

Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren

Rolf Leis

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn
Wegelerstr. 10, 53115 Bonn, Germany

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1 Das Dirichletsche Prinzip	5
2 Integralgleichungen	7
3 Direkte Bestimmung des Minimums	13
4 Darstellung linearer Operatoren	18
5 Anfangsrandwertaufgaben und Streutheorie	22
6 Nichtlineare Probleme	27
Literatur	32

Erscheint in: „Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV“. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig 1990, S. 491–535.

Einführung

Zur mathematischen Behandlung beispielsweise eines physikalischen Problems bildet man zunächst ein Modell, dann analysiert man es, und schließlich zieht man Folgerungen daraus. Der erste Schritt erfordert großes Geschick und tiefen Einblick in die Zusammenhänge. Denn das Modell soll einmal alle wesentlichen Phänomene enthalten; es soll aber andererseits auch genügend einfach sein. Im zweiten Schritt geht es dann um das Bereitstellen einer Lösungstheorie, und im dritten bemüht man sich um die Interpretation. Zwischen den einzelnen Schritten ist eine Rückkopplung natürlich unerlässlich.

Für den angewandten Analytiker oder mathematischen Physiker, um bei der Physik als Anwendungsgebiet zu bleiben, steht der zweite Schritt eindeutig im Vordergrund seines Interesses. Beispielsweise entwickelt er eine Theorie der Maxwell'schen Gleichungen. Die Gleichungen selbst hinterfragt er jedoch meist nur wenig; auch ist er oft nicht sonderlich an numerischen Resultaten interessiert, so spielt der Computer kaum eine Rolle. Hingegen gilt absolute mathematische Strenge. Seine Untersuchungen erzeugen vielfach eine Eigendynamik, die sich für die Entwicklung der Mathematik als außerordentlich fruchtbar erwiesen hat. Natürlich entsteht dadurch andererseits aber auch die Gefahr eines gewissen Realitätsverlustes.

Im folgenden soll über analytische Methoden zur Behandlung solcher Modelle aus der Physik berichtet werden. In den letzten hundert Jahren sind in der angewandten Analysis außerordentlich viele und äußerst interessante Resultate gefunden worden. Ein Ende dieser Entwicklung ist noch nicht abzusehen. Ein kurzer historisch orientierter Überblick kann daher nur einige Entwicklungslinien aufzeigen. Bei der Auswahl, den ‚*Variationen über die Wellengleichung*‘, habe ich mich durchaus von persönlichen Interessen leiten lassen. So fehlen leider viele wichtige Ergebnisse, z.B. aus der Relativitätstheorie, der Strömungslehre oder aus der Verzweigungstheorie.

Zur Einführung in den Fragenkreis beginne ich mit dem Beispiel der schwingenden Saite. Es sei G das Intervall $(0, l)$, und die Saite möge in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ befestigt sein. Außerdem soll die Saite nur in einer Ebene schwingen, $u(t, x)$ sei ihre Auslenkung. Im Anfang (zur Zeit $t = 0$) seien u und die Geschwindigkeit u_t bekannt. Es sollen also die Rand- bzw. Anfangsbedingung

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall x \in \partial G \quad u(t, x) = 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in G \quad u(0, x) = u^0(x), \quad u_t(0, x) = u^1(x) \quad (2)$$

gelten.

Um aber $u(t, x)$ wirklich für alle $t \geq 0$ zu erhalten, muß man mehr über die zugrundeliegende Physik wissen. Die kinetische und die potentielle Energie sind durch

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) u_t^2(t, x) dx \quad \text{und} \quad U(t) = \int_0^l \mu(x) \{ [1 + u_x^2(t, x)]^{1/2} - 1 \} dx$$

gegeben. Dabei ist $m > 0$ die Materialdichte und $\mu > 0$ ein Materialfaktor.

Durch diese Festlegungen, insbesondere durch die Wahl der potentiellen Energie proportional zur Längenänderung, haben wir die Saite definiert. Wir werden sofort sehen, daß $u(t, x)$ damit der Wellengleichung genügt. Hätten wir $U(t)$ z.B. proportional zur Krümmung angenommen, dann würden wir den Balken beschreiben und die Plattengleichung erhalten (diese Gleichung enthält Ableitungen bis zur vierten Ordnung in x , während in der Wellengleichung nur Ableitungen zweiter Ordnung auftreten).

Damit kennen wir die Energie $E(t) := T(t) + U(t)$ des Schwingungsvorgangs, und wir werden im folgenden nach Lösungen $u(t, x)$ mit „endlicher Energie“, also $E(t) < \infty$ für alle $t \geq 0$, suchen. $E(t)$ kann als Norm in geeignet gewählten Räumen dienen.

Die Bewegungsgleichung für $u(t, x)$ erhält man dann aus physikalischen Integralprinzipien, die aus den Newtonschen Gesetzen folgen; nämlich aus dem d'Alembertschen oder dem Hamiltonschen Prinzip, welches besagt, daß man das Funktional

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} [T(t) - U(t)] dt$$

stationär machen muß. Das heißt, u ist durch

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty((t_1, t_2) \times G) \quad \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

charakterisiert. Dabei sind $\mathring{C}_\infty(B)$ die „Testfunktionen“ von B , d.h. beliebig oft differenzierbare Funktionen mit in B kompaktem Träger. An dieser Stelle werden also Variationsprinzipien benutzt.

Führt man die Rechnung aus, dann folgt

$$m u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu u_x}{(1 + u_x^2)^{1/2}}.$$

Dies ist eine nichtlineare Wellengleichung und zunächst schwer zu behandeln. Erst im sechsten Abschnitt werden wir auf solche Gleichungen etwas näher eingehen.

Um weiterzukommen hat man schon früh das Problem vereinfacht oder „linearisiert“. Das heißt, man betrachtet nur kleine Auslenkungen und ersetzt den Term $[1 + u_x^2]^{1/2}$ in U durch $1 + u_x^2/2$. Damit wird U neu festgelegt zu

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) u_x^2(t, x) dx.$$

Dies sei von nun an die potentielle Energie der „linearisierten Saite“. Für $u(t, x)$ folgt dann die „Wellengleichung“

$$m u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} (\mu u_x). \quad (3)$$

Unsere Aufgabe besteht also jetzt darin, für Gln. (1–3) eine Lösungstheorie zu geben. Dazu muß natürlich zunächst gesagt werden, was man unter einer Lösung verstehen will. Es gibt viele Lösungsbegriffe wie klassische, strikte, schwache oder Distributionen-Lösungen. Zum Teil werden sie in den folgenden Abschnitten benutzt. Für den Augenblick denken wir an genügend glatte Lösungen mit endlicher Energie. Außerdem nehmen wir zur Vereinfachung $m = \mu = 1$ an.

Es ist dann leicht, durch Differenzieren $E(t) = \text{const}$ zu zeigen. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Lösung. Zum Nachweis der Existenz kann man einen alten physikalisch motivierten Ansatz machen und nach „stehenden Wellen“ fragen. Das heißt, man sucht nach Lösungen der Form $w(t, x) = a(t)v(x)$. Mathematisch ist das die Methode der Separation der Variablen. Aus diesem Ansatz folgen

$$a'' + \lambda a = 0 \quad (4)$$

$$v'' + \lambda v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = v(l) = 0. \quad (5)$$

Dabei ist λ eine Konstante.

Gl. (5) wird durch $v(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}x)$ gelöst. Dabei müssen aber die Konstanten so gewählt werden, daß auch die Randbedingung erfüllt ist. Das führt auf $\lambda_n = (n\pi/l)^2$, $n \in \mathbb{N}$, und $v_n(x) = \sqrt{2/l} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$, wobei wir v_n durch $\int v_n(x)^2 dx = 1$ normiert haben. Man nennt λ_n „Eigenwert“ und v_n „Eigenfunktion“ zum zugrundeliegenden Operator. Die (v_n) bilden eine vollständige Orthonormalfolge in $\mathcal{L}^2(G)$, und die entsprechenden stehenden Wellen haben die Form

$$w_n(t, x) = \left[\alpha_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \beta_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t) \right] \cdot v_n(x).$$

Eine Lösung $u(t, x)$ kann man dann durch Superposition solcher stehenden Wellen erhalten, nämlich $u(t, x) = \sum w_n(t, x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dabei müssen die Koeffizienten α_n und β_n so bestimmt werden, daß

$$u^0(x) = u(0, x) = \sum_n \alpha_n v_n(x) \quad \text{und} \quad u^1(x) = u_t(0, x) = \sum_n \beta_n \sqrt{\lambda_n} v_n(x)$$

gilt. Daß das für genügend glatte Anfangswerte möglich ist, folgt aus der Theorie der Fourierreihen, indem man u^0 und u^1 antisymmetrisch und periodisch fortsetzt.

Es sei nur noch kurz bemerkt, daß man auch aus der „d'Alembertschen Lösungsformel“ $u(t, \cdot) = \partial_t I(t)u^0 + I(t)u^1$ mit

$$(I(t)v)(x) := \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(s) ds$$

durch antisymmetrisches und periodisches Fortsetzen der Anfangsdaten die Lösung erhalten kann. Diese Darstellung ist für Streuprobleme besonders wichtig. So läßt sich aus ihr im \mathbb{R}^3 das Gelten des „Huygensschen Prinzips“ folgern. Auf damit zusammenhängende Fragen wird im fünften Abschnitt näher eingegangen.

Zu (1–3) analoge Aufgaben treten im \mathbb{R}^n auf. Im einfachsten Fall geht es um $u_{tt} = \Delta u$ in einem beschränkten Gebiet $G \in \mathbb{R}^n$. $\Delta := \sum \partial_i^2$, $i = 1, \dots, n$, ist der „Laplace-Operator“. Hinzu kommen wieder eine Randbedingung, etwa die homogene „Dirichletsche“ $u(t, \cdot)|_{\partial G} = 0$, und Anfangsbedingungen $u(0, \cdot) = u^0$ und $u_t(0, \cdot) = u^1$.

Diese Anfangsrandwertaufgabe läßt sich im allgemeinen nicht mehr so einfach direkt lösen wie unser Beispiel im \mathbb{R}^1 . Schon die Behandlung der zugehörigen stationären Gleichung $\Delta u = 0$, der „Potential-“ oder „Laplace-Gleichung“, mit vorgegebenen inhomogenen Randwerten $u|_{\partial G} = f$, die z.B. in der Elektrostatik auftritt, stößt auf große Schwierigkeiten. Im \mathbb{R}^2 ist der Satz über die Lösbarkeit dieser Randwertaufgabe äquivalent zum Riemannschen Abbildungssatz. Der erste Abschnitt berichtet über die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe in der Potentialtheorie vor der Jahrhundertwende auftraten.

Es hat viele Vorschläge bedeutender Mathematiker zur Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe gegeben. Wir berichten in diesem Überblick nur über zwei, die beide um die Jahrhundertwende von D. HILBERT und seinen Schülern entwickelt bzw. ausgebaut wurden. Einmal geht es um die Integralgleichungsmethode, die im zweiten Abschnitt vorgestellt wird. Diese Methode eignet sich besonders gut bei glattem Rand und homogenem Medium. Ihr liegt die Beobachtung zugrunde, daß sich bei elektrostatischen Problemen die Ladung an der Oberfläche eines Leiters befindet. Man machte daher spezielle Ansätze mit Oberflächenbelegungen und führte so die Differentialgleichung in eine Randintegralgleichung über.

Die zweite Methode, die „direkte“ oder Hilbertraummethode, schließt sich enger an die Integralprinzipien der Mechanik an. Es werden quadratische Energiefunktionale eingeführt und minimiert. Hierüber wird im dritten Abschnitt berichtet.

Mit beiden Methoden gelingt auch die Lösung der entsprechenden Eigenwertaufgabe. Natürlich lassen sich die Eigenwerte im allgemeinen nicht mehr direkt ausrechnen wie bei der Saite. Es gelten jedoch asymptotische Entwicklungen

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi}{\text{Vol}(G)} \cdot n \text{ im } \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \lambda_n \sim \left(\frac{6\pi^2}{\text{Vol}(G)} \cdot n \right)^{2/3} \text{ im } \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

die auf H. WEYL [1912] zurückgehen und die ursprünglich zum Beweis der Jeansschen Strahlungsformel (Plancksche Hohlraumstrahlung) benötigt wurden.

