $\mathcal{T}$. Dann möchte man natürlich die Elemente von $\tilde{\mathcal{T}}$ näher charakterisieren.

Bevor wir auf diese Frage weiter eingehen, definieren wir das Integral über eine Treppenfunktion $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit $f \,|\, (x_{i-1}, x_i) = f_i$ natürlich durch

$$T(f) := \int_{(a,b)} f := \sum_{i=1}^{n} f_i \, (x_i - x_{i-1}).$$

Diese Definition hängt nicht von der speziellen Wahl der Partition ab. Es seien nämlich P_1 und P_2 zwei Partitionen für dasselbe f. Man bilde die Partition P_3 als Vereinigung der beiden Partitionen P_1 und P_2. P_3 enthält also alle Punkte sowohl von P_1 als auch von P_2. Entsprechend werden die Integrale $T_i(f)$ gebildet. Dann ändert sich $T_1(f)$ nicht, wenn man weitere Punkte in die Partition hinzufügt. Daraus folgt

$$T_1(f) = T_3(f) = T_2(f).$$

Wir fassen zusammen:

Definition 6.2.1: *Es seien $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ eine Partition von $I = (a, b)$ und $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit*

$$f \,|\, (x_{i-1}, x_i) = f_i \in \mathbb{R}.$$

Dann nennen wir die Zahl

$$T(f) := \sum_{i=1}^{n} f_i \, (x_i - x_{i-1})$$

das (bestimmte) Integral von f über I und schreiben auch

$$T(f) =: \int_I f =: \int_a^b f(x) \, dx.$$

Mit $a < c < b$ gilt dann

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx,$$

und aus

$$\Big(\sum_1^n f_i g_i (x_i - x_{i-1})\Big)^2 \le \Big(\sum_1^n f_i^2 (x_i - x_{i-1})\Big) \cdot \Big(\sum_1^n g_i^2 (x_i - x_{i-1})\Big)$$

für $f_i, g_i \in \mathbb{R}$ folgt die Schwarzsche Ungleichung (nach Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921)

$$(T(fg))^2 \le T(f^2) \cdot T(g^2).$$

T ist eine beschränkte lineare Abbildung,

$$T \;:\; \mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dafür schreiben wir auch $T \in \mathcal{L}_b(\mathcal{T}, \mathbb{R})$, denn T ist linear wegen

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

und beschränkt wegen

$$|T(f)| \leq (b-a)\,\|f\|.$$

Durch

$$\|A\|_{\mathcal{L}_b} := \sup_{\|f\|\leq 1} |A(f)| \quad \text{für } A \in \mathcal{L}_b$$

wird $\mathcal{L}_b$ selbst zu einem normierten Raum. Es ist

$$\|T\|_{\mathcal{L}_b} = (b-a).$$

Solche Abbildungen lassen sich nun auf $\tilde{\mathcal{T}}$ fortsetzen („stetig ergänzen"), und damit können wir das Integral für die größere Funktionenklasse $\tilde{\mathcal{T}}$ erklären. Es gilt nämlich

Satz 6.2.2: *Es seien $\mathcal{X}$ ein normierter Vektorraum, $\tilde{\mathcal{X}}$ seine Vervollständigung und $A \in \mathcal{L}_b(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\overset{1}{\exists}\ \tilde{A} \in \mathcal{L}_b(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbb{R}) \text{ mit } \tilde{A}|\mathcal{X} = A \text{ und } \|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b(\tilde{\mathcal{X}},\mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{L}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})}.$$

Zum Beweis wählen wir ein $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ und eine Folge $x_n \in \mathcal{X}$, $x_n \to \tilde{x}$. Dann gilt

$$|Ax_n - Ax_m| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b} \cdot \|x_n - x_m\|,$$

das heißt (Ax_n) ist eine Cauchyfolge. Es sei $Ax_n \to r$. Der Grenzwert r hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $x_n \to \tilde{x}$ ab. Deshalb ist

$$\tilde{A}\,\tilde{x} := \lim_{n\to\infty} Ax_n = r$$

eindeutig definiert. Es gilt

$$\tilde{A} \ :\ \tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

und es ist $\tilde{A}|\mathcal{X} = A$. Man nehme nur die Folge $(x_n)_{x_n=x}$. Aus $|Ax_n| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b} \cdot \|x_n\|$ folgt

$$|\tilde{A}\tilde{x}| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b} \cdot \|\tilde{x}\|,$$

also

$$\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b(\tilde{\mathcal{X}},\mathbb{R})} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})}.$$

Für $x \in \mathcal{X}$ ist aber $\|Ax\| = \|\tilde{A}x\|$, also

$$\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b(\tilde{\mathcal{X}},\mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{L}_b(\mathcal{X},\mathbb{R})}.$$

Damit können wir auch für alle $f \in \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ das Integral eindeutig erklären durch

$$\tilde{T}(f) =: \int_I f =: \int_a^b f(x)\,dx,$$

und es ist wieder

$$|\tilde{T}(f)| \leq (b-a)\|f\|.$$

Es stellt sich also um so mehr die Frage nach der Charakterisierung von $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$.

Bevor wir sie im nächsten Abschnitt beantworten, zeigen wir zunächst einmal

Satz 6.2.3: $C^*(I, \mathbb{R}) \subset \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$.

Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich also durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren. Es sei

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, \delta \quad \forall\, x, y,\ |x-y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dann wählen wir

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

mit

$$\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$$

und

$$g(x) := f(x_i) \quad \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dann ist $g \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ und
$$\|g - f\| < \varepsilon.$$
Das beweist den Satz.

Damit sind wir in der Lage, gleichmäßig stetige Funktionen zu integrieren.
Beispiel: Es seien $I = (0,a)$ und $f_n \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ mit
$$f_n(x) = \frac{1}{n}[n\,x] \quad \text{für } x \in I.$$
Dabei sei wie üblich [a] die größte ganze Zahl kleiner oder gleich a. Wir wählen nun die Partition
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k \le x_{k+1} = a$$
mit
$$x_j = \frac{j}{n} \quad \text{für } 0 < j \le k = [n\,a].$$
Dann ist
$$x_j - x_{j-1} \le \frac{1}{n}$$
und
$$f_n \Big| (x_{j-1}, x_j) = \frac{j-1}{n} \quad \text{für } 0 < j \le k$$
sowie
$$f_n \Big| (x_k, a) = \frac{[n\,a]}{n} = \frac{k}{n}.$$
Es folgt also mit $q_n := na - [n\,a],\ 0 \le q_n < 1$
$$\begin{aligned} T(f_n) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k}{n}\Big(a - \frac{[n\,a]}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k}{n^2} q_n \\ &= \frac{1}{2n^2}(n\,a - q_n)(n\,a + q_n - 1) \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2n} + \frac{q_n - q_n^2}{2n^2}. \end{aligned}$$
Dabei haben wir
$$\sum_{j=1}^{k}(j-1) = \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{1}{2}(k-1)k$$
verwandt. Aus
$$0 \le x - f_n(x) = x - \frac{[n\,x]}{n} \le \frac{1}{n}$$
folgt also
$$\|f_n - f\| \to 0$$
mit $f(x) = x$, und
$$\tilde{T}(f) = \int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

6.3 Regelfunktionen

Wir haben bereits gesehen, daß stetige Funktionen integrierbar sind, und im letzten Beispiel haben wir $\int f$ für $f(x) = x$ explizit berechnet. Wir nennen nun
$$\mathcal{R}(I,\mathbb{R}) := \tilde{\mathcal{T}}(I,\mathbb{R})$$
den normierten Vektorraum der *Regelfunktionen*. $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ ist mit der Norm
$$\|f\| := \sup_{x\in I} |f(x)|$$

versehen. Es gilt

$$C^*(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I,\mathbb{R}),$$

und für Funktionen aus $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ haben wir soeben das Integral definiert. Es bleibt also die Charakterisierung von $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$. Wir beginnen mit

Satz 6.3.1: *Es sei $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ monoton. Dann ist $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$.*

Zum Beweis sei o.B.d.A. f monoton wachsend und $f(a) < f(b)$. Wir zeigen

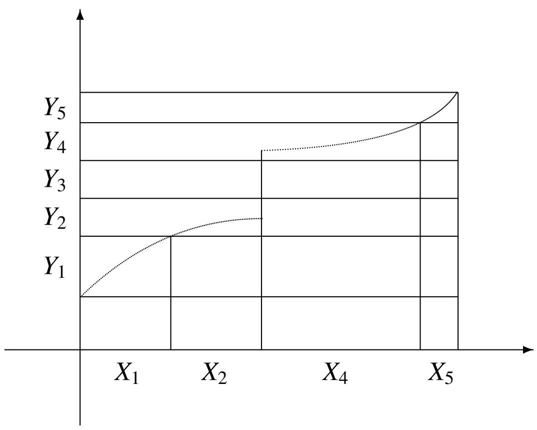
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R}) \quad \|f - t\| < \varepsilon.$$

Dazu wählen wir eine Partition von $[f(a), f(b)]$ mit

$$f(a) = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = f(b)$$

und $|y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$. Es seien

$$\begin{aligned} Y_n &:= [y_{n-1}, y_n] \\ Y_i &:= [y_{i-1}, y_i) \quad \text{für } 1 \le i < n-1 \\ X_i &:= f^{-1}(Y_i). \end{aligned}$$



X_i kann auch leer sein. Jedenfalls bilden die Randpunkte der nicht leeren X_i eine Partition von $[a,b]$, es ist

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{X_i},$$

und jedes $x \in [a,b]$ liegt in genau einem der X_i. Es sei

$$t(x) := y_{i-1} \quad \text{für } x \in X_i.$$

Dann ist $t \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ und

$$\|f - t\| < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen. Beachten Sie, daß wir zum Beweis des Satzes zunächst eine Partition auf der y-Achse gewählt haben. Das wird ein wichtiger Punkt bei der Einführung des allgemeineren Lebesgueschen Integrals in §11 sein. Wir werden eine Funktion $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ meßbar nennen, wenn die $X_i = f^{-1}(Y_i)$ meßbar sind.

Satz 6.3.2: *Es seien $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ und $x_0 \in I$. Dann existieren die Limites*

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \uparrow x_0} f(x).$$

Entsprechendes gilt in den Randpunkten von I.

Zum Beweis zeigen wir, daß für $x_0 \in [a,b)$ der rechtsseitige Limes existiert. Es seien $x, y > x_0$ und $f_n \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ mit $f_n \to f$. Dann gilt

$$|f(y) - f(x)| \le |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

und für alle $n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{3})$ sind der erste und der dritte Term rechts kleiner als $\varepsilon/3$. Der mittlere Term

$$|f_n(y) - f_n(x)|$$

muß also für festes $n = n_0(\varepsilon)$ abgeschätzt werden. Der Punkt x_0 ist entweder Sprungstelle von $f_n(x)$ oder nicht. In beiden Fällen gilt aber für $x, y \to x_0$

$$|f_n(y) - f_n(x)| = 0,$$

denn es waren $x, y > x_0$ und $f_n \in \mathcal{T}$ vorausgesetzt. Das heißt

$$\forall\, \varepsilon \quad \exists\, \delta \quad \forall\, x, y \in (x_0,\ x_0 + \delta) \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Mithin ist $(f(x))$ bzgl. $x \downarrow x_0$ eine Cauchyfolge.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig. Damit sind dann die Regelfunktionen charakterisiert.

Satz 6.3.3: *$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ besitze überall einen rechts- und linksseitigen Grenzwert. Dann ist $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.*

Beweis: Es gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, c \in \bar{I} \quad \exists\, B(c, \delta):$

$$\Big(x, y \in B(c, \delta) \ \wedge\ (x, y > c \ \vee\ x, y < c)\Big) \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\bar{I} = [a, b]$ ist kompakt und kann deshalb mit endlich vielen $B(c_i, \delta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, überdeckt werden (vgl. §4.5). Es ist also

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(c_i, \delta_i).$$

Wir ordnen nun die c_i und die Endpunkte der Intervalle $B(c_i, \delta_i)$ der Größe nach. Das ergibt eine Partition von $[a, b]$, sagen wir

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Es sei $t \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit

$$t(x) := \begin{cases} f(x_j) & \text{für } x = x_j \\ f(z_j) & \text{für } x_j < x < x_{j+1}, \end{cases}$$

wobei z_j beliebig aus (x_j, x_{j+1}) zu wählen ist. Dann gilt

$$\forall\, x \in \bar{I} \quad |f(x) - t(x)| < \varepsilon,$$

also

$$\|f - t\| < \varepsilon.$$

Für $x = x_j$ ist das klar, und für $x \neq x_j$ sei etwa $x \in (x_j, x_{j+1}) \subset B(c_r, \delta_r)$. Dann liegt x entweder rechts oder links von c_r, in beiden Fällen gilt aber

$$|f(x) - t(x)| = |f(x) - f(z_j)| < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

Korollar 6.3.4: *$f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ hat höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen.*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind nämlich jeweils nur endlich viele Sprünge der Größe $\frac{1}{n}$ möglich.

Korollar 6.3.5:

$$C(\bar{I}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; \forall\, x_0 \in I \ (\mathit{bzw.}\ \bar{I}) \ \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0) \right\}.$$

Man nennt f „stückweise stetig“, wenn f stetig ist mit Ausnahme endlich vieler Sprungstellen.

Beispiel einer Regelfunktion, die nicht stückweise stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ (\frac{1}{2})^k & \text{für } (\frac{1}{2})^k \leq x < (\frac{1}{2})^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

f besitzt also die Sprungstellen

$$x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Es gilt $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ mit $I = (0,1)$, denn zu $\varepsilon > 0$ wähle man $k_0(\varepsilon)$ mit

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} < \varepsilon$$

und

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ (\frac{1}{2})^k & \text{für } (\frac{1}{2})^k \leq x < (\frac{1}{2})^{k-1},\ k = 1,2,\dots,k_0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x < (\frac{1}{2})^{k_0}. \end{cases}$$

Dann ist $t \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ und

$$\|f - t\| < \varepsilon.$$

Auch für Regelfunktionen gelten natürlich die üblichen Rechenregeln für Integrale, also – wir lassen die Tilde von nun an wieder fort –

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(cf) &= c\,T(f) \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \\ f \geq 0 &\implies T(f) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für } a < c < b$$

$$(b-a)\inf_I f \leq T(f) \leq (b-a)\sup_I f$$

sowie die Schwarzsche Ungleichung. Man approximiere nur jeweils durch Treppenfunktionen.

Im nächsten Abschnitt werden wir den Zusammenhang mit den Stammfunktionen, also eine Verbindung zwischen Differential- und Integralrechnung, herstellen. Jetzt zeigen wir nur noch den

Mittelwertsatz der Integralrechnung: *Es sei $f \in C([a,b])$. Dann gilt*

$$\exists\, c \in (a,b) \qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Beweis: Es seien

$$m := \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad M := \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dann ist

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M,$$

und der Zwischenwertsatz (Satz 5.1.12) liefert die Existenz eines $c \in (a,b)$ mit

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie bereits angekündigt wollen wir nun die Differentiation mit der Integration verknüpfen. Es seien $I = (a,b)$, $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Wir diskutieren $F : \bar{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Offenbar ist $F(a) = 0$, und analog $|T(f)| \leq (b-a)\|f\|$ folgt

$$|F(x) - F(y)| \leq |x-y| \cdot \|f\|$$

also

Satz 6.4.1: *Es sei $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$. Dann ist F in I Lipschitz-stetig.*

Im allgemeinen ist F aber nicht differenzierbar. Es existieren jedoch die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen. Es gilt nämlich

Satz 6.4.2: *Es sei $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ und $x \in I$. Dann existiert*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{F(x\pm h)-F(x)}{h} = f(x\pm 0) =: F'_\pm(x).$$

Wir beweisen den Satz o.B.d.A. für die rechtsseitige Ableitung. Es sei $h > 0$, dann ist

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und

$$f(x+0)\,h = f(x+0)\int_x^{x+h} dt,$$

also

$$F(x+h)-F(x)-h\,f(x+0) = \int_x^{x+h} (f(t)-f(x+0))dt.$$

Wegen $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ existiert der rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle x, das heißt

$$\forall\, t > x,\ t-x < \delta(\varepsilon) \quad |f(t)-f(x+0)| < \varepsilon$$

oder für alle $0 < h < \delta(\varepsilon)$

$$|F(x+h)-F(x)-h\,f(x+0)| < \varepsilon\, h,$$

das heißt $F'_+(x) = f(x+0)$.

Speziell folgt daraus für stetige f der

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: *Es seien $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist $F \in C_1([a,b],\mathbb{R})$, und es ist

$$F' = f.$$

F ist also eine Stammfunktion zu f, und sie ist durch $F(a) = 0$ eindeutig festgelegt. Jede stetige Funktion besitzt also eine Stammfunktion. Es gilt

Satz 6.4.3: *Es seien $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und F eine Stammfunktion zu f. Dann ist*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) =: F\Big|_a^b.$$

Beweis: Weil sich Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, ist

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+c,$$

und es folgt für $x = a$

$$0 = F(a)+c,$$

also

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a).$$

6.5 Vertauschung von Grenzprozessen

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, Grenzübergänge zu vertauschen; so bei der Integration. Eine befriedigende Antwort auf solche Fragen werden wir erst geben können, wenn wir die Integrationstheorie weiter entwickelt haben (Lebesguesche Theorie). Trotzdem möchte ich schon jetzt in die Problematik einführen und erste Antworten geben.

Beispiel: Es seien f_n und f aus $C([a,b])$ und punktweise gelte

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Frage: Gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f,$$

bzw. wann gilt das? Die Antwort ist zunächst nein, denn man wähle in $[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \mathrm{e}^{-nx} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für alle x gilt dann $f_n(x) \to 0$, denn mit $t = nx$, $x \neq 0$, folgt das aus

$$f_n(x) = \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{x} = \frac{t^2}{x\mathrm{e}^t} \leq \frac{6t^2}{xt^3} = \frac{6}{xt} = \frac{6}{nx^2} \to 0.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 n^2 x \mathrm{e}^{-nx} dx = -nx\mathrm{e}^{-nx}\Big|_0^1 + n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} dx = -n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n} + 1,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 f = 0.$$

Wir können jedoch sehr leicht eine hinreichende Bedingung angeben, nämlich

Satz 6.5.1: *Es seien $f_n, f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\| \to 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f.$$

Der Beweis folgt aus

$$\left|T(f_n) - T(f)\right| \leq (b-a)\|f_n - f\|.$$

Diese Bedingung ist jedoch nicht notwendig, d.h. der Satz ist nicht scharf.

Beispiel: In $[0,1]$ seien

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\forall\, x \in [0,1] \quad f_n(x) \to 0.$$

Wir wissen bereits, daß die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, denn für $x_n = \sqrt[n]{1/2}$ ist $f_n(x_n) = 1/2$ (§5.2 Beispiel 1). Es ist jedoch

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Wie gesagt, eine befriedigende Antwort gibt erst die Lebesguesche Integrationstheorie. Dort wird ein „Majoranten-Kriterium“ bewiesen, nämlich ($\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ wird in §6.7 definiert)

Majoranten-Kriterium: *Es seien $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ mit*

(i) $f_n \to f$ *punktweise*

(ii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}) \quad |f_n| \leq g$ *punktweise.*

Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ und

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f.$$

Als Folgerung aus Satz 6.5.1 beweisen wir

Satz 6.5.2: *Es seien $f_n \in C_1([a,b])$. Für ein $x_0 \in [a,b]$ konvergiere $(f_n(x_0))$, und (f_n') sei gleichmäßig konvergent. Dann existiert ein $f \in C_1([a,b])$ mit*

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \quad \textit{und} \quad \|f_n' - f'\| \longrightarrow 0,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'.$$

Beweis: Es ist

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \qquad (*)$$

also

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b-a)\|f_n' - f_m'\|.$$

Mithin konvergiert auch (f_n) gleichmäßig. Es sei f der Grenzwert. Dann folgt mit $\|f_n' - g\| \to 0$ aus $(*)$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt,$$

also $f' = g$.

Wir wollen noch etwas weiter ausholen und parameterabhängige Integrale betrachten. Es seien für den Rest dieses Abschnitts $I = (a,b)$ und $J = (c,d)$ Intervalle, sowie

$$\begin{aligned} f : \bar{I} \times \bar{J} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto f(x,t). \end{aligned}$$

Für alle $t \in J$ sei $f(\cdot,t) \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$. Dann existiert

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

t ist der „Parameter“, in den letzten Sätzen war $t \in \mathbb{N}$.

Satz 6.5.3: *f sei gleichmäßig bzgl. x stetig in t, das heißt*

$$\forall t_0 \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall t \in J, |t - t_0| < \delta \quad \forall x \quad |f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon.$$

Dann ist $F \in C(\bar{J},\mathbb{R})$.

Der Beweis folgt aus

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx \leq (b-a)\varepsilon.$$

Analog gilt

Satz 6.5.4: *Für alle x, t existiere*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} = g(x,t)$$

mit

(i) $\forall t \quad g(\cdot,t) \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$

(ii) $\forall t_0 \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall t, |t - t_0| < \delta \quad \forall x \quad |g(x,t) - g(x,t_0)| < \varepsilon.$

Dann ist $F \in C_1(\bar{J},\mathbb{R})$ mit

$$F'(t) = \int_a^b g(x,t)\,dx.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \int_a^b \underbrace{\frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}}_{= g(x,t+\theta h) \text{ mit } 0<\theta(x,t)<1} dx \\ &= \int_a^b g(x,t)\,dx + \int_a^b (g(x,t+\theta h) - g(x,t))dx \end{aligned}$$

mit

$$\int_a^b \big|g(x,t+\theta h) - g(x,t)\big|dx < (b-a)\varepsilon \quad \text{für } h < \delta(t,\varepsilon),$$

also

$$F'(t) = \int_a^b g(x,t)dx.$$

Wir wollen nun $F(t)$ bzgl. t integrieren und die Reihenfolge der Integrationen vertauschen. Der folgende Satz ist nach Guido Fubini (1879–1943) benannt.

Satz 6.5.5: *Es sei $f \in C(\bar{I} \times \bar{J}, \mathbb{R})$. Dann ist $F \in \mathcal{R}(J, \mathbb{R})$ und*

$$\int_c^d F(t)\,dt = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,t)\,dx\Big)dt = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,t)\,dt\Big)dx.$$

Beweis: Aus der Stetigkeit von f im abgeschlossenen Intervall folgt die gleichmäßige Stetigkeit (analog Satz 5.1.17), also mit $\xi := (x,t)$ und $\xi_0 := (x_0, t_0)$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall \xi, \xi_0, |\xi - \xi_0| < \delta \quad |f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt

$$\forall t_0 \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall t, \ |t - t_0| < \delta \quad \forall x \ |f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$$

$$\forall x_0 \quad \forall \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall x, \ |x - x_0| < \delta \quad \forall t \quad |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon.$$

Deshalb erhält man

1. $F \in C(\bar{J}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(J, \mathbb{R})$.
2. Es seien

$$I_1(y) := \int_a^y \Big(\int_c^d f(x,t)dt\Big)dx, \qquad I_2(y) := \int_c^d \underbrace{\Big(\int_a^y f(x,t)dx\Big)}_{=:g(y,t)} dt.$$

Dann folgt

3.

$$I_1'(y) = \int_c^d f(y,t)dt,$$

weil $\int_c^d f(x,t)dt$ stetig in x ist.