Die weitere Entwicklung ist gekennzeichnet durch größere Abstraktion und stärkeres Verwenden von funktionalanalytischen Methoden. So wurden Gleichungen in Banachräumen gelöst und der Begriff des Operators präzisiert. In der Physik spielen selbstadjungierte Operatoren eine besonders große Rolle, ihnen entsprechen die Observablen. Weil die dort auftretenden Operatoren i.a. unbeschränkt sind, mußte zunächst die Frage der Fortsetzbarkeit symmetrischer Operatoren zu selbstadjungierten geklärt werden. Dann ging es darum, eine Normalform („Spektraldarstellung“) für selbstadjungierte Operatoren herzuleiten. Ein Höhepunkt dieser Entwicklung war der Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren durch J. VON NEUMANN (1929–32). Im vierten Abschnitt wird über diese Entwicklung berichtet.

Doch kehren wir zurück zu Anfangsrandwertaufgaben. Diese treten in der mathematischen Physik oft auf. Typische Beispiele dafür findet man in der Akustik, der Elastizitätstheorie, in der Theorie der Maxwell'schen Gleichungen oder in der Theorie der Schrödingergleichung. Mit Hilfe des Spektralsatzes lassen sich Anfangsrandwertaufgaben zu diesen Gleichungen lösen. Von besonderem Interesse ist dabei der Fall unbeschränkter Gebiete. So wurden Anfangsrandwertaufgaben in „Außengebieten“ vielfältig untersucht (Außengebiete sind Gebiete mit beschränktem Komplement; man denke an Streuung an beschränkten Hindernissen). Das Spektrum des auftretenden Operators besteht jetzt nicht mehr nur aus abzählbaren Eigenwerten wie bei der Saite, sondern es hat auch einen stetigen Anteil. So erfordert schon die Behandlung der stationären Randwertaufgabe größeren Aufwand. Von besonderer Bedeutung ist jetzt die Beschreibung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen für große Zeiten und ihr Vergleich mit entsprechenden Lösungen im Ganzraumfall (oder „freien Fall“, also $G = \mathbb{R}^n$ mit homogenem Medium). Je nachdem, ob klassische Gleichungen (wie die Maxwell'schen) behandelt werden oder die Schrödingergleichung, spricht man von klassischer oder Quanten-Streutheorie. Von besonderem Interesse ist hier auch die Frage nach dem Verhalten der Lösungen bei hohen Frequenzen, also der Grenzübergang zur geometrischen Optik. Außerdem spielen Probleme der inversen Streutheorie eine immer größere Rolle. Aus den gemessenen Lösungen sollen die Daten, z.B. die Gestalt des Gebietes oder die Materialkoeffizienten, zurückgewonnen werden. Aus der asymptotischen Entwicklung (6) erhält man z.B. unmittelbar das Volumen von G , und es stellt sich die Frage, ob sich durch Verbesserung dieser Entwicklung die Gestalt von G ermitteln läßt. „*Can one hear the shape of a drum?*“, so lautet der Titel einer Arbeit von M. KAC aus dem Jahre 1966. Der fünfte Abschnitt berichtet über solche Fragen.

Im sechsten Abschnitt wird schließlich noch auf zwei nichtlineare Probleme eingegangen. Wir behandeln zunächst einfache Erhaltungsgesetze und erläutern daran Begriffe wie „Stoßwelle“ oder „Verdünnungswelle“. Sodann berichten wir über die Existenz globaler klassischer Lösungen zur nichtlinearen Wellengleichung bei kleinen Daten. Solche Ergebnisse wurden in den letzten Jahren von F. JOHN und seinen Schülern erhalten.

1 Das Dirichletsche Prinzip

Ein zentrales Anliegen der mathematischen Physik im vorigen Jahrhundert war das Lösen von Randwertaufgaben. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, sei G ein homogenes Medium, repräsentiert durch eine offene zusammenhängende Menge im \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n \setminus G$ das Hindernis, $u(t, x)$ ein akustisches Potential, $v = \nabla u$ die Geschwindigkeit und $p = u_t$ der Druck. Dann folgt aus den linearisierten Navier-Stokes Gleichungen der Gasdynamik für u die Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$. Dabei haben wir alle Materialkonstanten zu eins normiert. Ist der Rand starr, dann hat man die „Neumannsche Randbedingung“ $n \nabla u|_{\partial G} = 0$. Dabei ist n die (äußere) Normale von ∂G . Verschwindet der Druck am Rand, dann gilt die „Dirichletsche Randbedingung“ $u|_{\partial G} = 0$. Es sind auch gemischte Randbedingungen möglich.

Wir beginnen mit dem stationären Fall und inhomogener Dirichletscher Randbedingung. D.h. wir suchen ein $u \in \mathcal{K} := C(\overline{G}) \cap C_2(G)$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{und} \quad u|_{\partial G} = f. \quad (1.1)$$

Dabei ist $f \in C(\partial G)$ vorgegeben. Eine Lösung u von $\Delta u = 0$ nennt man auch „Potentialfunktion“ oder „harmonisch“ in G .

Im \mathbb{R}^2 treten Potentialfunktionen als Real- bzw. Imaginärteil von holomorphen Funktionen auf. Wie im \mathbb{R}^2 gilt auch im \mathbb{R}^n für u die Mittelwertformel

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y) dy.$$

Dabei ist ω_n die Oberfläche der Einheitskugel S^{n-1} , und die abgeschlossene Kugel $\overline{B(x, r)}$ soll in G liegen. Aus der Mittelwertformel folgt wie in der Funktionentheorie das Maximumprinzip, und im Falle $x \in B(0, r)$, $\overline{B(0, r)} \subset G$, gilt die Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_n r} \int_{|y|=r} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dy.$$

Zum Beweis benötigt man nur die Kelvin-Transformation (die Spiegelung harmonischer Funktionen an der Kugel) und die Kenntnis einer Grundlösung

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r \quad \text{für } n = 2, \quad g(r) = \frac{r^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \quad \text{für } n \geq 3. \quad (1.2)$$

Damit ist klar, daß die Dirichletsche Randwertaufgabe der Potentialtheorie höchstens eine Lösung besitzt. Und wenn G eine Kugel ist, liefert die Poissonsche Integralformel ihre Lösung.

Viel schwieriger erwies sich aber die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe für allgemeinere Gebiete. Hierbei spielte das Dirichletsche Prinzip eine große Rolle. Es geht auf C.F. GAUSS und W. KELVIN zurück und wurde wohl von B. RIEMANN, der es in Dirichlets Vorlesungen gehört hatte, nach diesem benannt.

Das Dirichletsche Prinzip fußt auf den Integralprinzipien der Mechanik und besagt folgendes: Es sei

$$D(u) := \int_G (\nabla u)^2$$

das „Dirichletsche Integral“ und $\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{K} \mid D(u) < \infty \text{ und } u|_{\partial G} = f\}$ die zugrundeliegende Funktionenklasse. Es sei v eine Minimalstelle von $D(u)$, also $D(v) = \min D(u)$ für $u \in \mathcal{D}$. Dann löst v die Dirichletsche Randwertaufgabe.

Daß das so ist, kann man relativ leicht sehen. Aus $D(v + \varepsilon\varphi) \geq D(v)$ für alle $\varphi \in \mathring{C}_\infty(G)$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ folgt nämlich

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty(G) \quad \int_G (\nabla v)(\nabla \varphi) = 0,$$

und aus dem Fundamentallema der Variationsrechnung ($\mathring{C}_\infty(G)$ ist in $\mathcal{L}^2(G)$ dicht) erhält man dann nach partieller Integration $\Delta v = 0$.

Weil das Dirichletsche Integral nach unten beschränkt ist, hielt man es lange Zeit für evident, daß das Minimumproblem eine Lösung $v \in \mathcal{D}$ besitzt. Wenn letzteres richtig ist, sagt man, das Dirichletsche Prinzip gelte für $D(u)$ in \mathcal{D} . So verwendete es B. RIEMANN zum Beweis seiner fundamentalen Existenzsätze der geometrischen Funktionentheorie. Kritik setzte erst mit K. WEIERSTRASS [1870] ein, der darauf hinwies, daß ein Infimum nicht notwendig angenommen werden muß. Es ist klar, daß es eine Minimalfolge $u_n \in \mathcal{D}$ mit $D(u_n) \rightarrow \inf D(u)$ für $u \in \mathcal{D}$ gibt. Es ist aber nicht klar, ob überhaupt oder in welchem Sinne diese Folge konvergiert und ob ein eventuell vorhandener Grenzwert auch zu \mathcal{D} gehört.

Damit hingen die Riemannschen Sätze in der Luft, und es setzte ein intensives Bemühen vieler Mathematiker ein, die Randwertaufgaben zu lösen und das Dirichletsche Prinzip zu retten; letzteres besonders, weil das Dirichletsche Prinzip so elegant und physikalisch so plausibel war. Befriedigend gelöst wurde beides erst um 1900. Es können hier nicht alle Lösungsmethoden vorgestellt werden. So seien nur erwähnt das „alternierende Verfahren“ von H.A. SCHWARZ, die Methode von C. NEUMANN, die in die Integralgleichungstheorie einmündete, die Methode „de balayage“ von H. POINCARÉ und später die PERRONSche Methode [1923].

Wie schon in der Einleitung gesagt, werden wir in den beiden nächsten Abschnitten über die Integralgleichungs- und die Hilbertraummethode berichten. Mit der Integralgleichungsmethode erhält man eine klassische Lösung u von Gl. (1.1). Die Hilbertraummethode beweist das Dirichletsche Prinzip in geeignet gewählten Funktionenräumen, und es liefert deshalb verallgemeinerte Lösungen. Es sei etwa $G \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_n < d\}$. Dann folgt durch partielles Integrieren eine Poincarésche Abschätzung [1894]

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty(G) \quad \|\varphi\| \leq d \cdot \|\nabla \varphi\|. \quad (1.3)$$

Dabei bezeichnet $\|\varphi\|$ die $\mathcal{L}^2(G)$ -Norm von φ . $\|u\|_1 := D(u)^{1/2}$ ist deshalb eine Norm in $\mathring{C}_\infty(G)$, und für eine Minimalfolge (u_n) aus \mathcal{D} gilt $\|u_n - u_m\|^2 \leq d^2 \cdot D(u_n - u_m)$. \mathcal{D} ist jedoch unter dieser Norm nicht vollständig. Das heißt, selbst wenn man die Konvergenz von (u_n) beweisen kann, gehört der Grenzwert i.a. nicht zu \mathcal{D} . Aber trotzdem wird man ihn als verallgemeinerte Lösung betrachten. Wir werden das im dritten Abschnitt präzisieren.

Diese Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen und zu vielen schönen Resultaten geführt, über die vom dritten Abschnitt an berichtet wird. Es hat sich gezeigt, daß solche Lösungen für die physikalischen Anwendungen besonders geeignet sind. Trotzdem sollte man aber im Auge behalten, daß damit die Fragestellung abgeändert wurde. Selbst wenn das bei glatten Daten richtig ist, erfordert es i.a. hohen analytischen Aufwand zu zeigen, daß eine verallgemeinerte Lösung auch klassische Lösung ist (für das Umgekehrte gilt dasselbe). So kann man also nicht von vornherein sagen, daß etwa die Hilbertraummethode der Integralgleichungsmethode überlegen ist. Es gibt Randwertaufgaben, die klassisch lösbar sind, aber nicht im verallgemeinerten Sinne, und umgekehrt. Zwei Beispiele aus dem \mathbb{R}^2 mögen das zum Abschluß dieses Abschnitts erläutern.

Ein Beispiel einer klassisch lösbaren Randwertaufgabe, für die aber das Dirichletsche Prinzip versagt, wurde zuerst von F. PRYM [1871] angegeben. Etwas einfacher ist das folgende, das von J. HADAMARD [1906] stammt: Es sei G der Einheitskreis und $f(\varphi) := \sum n^{-2} \cdot \sin(n! \varphi)$. Dann

ist f stetig, und

$$u(r, \varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \frac{\sin(n! \varphi)}{n^2} \in \mathcal{K}$$

löst die Dirichletsche Randwertaufgabe. Das entnimmt man der Theorie der Fourierreihen oder der Poissonschen Integralformel. Nun gilt aber für $r < 1$

$$\int_{|x|<r} (\nabla u)^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n!} \frac{n!}{n^4}.$$

Mithin existiert das Dirichletsche Integral $D(u)$ nicht.