4. $g(y,t)$ hat folgende Eigenschaften:

a)

$$\forall y \ \ g(y,\cdot) \in C(J, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \forall t \ \ g(\cdot, t) \in C(I, \mathbb{R}).$$

Mithin existiert I_2.

b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y+h,t) - g(y,t)}{h} = f(y,t), \ \ \text{d.h.} \ \ I_2'(y) = \int_c^d f(y,t)dt.$$

5. Mithin ist

$$I_1'(y) = I_2'(y),$$

oder

$$I_1(y) = I_2(y) + \text{const}$$

und $I_1(a) = 0$, $I_2(a) = 0$, also

$$I_1(y) = I_2(y).$$

Speziell gilt deshalb $I_1(b) = I_2(b)$.

6.6 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir bei der Integration zwei wesentliche Voraussetzungen gemacht, nämlich

(i) $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$

(ii) $I = (a,b)$.

f und das Integrationsgebiet mußten also beschränkt sein. Von beiden Voraussetzungen wollen wir uns durch die Einführung der uneigentlichen Integrale etwas befreien.

1. f sei in $c \in [a,b]$ möglicherweise „singulär“, das soll heißen: es sei (für $c \in (a,b)$)

$$\forall \varepsilon \quad f \in \mathcal{R}((a, c-\varepsilon)) \quad \text{und} \quad f \in \mathcal{R}((c+\varepsilon, b)).$$

Offenbar sind drei Fälle möglich, $c = a$, $c \in (a,b)$ oder $c = b$. Es sei zunächst $c \in (a,b)$. Dann existieren

$$I_1(\varepsilon) := \int_a^{c-\varepsilon} f \quad \text{und} \quad I_2(\varepsilon) := \int_{c+\varepsilon}^b f.$$

Die Grenzwerte

$$I_i := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_i(\varepsilon)$$

mögen existieren. Dann nennen wir

$$I_1 + I_2 =: \int_a^b f$$

das uneigentliche Integral von f über I. Für $c = a$ bzw. $c = b$ geht man analog vor.
Beispiele:
a) In $(-1, 1)$ sei $f(0) = 0$ und $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ für $x \neq 0$. Dann ist

$$\int_\varepsilon^1 f = 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2,$$

und es folgt

$$\int_{-1}^1 f = 4.$$

b) In $(-1, 1)$ sei $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x^3}$ für $x \neq 0$. Nun ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2}\,\Big|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2},$$

und der Grenzwert existiert für $\varepsilon \downarrow 0$ nicht. Es ist aber

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = 0.$$

Trotzdem existiert das uneigentliche Integral über f nicht!

$$\text{p.v.} \int_{-1}^1 f := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon} f + \int_\varepsilon^1 f \right\}$$

nennt man *Cauchyschen Hauptwert* von f, wenn er existiert; p.v. steht für „principal value".
2. Es sei etwa $D = (a, \infty)$ und $f \in \mathcal{R}((a, \alpha))$ für alle $\alpha > a$. Dann existiert

$$I(\alpha) = \int_a^\alpha f.$$

Es existiere auch

$$I := \lim_{\alpha \to \infty} I(\alpha).$$

Dann nennt man

$$I =: \int_a^\infty f$$

das uneigentliche Integral von f über D. Analog definiert man

$$\int_{-\infty}^\infty f.$$

Hier müssen die Grenzwerte wieder unabhängig voneinander existieren, sonst erhält man gegebenenfalls wieder nur den Cauchyschen Hauptwert.

Beispiel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Um das zu zeigen, holen wir etwas aus:
1. $\frac{\sin x}{x}$ ist im Nullpunkt stetig, hier liegt also keine Singularität vor.
2.

$$\begin{aligned}
\int_1^\alpha \frac{\sin x}{x} dx &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos 1 - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \int_1^\alpha \frac{\cos x}{x^2} dx.
\end{aligned}$$

Das Integral rechts konvergiert wegen

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}.$$

3. Für $\alpha > 0$ berechnen wir

$$f(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x}{x}dx.$$

Das Integral existiert. Wir bestimmen f':

$$\frac{\sin(\alpha+h)x - \sin\alpha x}{h} - x\cos\alpha x = x\cdot\big(\cos(\alpha+\theta_1 h)x - \cos\alpha x\big)$$

$$= x\cdot\theta_1 hx\cdot\sin(\alpha x + \theta_2\theta_1 hx)$$

mit $0 < \theta_i < 1$. Daraus folgt

$$\left|\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos\alpha x\,dx\right| \le |h|\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}dx = |h|.$$

Es ist also

$$f'(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos\alpha x\,dx.$$

Partielles Integrieren ergibt nun

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\mathrm{e}^{-x}\cos\alpha x\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x\,dx \\ &= 1 - \alpha\left\{-\mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos\alpha x\,dx\right\} \end{aligned}$$

oder

$$(1+\alpha^2)f'(\alpha) = 1.$$

Das ist eine Differentialgleichung für f. Die Funktion arctan genügt derselben Gleichung, also ist

$$f(\alpha) = \arctan\alpha + c,$$

und aus $0 = f(0) = \arctan 0$ folgt $c = 0$. Es gilt also

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x}{x}dx = \arctan\ \alpha,$$

und für $\alpha > 0$ liefert die Substitution $t = \alpha x$

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}dt.$$

4. Wir zeigen

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt.$$

Daraus folgt wegen

$$\lim_{\alpha\to\infty}\arctan\alpha = \frac{\pi}{2}$$

die Behauptung. Zum Beweis zerlegen wir

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}\,dt - \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\ \le\ &\int_0^A \left|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t}\right|dt + \left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}\,dt\right| + \left|\int_A^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right|. \end{aligned}$$

Wegen

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-y}-1}{y}\right| = \left|\frac{1-\mathrm{e}^y}{y\mathrm{e}^y}\right| \le 1 \qquad \text{für } y > 0$$

gilt für das erste Integral rechts bei festem A

$$\left|\int_0^A \cdots\right| \le \frac{A}{\alpha} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen 2 ist

$$\left|\int_A^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ A \ge A_0(\varepsilon).$$

Wir müssen also nur noch

$$\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}dt$$

gleichmäßig bzgl. α abschätzen. Dazu integrieren wir partiell. Es sei

$$g(t,\alpha) := \frac{-\alpha^2}{1+\alpha^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}(\cos t + \frac{\sin t}{\alpha}).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,\alpha) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t$$

und

$$\forall\, \alpha \ge 1 \quad \forall\, t > 0 \quad |g(t,\alpha)| \le 2.$$

Es folgt daher für alle $\alpha \ge 1$

$$\int_A^B \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t\right)\frac{1}{t}dt = \frac{g(t,\alpha)}{t}\Big|_A^B + \int_A^B \frac{g(t,\alpha)}{t^2}dt$$

oder

$$\left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\alpha}}\sin t}{t}dt\right| \le \frac{4}{A} < \varepsilon$$

für alle $A \ge A_1(\varepsilon) = 4/\varepsilon + 1$. Das beweist 4.

6.7 Das Riemannsche Integral

Bisher haben wir Integrale zunächst für Treppenfunktionen und dann für Regelfunktionen eingeführt. Das ist noch nicht ausreichend, und wir werden die Integrationstheorie in §10f weiterbehandeln und das allgemeinere Lebesguesche Integral einführen.

Historisch älter ist das Riemannsche Integral, das wegen seiner Anschaulichkeit und seinem Zusammenhang zur Maßtheorie immer noch interessant ist. Es steht zwischen dem Integral für Regelfunktionen und dem Lebesgueschen Integral. Da wir aber später ohnehin eine größere Funktionenklasse integrieren wollen, begnüge ich mich hier mit einer kurzen Andeutung.

Es seien wieder $I := (a,b)$ und $\{x_0,\cdots,x_n\}$ eine Partition von I. Die Funktion $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ soll integriert werden. Dazu wählen wir

$$\begin{aligned} f^n(x) &:= \sup_{t\in[x_{i-1},x_i)} f(t) \quad \text{für } x \in [x_{i-1},x_i) \\ f_n(x) &:= \inf_{t\in[x_{i-1},x_i)} f(t) \quad \text{für } x \in [x_{i-1},x_i). \end{aligned}$$

Die Funktionen f^n und f_n sind also aus $\mathcal{T}(I,\mathbb{R})$. Es seien nun

$$I^n(f) := \int_a^b f^n \quad \text{und} \quad I_n(f) := \int_a^b f_n.$$

Dann fällt (I^n) monoton bei Verfeinerung der Partition, und (I_n) steigt. Wegen $f \in \mathcal{B}(I,R)$ sind beide Folgen beschränkt.

Es seien nun für beliebige Partitionen mit $\Delta_n := \sup\limits_i |x_i - x_{i-1}| \to 0$

$$\begin{aligned} I^*(f) &:= \inf I^n(f) \quad \text{das obere Darbouxsche Integral} \\ I_*(f) &:= \sup I_n(f) \quad \text{das untere Darbouxsche Integral,} \end{aligned}$$

benannt nach Jean Darboux, 1842–1917.

Definition 6.7.1: *$f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ heißt im Riemannschen Sinne integrierbar* $:\Longleftrightarrow$

$$I^*(f) = I_*(f).$$

Den gemeinsamen Wert nennt man wieder

$$\int_a^b f\,.$$

Man beachte, daß für $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ das Riemannsche Integral mit dem für Regelfunktionen übereinstimmt. Es gelten auch wieder die üblichen Rechenregeln, z.B.

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \int f + \int g \\ \left| \int_a^b f \right| &\leq (b-a)\|f\|. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ ist also in der Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen enthalten. Weil für $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ rechts- und linksseitige Grenzwerte existieren, kommen als Beispiel für Riemann-integrierbare Funktionen f mit $f \notin \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ oszillierende Funktionen in Frage. Es seien $I = (0,1)$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin\frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \notin \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$, aber Riemann-integrierbar.

Zum Beweis interessiert nur eine Umgebung des Nullpunktes, weil

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\delta^1 \sin\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_1^{1/\delta} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

existiert. Für $\delta < 1$ erhalten wir in $[0,\delta]$

$$0 \leq I^n(f) = \int_0^\delta f^n \leq \int_0^\delta 2 = 2\delta, \qquad 0 \leq I_n(f) = \int_0^\delta f_n \leq \int_0^\delta 2 = 2\delta,$$

also in $[0,\delta]$

$$|I^*(f) - I_*(f)| \leq |I^n(f) - I_n(f)| \leq 4\delta.$$

Aber natürlich existiert in diesem Falle auch $\int_0^1 f$ als uneigentliches Integral für Regelfunktionen, so daß wir nichts gewonnen haben.

Zum Abschluß bringe ich noch ein Beispiel, das zeigen soll, daß auch die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen noch zu klein ist. Zunächst der Hintergrund:

Bisher haben wir in $\mathcal{B}(I,R)$ bzw. in $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ die Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

verwandt. Diese Topologie ist aber für viele Anwendungen, besonders auch in der Physik, zu fein. Vielmehr findet man oft

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_I |f|$$

oder auch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \sqrt{(f,f)}, \ \text{ wobei } \ (f,g) = \int_I f\bar{g}.$$

Hierbei soll das $\mathcal{L}$ an Henri Lebesgue (1875–1941) erinnern. Offenbar gilt für $f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} \leq (b-a)\|f\|, \ \ \|f\|_{\mathcal{L}^2} \leq \sqrt{b-a}\|f\|,$$

und aus der Schwarzschen Ungleichung folgt auch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} \leq \sqrt{b-a}\|f\|_{\mathcal{L}^2},$$

also

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} \leq \sqrt{b-a}\|f\|_{\mathcal{L}^2} \leq (b-a)\|f\|.$$

Diese Normen sind natürlich nicht äquivalent. Zum Beispiel ist

$$\begin{array}{rcccl} f & : & (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^{-1/2} \end{array}$$

aus $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$, aber nicht aus $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$ oder $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$.

Wir werden später das Lebesguesche Integral einführen, indem wir statt $\mathcal{R}(I,\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R});\ \ \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}\}^{\sim}$$

wählen. Wir vervollständigen $\mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ also in einer gröberen Topologie und vergrößern dadurch die Klasse der integrablen Funktionen.