Umgekehrt, es sei $G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\}$. Wir suchen die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe zu den Randwerten $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| = 1$. Als verallgemeinerte Lösung erhält man $u = 0$. Diese Randwertaufgabe ist aber klassisch nicht lösbar. Denn es sei u eine klassische Lösung. Dann folgt wie in der Funktionentheorie aus dem Maximumprinzip und der Kenntnis der Grundlösung, daß der Nullpunkt eine hebbare isolierte Singularität ist. Mithin läßt sich u zu einer Potentialfunktion im Inneren des Einheitskreises fortsetzen und verschwindet dann wegen $u(x) = 0$ für $|x| = 1$. Das steht aber im Widerspruch zu $u(0) = 1$.

2 Integralgleichungen

Wie schon in der Einleitung gesagt, liegt es von der Physik her nahe, die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe (1.1) im \mathbb{R}^3 in der Form

$$v(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(y) \frac{1}{|x-y|} dy$$

anzusetzen. Man nennt v „Potential mit der einfachen Flächenbelegung μ “. Dabei wird angenommen, daß der Rand ∂G genügend glatt und μ stetig ist. G sei zunächst beschränkt, und zur Vereinfachung sei auch $\mathbb{R}^3 \setminus G$ zusammenhängend. v entsteht also durch Faltung der Grundlösung mit der Belegung μ . v ist daher Potentialfunktion in G , und man sieht leicht, daß v im ganzen \mathbb{R}^3 definiert und stetig ist. Es gilt auch $v \in C_{\infty}(G)$, $v \in C_{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G})$, und mit etwas Rechnung folgt, daß die Ableitung von v in Normalenrichtung bei Annäherung an den Rand springt, während die Tangentialableitungen stetig bleiben.

Zur Lösung der Randwertaufgabe muß daher μ so bestimmt werden, daß

$$\forall x \in \partial G \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(y) \frac{1}{|x-y|} dy$$

gilt. Dies ist in der Hilbertschen Terminologie eine Integralgleichung erster Art für μ . Sie ist einer analytischen Behandlung nur schwer zugänglich.

Der erste, der an dieser Stelle einen Durchbruch erzielt hat, war A. BEER, der Vorgänger von R. LIPSCHITZ auf dem Bonner Lehrstuhl [1856], abgedruckt in [C. Neumann 1877, S. 220f]. BEER ging von der Greenschen Formel angewandt auf die Lösung u und die Grundlösung aus, d.h. von der Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{|x-y|} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} \right\} dy$$

und iterierte. In heutiger Sprechweise setzte er u nicht durch ein einfaches Potential, sondern durch ein „Dipolpotential“

$$w(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} dy$$

an. Dabei soll v wieder eine auf ∂G stetige Funktion sein und n die (nach außen gerichtete) Normale. Auch w ist in G und $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ eine Potentialfunktion. w ist aber im Gegensatz zu v am Rande nicht mehr stetig, vielmehr gelten die Sprungrelationen

$$\begin{aligned} w(x) &\rightarrow v(z) + (Kv)(z) && \text{für } x \rightarrow z \in \partial G \text{ und } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G} \\ w(x) &\rightarrow -v(z) + (Kv)(z) && \text{für } x \rightarrow z \in \partial G \text{ und } x \in G \end{aligned}$$

mit

$$(Kv)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|z-y|} dy \quad \text{für } z \in \partial G.$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|z-y|} = \frac{n(y)(z-y)}{|z-y|^3} = O\left(\frac{1}{|z-y|}\right) \quad (2.1)$$

für $z, y \in \partial G$ und $|z-y| \rightarrow 0$ glättet die Abbildung K ; es gilt $K : C(\partial G) \mapsto C_\alpha(\partial G)$ etwa mit $\alpha = 1/4$. Das Verhalten solcher Potentiale wurde vielfach untersucht; so 1907 von A. KORN, von L. LICHTENSTEIN [1909–21] und von J. SCHAUDER [1931–32].

Damit erhält man für v eine Integralgleichung zweiter Art, $f = -v + Kv$, die leichter zu behandeln ist. Wie gesagt, BEER erhielt seine Lösung durch Iterieren, d.h. er benutzte das, was wir heute „Neumannsche Reihe“ nennen, also $v = -\sum K^n f$, $n \in \mathbb{N}_0$. Um Konvergenzfragen kümmerte er sich dabei nicht, er schreibt nur, daß es „einleuchte“, daß „ Kf gleichförmiger verläuft als f “.

C. NEUMANN hat dann die Beersche Methode wieder aufgegriffen und sich intensiv um den Nachweis der Konvergenz des Verfahrens für konvexe Gebiete bemüht. Die Schwierigkeit liegt darin, daß zwar $\|K\| \leq 1$, nicht aber $\|K\| < 1$ gilt. In seinem Buch [1877] bringt er einen Konvergenzbeweis. Weil dieser eine Lücke enthielt (wieder wurde das Minimum mit dem Infimum verwechselt), behandelt er das Thema [1887/88] erneut. Die Neumannsche Methode wird in [Dieudonné, 1981, S. 43–46] ausführlich dargestellt. H. LEBESGUE scheint die beiden letztgenannten Neumannschen Arbeiten nicht gekannt zu haben, denn [1937] greift auch er das Thema wieder auf, weist auf die Lücke in [1877] hin und füllt sie durch ein Kompaktheitsargument aus. Vierzig Jahre später nehmen dann J. KRÁL und I. NETUKA noch einmal dazu Stellung. Sie bestätigen und verallgemeinern das Neumannsche Resultat [1887/88].

Die Neumannschen Ergebnisse interessieren heute mehr den Anwender. Einmal, weil kontrahierende Operatoren auftreten; zum anderen, weil NEUMANN auch stückweise glatte Ränder zulassen kann. Die theoretische Entwicklung ist jedoch anders weitergegangen. Hier stand die Tatsache im Vordergrund, daß die Abbildung K kompakt ist, und zwar für beliebige glatt berandete Gebiete. Es wurde dann eine Theorie der Gleichung $f = (id + K)x$ in Banachräumen für kompakte K entwickelt. Das Resultat ist, daß wie in der linearen Algebra die „Fredholm-sche Alternative“ für solche Gleichungen gilt. Die Neumannsche Voraussetzung der Konvexität des Gebietes wird dabei nicht mehr benötigt; kurz gesagt, das Kontraktions- wurde durch ein Kompaktheitsargument ersetzt.

Die weitere Entwicklung verlief nun so: Ab 1896 beschäftigte sich V. VOLTERRA mit den nach ihm benannten Integralgleichungen und betrachtete dabei Integralgleichungen als Grenzfall linearer Gleichungssysteme. Außerdem war ab 1890 eine Theorie unendlicher linearer Gleichungssysteme und ihrer Determinanten durch H. VON KOCH entwickelt worden. Beide Ideen

nahm I. FREDHOLM auf. Er erzielte [1900] den Durchbruch und konnte die Integralgleichung zweiter Art für stetige Funktionen und damit die Dirichletsche Randwertaufgabe lösen. [1903] bewies er den nach ihm benannten Alternativsatz für solche Gleichungen.

Danach trat die Potentialtheorie zurück, und die Theorie der Integralgleichungen verselbständigte sich. HILBERT und seine Schüler griffen das Thema auf, behandelten Integralgleichungen zweiter Art mit stetigem symmetrischen Kern,

$$(Kx)(s) = \int x(t) k(s, t) dt,$$

und zeigten vor allem auch die Existenz von abzählbar unendlich vielen Eigenwerten und den zugehörigen Entwicklungssatz. Den Beweis führte HILBERT über einen Auswahlssatz, ähnlich dem Kriterium von Arzelà-Ascoli, das er wohl nicht gekannt hatte.

Anschließend verallgemeinerte HILBERT seine Ergebnisse auf entsprechende quadratische Formen bzw. auf Gleichungen in Folgenräumen ℓ^2 , wie wir heute sagen. Hat man nämlich eine Orthonormalbasis (u_n) für die zugrundeliegenden stetigen Funktionen $C(\overline{G})$, dann wird jedem x vermöge

$$x \mapsto x_n := (x, u_n) := \int_G x \overline{u_n}$$

eine Zahlenfolge $(x_n) \in \ell^2$ zugeordnet. HILBERT blieb aber nicht bei der bloßen Übertragung seiner Ergebnisse stehen, sondern er bewies auch einen allgemeinen Entwicklungssatz für beschränkte symmetrische Operatoren auf ℓ^2 . Das heißt, er verzichtete auf die Kompaktheitsvoraussetzung und erhielt zum erstenmal ein stetiges Spektrum. Damit war der Weg frei für die Untersuchung allgemeinerer Operatoren in allgemeineren Räumen, über die im vierten Abschnitt berichtet wird. HILBERT hat seine Resultate in den berühmten sechs „Mitteilungen“ veröffentlicht, die im Buch [1912] vereinigt wurden.

Die Theorie der Integralgleichungen wurde zunächst von HILBERTS Schüler E. SCHMIDT [1907, 1908] weiterverfolgt. SCHMIDT wählte einen direkteren Zugang über Orthogonalreihen, also ohne Fredholmsche Determinanten und Grenzübergang unendlich vieler Gleichungen. Nach HILBERT und ihm sind die „Hilbert-Schmidt Kerne“ benannt, also $k \in \mathcal{L}^2(G \times G)$. Für Integralgleichungen mit Hilbert-Schmidt Kern gilt die Fredholmsche Alternative.

Die weitere Entwicklung wurde von F. RIESZ geprägt. Er bemerkte, daß die Hilbertsche Methode, eine Integralgleichung vermöge einer Orthonormalbasis (u_n) in ein lineares Gleichungssystem in ℓ^2 zu verwandeln, erst dann völlig befriedigt, wenn es umgekehrt zu jeder Folge $(x_n) \in \ell^2$ auch eine Funktion x gibt mit $x_n = (x, u_n)$. F. RIESZ [1907] und E. FISCHER zeigten, daß das in $\mathcal{L}^2(G)$ wirklich der Fall ist, d.h. die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^2(G)$ wurde bewiesen. RIESZ beschäftigte sich dann auch mit den adjungierten Räumen $\mathcal{L}^p(G)$ und $\mathcal{L}^q(G)$, $q = p/(p - 1)$, und gab [1918] eine Theorie der Integralgleichungen zweiter Art in $\mathcal{L}^p(G)$ oder $C(\overline{G})$ mit kompaktem K . J. SCHAUDER [1930] verwandte dann auch die adjungierte Abbildung und verallgemeinerte die Ergebnisse auf beliebige Banachräume. Wir sprechen daher heute von der Riesz-Schauder-Theorie.

Die Theorie besagt folgendes: Vorgelegt seien die Gleichungen

$$f = (id + K)x \text{ in } \mathcal{B} \text{ bzw. } F = (id + K^*)X \text{ in } \mathcal{B}^*. \quad (2.2)$$

Dabei seien \mathcal{B} und \mathcal{B}^* adjungierte Banachräume, $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ kompakt, K^* zu K adjungiert und $f \in \mathcal{B}$ bzw. $F \in \mathcal{B}^*$ vorgegeben. Es sei ferner $T := id + K$. Dann gilt die Fredholmsche Alternative:

(i) Entweder ist $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Dann sind Gln. (2.2) für alle f, F eindeutig lösbar.

(ii) Oder es ist $0 < \dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(T^*) < \infty$. Dann sind Gln. (2.2) lösbar \iff

$$\forall N \in \mathcal{N}(id + K^*) \quad N \cdot f = 0 \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathcal{N}(id + K) \quad F \cdot n = 0.$$

Man beweist die Alternative, indem man wie bei der Herleitung der Jordanschen Normalform für Matrizen Eigenfunktionen höherer Ordnung betrachtet. Es gilt $\mathcal{N}((id + K)^n) =: \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n+1}$, $\mathcal{R}((id + K)^n) =: \mathcal{R}_n \supset \mathcal{R}_{n+1}$, und man zeigt die Existenz der „Riesz-Zahl“ $r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{aligned} \forall n < r \quad \mathcal{N}_n &\neq \mathcal{N}_{n+1} \text{ und } \mathcal{R}_n \neq \mathcal{R}_{n+1}, \\ \forall n \geq r \quad \mathcal{N}_n &= \mathcal{N}_r \text{ und } \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_r, \end{aligned}$$

sowie $\mathcal{B} = \mathcal{R}_r \oplus \mathcal{N}_r$. In \mathcal{R}_r bzw. \mathcal{R}_r^* sind Gln. (2.2) eindeutig lösbar. In heutiger Sprechweise ist T ein Fredholmoperator mit $\text{ind } T = 0$.