Ich gebe jetzt ein Beispiel, das auf den ersten Blick sehr ausgefallen aussieht. Es sei in $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind immer $f^n = 1$ und $f_n = 0$, also $I^n = 1$ und $I_n = 0$. Mithin ist f nicht im Riemannschen Sinne integrierbar. f wird jedoch im Sinne von Lebesgue integrabel sein mit dem Integral $\int f = 0$. Anschaulich, wir messen die „Fläche“ F unter f. Die rationalen Zahlen sind abzählbar, etwa $x_1, x_2, \cdots$. Um jede dieser Zahlen legen wir einen Streifen der Breite $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots$. Dann ist

$$0 \le F \le \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

also $F = 0$. Oder man wähle wieder auf der y-Achse eine Partition. Für ein $\varepsilon > 0$ seien

$$Y_\varepsilon := \left\{y \,\middle|\, 1 - \frac{\varepsilon}{2} < y < 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ \text{ und } \ X_\varepsilon = f^{-1}(Y_\varepsilon)$$

Dann sollte für $\varepsilon \to 0$

$$1 \cdot \text{Maß}\,(X_\varepsilon) \longrightarrow \int f$$

gelten. Nun haben die rationalen Zahlen das „Maß Null“, sie bilden eine „Nullmenge“, und deshalb verschwindet das Integral.

Man muß jetzt auch die Klasse der Funktionen $f = 0$ neu definieren. Man tut es, indem man

$$\int |f| = 0$$

verlangt. f braucht nur noch „fast überall“ oder „außerhalb einer Menge vom Maß Null“ zu verschwinden. Das f in unserem letzten Beispiel gehört also zur Klasse der Nullfunktionen.

7 Reihen

In §4.2 haben wir bereits Reihen behandelt und insbesondere die Frage nach ihrer Konvergenz auf die der Folge der Partialsummen (s_n) zurückgeführt,

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Es galt

(i) (s_n) sei konvergent $\implies$ (a_n) ist Nullfolge.

(ii) (s_n) konvergiert absolut $\iff$ $\sum |a_j|$ konvergiert.

Es sei auch erinnert an spezielle Konvergenzkriterien, wie das Majorantenkriterium oder das Quotienten- und Wurzelkriterium.

7.1 Differentiation und Integration

Im folgenden wollen wir uns mit Reihen beschäftigen, deren einzelne Glieder a_j selbst Abbildungen $a_j \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sind mit $I \subset \mathbb{R}$. Es sei also $s_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ mit

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x).$$

Für solche Folgen haben wir bereits mehrere Konvergenzbegriffe kennengelernt:

(i) Konvergenz für ein festes $x_0 \in I$:

$$\exists\, x_0 \in I \quad |s_n(x_0) - s(x_0)| \to 0.$$

(ii) Punktweise Konvergenz in I:

$$\forall\, x \in I \quad |s_n(x) - s(x)| \to 0.$$

(iii) Gleichmäßige Konvergenz in I:

$$\|s_n - s\| \to 0.$$

(iv) Absolute Konvergenz in I:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j| \text{ konvergiert.}$$

Dabei war

$$\|f\| := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

die Supremumsnorm. Wir wissen, daß die Räume $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$, $C^*(B, \mathbb{R})$, $C(K, \mathbb{R})$ und $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ bezüglich dieser Norm vollständig sind ($B \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $K \Subset \mathbb{R}$ kompakt).

Es gilt das

Majorantenkriterium für die gleichmäßige Konvergenz: *Es seien $a_n \in \mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$, $c_n \in \mathbb{R}_0^+$, $\sum c_n$ konvergent und*

$$\forall\, x \in I \quad |a_n(x)| \le c_n.$$

Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion.

Der Beweis folgt aus Satz 5.2.4 und 5.2.8. Ich erinnere an das Beispiel

$$a_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{für } x \in I := (-R, R).$$

Dann ist

$$|a_n(x)| \le c_n := \frac{R^n}{n!}.$$

Es gilt

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{R}{n+1} \le q < 1 \quad \forall\, n \ge n_0 = [R].$$

Mithin konvergiert
$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$
in jedem Intervall $(-R, R)$ absolut und gleichmäßig gegen die stetige Grenzfunktion $s(x)$.

Uns interessiert aber nicht nur die Stetigkeit, sondern auch die Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von $s(x)$. Wir zeigen

Satz 7.1.1: *Es seien $a_n \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$, und (s_n) konvergiere gleichmäßig gegen s in I. Dann gilt auch $s \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und*
$$\forall\, \alpha, \beta \in \bar{I} \quad \int_\alpha^\beta s = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta a_j.$$

Beweis: Es ist $s_n \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ auch $s \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. Dann gilt
$$\left| \int_\alpha^\beta s - \sum_{j=1}^{n} \int_\alpha^\beta a_j \right| = \left| \int_\alpha^\beta (s - s_n) \right| \le |\beta - \alpha| \cdot \|s - s_n\| \to 0.$$

Gleichmäßig konvergente Reihen können also gliedweise integriert werden. Schwieriger ist das Differenzieren von Reihen. Hier gilt

Satz 7.1.2: *Es seien $a_n \in \mathcal{F}(\bar{I}, \mathbb{R})$ in $\bar{I}$ differenzierbar, $a_n' \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $s_n := \sum_1^n a_j$, $t_n := \sum_1^n a_j'$, $t \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, und es gelte*

(i) *$\exists\, x_0 \in \bar{I}$ mit $(s_n(x_0))$ konvergiert gegen $s(x_0)$*

(ii) $\|t_n - t\| \to 0$.

Dann folgt
1. $\|s_n - s\| \to 0$.
2. *s ist in $\bar{I}$ differenzierbar mit $s' = t$.*

Beweis:

a) Wir zeigen $s_n \to s$ gleichmäßig: Es ist
$$\begin{aligned}
|s_n(x) - s_m(x)| &\le |(s_n(x) - s_m(x)) - (s_n(x_0) - s_m(x_0))| + |(s_n(x_0) - s_m(x_0))| \\
&= \left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j(x) - a_j(x_0)) \right| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \\
&= |x - x_0| \cdot \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j'(\tilde{x}) \right| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \\
&\le (b-a)\|t_n - t_m\| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \quad < \quad \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $m, n \ge n_0(\varepsilon)$. Dabei war $\tilde{x} = \tilde{x}(m, n) \in I$.

b) Wir zeigen $s' = t$: Es sei
$$r_n(x) := \frac{s_n(x) - s_n(x_0)}{x - x_0} - t_n(x_0) \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}).$$

Nach Voraussetzung ist
$$\lim_{x \to x_0} r_n(x) = 0.$$

(r_n) konvergiert gleichmäßig. Denn es ist
$$\begin{aligned}
r_n(x) - r_m(x) &= \frac{(s_n(x) - s_n(x_0)) - (s_m(x) - s_m(x_0))}{x - x_0} - t_n(x_0) + t_m(x_0) \\
&= s_n'(\tilde{x}) - s_m'(\tilde{x}) - (t_n(x_0) - t_m(x_0))
\end{aligned}$$

mit $\tilde{x} = \tilde{x}(m, n) \in I$. Daraus folgt
$$\forall\, x \in \bar{I} \quad |r_n(x) - r_m(x)| \le 2\|t_n - t_m\|,$$

also die gleichmäßige Konvergenz von (r_n) gegen r. Dann ist aber

$$\frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - t(x_0) = r(x),$$

und $s' = t$ folgt aus

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Letzteres erhält man aus

$$|r(x) - r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \text{ und alle } n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$$

und

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für festes } n \text{ und } x \to x_0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 7.1.3: *Dieser Satz ist schärfer als Satz 6.5.2, welcher aus dem Hauptsatz folgte. Dort wurde $a_n \in C_1(\bar{I}, \mathbb{R})$ vorausgesetzt. Andererseits erhielt man aber auch $s \in C_1(\bar{I}, \mathbb{R})$.*

7.2 Potenzreihen

Eine wichtige Klasse spezieller Reihen sind die Potenzreihen

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j.$$

Wir behandeln sie sofort im Komplexen, es seien also $a_j \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ und zur Vereinfachung $x_0 = 0$. Das heißt, wir betrachten

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j.$$

Satz 7.2.1: *(s_n) konvergiere für ein festes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegen s. Dann gilt*
1. $\forall\, z \in B(0, |z_0|)$ konvergiert $(s_n(z))$, und zwar absolut und gleichmäßig in jedem Kreis $\overline{B(0, \alpha)}$ mit $\alpha < |z_0|$.
2. Es ist $s \in C_\infty(B(0, |z_0|))$, und es konvergiert für alle $k \in \mathbb{N}$

$$s_n^{(k)} \longrightarrow s^{(k)}$$

absolut und gleichmäßig in $\overline{B(0, \alpha)}$.
3. Es gilt in $\overline{B(0, \alpha)}$

$$\int s_n \longrightarrow \int s.$$

4. s ist in z_0 von innen stetig bei radialer Annäherung, d.h. es gilt mit $z = rz_0$, $0 \leq r < 1$

$$\lim_{r \to 1} s(z) = s(z_0).$$

Aussage 4 bezeichnet man als „Abelscher Grenzwertsatz“.
Beweis:
1. Weil die Reihe in z_0 konvergiert, gilt

$$a_n z_0^n \to 0$$

oder

$$\exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n z_0^n| \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n z^n|} \leq \left|\frac{z}{z_0}\right| \leq \frac{\alpha}{|z_0|} < 1$$

und daraus die erste Behauptung.
2. Es ist (im Komplexen formal wie im Reellen, Genaueres folgt in §13)

$$s_n'(z) = \sum_{j=0}^{n} j\, a_j\, z^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig wegen

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}z^n|} \le \sqrt[n]{(n+1)/|z_0|}\,\frac{\alpha}{|z_0|} \le q < 1$$

für alle $n \ge \max(n_0, n_1(\alpha, |z_0|))$. Mithin ist $s \in C_1$ und damit aus C_∞, denn diese Argumentation läßt sich wiederholen.

3. Diese Aussage ist klar wegen 1.
4. Es ist mit $b_j := a_j z_0^j$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j + \Big\{-\sum_{j=0}^{\infty} b_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big(\frac{z}{z_0}\Big)^j\Big\}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j + \sum_{j=0}^{\infty} c_j\Big(\frac{z}{z_0}\Big)^j \;=\; s(z_0) + \sum_{j=0}^{\infty} c_j\Big(\frac{z}{z_0}\Big)^j\end{aligned}$$

mit

$$c_n := \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j & \text{für } n = 0\\ b_n & \text{für } n \ne 0.\end{cases}$$

Wir können daher o.B.d.A. folgendes annehmen

$$z_0 = 1 \quad \text{und} \quad s(1) = 0.$$

Wir versuchen nun, den Faktor $(1-z)$ auszuklammern, d.h. wir machen den Ansatz

$$s_n(z) = (1-z)\Big(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j + R_n(z)\Big).$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j z^j &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (z^j - z^{j+1}) + (1-z)R_n(z)\\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) z^k - \alpha_n z^{n+1} + (1-z)R_n(z),\end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0\\ a_1 &= \alpha_1 - \alpha_0\\ &\;\vdots\\ a_n &= \alpha_n - \alpha_{n-1}\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\alpha_0 &= a_0\\ \alpha_1 &= a_0 + a_1\\ &\;\vdots\\ \alpha_n &= \sum_{j=0}^{n} a_j = s_n(1)\end{aligned}$$

sowie

$$\alpha_n z^{n+1} = (1-z)R_n(z),$$

also

$$s_n(z) = (1-z)\sum_{j=0}^{n} s_j(1) z^j + s_n(1) z^{n+1}.$$

Daraus folgt für festes $z \in B(0,1)$

$$s(z) = (1-z)\sum_{j=0}^{\infty} s_j(1) z^j,$$

und es ist

$$\begin{aligned}|s(z) - s(1)| &= |s(z)| \;\le\; |1-z|\cdot\Big|\sum_{j=0}^{n} s_j(1) z^j\Big| + |1-z|\cdot\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} s_j(1) z^j\Big|\\ &\le |1-z|\cdot\sum_{j=0}^{n} |s_j(1)| + |1-z|\cdot\sup_{j>n}|s_j(1)|\cdot\sum_{j=0}^{\infty}|z|^j\\ &= |1-z|\cdot\sum_{j=0}^{n} |s_j(1)| + \frac{|1-z|}{1-|z|}\cdot\sup_{j>n}|s_j(1)|.\end{aligned}$$

Nun können wir den Grenzübergang $z = x \to 1$ durchführen. Es ist für $x > 0$

$$|s(x) - s(1)| \leq |1 - x| \cdot \sum_{j=0}^{n} |s_j(1)| + \sup_{j>n} |s_j(1)|,$$

und es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann wähle man $n = n_0(\frac{\varepsilon}{2})$, wobei $\forall\, j \geq n_0(\varepsilon)\ |s_j(1)| < \varepsilon/2$ sei. Sodann wähle man

$$\delta(\varepsilon, n) := \frac{\varepsilon}{2 \sum\limits_{j=0}^{n} |s_j(1)|}.$$

Damit folgt

$$\forall\, x,\ 1 - \delta < x < 1, \qquad |s(x) - s(1)| < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

Bemerkung 7.2.2:

1. Aussage 2 wird im allgemeinen in $z = z_0$ falsch. Ein Beispiel für $z_0 = 1$ ist

$$s_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j^2}.$$

Es gilt

$$s_n'(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{z^{j-1}}{j},$$

und diese Reihe ist in $z_0 = 1$ divergent.

2. Aussage 4 gilt auch für $z = 1 + \varrho\, e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ und $\varrho \to 0$ (also in einem Winkelbereich um z_0). Denn dann ist

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} = \frac{\varrho}{1 - \sqrt{1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi}}.$$

In dem angegebenen Bereich ist $\cos\varphi \leq -p$ mit $p > 0$, und für kleine ϱ gilt

$$\sqrt{1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi} = 1 + \varrho\cos\varphi + O(\varrho^2).$$

Dabei haben wir

$$f = O(g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, c\ \ \exists\, \varrho_0\ \ \forall\, \varrho \leq \varrho_0 \quad \left|\frac{f}{g}\right|(\varrho) \leq c$$

verwandt. Es folgt also

$$1 - \sqrt{1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi} \geq p\varrho + O(\varrho^2)$$

oder

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq \frac{1}{p + O(\varrho)} \leq \frac{2}{p}$$

für alle $\varrho \leq \varrho_0$. Deshalb gilt jetzt

$$|s(z) - s(1)| \leq |1 - z| \cdot \sum_{j=0}^{n} |s_j(1)| + \frac{2}{p} \sup_{j>n} |s_j(1)|,$$

und man kann wie im Fall reeller z weiterschließen. □

Als nächstes beweisen wir

Lemma 7.2.3: *Für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergiere $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann existiert*

$$a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Denn dann gilt $|a_n z_0^n| \to 0$, und es ist erst recht

$$|z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$$

beschränkt.

Definition 7.2.4: *Wir nennen*

$$r := \begin{cases} 0, & \text{wenn } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nicht existiert} \\ \frac{1}{a}, & \text{wenn } a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert und von Null verschieden ist} \\ \infty, & \text{wenn } a \text{ existiert und gleich Null ist} \end{cases}$$

den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$.

Es gilt

Satz 7.2.5: *Es sei r der Konvergenzradius von* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. *Dann gilt:*
1. $s_n(z)$ *konvergiert für* $z \in B(0,r)$ *absolut*
2. $s_n(z)$ *divergiert für* $z \in \complement \overline{B(0,r)}$
3. $s_n(z)$ *kann für* $z \in \partial B(0,r)$ *konvergieren oder divergieren.*

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß im Falle $r = 0$ die Reihe für kein $z \neq 0$ konvergieren kann (Lemma 7.2.2). Im Falle $r = \infty$ konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$, denn dann ist für jedes z

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 0.$$

Es bleibt also der Fall $r \in \mathbb{R}^+$:
1. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$. Wähle ρ mit

$$|z| < \rho < r.$$

Dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|},$$

und wegen $a < \frac{1}{\varrho}$ gibt es ein n_0 mit

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho},$$

also

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n z^n|} < \frac{|z|}{\rho} < 1.$$

Mithin konvergiert $s_n(z)$ absolut.
2. Die Reihe konvergiere in z_1 mit $|z_1| > r$. Dann konvergiert sie absolut in z_2 mit $r < |z_2| < |z_1|$. Das führt zum Widerspruch, denn man wähle ein ρ mit

$$r < \rho < |z_2|.$$

Dann gibt es eine Teilfolge (a'_n) mit

$$\frac{1}{\rho} < \sqrt[n]{|a'_n|} \to \frac{1}{r},$$

und es folgt

$$\sum_{j=1}^{n} |a'_j z_2^j| > \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|z_2|}{\rho}\right)^j > \sum_{j=1}^{n} 1 = n \to \infty.$$

3. Für diese Aussage geben wir

Beispiele: (mit $r = 1$)
1. Es sei

$$s(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

die geometrische Reihe. Wegen

$$s_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

divergiert die Reihe für $|z| = 1$.
2. Es ist in $|z| < 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} = -\ln(1 - z).$$

Zum Beweis differenziere man beide Seiten. Daraus folgt

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \cdots .$$

Diese Reihe konvergiert für $z = 1$.

3. Es sei

$$f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^2}.$$

Diese Reihe konvergiert für $|z| = 1$, und es gilt

$$f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

4. Es sei

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - x^6 + \cdots .$$

Im Reellen versteht man nur schwer, warum hier $r = 1$ ist. Im Komplexen ist das sofort klar wegen

$$f(z) = \frac{1}{(1-\mathrm{i}z)(1+\mathrm{i}z)}.$$

Als nächstes zeigen wir

Die Binomialreihe: *Für $x \in (-1, 1)$ gilt*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Beweis: Es sei

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Dann gilt

1. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich um die binomische Formel (§2.1 Beispiel 4), und es ist nichts mehr zu beweisen. Es sei also im folgenden $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.
2. Für $\alpha > 0$ und $n > [\alpha]$ ist

$$\begin{aligned} \left|\binom{\alpha}{n}\right| &= \left|\frac{\alpha}{1} \cdot \frac{(\alpha-1)}{2} \cdots \frac{(\alpha-[\alpha])}{([\alpha]+1)} \cdots \frac{(\alpha-n+1)}{n}\right| \\ &< \binom{\alpha}{[\alpha]} =: K(\alpha), \end{aligned}$$

also

$$\sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} < \sqrt[n]{K(\alpha)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3. Für $\alpha < 0$ sei $\beta := -\alpha > 0$. Dann gilt für $n > 2[\beta]$

$$\begin{aligned} \left|\binom{\alpha}{n}\right| &= \left|\binom{-\beta}{n}\right| \\ &= \underbrace{\frac{\beta}{1} \cdot \frac{(\beta+1)}{2} \cdots \frac{(\beta+[\beta]-1)}{[\beta]}}_{[\beta]-Glieder} \cdots \frac{(\beta-[\beta]+n-1)}{(n-[\beta])} \overbrace{\cdots \frac{(\beta+n-1)}{n}}^{[\beta]-Glieder} \\ &= \frac{(\beta-[\beta]+n) \cdots (\beta+n-1)}{[\beta]!} \cdot \left\{\frac{\beta}{([\beta+1])} \cdots \frac{(\beta-[\beta]+n-1)}{n}\right\} \\ &\le \frac{(\beta-[\beta]+n) \cdots (\beta+n-1)}{[\beta]!} < \frac{(\beta+n-1)^{[\beta]}}{[\beta]!} \le c(\alpha)\, n^{[-\alpha]}, \end{aligned}$$

also

$$\sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} \;<\; \sqrt[n]{c(\alpha)}\; n^{[-\alpha]/n} \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 1.$$

4. Mithin ist $r \geq 1$, $g(x)$ konvergiert in $(-1, 1)$ absolut, und die Reihe ist in $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \frac{\alpha}{1+x}\, g(x),$$

letzteres wegen

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left\{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right\} \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left\{\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right\} \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} x^n\binom{\alpha}{n} \;=\; \alpha\, g(x).
\end{aligned}$$

5. g genügt also der Differentialgleichung

$$g'(x) = \frac{\alpha}{1+x}\, g(x) \quad \text{mit } g(0) = 1.$$

g ist stetig, mithin in einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes positiv. Dort gilt

$$\int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt = \alpha \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

oder

$$\ln g(x) = \alpha \ln(1+x),$$

also

$$g(x) = (1+x)^{\alpha}$$

in dieser Umgebung $U(0)$. Es sei x_0 die dem Betrage nach kleinste Nullstelle von g, falls sie existiert, also $g(x_0) = 0$ mit $x_0 \in (-1, 1)$. Dann folgt wegen der Stetigkeit von g und $(1+x)^{\alpha}$

$$0 = g(x_0) = (1+x_0)^{\alpha}.$$

Es wäre also $x_0 = -1$ im Widerspruch zu $x_0 \in (-1, 1)$. Das heißt, es ist $U(0) = (-1, 1)$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Identitätssatz für Potenzreihen:

Identitätssatz: *Es seien*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{und} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

in einer Umgebung $U(0)$ konvergent und (z_n) eine Nullfolge mit

$$\forall\, n \;\; z_n \neq 0 \quad \textit{und} \quad A(z_n) = B(z_n).$$

Dann ist $a_n = b_n$ für alle n, also $A(z) = B(z)$.

Beweis: Es ist $A(0) = B(0)$, also $a_0 = b_0$. Es seien nun

$$A_1(z) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j-1} \text{ und } B_1(z) := \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{j-1}.$$

Dann gilt für alle z_n

$$A_1(z_n) = \frac{A(z_n) - a_0}{z_n} = \frac{B(z_n) - b_0}{z_n} = B_1(z_n),$$

also $A_1(0) = B_1(0)$ oder $a_1 = b_1$. Auf diese Weise erhält man $a_n = b_n$ für alle n.

7.3 Taylorreihen

Wir wollen nun eine vorgegebene Funktion durch eine Potenzreihe approximieren. Im einfachsten Fall leistet das der Mittelwertsatz. So haben wir in §5.5 die Darstellungen

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h f'(x+\theta h) \\ f(x+h) &= f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h) \end{aligned}$$

für ein- bzw. zweimal differenzierbare f und $0 < \theta < 1$ gegeben.

Diese Entwicklung wollen wir nun für n-mal differenzierbare Funktionen weitertreiben und so die „Taylorreihe“ herleiten, benannt nach Brook Taylor (1685–1731). Wir zeigen

Taylorsche Formel: *Es seien $f \in C_n([a,b],\mathbb{R})$ und $f^{(n)}$ in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Beweis: Es sei mit $m \in \mathbb{R}$

$$g(x) := f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(b-x)^j - m\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dann ist $g(b) = 0$ und

$$g(a) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j - m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wir wählen nun m so, daß auch $g(a) = 0$ ist. Dann ist g in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar,

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + m\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Nach dem Satz von Rolle (Satz 5.5.2) gibt es daher ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$, also

$$m = f^{(n+1)}(c).$$

Deshalb ist

$$0 = g(a) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Das war zu zeigen.

Das Aggregat

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

nennt man auch das „Taylorpolynom“ n-ter Ordnung von f an der Stelle a. Mit $0 < \theta < 1$, $\theta = \theta(n,x,h)$, folgt auch ($x := a$, $h := b-a$, $\theta := (c-a)/(b-a)$)

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

oder

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + R_n(x,h)$$

mit dem „Restglied“

$$R_n(x,h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h). \qquad (*)$$

Das ist die Lagrangesche Form des Restgliedes (nach Joseph Louis Lagrange, 1736–1813).