Für die Anwendungen sind die Fälle $r = 0, 1$ besonders interessant. Im Falle $\mathcal{B} = C(\overline{G})$ steht das $\mathcal{L}^2(G)$ -Skalarprodukt zusätzlich zur Verfügung. Es sei $K^t : \mathcal{L}^2(G) \mapsto \mathcal{L}^2(G)$ der bzgl. dieses Skalarproduktes zu K adjungierte Operator. Weiß man, daß auch $K^t : C(\overline{G}) \mapsto C(\overline{G})$ abbildet und kompakt ist, dann gilt die Fredholmsche Alternative auch bzgl. dieses Skalarproduktes für $f = (id + K)x$ in $C(\overline{G})$ und

$$F = (id + K^t)X \text{ in } C(\overline{G}). \tag{2.3}$$

Doch nun zurück zur Potentialtheorie. Die Dirichletsche Randwertaufgabe hatten wir auf eine Integralgleichung vom Typ (2.2) zurückgeführt. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß für sie die Riesz-Schauder-Theorie mit $r = 0$ gilt; damit ist die Dirichletsche Randwertaufgabe der Potentialtheorie für beschränkte Gebiete mit glattem Rand gelöst. Die Neumannsche Randwertaufgabe läßt sich analog behandeln. Es ist von vornherein klar, daß als Lösungen der homogenen Aufgabe nur Konstanten in Betracht kommen. Macht man den Ansatz mit der einfachen Belegung, dann erhält man aus den Sprungrelationen wiederum eine Integralgleichung zweiter Art, diesmal vom Typ (2.3), mit $r = 1$ und $\mathcal{N}(id + K) = [1]$. Die Lösungsbedingung $0 = (f, 1) = \int f$ aus der Riesz-Schauder-Theorie ist auch physikalisch relevant.

Neben Randwertaufgaben für beschränkte Gebiete spielen aber gerade auch Randwertaufgaben für unbeschränkte Gebiete bei physikalischen Streuproblemen eine große Rolle, z.B. treten sie bei der Reflexion an Hindernissen auf. Mathematisch sind sie äußerst interessant. Es sei $B := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ das Äußere von G . Zur Formulierung der Randwertaufgaben für B legt man als erstes das Verhalten der gesuchten Lösungen im Unendlichen fest, stellt also eine „Randbedingung im Unendlichen“. Eine solche auch physikalisch vernünftige Bedingung ist in der Potentialtheorie im \mathbb{R}^3

$$u(x) = O(|x|^{-1}) \quad \text{und} \quad (\nabla u)(x) = O(|x|^{-2}) \tag{2.4}$$

für $|x| \rightarrow \infty$, und zwar gleichmäßig bzgl. $x_0 := x/|x|$.

Zur Lösung solcher Außenraumaufgaben macht man dann wieder Ansätze mit einfachen bzw. Dipolpotentialen. Beide genügen der Bedingung (2.4). Man erhält Integralgleichungen der Form

	Dirichletsche RWA	Neumannsche RWA
G	$f = (-id + K)v$	$f = (id + K^t)\mu$
B	$f = (id + K)v$	$f = (-id + K^t)\mu$

und sieht sofort, daß auch die Neumannsche Außenraumaufgabe eindeutig lösbar ist. Bei der Dirichletschen Außenraumaufgabe muß zunächst $(f, \psi) = 0$ mit $\mathcal{N}(id + K^t) = [\psi]$ erfüllt sein.

Weil sich aber wegen $(1, \psi) \neq 0$ ein beliebiges f als $f = f_0 + \text{const}$ mit $(f_0, \psi) = 0$ schreiben läßt und weil man eine Potentialfunktion mit konstanten Randwerten leicht durch ein Potential mit einfacher Belegung explizit angeben kann, wird – mit diesem Kunstgriff – auch die Dirichletsche Außenraumaufgabe eindeutig gelöst.

Wir beschreiben die weitere Entwicklung anhand von drei Bemerkungen. Zunächst eine mehr technische. Betrachtet man den Existenzbeweis zur Dirichletschen Außenraumaufgabe, dann fällt auf, daß ihre Formulierung als Integralgleichung nicht gut gelungen war. Die Integralgleichung besitzt Eigenlösungen, das Problem aber nicht. Das macht die Lösungsmethode natürlich auch für numerische Zwecke instabil. Dies blieb lange unbeachtet und kam eigentlich erst nach dem zweiten Weltkrieg zum Vorschein, als intensiver auf dem Gebiet der Streutheorie gearbeitet wurde. Denkt man nämlich wieder an die Wellengleichung, und betrachtet man statt des stationären den zeitharmonischen Fall (Entwicklung der Lösung nach stehenden Wellen), dann erhält man mit $k := \sqrt{\lambda}$ die Dirichletsche Außenraumaufgabe zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung $(\Delta + k^2)u = 0$ mit $u|_{\partial B} = f$ und

$$(x_0 \nabla u)(x) = iku(x) + O(|x|^{-2}) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Gl. (2.5) ist die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung [1912] und ersetzt Gl.(2.4).

Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar. Die Existenz einer Lösung läßt sich analog zur Potentialtheorie zeigen. Man hat nur in den entsprechenden Gleichungen den Term $1/|x - y|$, der von der Grundlösung herrührt, durch $e^{ik|x-y|}/|x - y|$ zu ersetzen, und man erhält dann eine Integralgleichung $f = (id + K(k))v(k)$. Diese Integralgleichung besitzt für abzählbare Ausnahmewerte $k_n \rightarrow \infty$ Eigenlösungen (k_n sind die Eigenwerte der Neumannschen Randwertaufgabe für G , es ist $k_1 = 0$). Man erhält daher verschiedene Darstellungen für die Lösung $u(k)$, je nachdem ob k Ausnahmewert ist oder nicht.

Nun möchte man aber in der Streutheorie u in Abhängigkeit von k genauer studieren, zunächst für $\text{Im } k > 0$ analytisches Verhalten beweisen, dann aber besonders die Grenzübergänge $\text{Im } k \rightarrow 0$ (Prinzip der Grenzabsorption) sowie $k \rightarrow \infty$ für $k \in \mathbb{R}$ (Hochfrequenzasymptotik, Grenzübergang zur geometrischen Optik) und $k \rightarrow 0$ durchführen. Das wird natürlich durch verschiedene Darstellungen erschwert.

Es ist interessant, die Entwicklung der Lösungstheorie zur Dirichletschen Außenraumaufgabe der Schwingungsgleichung zu verfolgen. H. WEYL behandelt die angegebene Integralgleichung [1952] und verwendet dazu die Riesz-Schauder-Theorie mit $r > 1$; er benutzt also Eigenfunktionen höherer Stufe. Das wurde noch im selben Jahr von C. MÜLLER verbessert, der $r = 1$ in den Ausnahmewerten beweist. P. WERNER [1962] war wohl der erste, der eine Integralgleichung mit $r = 0$ für alle k aufstellte. Er benutzt eine Kombination von Dipol- und Volumenpotentialen. Danach sind verschiedene weitere Lösungsansätze publiziert worden. Vom Verfasser wurde 1964 ein Ansatz mit gemischter einfacher und Dipol-Flächenbelegung

$$u(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \mu(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial n_y} + i \right\} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy$$

angegeben, der zum selben Ziel führt.

Die zweite Bemerkung betrifft die vorausgesetzte Glattheit des Randes. Generell kann man sagen, daß die Integralgleichungsmethode sehr empfindlich ist gegenüber einer Abschwächung dieser Voraussetzung. I.a. bildet dann K oder K^t die Menge $C(\partial G)$ nicht mehr in sich ab oder ist nicht mehr kompakt. Setzt man im Falle der Potentialtheorie ∂G als stückweise glatt voraus, dann läßt sich jedoch bei konvexem G die Neumannsche Methode verwenden. Diese beruht ja auf einem Kontraktionsargument. Es liegt deshalb nahe, bei beliebigem stückweise glatten Rand die Neumannsche Methode mit der Riesz-Schauder Theorie zu verbinden und zu zeigen,

daß $K = K_0 + S$ gilt mit kompaktem K und $\|S\| < 1$. Dann existiert die Neumannsche Reihe $N = (id - S)^{-1}$ und stellt einen beschränkten Operator dar. Die Integralgleichung geht deshalb in $Nf = (-id + NK_0)v$ mit kompaktem NK_0 über, und es gilt die Fredholmsche Alternative. Mit dieser Methode hat als erster J. RADON [1919] die Dirichletsche Randwertaufgabe bei stückweise glattem Rand im \mathbb{R}^2 gelöst. Vgl. [RIESZ-NAGY 1956, S. 209-211].

Die dritte Bemerkung schließlich betrifft unbeschränkte Ränder und allgemeinere Differentialoperatoren. Auch hier wird man schnell auf singuläre Integralgleichungen mit nicht kompaktem K geführt, und es ist ein großes Forschungsgebiet mit vielen Anwendungsmöglichkeiten entstanden.

Zum Nachweis der Kompaktheit der vom Dipolpotential erzeugten Abbildung $K : C(\partial G) \mapsto C(\partial G)$ benötigt man nämlich neben der Beschränktheit des Randes ∂G vor allem Gl. (2.1). Hier geht die Grundlösung ein. Bei Systemen wie den Maxwell'schen Gleichungen oder den Elastizitätsgleichungen tritt anstelle der Grundlösung eine Grundlösungsmatrix, und die Gl. (2.1) entsprechende Abschätzung gilt dann selbst bei glattem Rand nicht mehr für alle Komponenten, vielmehr hat man nur noch $\dots = \mathcal{O}(|z - y|^{-2})$.

Das Studium von Differential- und Integralgleichungen hängt von Anfang an eng zusammen. So löst für $f \in C_\alpha$ das Newton-Potential

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x - y|} dy$$

die Potentialgleichung $-\Delta u = f$. Kennt man die Grundlösung einer Differentialgleichung, dann erhält man leicht eine ihr entsprechende Integralgleichung, die oft einfacher zu behandeln ist. Diese Integralgleichung muß in einem geeigneten Funktionenraum diskutiert werden; i.a. ist der auftretende Operator aber nicht kompakt, sodaß die Riesz-Schauder-Theorie nicht mehr greift. Da andererseits die dahinter stehenden Fragen sehr wichtig und interessant sind, ist viel über solche „singulären“ Integralgleichungen gearbeitet worden. Man hat allgemeinere Klassen untersucht, und das hat umgekehrt wieder zur Definition allgemeinerer Differentialoperatoren, den Pseudodifferentialoperatoren, geführt. Über diese Entwicklung soll noch kurz berichtet werden.

HILBERT hatte schon 1906 bemerkt, daß der Kern einer Integralgleichung zum Gelten der Fredholmschen Alternative nicht notwendig quadratintegrabel sein muß. Andererseits kannte er natürlich auch Beispiele, bei denen die Alternative nicht mehr gilt. Sein Schüler H. WEYL beschäftigte sich in seiner Dissertation und Habilitationsschrift mit solchen Fragen. Er gab allgemeinere Bedingungen als die Quadratintegrabilität des Kerns für das Gelten der Fredholmschen Alternative an und untersuchte insbesondere Randwertaufgaben im \mathbb{R}^1 , die sogenannten „Sturm-Liouville-Probleme“ [1909, 1910]. In Abhängigkeit von der Beschränktheit oder Unbeschränktheit des zugrundeliegenden Intervalles und dem Verhalten der Koeffizienten am Rande konnte WEYL eine Fallunterscheidung durchführen (Weylscher Grenzkreis- oder Grenzpunktfall) und zum erstenmal unbeschränkte symmetrische Operatoren zu selbstadjungierten fortsetzen. Liegt an beiden Enden der Grenzkreisfall vor, dann hat der zugrundeliegende Operator ein reines Punktspektrum, andernfalls gibt es auch ein stetiges Spektrum. Im vierten Abschnitt wird ausführlicher über das Problem der Fortsetzbarkeit berichtet. Die analoge Frage für gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung wurde erst von K. KODAIRA [1950] aufgegriffen.

Eine wichtige Klasse singulärer Integralgleichungen $f = (id + K)x$ sind die Gleichungen vom Cauchy-Hauptwert-Typ, nämlich mit

$$(Kx)(t) := \text{p.v.} \int_\Gamma \frac{h(t, s)}{t - s} x(s) ds \quad \text{für } t, s \in \Gamma \subset \mathbb{R} \quad (2.6)$$

und glattem $h(t, s)$. Solche Gleichungen wurden von T. CARLEMAN und F. NOETHER untersucht. Die von F. NOETHER [1921] gegebene Lösungstheorie in $\mathcal{L}^p(\Gamma)$ bzw. $C_\alpha(\Gamma)$ ist der Fredholm-schen ähnlich, i.a. ist aber $\text{ind}(id + K) \neq 0$.

Der spezielle Operator K mit $\Gamma = \mathbb{R}$ und $h = id$ wurde schon von HILBERT diskutiert und heißt Hilbert-Transformation. Er vermittelt den Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen in der oberen Halbebene.

Der Gl. (2.6) entsprechende Operator im \mathbb{R}^n wurde von A. CALDERON und A. ZYGMUND [1952, 1978] untersucht und ist nach diesen benannt. T. CARLEMAN [1923, 1931] hat auch allgemeinere Gleichungen mit nach ihm benannten Kernen behandelt.

Im Zusammenhang mit Strahlungsproblemen aus der Astrophysik haben N. WIENER und E. HOPF [1931] Faltungsooperatoren mit $k(t, s) = k(t - s)$ und $\Gamma = \mathbb{R}^+$ untersucht. M.G. KREIN und I.C. GOKHBERG [1960, 1962] haben die Theorie solcher Gleichungen und Systeme in den Räumen $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$ mit $k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ systematisch aufgebaut.

Ab 1930 wurde besonders von sowjetischen Mathematikern wie N.I. MUSKHELISHVILI [1953], S.G. MIKHLIN [1965] und I.N. VEKUA [vgl. 1967] die Theorie der singulären Integralgleichungen weiterentwickelt und vielfältig angewandt. Auch im Buch von K. JÖRGENS [1970] finden sich weitere Einzelheiten.

Um 1960 wurde schließlich bemerkt, daß man die Fourier-Transformation dazu benutzen kann, um eine Klasse von linearen Operatoren zu definieren, die sowohl Differential-, als auch singuläre Integral- sowie gewisse reguläre Integraloperatoren enthält. Das ist die Klasse der „Pseudo-Differentialoperatoren“. Einzelheiten findet man in L. HÖRMANDER [1983-85, III].

3 Direkte Bestimmung des Minimums

Unter gewissen Annahmen bzgl. der Glattheit des Randes und der vorgegebenen Randwerte hat D. HILBERT das Dirichletsche Prinzip für Randwertaufgaben der Potentialtheorie im \mathbb{R}^2 in den Jahren 1900 und 1901 bewiesen, abgedruckt in [1904] und [1905]. Daß solche Annahmen gemacht werden müssen, ist klar, denn z.B. reicht die Stetigkeit von f allein nicht aus, wie das Prymsche Beispiel gezeigt hatte. Vor HILBERT gab es bereits Lösungsansätze von C. ARZELÀ [1896-97], der auch das nach G. ASCOLI und ihm benannte Kompaktheitskriterium bewiesen hat. HILBERT kannte diese Arbeiten aber vermutlich nicht.

Dabei hat HILBERT sofort erkannt, daß das Dirichletsche Prinzip nur eine spezielle Aufgabe der Variationsrechnung ist, und seine Lösungsmethode im allgemeineren Rahmen gesehen. So formuliert er [1905, 65]:

„Eine jede reguläre Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung, sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt“.

Damit ist alles gesagt. HILBERTS Lösungsmethode wurde von seinen Schülern, insbesondere von R. COURANT und wiederum von dessen Schule, zu einer der schlagkräftigsten Methoden in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und besonders zur Lösung von Anfangsrandwertaufgaben und Streuproblemen in der mathematischen Physik ausgebaut. Sie hat einen ungeheuren Einfluß auf die weitere Entwicklung der Mathematik gehabt. Im zweiten Band des Buches von R. COURANT und D. HILBERT [1937, 471f] werden viele Resultate ausführlich dargestellt.

Wir wollen zunächst die Methode in ihren wesentlichen Zügen an einem einfachen Beispiel

schildern. Im Gebiet G soll die Dirichletsche Randwertaufgabe zu

$$(-\Delta + 1)u = 0 \quad \text{mit } u|_{\partial G} = f \quad (3.1)$$

bei vorgegebenem f gelöst und dazu das Dirichletsche Integral

$$J(u) := \int_G \{(\nabla u)^2 + u^2\} \quad (3.2)$$

minimiert werden. Ein wesentliches Hilfsmittel dafür ist der folgende

Approximationssatz:: *Es sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt:*

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \exists k \in \mathcal{K} \quad \|x - k\| = \inf_{y \in \mathcal{K}} \|x - y\|.$$

Zum Beweis des Satzes wählt man eine Minimalfolge $(y_n) \in \mathcal{K}$. Aus der Parallelogrammgleichung folgt unmittelbar ihre Konvergenz. Der Approximationssatz geht auf F. RIESZ [1907, 1934] und M. FRÉCHET [1907] zurück, die Schlußweise schon auf B. LEVI [1906]. Ist \mathcal{K} sogar ein Unterraum, dann folgen aus dem Approximationssatz der

Projektionssatz::

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$$

und

Der Rieszsche Darstellungssatz:: *Es sei \mathcal{H}' die Menge der beschränkten linearen Funktionale auf \mathcal{H} . Dann gilt:*

$$\forall H \in \mathcal{H}' \quad \exists f \in \mathcal{H} \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad H \cdot h = (h, f),$$

und es ist $\|f\| = \|H\|$.

Aus allen drei Sätzen erhält man unmittelbar Existenzsätze für das Minimum in Gl. (3.2) bzw. für verallgemeinerte Lösungen von Gl. (3.1). Man muß dazu „nur“ geeignete allgemeinere Funktionenräume einführen, die bezüglich der von $J(u)$ induzierten Norm abgeschlossen sind.

Damit hängt natürlich die Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs zusammen. Über sie wollen wir zuerst berichten. Es sei $u \in \mathcal{L}^2(G)$. Dann nennt man $\partial_i u \in \mathcal{L}^2(G)$ schwache i -te Ableitung von u , wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathring{C}_\infty(G)$

$$(u, \partial_i \varphi) = -(\partial_i u, \varphi) \quad (3.3)$$

gilt. Dabei ist (u, v) das $\mathcal{L}^2(G)$ -Skalarprodukt. Wenn sie existieren, sind die schwachen Ableitungen eindeutig definiert, und man bezeichnet mit $\mathcal{W}_1(G) \subset \mathcal{L}^2(G)$ die Teilmenge der einmal schwach differenzierbaren Funktionen von $\mathcal{L}^2(G)$. $\mathcal{W}_1(G)$ ist selbst ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_1 := (u, v) + (\nabla u, \nabla v) \quad (3.4)$$

und der Norm $\|u\|_1 := \{(u, u)_1\}^{1/2}$. Analog wird $\mathcal{W}_k(G)$ definiert.

Neben den schwachen benötigt man aber auch starke Ableitungen, die nicht durch Testen definiert, sondern durch Approximieren gebildet werden. Es sei $\mathcal{H}_1(G)$ die Vervollständigung von $\mathcal{C}_1(G) \cap \mathcal{W}_1(G)$ bzgl. der $\|\cdot\|_1$ -Norm. $\mathcal{H}_1(G)$ ist ebenfalls ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (3.4), und es gilt $\mathcal{H}_1(G) \subset \mathcal{W}_1(G)$. Auch für die starken Ableitungen definiert man analog $\mathcal{H}_k(G)$.

Der Begriff der schwachen Ableitung geht auf S. SOBOLEV zurück [1936]. Die Räume $\mathcal{W}_k(G)$ sind nach ihm benannt. SOBOLEV bemerkte auch, daß die Funktionen $f \in \mathcal{W}_k(G)$ mit wachsendem k immer regulärer werden. Beide Ableitungsbegriffe finden sich schon in COURANT-HILBERT II [1937, 480]. Mehr über starke Ableitungen enthalten K. FRIEDRICHS [1944] und [1953].

Für das weitere Hantieren mit verallgemeinerten Ableitungen ist die Aussage

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_k(G) = \mathcal{W}_k(G), \quad (3.5)$$

„stark gleich schwach“, die für beliebiges G erst relativ spät bemerkt wurde, besonders wichtig. Gl. (3.5) geht auf K. FRIEDRICHS [1944] und T. KASUGA [1957] zurück. Für \mathcal{L}^p -Räume wurde sie von N.G. MEYERS und J. SERRIN [1964] bewiesen.

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{W}_1$ läßt sich leicht einsehen: Aus dem Projektionssatz folgt $\mathcal{W}_1 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, und $u \in \mathcal{H}_1^\perp$ ist schwache Lösung von $(-\Delta + 1)u = 0$. Aus lokalen Regularitätssätzen, die wir anschließend besprechen werden (dem Weylschen Lemma), folgt dann $u \in C_1(G)$, also $u \in \mathcal{W}_1(G) \cap C_1(G) \subset \mathcal{H}_1(G)$.

In $\mathcal{H}_1(G)$ haben wir einen geeigneten Hilbertraum zum Minimieren von $J(u)$ gefunden. Es fehlt aber noch die Formulierung des Randverhaltens der gesuchten Lösung. Dazu definiert man zunächst zu $\mathcal{W}_1(G)$ bzw. $\mathcal{H}_1(G)$ jeweils einen Unterraum $\mathring{\mathcal{W}}_1(G)$ bzw. $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ (beide sind wieder gleich), der das Verschwinden der enthaltenen Funktionen am Rande zum Ausdruck bringen soll. Nämlich

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{H}}_1(G) &:= \{u \in \mathring{C}_\infty(G); \|\cdot\|_1\} \\ \mathring{\mathcal{W}}_1(G) &:= \{u \in \mathcal{W}_1(G) \mid \forall F \in D(G) \quad (u, \operatorname{div} F) = -(\operatorname{grad} u, F)\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $D(G)$ die Menge der Felder $F \in (\mathcal{L}^2(G))^n$, deren Divergenz im schwachen Sinne in $\mathcal{L}^2(G)$ existiert. Durch partielles Integrieren überzeugt man sich im Falle glatter Daten leicht, daß die Aussage $u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ bzw. $\mathring{\mathcal{W}}_1(G)$ die Aussage $u|_{\partial G} = 0$ verallgemeinert.

Doch nun zurück zum Dirichletschen Prinzip. Es sei $f \in \mathcal{H}_1(G)$. Das ist *die einschränkende Annahme* an die Anfangsdaten; f soll also nicht nur am Rande, sondern überall in G definiert sein, und es soll das Dirichletsche Integral für f existieren. Diese Annahme ist physikalisch realistisch, weil f in Gl. (3.1) ja beispielsweise von einer einfallenden Welle erzeugt wird, welche (jedenfalls lokal) zu $\mathcal{H}_1(G)$ gehört. Die von F. PRYM und J. HADAMARD angegebenen Beispiele erfüllen diese Voraussetzung nicht. Es sei ferner $\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{H}_1(G) \mid u - f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)\}$. Dann gilt

$$\exists u \in \mathcal{D} \quad J(u) = \inf_{v \in \mathcal{D}} J(v). \quad (3.6)$$

Das folgt unmittelbar aus dem Approximationssatz, weil $\mathcal{D} = \mathring{\mathcal{H}}_1(G) + \{f\}$ in $\mathcal{H}_1(G)$ konvex und abgeschlossen ist.