Will man $f(x+h)$ durch das Taylorpolynom approximieren, dann muß man das Restglied abschätzen. Dazu ist es nützlich, verschiedene Darstellungen von R_n zu haben. Eine zweite Darstellung ergibt sich unmittelbar aus dem

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dazu muß allerdings $f \in C_{n+1}([a,b])$ vorausgesetzt werden. Es folgt durch partielles Integrieren wegen $-(x+h-t)' = 1$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t)dt \\ &= f(x) + \Big[-(x+h-t)f'(t)\Big]_x^{x+h} + \int_x^{x+h} (x+h-t)f''(t)dt \\ &= f(x) + h\,f'(x) + \Big[-\frac{(x+h-t)^2}{2}f''(t)\Big]_x^{x+h} + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^2}{2}f'''(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

also

$$R_n(x,h) = \frac{1}{n!}\int_x^{x+h} (x+h-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{$**$}$$

Aus der Taylorschen Formel folgt leicht eine Verallgemeinerung der Folgerung 5.5.4.8 des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, nämlich

Satz 7.3.1: *In einer Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 sei f $(k+1)$-mal stetig differenzierbar mit*

$$\forall\, j,\ 1 \le j \le k \quad f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt

(i) *k sei ungerade. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum, wenn $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ ist, und ein lokales Minimum, wenn $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ ist.*

(ii) *k sei gerade. Dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt (die Kurve durchsetzt dort ihre Tangente).*

Der Beweis folgt aus

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0+\theta h).$$

Wir wollen nun eine vorgegebene Funktion f durch ihr Taylorpolynom approximieren, also die Frage klären, ob bzw. in welchem Sinne das Restglied R_n gegen Null konvergiert. Dazu muß sicherlich $f \in C_\infty(I,\mathbb{R})$ vorausgesetzt werden; es ist aber wichtig festzuhalten, daß diese Bedingung nicht hinreicht.

Beispiel 7.3.2: *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(0) = 0$ und $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ für $x \neq 0$. Dann ist $f \in C_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}_0^+)$ mit*

$$\forall\, n \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Alle Taylorpolynome von f im Nullpunkt verschwinden also und können f deshalb nicht approximieren. Der Beweis folgt aus

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\cdots} \le x^2 \\ |f'(x)| &= \left|\frac{2}{x^3}f(x)\right| = \left|\frac{2}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\cdots)}\right| \le 12|x|^3 \end{aligned}$$

für alle $x \neq 0$, usw. Mithin ist in diesem Falle für alle n

$$R_n(0,h) = f(h) = \exp(-\frac{1}{h^2}).$$

Umgekehrt können wir auch leicht eine hinreichende Bedingung für $R_n \to 0$ angeben, nämlich

Satz 7.3.3: *Es sei $f \in C_\infty([a,b],\mathbb{R})$ mit*

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in [a,b] \qquad |f^{(n)}(x)| \le c^n.$$

Dann gilt

$$\sup_{x\in[a,b],\ |h|\le h_0} |R_n(x,h)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Das folgt unmittelbar aus (∗) wegen
$$|R_n(x,h)| \le \frac{c^{n+1}h_0^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beispiele dazu sind Funktionen wie e^x oder $\sin x$. Solche Funktionen lassen sich in eine „Taylorreihe“ entwickeln.

Definition 7.3.4: *Es sei f in $U(x)$ beliebig oft differenzierbar. Dann heißt*
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j$$
die Taylorreihe von f an der Stelle x — so die Reihe konvergiert.

Wichtig ist es nun sich daran zu erinnern, daß aus der Existenz der Taylorreihe einer Funktion noch nicht folgt, daß die Reihe diese Funktion auch darstellt (Beispiel 7.3.2). Funktionen, die durch ihre Taylorreihe dargestellt werden, nennt man auch (reell) analytisch. Sie bilden eine wichtige Teilklasse von C_∞, nämlich gerade die Potenzreihen.

Im Reellen ist es manchmal schwierig zu verstehen, warum eine sehr glatte Funktion ausgerechnet den Konvergenzradius r_0 hat, oder warum sie überhaupt nicht durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Das wird erst durch eine Betrachtung im Komplexen klarer (§13). Denken Sie zum Beispiel wieder an
$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$
Die Entwicklung im Nullpunkt lautet
$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 \pm \cdots$$
und hat den Konvergenzradius $r = 1$, obwohl f überall aus C_∞ ist. Im Komplexen ist das sofort klar, es ist nämlich
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}.$$
f hat also in $z = \pm\mathrm{i}$ Pole, und die Reihe kann deshalb nicht weiter konvergieren. Ähnlich ist es mit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$. Im Komplexen haben wir nämlich $f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$ und für $z = \mathrm{i}y$ erhalten wir speziell
$$f(\mathrm{i}y) = \exp(\frac{1}{y^2}).$$
Diese Funktion ist für $y \to 0$ singulär und kann deshalb nicht um den Nullpunkt in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Ich möchte noch kurz weitere Darstellungen des Restgliedes angeben. Dazu benötigen wir den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung, den man wie den normalen Mittelwertsatz beweisen kann, nämlich

Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung: *Es seien $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $p \in C([a,b],\mathbb{R}_0^+)$. Dann gilt*
$$\exists\, c \in (a,b) \quad \int_a^b p(x)\,f(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Nach (∗∗) ist nun mit $p \le n+1$
$$R_n(x,h) = \frac{1}{n!}\int_x^{x+h} (x+h-t)^{p-1}\left\{(x+h-t)^{n-p+1} f^{(n+1)}(t)\right\}dt.$$
Daraus folgt mit $\theta = \theta(n,p)$
$$\begin{aligned} R_n(x,h) &= \left\{(h(1-\theta))^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\theta h)\right\}\frac{1}{n!}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{p-1}dt \\ &= \frac{h^p}{p\,n!}(h(1-\theta))^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\theta h) \\ &= \frac{h^{n+1}}{p\,n!}(1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\theta h). \qquad (***) \end{aligned}$$

Das ist die Schlömilchsche Darstellung des Restgliedes (nach Oskar Schlömilch, 1823–1901). Für $p = n+1$ erhält man wieder die Lagrangesche Form $(*)$, und für $p = 1$ ist das die „Cauchysche Form“ des Restgliedes

$$R_n(x,h) = \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h). \tag{$****$}$$

Beispiele:

1. $f(x) = \ln(1+x)$ für $x \in (-1,1)$ im Nullpunkt. Es ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}.$$

Die Taylorreihe lautet also

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots .$$

Sie hat den Konvergenzradius 1. Für $x \geq 0$ folgt aus der Lagrangeschen Form des Restglieds

$$|R_n(0,x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

und für $x < 0$ aus der Cauchyschen

$$\begin{aligned} |R_n(0,x)| &= \frac{|x|^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}(1-\theta)^n}{(1-\theta)^n(1+\theta x)} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0, \end{aligned}$$

also gilt in $(-1,1)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots .$$

2. $f(x) = \arctan x$ im Nullpunkt. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^4 \pm \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}, \end{aligned}$$

also

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(0,x)$$

mit

$$R_n(0,x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt.$$

Für $|x| \leq 1$ gilt

$$|R_n(0,x)| \leq \int_0^x t^{2(n+1)}dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \to 0.$$

Speziell folgt also

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots .$$

3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

Man kann zeigen, daß wegen $f(0) = 1 \neq 0$ auch $g := 1/f$ in einer Umgebung des Nullpunktes analytisch ist (Näheres folgt in §13). Wir entwickeln g um den Nullpunkt in eine Potenzreihe:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n.$$

g hat den Konvergenzradius 1, und durch Koeffizientenvergleich findet man

$$1 = B_0 + x\left\{\frac{B_0}{2} + B_1\right\} + \frac{x^2}{2!}\left\{\frac{B_0}{3} + B_1 + B_2\right\} + \frac{x^3}{3!}\left\{\frac{B_0}{4} + B_1 + \frac{3}{2}B_2 + B_3\right\} + \cdots ,$$

also

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_0 + 2B_1 &= 0 \\ B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 \\ B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 &= 0 \end{aligned}$$

und allgemein für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0.$$

Es ist $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ und $B_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Die B_n sind die „Bernoulli-Zahlen“. Sie treten auch als Koeffizienten in den Reihenentwicklungen des Tangens und des Cotangens sowie bei den entsprechenden hyperbolischen Funktionen auf. So ist

$$g(x) - B_1 x = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2},$$

also

$$\coth x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n}$$

und

$$\cot x = \mathrm{i} \coth \mathrm{i}x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Aus

$$\coth 2x = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{2 \cosh x \cdot \sinh x} = \frac{\coth^2 x + 1}{2 \coth x}$$

folgt

$$\tanh x = 2 \coth 2x - \coth x,$$

also

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1};$$

und daraus erhält man schließlich

$$\tan x = -\mathrm{i} \tanh \mathrm{i}x = -\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{(-4)^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

7.4 Der Weierstraßsche Approximationssatz

Wir zeigen nun

Satz 7.4.1 (Weierstraß): *Es sei $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_n \quad \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Dabei ist $P_n(x) = \sum_0^n a_j x^n$ ein Polynom vom Grade n; aber anders als bei den Taylorreihen hängen die Koeffizienten a_j von n bzw. ε ab, das heißt, wenn man ε verkleinert, muß man im allgemeinen alle Koeffizienten neu bestimmen.

Ich möchte den Weierstraßschen Satz in einem etwas allgemeineren Rahmen beweisen. Es seien $J := [a,b]$ und H eine monotone lineare Abbildung

$$H \; : \; C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow C(J, \mathbb{R}) \quad \text{linear}$$

mit

$$\Big(\forall x \in J \quad f(x) \le g(x)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in J \quad (Hf)(x) \le (Hg)(x)\Big).$$

Dann gilt

Satz 7.4.2: *Es sei* (H_n) *eine Folge solcher linearer monotoner Abbildungen mit*

$$\|H_n g - g\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für $g = 1$, *id und m. Dann gilt*

$$\forall f \in C(J,\mathbb{R}) \quad \|H_n f - f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dabei ist 1 die konstante Abbildung, *id* die identische und *m* die Multiplikation

$$\begin{array}{rcccc} m & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Beweis von Satz 7.4.2:
1. Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, x \in J \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2}(t-x)^2.$$

Denn wegen der Stetigkeit von f ist das für $|t - x| < \delta$ klar, und für $|t - x| \geq \delta$ gilt

$$|f(x) - f(t)| \leq 2\|f\| \leq 2\|f\| \frac{(t-x)^2}{\delta^2}.$$

2. Es sei nun $x \in J$ fest, H_n operiere bzgl. t. Dann gilt

$$(H_n f)(t) - f(x)(H_n 1)(t) = \Big\{\big(H_n(f - f(x))\big)(t)\Big\}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \{\cdots\} & \leq & H_n\left(\varepsilon + \dfrac{2\|f\|}{\delta^2}(\cdot - x)^2\right)(t) \\ -\{\cdots\} & = & H_n(-f + f(x))(t) \quad \leq \quad H_n\left(\varepsilon + \dfrac{2\|f\|}{\delta^2}(\cdot - x)^2\right)(t), \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} \Big|\{\cdots\}\Big| & \leq & H_n\left(\varepsilon + \dfrac{2\|f\|}{\delta^2}(\cdot - x)^2\right)(t) \\ & = & \varepsilon(H_n 1)(t) + \dfrac{2\|f\|}{\delta^2}(H_n m - 2x H_n id + x^2 H_n 1)(t). \end{array}$$

Daraus folgt für $t = x$

$$\Big|(H_n f)(x) - f(x)(H_n 1)(x)\Big| \leq$$
$$\varepsilon + \varepsilon\,|(H_n 1)(x) - 1| + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\Big\{\,\Big|(H_n m)(x) - x^2\Big| + 2|x| \;\; |(H_n id)(x) - x| + x^2\,|(H_n 1)(x) - 1|\,\Big\}$$

oder mit $|x| \leq c$

$$\|H_n f - f \cdot H_n 1\| \leq$$
$$\varepsilon + \varepsilon\|H_n 1 - 1\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\Big\{\|H_n m - m\| + 2c\|H_n id - id\| + c^2\|H_n 1 - 1\|\Big\}.$$

Somit gilt

$$\begin{array}{rcl} \|H_n f - f\| & \leq & \|H_n f - f \cdot H_n 1\| + \|f\| \cdot \|H_n 1 - 1\| \\ & \leq & \varepsilon + (\varepsilon + \|f\|)\|H_n 1 - 1\| + \dfrac{2\|f\|}{\delta^2}\Big\{\cdots\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}$$

Damit ist Satz 7.4.2 bewiesen.