Natürlich kann man auch den Rieszschen Darstellungssatz benutzen. Es sei $v := f - u$. Dann ist $(\varphi, v)_1 = (\varphi, f)_1$ für alle $\varphi \in \mathring{C}_\infty(G)$. Wir haben also ein $v \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ so zu bestimmen, daß $\forall x \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \quad (x, v)_1 = (x, f)_1$ gilt. Das leistet aber gerade der Rieszsche Darstellungssatz.

Die wohl eleganteste Methode, die Dirichletsche Randwertaufgabe zu lösen (und der man ihre Herkunft aus der Variationsrechnung kaum noch ansieht), besteht im direkten Anwenden des Projektionssatzes. Hierauf hat H. WEYL in seiner wichtigen Arbeit [1940] hingewiesen; diese Arbeit enthält auch das Weylsche Lemma. Es sei wieder $f \in \mathcal{H}_1(G)$ vorgegeben. Man projiziere $\mathcal{H}_1(G) = \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \oplus \mathring{\mathcal{H}}(G)^\perp$, $f = v + u$. Dann ist u die gesuchte Lösung.

Die soeben geschilderten Verfahren lassen sich auf allgemeinere elliptische Differentialgleichungen und Systeme mit variablen Koeffizienten übertragen. Andere Randwertaufgaben können gelöst werden. Und auch Hindernisprobleme lassen sich behandeln; H. LEWY [1967/68] hat

hierauf hingewiesen. Viel schwieriger ist jedoch die Frage nach der Regularität der erhaltenen Lösungen zu beantworten. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen lokaler Regularität (Regularität in inneren Punkten von G) und der Regularität bis zum Rande. Naturgemäß ist die erste Frage die leichtere.

Über die Regularität verallgemeinerter Lösungen ist viel gearbeitet worden. Von S. ZAREMBA [1927] stammt das Resultat, daß Lösungen von $\Delta u = f$ mit $f \in C_\infty$ selbst aus C_∞ sind. H. WEYL [1940] gab einen anderen Beweis hierfür. Er benutzt eine Darstellung der Lösung mit Hilfe der Grundlösung. Seine Resultate sind auf Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten und auf Systeme verallgemeinert worden. So gilt

Das Weylsches Lemma: *Es sei $A = a_{ik}\partial_i\partial_k + a_i\partial_i + a$ mit $a_{ik} = a_{ki} \in C_{2+\alpha}(G)$, $a_i \in C_{1+\alpha}(G)$, $a \in C_1(G)$, $\zeta_i a_{ik} \zeta_k \geq p|\zeta|^2$ mit $p > 0$. Es seien ferner A^* der zu A bzgl. $\mathcal{L}^2(G)$ formal adjungierte Operator, $f \in C_\alpha(G)$, $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(G)$ und*

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty(G) \quad (u, A^* \varphi) = (f, \varphi).$$

Dann stimmt u fast überall mit einer Funktion aus $C_{2+\alpha}(G)$ überein.

Einen Beweis findet man im Buch von G. HELLWIG [1960, 189].

Eine andere Methode, zu Regularitätsaussagen zu gelangen, folgt aus dem intensiven Studium der Funktionenräume $\mathcal{H}_k(G)$, das bald einsetzte. Auf S. SOBOLEV [1950] gehen Einbettungssätze der folgenden Art zurück:

Sobolevscher Einbettungssatz: *Es sei $u \in \mathring{\mathcal{H}}_j(G)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq j - [n/2] - 1$. Dann stimmt u fast überall mit einer beschränkten Funktion aus $C_k(G)$ überein.*

Zum Nachweis der lokalen Regularität der Lösungen bei genügend glatten Koeffizienten bildet man nun in der Differentialgleichung explizit Differenzenquotienten und geht zur Grenze über. Auf diese Weise erhält man $u \in \mathcal{H}_k^{loc}(G)$ mit genügend hohem k . Einzelheiten findet man in L. NIRENBERG [1955].

Schwieriger ist der Nachweis der Regularität bis zum Rande. Hier gibt es zunächst direkt auf die Potentialgleichung zugeschnittene Methoden, die auch die zulässigen Berandungen genauer kennzeichnen. In der PERRONSCHEN Methode der subharmonischen Funktionen [1923] werden Barrieren-Funktionen zur Charakterisierung des Randes konstruiert, während N. WIENER die Kapazität der Randpunkte heranzieht [1924].

Ist der Rand genügend glatt, dann lassen sich bei allgemeineren Gleichungen die bereits genannten Ergebnisse benutzen. Man biegt den Rand zunächst lokal gerade und verwendet nach Spiegelung an der Randebene die Resultate für innere Punkte. Die Sobolevschen Einbettungssätze selbst sind auch global (für $u \in \mathcal{H}_j(G)$) bewiesen worden, wenn G (der Rand) die „Kegeleigenschaft“ hat. Eine ausführliche Darstellung solcher Fragen findet man im Buch von R.A. ADAMS [1975].

Wir kehren nun zum zweiten Anliegen Hilberts zurück, nämlich zum Eigenwertproblem. Wir beginnen wieder mit dem einfachen Beispiel der Gl. (3.1) in einem beschränkten Gebiet G mit $u|_G = 0$. Zur Abkürzung sei $A := -\Delta + 1$. Dann sucht man Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und zugehörige Eigenfunktionen u mit $\|u\| = 1$ und $Au = \lambda u$. Auch diese Aufgabe läßt sich mit den Variationsmethoden lösen. Man erhält die Existenz einer abzählbaren Folge (λ_n) von Eigenwerten mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ und eines zugehörigen vollständigen Orthonormalsystems (u_n) von Eigenfunktionen. Genauer, es gilt

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(G) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot u_n \quad \text{mit } f_n = (f, u_n) \quad (3.7)$$

und

$$\forall f \in \mathcal{D}(A) \quad Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \cdot u_n. \quad (3.8)$$

Dabei ist $\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \mid \Delta u \in \mathcal{L}^2(G)\}$.

Zum Beweis geht man folgendermaßen vor. Es seien

$$\lambda_1 := \inf J(u) \quad \text{für } u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \text{ mit } \|u\| = 1$$

und $\varphi_n \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$, $\|\varphi_n\| = 1$, eine Minimalfolge. Aus (φ_n) möchte man eine konvergente Teilfolge auswählen und benötigt dazu einen Auswahlssatz. Wie bereits gesagt, hat HILBERT zunächst in der Klasse der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen argumentiert und dort das Kriterium von Arzelà-Ascoli benutzt. Auf F. RELICH [1930] geht der folgende Auswahlssatz zurück

Rellichscher Auswahlssatz: *Es seien G beschränkt und (u_n) eine in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ beschränkte Folge. Dann gibt es eine Teilfolge (u'_n) und ein $u \in \mathcal{L}^2(G)$ mit $\|u'_n - u\| \rightarrow 0$.*

Dieser Rellichsche Auswahlssatz läßt sich relativ leicht beweisen, indem man die u_n durch null in einen Quader $Q \supset G$ fortsetzt und dann in eine Fourierreihe entwickelt. Er gilt auch für $u_n \in \mathcal{H}_1(G)$ bei geringen Regularitätsannahmen an den Rand von G , z.B. wenn G die „Segmenteigenschaft“ besitzt, die besagt, daß man lokal ein Segment in G verschieben kann (ohne Drehungen). Beweise finden sich wieder in R.A. ADAMS [1975]. Die Klasse der zugelassenen Gebiete kann man weiter verallgemeinern. Eine Platte mit Riß besitzt nicht die Segmenteigenschaft, wohl aber die „finite tiling property“ von C.H. WILCOX [1975, 63]. Daß eine Voraussetzung an den Rand notwendig ist, wird in [Courant-Hilbert II 1937, 522] am Beispiel eines „unendlichen Kamms“ belegt. Auswahlssätze vom Typ des Rellichschen wurden von V.I. KONDRACHOV [1945] auch für \mathcal{L}^p -Räume bewiesen.

Es sei also (φ_n) eine in $\mathcal{L}^2(G)$ gegen u_1 konvergente Minimalfolge. Dann gilt $\|u_1\| = 1$, und aus

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall \zeta \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \quad J(\varphi_n + \varepsilon\zeta) \geq \lambda_1 \|\varphi_n + \varepsilon\zeta\|^2$$

folgt $J(\varphi_n, \zeta) - \lambda_1 (\varphi_n, \zeta) \rightarrow 0$. Dabei ist $J(u, v) := \int \{(\nabla u)(\nabla v) + uv\}$. Daraus erhält man die Konvergenz von (φ_n) in $\mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ und $u_1 \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$.

Damit ist $u_1 \in \mathcal{D}(A)$, und λ_1 ist der erste Eigenwert. Aus der Poincaréschen Abschätzung (1.3) folgt für λ_1 unmittelbar eine Abschätzung von unten, nämlich

$$\lambda_1 = J(u_1) = 1 + \|\nabla u_1\|^2 \geq 1 + 1/d^2, \quad (3.9)$$

also die bekannte Erfahrung, daß die Grundfrequenz um so höher wird, je kleiner der schwingende Körper ist.

Die nächsten Eigenwerte erhält man nun durch Wiederholen dieses Verfahrens, nämlich $\lambda_2 := \inf J(u)$ für $u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit $\|u\| = 1$, $(u, u_1) = 0$, und analog λ_n . Auf diese Weise erhält man eine Folge von Eigenwerten (λ_n) und zugehörige orthonormale Eigenfunktionen u_n . Die Folge (λ_n) hat keinen endlichen Häufungspunkt, denn sonst besäße (u_n) eine konvergente Teilfolge. Wegen $\dim \mathring{\mathcal{H}}_1(G) = \infty$ gilt auch $\lambda_n \rightarrow \infty$, und für $f \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ folgt mit $f_n := (f, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $J(f) = \sum \lambda_n \cdot f_n^2$. Daraus folgen Gln. (3.7,8).

Analog lassen sich Eigenwertaufgaben für eine große Klasse von allgemeineren Gleichungen behandeln, und man erhält Spektraldarstellungen für die zugrundeliegenden Operatoren. Hierüber wird im nächsten Abschnitt Näheres berichtet.

Die Theorie der Eigenwertaufgaben ist vor allem von R. COURANT ausgebaut worden, vgl. [Courant-Hilbert II; 1937, 471f]. Vorangegangen war unter anderem seine Arbeit [1920]. COURANT hat insbesondere auch Aussagen über die monotone Abhängigkeit des n -ten Eigenwerts

vom Gebiet bewiesen. Hierbei störte es zunächst, daß in die Definition von λ_n die Kenntnis der $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ eingeht. Das macht Abschätzen schwierig. COURANT gab daher noch eine andere Charakterisierung des n -ten Eigenwerts an, nämlich

Das Courantsche Minimax-Prinzip: *Es seien $h_1, \dots, h_{n-1} \in \mathcal{L}^2(G)$ und $\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) := \inf J(u)$ für $u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G)$ mit $\|u\| = 1$ und $(u, h_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Dann ist $\lambda_n = \sup \mu_n(h_1, \dots, h_{n-1})$ für $h_i \in \mathcal{L}^2(G)$.*

COURANT hat dieses Prinzip auch verwandt, um in der von H. WEYL gegebenen Asymptotik (6) der Eigenwerte das Fehlerglied besser abzuschätzen. Mit diesem Problem haben sich noch viele Mathematiker beschäftigt. Von den neueren Arbeiten sei nur die von R. SEELEY [1978] genannt. Von R. COURANT stammen auch viele schöne Anwendungen des Dirichletschen Prinzips auf Existenzfragen für Minimalflächen. Im Artikel über partielle Differentialgleichungen wird darüber berichtet.

4 Darstellung linearer Operatoren

D. HILBERT hatte Anfang des Jahrhunderts eine Spektraldarstellung für beschränkte Operatoren bewiesen, insbesondere für von symmetrischen Kernen erzeugte. Dabei ging er zu quadratischen Formen in unendlich vielen Variablen über und erhielt auch ein stetiges Spektrum (vgl. Abschnitt 2).

Vor allem durch den Einfluß von F. RIESZ traten in der Folgezeit die quadratischen Formen immer mehr zurück, und es wurde eine Theorie linearer Operatoren direkt entwickelt. Äußerst wichtig war hierbei der wechselseitige Einfluß zwischen Physik und Mathematik, den man bis hin zum Verwenden derselben Bezeichnungen verspürt. So hatte E. SCHRÖDINGER 1926 die nach ihm benannte Gleichung für den Wasserstoffkern aufgestellt, und sowohl Physiker als auch Mathematiker waren an einer Theorie des zugehörigen Operators stark interessiert. Die Mathematik stand für die neue Physik bereit.