Wir beweisen nun den Weierstraßschen Approximationssatz 7.4.1. Dazu sei o.B.d.A. $J = [0,1]$ [man nehme $g(t) := f(a + t(b - a))$]. Es sei ferner für $n \geq 1$

$$(P_n f)(x) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

$P_n f$ ist ein Polynom n-ten Grades, ein „Bernsteinpolynom“, benannt nach Sergei Natanovich Bernstein, 1880–1968. Aus

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{folgt} \quad (P_n f)(x) \leq (P_n g)(x),$$

d.h. P_n ist linear und monoton. Man rechnet nun leicht nach

$$\begin{aligned}
(P_n 1)(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = (x + (1-x))^n = 1 \\
(P_n id)(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \frac{j}{n} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^j (1-x)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} = x \\
(P_n m)(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \frac{j^2}{n^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} \frac{j+1}{n} \\
&= \frac{x}{n}(n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-2}{j-1} x^j (1-x)^{n-1-j} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{x^2}{n}(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^2.
\end{aligned}$$

Damit ist der Weierstraßsche Satz bewiesen. Aus ihm folgt

Satz 7.4.3: *Das System der trigonometrischen Summen*

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

ist dicht im Raum der stetigen Funktionen mit der Periode 2π.

Der Beweis kann durch Umrechnen erfolgen. Ich gebe nur eine Skizze: Es sei o.B.d.A. $J = [-\pi, \pi]$. Es seien ferner $f \in C(J, \mathbb{R})$ die zu approximierende Funktion sowie

$$f_1(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad f_2(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Dann ist $f_1(-x) = f_1(x)$, $f_2(-x) = -f_2(x)$, und es gilt

$$f = f_1 + f_2.$$

1. Wir betrachten zunächst f_1 in $[0, \pi]$ und versuchen, durch Cosinus-Terme zu approximieren. Durch

$$t = \cos x, \quad x = \arccos t$$

wird $[0, \pi]$ umkehrbar eindeutig auf $[-1, 1]$ abgebildet. Die Funktion

$$g_1(t) = f_1(\arccos t) = f_1(x)$$

ist in $[-1, 1]$ stetig und kann deshalb durch Polynome $P_n(t)$ approximiert werden. Mithin wird $f_1(x)$ durch $P_n(\cos x)$ approximiert, und aus der Moivreschen Formel folgt

$$\cos^n x = \sum_{1}^{n} \alpha_j \cos jx,$$

zum Beispiel

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$$

Mithin wird f_1 als gerade Funktion auch in $[-\pi,\pi]$ durch eine Summe der Form

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx$$

approximiert.

2. Etwas schwieriger zu behandeln ist der ungerade Anteil f_2, weil $t = \sin x$ in $[0,\pi]$ nicht invertierbar ist. Deshalb betrachten wir die gerade Funktion $f_3(x) := f_2(x)\,\sin x$, die sich wieder durch eine Cosinus-Summe approximieren läßt. Dann kann man

$$\begin{aligned} f_2(x)\,\sin^2 x = f_3(x)\,\sin x \quad &\sim \quad \sum_{j=0}^{n} a_j \cos jx \cdot \sin x \\ &= \quad a_0 \sin x + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j\big(\sin(j+1)x - \sin(j-1)x\big) \end{aligned}$$

durch Sinus-Terme approximieren.

3. Daraus folgt für beliebiges f, daß

$$f(x)\,\sin^2 x$$

durch trigonometrische Summen approximiert werden kann. Dann läßt sich aber auch

$$f(x)\,\cos^2 x = f\left(\tfrac{\pi}{2} - y\right)\sin^2 y \qquad (\text{ mit } y = \tfrac{\pi}{2} - x)$$

durch trigonometrische Summen approximieren, und damit auch

$$f(x) = f(x)\{\sin^2 x + \cos^2 x\}$$

Das beweist den Satz.

7.5 Orthonormalsysteme

Wir wollen die Frage nach der Approximation einer gegebenen Funktion noch etwas vertiefen und knüpfen an das letzte Ergebnis an. Es seien $I := (-\pi,\pi)$ und

$$v_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } n = 0 \\ \cos k\,x & \text{für } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \sin k\,x & \text{für } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann können wir ein $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der Periode 2π durch die $v_n(x)$ approximieren. Die v_n besitzen aber noch eine weitere Eigenschaft, die wir bisher nicht verwandt haben. Es sei nämlich

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Dann ist (f,g) ein Skalarprodukt über $C(\bar{I},\mathbb{C})$ oder $\mathcal{R}(I,\mathbb{C})$, und es gilt mit $u_n = v_{n+1}$

$$\forall\, n,m \in \mathbb{N} \quad (u_n,u_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases} \tag{$*$}$$

Die $\{u_n\}$ bilden also ein „Orthonormalsystem“. Das wollen wir ausnutzen.

Wir nennen die von (f,g) induzierte Norm die $\mathcal{L}^2$-Norm und schreiben für $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \sqrt{(f,f)}.$$

Es sei aber noch einmal ausdrücklich betont, daß die von $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ erzeugte Topologie gröber ist als die von der Supremums-Norm erzeugte, die wir bisher meist verwandt haben. Es waren

$$\mathcal{R}(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R});\ \|\cdot\|\}^{\sim}, \qquad \mathcal{L}^2(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{R});\ \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}\}^{\sim}$$

und für $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} \le \sqrt{|b-a|}\ \|f\|.$$

Viele der folgenden Resultate gelten nicht nur für $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$, sondern auch für $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$. Obwohl wir das Lebesguesche Integral noch nicht weiter besprochen haben, werde ich die Resultate sofort für $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$ formulieren. Auch komplexwertige Funktionen können zugelassen werden.

Es sei nun $\{u_n\}$ ein beliebiges Orthonormalsystem, das heißt, es gelte Gl. $(*)$. Es sei $f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Dann nennen wir

$$f_n := (f, u_n)$$

den „n-ten Fourierkoeffizienten“ von f, benannt nach Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768–1830. Wir nennen ferner

$$s_n(x) := s_n[f](x) := \sum_{j=1}^{n} f_j u_j(x)$$

die n-te Partialsumme zur „Fourierreihe“

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j(x).$$

Wir fragen natürlich ob – oder gegebenenfalls wogegen bzw. in welchem Sinne – die Fourierreihe konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} (s_n, f) &= \sum_{j=1}^{n} f_j (u_j, f) = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \\ (s_n, s_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_i \overline{f_j} (u_i, u_j) = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 - 2\mathrm{Re}\,(f, s_n) + \|s_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2. \end{aligned}$$

Das ist die „Besselsche Identität“, benannt nach Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846). Aus ihr folgt die

Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \le \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

und

Folgerung 7.5.1:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2$$

konvergiert.

Natürlich möchte man gerne, daß in der Besselschen Ungleichung für alle f das Gleichheitszeichen gilt. Solche Orthonormalsysteme werden wir „vollständig“ nennen. Bevor wir auf diese Frage eingehen, zeigen bzw. fassen wir zusammen

Satz 7.5.2: *Es sei $f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Dann gilt*

1. $\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \le \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2$.
2. $\|s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2} \le \|f\|_{\mathcal{L}^2}$.
3. (s_n) *konvergiert in* $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$.
4. $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 \iff \|f - s_n\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$.

Beweis: 1 und 2 sind bereits bewiesen. 3 folgt aus

$$\|s_n - s_m\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\sum_{j=m+1}^{n} |f_j|^2 \right)^{1/2}$$

und 4 aus der Besselschen Identität

$$\|f - s_n\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Definition 7.5.3: *Ein Orthonormalsystem $\{u_n\}$ heißt vollständig in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$:$\Longleftrightarrow$*

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C}) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2}.$$

Diese Gleichung nennt man Parsevalsche Gleichung für f.

Sie ist nach Marc Antoine Parseval (1755–1836) benannt. Es gilt

Satz 7.5.4: *$\{u_n\}$ ist in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ vollständig $\Longleftrightarrow$*

$$\forall\, f,g \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C}) \quad (f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\overline{g_j}.$$

<u>Beweis</u>: Es gilt

$$(f, \sum_{j=1}^{n} g_j u_j) = \sum_{j=1}^{n} f_j\overline{g_j} \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j\overline{g_j}.$$

$\Longrightarrow$ $(f, \sum_{j=1}^{n} g_j u_j) \longrightarrow (f,g)$.
$\Longleftarrow$ Wähle $f = g$.

Es gilt auch

Satz 7.5.5: *Es sei A eine in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ dichte Funktionenmenge. Die Parsevalsche Gleichung gelte für alle $a \in A$. Dann ist $\{u_n\}$ vollständig in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$.*

Zum Beweis wählen wir zu $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ ein $a \in A$ mit $\|f-a\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann ist

$$\|f - s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2} \le \|f-a\|_{\mathcal{L}^2} + \|a - s_n[a]\|_{\mathcal{L}^2} + \|s_n[a] - s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2},$$

und es gilt

$$\|s_n[a] - s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2} = \|s_n[a-f]\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j - f_j|^2} \le \|a-f\|_{\mathcal{L}^2}$$

oder

$$\|f - s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{2}{3}\varepsilon + \|a - s_n[a]\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon,$$

wenn wir n genügend groß wählen.

Für A können wir zum Beispiel $\mathcal{T}(I,\mathbb{C})$, $\mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ oder $C(\bar{I},\mathbb{C})$ nehmen. Besonders wichtig ist nun der folgende

Satz 7.5.6: *$\{u_n\}$ ist in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ vollständig $\Longleftrightarrow$ aus $f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ und ($f_n = 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$) folgt $f = 0$.*

<u>Beweis</u>:
$\Longrightarrow$: Aus der Definition der Vollständigkeit folgt

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2} = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = 0.$$

$\Longleftarrow$: Es sei $f \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ gegeben. Wir zeigen

$$\|f - s_n[f]\|_{\mathcal{L}^2} \to 0.$$

Es sei

$$f^* := \sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j.$$

Dieser Limes existiert in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Es sei $g := f - f^*$. Dann folgt

$$g_k = f_k - \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{N} f_j u_j, u_k\Big)}_{= f_k \text{ für } N \ge k} - \underbrace{\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} f_j u_j, u_k\Big)}_{|\cdot|^2 \le \sum_{j=N+1}^{\infty} |f_j|^2 \to 0},$$

also $g_k = 0$. Dann ist $g = 0$, und damit folgt $\left\|f - s_n[f]\right\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$.