Es sei also \mathcal{X} ein normierter Raum über \mathbb{C} und $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$, dem Wertebereich $\mathcal{R}(A)$ und dem Nullraum $\mathcal{N}(A)$. Es sei $A_\lambda := A - \lambda \cdot id$. Dann ist

$$\varrho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{\mathcal{R}(A_\lambda)} = \mathcal{X}, \mathcal{N}(A_\lambda) = \{0\}, A_\lambda^{-1} \text{ stetig} \right\}$$

die „Resolventenmenge“ von A . Sie ist stets offen. $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ ist das „Spektrum“ von A . Dieses wird weiter unterteilt in das „Punktspektrum“ σ_p , das „kontinuierliche Spektrum“ σ_c und das „Residuenspektrum“ σ_r . Für $\lambda \in \varrho(A)$ heißt $R(\lambda) := A_\lambda^{-1}$ die „Resolvente“ von A . Sie ist in jeder Zusammenhangskomponente von $\varrho(A)$ holomorph. Ist \mathcal{X} ein Banachraum und A beschränkt mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, dann existiert der „Spektralradius“ $r_\sigma(A) := \lim \|A^n\|^{1/n}$ für $n \rightarrow \infty$. Es ist $r_\sigma(A) \leq \|A\|$, $\{\lambda \mid |\lambda| > r_\sigma(A)\} \subset \varrho(A)$ und $r_\sigma(A) = \sup |\lambda|$ für $\lambda \in \sigma(A)$.

Es sei nun \mathcal{B} ein Banachraum und $K : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ kompakt. Von F. RIESZ [1918] wurde im Anschluß an seine Theorie der Gleichungen (2.2) auch der Spektralsatz für K bewiesen, nämlich

Spektralsatz für kompakte Operatoren: *Es gilt:*

1. $\sigma(K) \setminus \{0\}$ besteht höchstens aus abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.
2. Für $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sei $r(\lambda)$ die Riesz-Zahl von K_λ . Dann ist

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}(K_\lambda^{r(\lambda)}) \oplus \mathcal{N}(K_\lambda^{r(\lambda)}).$$

Beide Räume rechts sind abgeschlossen und K -invariant, es ist $\dim \mathcal{N}(K_\lambda^{r(\lambda)}) < \infty$.

3. Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
4. Im Falle $\dim \mathcal{B} = \infty$ gilt $0 \in \sigma(K)$.

Eine weitere wichtige Klasse sind die normalen Operatoren in einem Hilbertraum \mathcal{H} . Es sei $\mathcal{D}(A)$ in \mathcal{H} dicht. Dann definiert man durch

$$\mathcal{D}(A^*) := \left\{ v \in \mathcal{H} \mid \exists f \in \mathcal{H} \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, v) = (u, f) \right\} \quad \text{und} \quad A^*v := f$$

den zu A adjungierten Operator. A heißt „normal“, wenn $A^*A = AA^*$ ist. Es gilt der

Spektralsatz für kompakte normale Operatoren::

1. Es gibt einen Eigenwert λ_1 mit $|\lambda_1| = \|K\| = r_\sigma(K)$.
2. Es sei $\{\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid k \in N \subset \mathbb{N}\}$ die Menge der von null verschiedenen Eigenwerte von K . Dann gilt $r(\lambda_k) = 1$.
3. Es seien E_k die orthogonalen Projektoren auf $\mathcal{N}(K - \lambda_k)$ und E_0 auf $\mathcal{N}(K)$. Dann gilt

$$\forall k, l \in N \cup \{0\} \quad E_k E_l = \delta_{kl} E_k.$$

$$id = E_0 + \sum_{k \in N} E_k, \quad K = \sum_{k \in N} \lambda_k E_k \quad \text{und} \quad R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} E_0 + \sum_{k \in N} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} E_k.$$

Für einen beliebigen kompakten Operator K ist K^*K kompakt und normal. Es seien $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots$ die von null verschiedenen Eigenwerte von K^*K und u_j die zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen. Dann nennt man die $\mu_j := \sqrt{\kappa_j} > 0$ „singuläre Werte“ von K , und mit $v_j := (Ku_j)/\mu_j$ folgt die Darstellung $K = \sum \mu_j (\cdot, u_j) v_j$. Diese Darstellung läßt sich benutzen, um spezielle Klassen von kompakten Operatoren auszuzeichnen. Es sei $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ die Menge der kompakten Operatoren $K : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. Dann definiert man für $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{K}_\alpha(\mathcal{H}) := \{K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \mid \sum \mu_j^\alpha < \infty\}$ und $\mathcal{K}_\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Damit gilt $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{K}_\beta$ für alle $\alpha < \beta$. \mathcal{K}_0 sind die ausgearteten Operatoren mit $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$. \mathcal{K}_1 sind die „nuklearen“ oder „Spurklassen“-Operatoren, \mathcal{K}_2 sind gerade die „Hilbert-Schmidt“-Operatoren.

Nach diesen Erfolgen konnte das Problem der Spektraldarstellung allgemeinerer nicht notwendig kompakter oder beschränkter Operatoren angegangen werden. Es wurde durch J. von NEUMANN 1929 bis 1932 für selbstadjungierte und für normale Operatoren gelöst; vgl. die Zitate in [RIESZ-NAGY 1956]. J. von NEUMANN ordnet jedem selbstadjungierten Operator $\mathcal{A} : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ eine Spektralschar $P(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, zu. $(P(\lambda))$ ist eine Familie orthogonaler Projektoren mit:

1. $P(\lambda) P(\mu) = P(\min(\lambda, \mu))$.
2. $P(\lambda + 0) = P(\lambda)$ (d.h. $P(\lambda)$ ist stark stetig von rechts).
3. $P(-\infty) = O$ und $P(+\infty) = id$ (ebenfalls jeweils im starken Sinne).

Er bewies dann den

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren::

$$\forall u \in \mathcal{D}(A) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (Au, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(P(\lambda)u, v).$$

Dabei steht rechts das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral. Für beschränkte A wird das Integral eigentlich. Den Sprungstellen von $P(\lambda)$ entsprechen Eigenwerte, und in der Umgebung eines $\lambda \in \varrho(A)$ ist $P(\lambda)$ konstant.

Zum Beweis des Satzes benutzt v. NEUMANN die Cayley-Transformation, die sogleich angegeben wird, und reduziert damit das Problem auf das der Darstellung unitärer Operatoren. Wenig später hat auch M.H. STONE einen Beweis für den Spektralsatz gegeben. [1932] hat er seine Ergebnisse in einem Buch dargestellt. Insbesondere ist nach ihm die Umkehrformel, also die Darstellung von $P(\lambda)$ durch A benannt, nämlich $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \forall f, g \in \mathcal{H}$

$$([P(b) - P(a)]f, g) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b+\delta} \left([A - (t + i\varepsilon)]^{-1} - [A - (t - i\varepsilon)]^{-1} \right) f, g) dt.$$

Die selbstadjungierten Operatoren spielen in der Physik eine große Rolle, weil ihnen die Observablen entsprechen. Mit dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren war damit ein wichtiges Resultat auch für den Physiker bereitgestellt. Für diesen bestand das Problem nun darin zu überprüfen, ob ein vorgelegter Operator selbstadjungiert ist oder zu einem solchen fortgesetzt werden kann. Über diese Frage ist für spezielle Operatoren viel publiziert worden. Bis heute hat man z.B. zeigen können, daß die Dirac-Operatoren für Atomkerne bis zu den Kernladungszahlen $Z \leq 118$ wesentlich selbstadjungiert sind. Für $Z \geq 119$ gibt es selbstadjungierte Fortsetzungen, und zwar für $Z \leq 137$ sogenannte ausgezeichnete Fortsetzungen. Für $Z > 137$ existieren solche ausgezeichnete Fortsetzungen nicht, vgl. H. KALF, U.W. SCHMINCKE, J. WALTER und R. WÜST [1975].

Wegen ihrer großen Bedeutung soll im folgenden die Frage nach der Fortsetzbarkeit symmetrischer Operatoren zu selbstadjungierten noch etwas vertieft werden. Die in der mathematischen Physik auftretenden Differentialoperatoren sind zwar unbeschränkt, sie haben aber meist zwei wichtige Eigenschaften. Einmal sind sie dicht definiert, und zum zweiten sind sie abgeschlossen oder wenigstens abschließbar. Das heißt, der Graph $G(A) := \{(u, Au) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ von A ist abgeschlossen, oder es gibt einen abgeschlossenen Operator B mit $G(B) = \overline{G(A)}$. $\bar{A} := B$ ist dann der „Abschluß“ von A . In $G(A)$ wählt man die Norm $\|u\|_A := [\|u\|^2 + \|Au\|^2]^{1/2}$ und erhält $\mathcal{D}(\bar{A}) = \{\mathcal{D}(A); \|\cdot\|_A\}^\sim$ für abschließbare A .

Nun sind die Operatoren $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, um die es hier geht, symmetrisch. Es ist also $S \subset S^*$. Weil symmetrische Operatoren abschließbar sind, existiert immer die triviale Fortsetzung \bar{S} . Damit besitzt S stets zwei abgeschlossene Fortsetzungen, nämlich $\bar{S} = S^{**}$ und S^* . S^{**} ist wieder symmetrisch, S^* aber im allgemeinen nicht. Wenn $\bar{S} = S^*$ ist, heißt S wesentlich selbst adjungiert.

Beispielsweise denke man an den Δ -Operator mit $\mathcal{D}(\Delta) := \dot{C}_\infty(G)$. Dann ist $\mathcal{D}(\bar{\Delta}) = \dot{\mathcal{H}}_2(G)$. Im Falle eines beschränkten Gebietes G ist $\bar{\Delta}$ wegen $\mathcal{D}(\Delta^*) = \{u \in \mathcal{L}^2(G) \mid \Delta u \in \mathcal{L}^2(G)\}$ nicht selbstadjungiert, Δ ist aber symmetrisch.

Es geht also darum, selbstadjungierte Fortsetzungen symmetrischer Operatoren zu finden; d.h. am obigen Beispiel, „vernünftige“ Randbedingungen anzugeben. Durch Verwenden der Cayley-Transformation läßt sich diese Problematik gut beschreiben. Sie wurde von A.C. CAYLEY in der Gruppentheorie verwandt; ihre Definition für lineare Operatoren stammt von J. VON NEUMANN. Die Cayley-Transformation ist das Analogon einer Möbius-Transformation, das Spektrum auf der reellen Achse wird in die Kreislinie abgebildet.

Es sei also A ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann ist

$$V : \mathcal{R}(A + i) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{R}(A - i), \\ u \longmapsto (A - i)(A + i)^{-1} u$$

die „Cayley-Transformierte“ von A . V ist abgeschlossen, surjektiv und isometrisch. $\mathcal{D}(V)$ und $\mathcal{R}(V)$ sind abgeschlossen, und es gilt $A = i(id + V)(id - V)^{-1}$.

A ist nun genau dann selbstadjungiert, wenn V unitär ist (d.h. wenn außerdem $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$ gilt). Die Frage nach der Möglichkeit, eine symmetrische Abbildung A selbstadjungiert fortzusetzen, wird damit auf die oft leichter zu beantwortende Frage nach der Möglichkeit, ein isometrisches V unitär fortzusetzen, reduziert. Dazu definiert man die „Defektindizes“ (m, n) von A

$$m := \dim \mathcal{D}(V)^\perp = \text{codim } \mathcal{R}(A + i) = \dim \mathcal{N}(A^* - i)$$

$$n := \dim \mathcal{R}(V)^\perp = \text{codim } \mathcal{R}(A - i) = \dim \mathcal{N}(A^* + i).$$

A ist selbstadjungiert, wenn $m = n = 0$ ist. A läßt sich genau dann selbstadjungiert fortsetzen, wenn beide Defektindizes gleich sind.