Beispiele:

1. Die klassische Fourierreihe in $I = (-\pi, \pi)$ mit $u_n = v_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dieses Funktionensystem ist vollständig in $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$. Zum Beweis wähle man ein $h \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ mit $h_j = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in A = C(\bar{I}, \mathbb{C})$, periodisch, mit
$$\|h - a\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Aufgrund des Weierstraßschen Approximationssatzes existieren ein $N(\varepsilon)$ und Zahlen $\alpha_j(\varepsilon)$ mit
$$\left\|a - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, u_j\right\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$
Dann ist
$$\left\|h - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, u_j\right\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon$$
und
$$\|h\|^2_{\mathcal{L}^2} + \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 < \varepsilon^2.$$
Mithin verschwindet h und $\{u_n\}$ ist nach Satz 7.5.6 vollständig. Im nächsten Abschnitt werden wir etwas näher auf Fourierreihen eingehen.
2. Es sei $I = (a, b)$. Wir betrachten die Polynome
$$v_j(x) = x^{j-1} \text{ für } j \in \mathbb{N}.$$
Von Eberhard Schmidt (1876–1959) stammt das folgende Orthonormalisierungsverfahren. Es seien
$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|_{\mathcal{L}^2}}, \ \ldots\ , u_n := \frac{w_n}{\|w_n\|_{\mathcal{L}^2}}, \ \ldots$$
wobei w_n folgendermaßen berechnet wird:
$$w_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} u_j + v_n \quad \text{mit } (w_n, u_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n-1.$$
also
$$0 = c_{ni} + (v_n, u_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1.$$
Es ist $w_n \neq 0$, weil die $u_1, \cdots, u_{n-1}, v_n$ linear unabhängig sind.
3. In $I = (-1, 1)$ erhält man auf diese Weise die Legendreschen Polynome $P_n(x)$, benannt nach Adrien-Marie Legendre, 1752–1833.
$$\begin{array}{rclcrcl} P_0(x) &=& \sqrt{\frac{1}{2}} & \quad & P_3(x) &=& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5\,x^3 - 3\,x) \\ P_1(x) &=& \sqrt{\frac{3}{2}}x & & P_4(x) &=& \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3) \\ P_2(x) &=& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3\,x^2 - 1) & & & & \end{array}$$
und allgemein für $n \in \mathbb{N}$
$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n.$$
4. Wir zeigen, daß die Fourierreihe im quadratischen Mittel bzgl. der $\{u_n\}$ die beste Approximation liefert. Es seien $a_j \in \mathbb{C}$ und
$$\begin{aligned} D &= \int_a^b \left|f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right|^2 dx \\ &= \|f\|^2_{\mathcal{L}^2} - 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{a_j} + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \\ &= \underbrace{\left(\|f\|^2_{\mathcal{L}^2} - \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2\right)}_{\geq 0} + \sum_{j=1}^{n} |a_j - f_j|^2 \end{aligned}$$

f ist fest und D soll möglichst klein werden. Das wird für $a_j := f_j$ erreicht.

7.6 Fourierreihen

Als letztes wollen wir die klassischen Fourierreihen noch etwas genauer betrachten. Es seien jetzt $I = (-\pi, \pi)$, $n \in \mathbb{N}_0$ und wieder

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } n = 0 \\ \cos kx & \text{für } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \sin kx & \text{für } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann möchten wir also ein f in der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

darstellen, und zwar mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx\,dx \qquad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx\,dx.$$

Das läßt sich bequemer komplex schreiben. Es sei $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, mit

$$u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathrm{i}nx}$$

ein Orthonormalsystem,

$$f_n := (f, u_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-\mathrm{i}nx}\,dx$$

sowie

$$s_n(x) := \sum_{j=-n}^{n} f_n u_n(x).$$

Dann gilt das in §7.5 Gesagte analog. Es ist

$$v_0 = u_0,\ \ v_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n + u_{-n}),\ \ v_{2n-1} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(u_n - u_{-n})$$

und

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0,\ \ a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f_n + f_{-n}),\ \ b_n = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}(f_n - f_{-n}).$$

Als erstes zeigen wir

Satz 7.6.1: *f sei in $\bar{I}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt*
1. *Die Fourierreihe zu f konvergiert absolut und gleichmäßig.*
2. $\|f - \sum_{j=-n}^{n} f_j u_j\| \le \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \|f'\|_{\mathcal{L}^2}$.

Beweis: Es ist auch $f' \in \mathcal{L}^2$. Es seien f_n bzw. f'_n die Fourierkoeffizienten von f bzw. f'. Dann gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}nx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-\mathrm{i}nx}\,dx$$

oder

$$f_n = -\frac{\mathrm{i}}{n} f'_n.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=m}^{n} f_j u_j(x)\right| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=m}^{n} |f_j| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=m}^{n} \left|\frac{f'_j}{j}\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\sum_{j=m}^{n} \frac{1}{j^2}} \cdot \sqrt{\sum_{j=m}^{n} |f'_j|^2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{\mathcal{L}^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=m}^{n} \frac{1}{j^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe. Das heißt, es gibt ein f^* mit $s_n[f] \to f^*$ absolut und gleichmäßig, also erst recht in $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Weil das Orthonormalsystem vollständig ist, gilt $f = f^*$ und

$$\Big\|f - \sum_{j=-n}^{n} f_j u_j\Big\| = \Big\|\sum_{|j|>n} f_j u_j\Big\| \le \frac{2}{\sqrt{\pi n}}\|f'\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Letzteres wegen

$$\sum_{j>n} \frac{1}{j^2} \le 2\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} \;=\; \frac{-2}{x-1}\Big|_{n+1}^{\infty} \;=\; \frac{2}{n}.$$

<u>Beispiel</u>: Es sei $f(x) = |x|$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}dx \;&=\; -\int_{-\pi}^{0} x\,e^{-\mathrm{i}nx}dx + \int_0^{\pi} x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}dx \\ = \int_0^{\pi} t(e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt})\,dx \;&=\; 2\int_0^{\pi} t\,\cos nt\,dt, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} \\ f_n &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} \;=\; \frac{-4}{\sqrt{2\pi}n^2}\begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k \\ 1 & \text{für } n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\mathrm{i}nx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big\{\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\Big\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

also $\|f'\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{2\pi}$, d.h. es gilt

$$\Big\|f - \sum_{j=-n}^{n} f_j u_j\Big\| \le \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Folgerung 7.6.2: *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Beweis</u>: Es sei $s := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \\ &= \Big(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\Big) + \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\Big) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{3}{4}s = \Big(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\Big) = \frac{\pi}{4}\Big(\frac{\pi}{2} - f(0)\Big) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wir erhalten also die Konvergenz der Fourierreihe in der Supremumsnorm, wenn f' stückweise stetig ist. Es gibt aber Beispiele, die zeigen, daß die Stetigkeit von f allein dazu nicht ausreicht. Es lassen sich jedoch Sprungstellen behandeln, d.h. f selbst braucht nur stückweise stetig zu sein. Das folgende Beispiel soll das zeigen. Den allgemeinen Fall kann man dann daraus durch Überlagerung endlich vieler Sprünge erhalten.

Beispiel: Es sei

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = -\pi \text{ und } x = \pi. \end{cases}$$

Dann ist $f_0 = 0$, und für $n \neq 0$ folgt

$$\sqrt{2\pi} f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}nx}\, dx = \frac{xe^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}nx}\, dx = \frac{2\mathrm{i}\pi}{n}(-1)^n.$$

Es sei $f^*(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, u_n(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \mathrm{i} \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n e^{\mathrm{i}nx}}{n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \\ &= 2\left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \cdots \right\}, \end{aligned}$$

und es gilt $f^* = f$ in $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$. Wir fragen, ob sich etwas über die punktweise Konvergenz von

$$F_n(x) := \sum_{j=-n}^{n} f_j\, u_j(x) \to f(x)$$

aussagen läßt. Dazu bilden wir

$$g(x) := f(x)(1 + e^{\mathrm{i}x}).$$

Wegen $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ hat g keine Sprungstellen mehr und läßt sich daher in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln. Es ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-\mathrm{i}nx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}nx}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}(n-1)x} dx$$

also

$$g_n = f_n + f_{n-1}.$$

Es sei

$$G_n(x) := \sum_{j=-n}^{n} g_j\, u_j(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (1 + e^{\mathrm{i}x}) F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{j=-n}^{n} f_j e^{\mathrm{i}jx} + \sum_{j=-n}^{n} f_j e^{\mathrm{i}(j+1)x} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{j=-n}^{n} (f_j + f_{j-1}) e^{\mathrm{i}jx} + f_n e^{\mathrm{i}(n+1)x} - f_{-n-1} e^{-\mathrm{i}nx} \right\} \\ &= G_n(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ f_n e^{\mathrm{i}(n+1)x} - f_{-n-1} e^{-\mathrm{i}nx} \right\}, \end{aligned}$$

und aus $f_n \to 0$ und $\|G_n - g\| \to 0$ folgt

$$\|(1 + e^{\mathrm{i}\,\cdot}) F_n - g\| \to 0$$

oder

$$\|(1 + e^{\mathrm{i}\,\cdot})\{F_n - f\}\| \to 0.$$

Das heißt: F_n konvergiert gegen f gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das die Punkte $x = -\pi$ und $x = \pi$ nicht enthält. Ferner gilt $F_n(\pm\pi) = 0$, also auch $F_n(\pm\pi) \to 0$, d.h. F_n konvergiert überall punktweise gegen f (letzteres natürlich nur, weil wir f an den Sprungstellen „richtig" definiert hatten).

Zum Abschluß dieses Kapitels zeige ich noch folgenden

Satz 7.6.3 (Poisson): *Es sei $f \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gilt*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\phi - \psi) + r^2} d\psi}_{=:\,v} = f(\phi).$$

Man spricht auch von der Poissonschen Integralformel, benannt nach Siméon-Denis Poisson (1781–1840). Mit ihr kann man die „Dirichletsche Randwertaufgabe“ der Potentialtheorie für den Einheitskreis lösen: Im Inneren des Einheitskreises genügt v der „Potentialgleichung“ $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x,y)=0$ und hat die vorgegebenen Randwerte f.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß für $0\le r\le r_0<1$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\phi$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\phi &= \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\phi} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-re^{i\phi}}\\ &= \operatorname{Re}\frac{1-re^{-i\phi}}{|1-re^{i\phi}|^2} = \frac{1-r\cos\phi}{1-2r\cos\phi+r^2}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\phi} &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\phi\\ = \quad -1+2\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\phi &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi+r^2}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}v(r,\phi) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-\psi)+r^2}d\psi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\phi-\psi)}\right\}d\psi\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}f_n u_n(\phi).\end{aligned}$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes.

1. Der Satz ist für $f=1$ richtig. Denn dann ist nur $f_0=\sqrt{2\pi}$ von Null verschieden, und es gilt

$$v(r,\phi)=f_0u_0(\phi)=1.$$

2. Es ist

$$\begin{aligned}v(r,\phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r)^2)f(\phi+\chi)}{1-2r\cos\chi+r^2}d\chi\\ &= f(\phi)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(f(\phi+\chi)-f(\phi))}{1-2r\cos\chi+r^2}\,d\chi,\end{aligned}$$

und wir haben zu zeigen, daß das letzte Integral gegen Null konvergiert. Dazu zerlegen wir

$$\int_0^{2\pi}\cdots=\int_0^{\alpha}\cdots+\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\cdots+\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\cdots.$$

a) Wir behandeln

$$\int_0^{\alpha}\cdots \text{ bzw. } \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\cdots.$$

Hier ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f und

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\chi+r^2}\ge\frac{1-r^2}{(1+r)^2}=\frac{1-r}{1+r}>0$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\alpha}\cdots\right| &\le \sup_{\chi\in(0,\alpha)}\left|f(\phi+\chi)-f(\phi)\right|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\chi+r^2}d\chi\\ &= \sup_{\chi\in(0,\alpha)}\left|f(\phi+\chi)-f(\phi)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

für alle $\alpha < \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ und für alle $r < 1$.

b) Es ist für $r \geq \frac{1}{2}$ mit $c = 2\|f\|$

$$\left| \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \cdots \right| \leq c \, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} < c \, \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + (1 - \cos\alpha)} \underset{r \to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist die Poissonsche Formel bewiesen. Wir bemerken noch, daß aus ihr wieder die Vollständigkeit des Orthonormalsystems folgt. Es sei nämlich f stetig und $f_n = 0$ für alle n. Dann ist $v(r, \phi) = 0$ und damit

$$f(\phi) = \lim_{r \to 1} v(r, \phi) = 0.$$

Index

Druck der Seitenzahlen: Es bedeuten für das Stichwort

schräg	:	Personennamen
fett	:	definierendes Vorkommen
von-bis	:	Abschnittsüberschriften
normal	:	angewandtes Vorkommen