\mathbb{R}^1 lassen sich die Defektindizes oft leicht ausrechnen, und es gibt schöne Anwendungsbeispiele. Erinnert sei an die WEYLSche Behandlung von Sturm-Liouville-Problemen. Betrachten wir dazu wieder $A := -\bar{\Delta}$ in $G \subset \mathbb{R}^1$. A hat gleiche Defektindizes, ist also selbstadjungiert fortsetzbar. Im Falle $G = \mathbb{R}^1$ ist $m = n = 0$, d.h. A ist bereits selbstadjungiert. Im Falle $G = (0, \infty)$ ist $m = n = 1$. In diesem Falle ist $\mathcal{D}(V)^\perp = \mathcal{N}(A^* - i) = [u_1]$ mit $u_1(x) = \exp(i\sqrt{x})$, und durch $V_c u := Vu$ für $u \in \mathcal{D}(V)$, $V_c u := c\bar{u}_1$ für $u = u_1$ mit $|c| = 1$ erhält man die unitären Fortsetzungen von V . $A_c := i(id + V_c)(id - V_c)^{-1}$ sind die zugehörigen selbstadjungierten Erweiterungen von A , und es ist $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_2 \oplus [(u_1 - c\bar{u}_1)]$. Im Falle $c = 1$ ist das die Dirichletsche Randbedingung im Randpunkt $x = 0$; für $c = -i$ erhält man die Neumannsche und im allgemeinen gemischte Randbedingungen $u'_c(0) + z_c u_c(0) = 0$ mit $z_c := -(1 + i)(c + i)/\{\sqrt{2}(1 - c)\}$. Im Randpunkt $x = 0$ liegt der Weylsche Grenzkreis fall vor, in $x = \infty$ der Grenzpunktfall.

Für allgemeinere Operatoren sind drei Methoden, die Selbstadjungiertheit nachzuweisen, von Bedeutung:

1. Es ist oft möglich, das Problem durch ein System erster Ordnung zu beschreiben. Für solche Systeme folgt die Selbstadjungiertheit meist leicht durch partielles Integrieren und Ausnutzen von „stark gleich schwach“ (Gl.(3.5)).
2. Es gilt

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{R}(A + i)^\perp \oplus \mathcal{R}(A - i)^\perp.$$

Man hat also zu zeigen, daß Gleichungen $(A \pm i)x = f$ gelöst werden können.

3. Eine wichtige Klasse symmetrischer Operatoren sind die „halbbeschränkten“, etwa

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, u) \geq c\|u\|^2.$$

Halbbeschränkte Operatoren besitzen eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung, die „FRIEDRICHSSche“ Fortsetzung A_F [1934–35]. Etwa für $c = 1$ ist mit $\mathcal{F} := \{\mathcal{D}(A); \|\cdot\|_{\mathcal{F}}\}$ und $\|u\|_{\mathcal{F}} := (Au, u)^{1/2}$

$$\mathcal{D}(A_F) := \left\{ v \in \mathcal{F} \mid \exists h \in \mathcal{H} \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, v) = (u, h) \right\} \quad \text{und} \quad A_F v := h.$$

Die Existenz der Friedrichsschen Fortsetzung folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz. Natürlich kann es außer der Friedrichsschen noch andere selbstadjungierte Fortsetzungen von A geben.

Damit ist eine Darstellung für eine große Klasse linearer Operatoren in der mathematischen Physik gelungen. Aber natürlich gibt es dort auch Probleme, die nicht auf selbstadjungierte Operatoren führen, z.B. in der Thermoelastizitätstheorie oder bei allgemeineren Evolutionsgleichungen. Bei solchen Problemen lassen sich die Lösungen i.a. nicht mehr in die Vergangenheit

zurückrechnen. Aus den Anfangswerten u^0 etwa zur Zeit $t = 0$ erhält man die Lösung in der Form $u(t) = H(t)u^0$ nur für alle $t \geq 0$. Es gilt aber $u(t+s) = H(t)u(s) = H(t)H(s)u^0$. Für solche Operatoren ist deshalb eine Darstellung durch Halbgruppen wichtig geworden. Ab 1936 hat sich E. HILLE mit Halbgruppen intensiv beschäftigt. Im Buch von E. HILLE und R. PHILLIPS [1957] wird hierüber berichtet.

Der Satz von Hille-Yosida charakterisiert Operatoren, die sich als stark stetige Halbgruppen darstellen lassen. Er wurde unabhängig voneinander von E. HILLE und K. YOSIDA 1948 bewiesen. Weitere Ergebnisse aus der Halbgruppentheorie und Anwendungen findet man im Buch von A. PAZY [1983].

5 Anfangsrandwertaufgaben und Streutheorie

Anfangsrandwertaufgaben treten in der mathematischen Physik vielfältig auf. Zum Beispiel lassen sich die Wellengleichung, die Plattengleichung oder das System der linearen Elastizitätsgleichungen in der Form

$$u_{tt} + A u = 0 \quad \text{mit } u(0) = u^0 \text{ und } u_t(0) = u^1$$

schreiben. Dabei ist A ein linearer Differentialoperator in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$.

$$u_t + iA u = 0 \quad \text{mit } u(0) = u^0$$

stellt die Schrödingergleichung, das System der Maxwellschen Gleichungen oder das System der linearen Akustik dar, und durch

$$u_t + A u = 0 \quad \text{mit } u(0) = u^0$$

werden Wärmeleitungsvorgänge wie Anfangsrandwertaufgaben in der linearen Thermoelastizitätstheorie beschrieben. Außer im letzten Beispiel ist A selbstadjungiert.

Zur Behandlung solcher Probleme sind zunächst einmal die Gleichungen zu lösen. Dazu muß insbesondere der Lösungsbegriff präzisiert werden. Anschließend interessiert man sich für spezielle Eigenschaften der erhaltenen Lösungen, z.B. fragt man nach ihrer Regularität oder nach ihrem asymptotischen Verhalten für große Zeiten, und beweist die Existenz von Wellen- und Streuoperatoren. Probleme der inversen Streutheorie (aus den reflektierten Signalen sollen Daten wie Anfangswerte, Rand oder Medium zurückgewonnen werden) haben großes mathematisches und praktisches Interesse. Zur Behandlung solcher Fragen muß man z.B. wissen, wie der Streuoperator durch den Rand bestimmt wird, und diese Abbildung dann invertieren. Einfache Formeln erhält man im Grenzfall hoher Frequenzen.

Die Frage nach dem Verhalten akustischer oder elektromagnetischer Wellen bei hohen Frequenzen gehört in das wichtige Gebiet der Asymptotik der Lösungen partieller Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen. Aus der Erfahrung weiß man, daß sich Wellen bei hohen Frequenzen nach den Regeln der geometrischen Optik ausbreiten. Die Aussage, daß die geometrische Optik asymptotisch die Wellenausbreitung richtig beschreibt, wenn die Frequenz gegen unendlich strebt, ist eine der interessantesten Fragen aus diesem Problemkreis. In dieses Gebiet gehört auch die Untersuchung des Übergangs von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik. Hierbei wird die Schrödinger-Gleichung diskutiert, und der in diesem Falle gegen null strebende Parameter ist das Plancksche Wirkungsquantum. Die zeitharmonische Wellenausbreitung wird gewöhnlich durch eine elliptische Gleichung beschrieben, und die

instationäre durch eine dazu korrespondierende hyperbolische. Die Lösungen der hyperbolischen Gleichung kann man durch Überlagerung von Lösungen der elliptischen Gleichung erhalten, und deren asymptotisches Verhalten bei hohen Frequenzen beschreibt die Singularitäten in den Lösungen der hyperbolischen Gleichung. Die Bestimmung des Ortes und insbesondere der Form der Singularitäten in den Lösungen von hyperbolischen Gleichungen ist ein weiterer zentraler Punkt aus diesem Problemkreis. Solche Probleme werden heute in der mikrolokalen Analysis untersucht.

Diese Fragen hatten eine fundamentale Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik und der Physik in den letzten 300 Jahren. Wir erinnern hier nur an die wissenschaftlichen Auseinandersetzungen darüber, ob die Ende des 17. Jahrhunderts von HUYGENS aufgestellte Wellenausbreitungstheorie oder die von NEWTON aufgestellte Korpuskulartheorie die Ausbreitung des Lichtes richtig beschreibt. Erst in unserem Jahrhundert konnte dieses Problem im Zusammenhang mit der Quantenmechanik geklärt werden.

Im folgenden soll anhand einer einfachen Wellengleichung über die Entwicklung berichtet werden. In diesem Falle ist der auftretende Operator A selbstadjungiert, so daß der Spektralsatz zur Verfügung steht. Ähnliche Resultate lassen sich für andere Gleichungen der mathematischen Physik herleiten und finden sich z.B. im Buch [1986] des Verfassers.

Es sei also G ein Gebiet im \mathbb{R}^3 , und es seien $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$) reellwertige, beschränkte $C_1(G)$ -Funktionen mit

$$\exists p_0 > 0 \quad \forall x \in G \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p_0 |\xi|^2.$$

Im Falle eines Außengebietes soll das Medium genügend weit außen homogen und isotrop sein; es gebe also eine Zahl $r_a > 0$ mit

$$\forall x \in G_a := \{x \in G \mid |x| > r_a\} \quad a_{ik}(x) = \delta_{ik}.$$

Weil wir uns hier auf die Dirichletsche Randwertaufgabe beschränken wollen, sei $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{L}^2(G) \mapsto \mathcal{L}^2(G)$ mit

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \mathring{\mathcal{H}}_1(G) \mid \partial_i a_{ik} \partial_k u \in \mathcal{L}^2(G) \right\} \quad \text{und} \quad A u := -\partial_i a_{ik} \partial_k u.$$

Gesucht ist dann ein $u : \mathbb{R}_0^+ \times G \mapsto \mathbb{R}$ mit $u_{tt} + A u = 0$, $u(0) = u^0$ und $u_t(0) = u^1$.

Für diese Anfangsrandwertaufgabe gibt es verschiedene Lösungsbegriffe (es gibt z.B. schwache, Distributionen- oder klassische Lösungen). Wir wählen im folgenden zunächst den von der Physik nahegelegten Begriff der Lösung mit endlicher Energie

$$E(t) := \|u_t(t)\|^2 + \|A^{1/2} u(t)\|^2 < \infty,$$

also endlicher Summe von kinetischer und potentieller Energie ($A^{1/2}$ entspricht ∇). Dazu müssen wir natürlich $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ voraussetzen, $\|\cdot\|$ ist die $\mathcal{L}^2(G)$ -Norm.

Es seien also im folgenden $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(G), \mathring{C}(G)$ die Menge der stetigen Funktionen mit in G kompaktem Träger und $\mathcal{V} := \mathring{C}(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A)) \cap C_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Es seien außerdem $u^0, u^1 \in \mathcal{H}$. Dann heißt $u \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A))$ „schwache Lösung“ der Wellengleichung, wenn

$$\forall \varphi \in \mathcal{V} \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^+ \times G} u \cdot \overline{\{\varphi_{tt} + A \varphi\}} + (u^0, \varphi_t(0, \cdot)) - (u^1, \varphi(0, \cdot))$$

gilt. Diese Definition geht auf M. VISHIK und O.A. LADYZHENSKAYA [1956] zurück.

Ist außerdem $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, dann heißt eine schwache Lösung u nach C.H. WILCOX [1962] „Lösung mit endlicher Energie“, wenn $u \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap C_1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ ist.

Die soeben definierte Anfangsrandwertaufgabe ist eindeutig lösbar. Das folgt relativ leicht aus der Spektral- oder Halbgruppentheorie. In unserem Falle ist A selbstadjungiert, und durch

$$u(t) := \cos(A^{1/2}t)u^0 + A^{-1/2} \sin(A^{1/2}t)u^1 = \int_0^\infty \left\{ \cos(\sqrt{\lambda}t)dP(\lambda)u^0 + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}dP(\lambda)u^1 \right\}$$

erhält man aus dem Spektralsatz die Lösung der Aufgabe. Die Energie ist konstant.

Will man Näheres über die Lösungen wissen, dann benötigt man genauere Kenntnis des Spektrums von A . Ist G beschränkt, dann folgt aus der Spektraldarstellung kompakter Operatoren für A die Entwicklung nach Eigenfunktionen (d.h. Gl. (3.8)) und für u die Entwicklung nach stehenden Wellen. Aus dem Rellichschen Auswahlatz und der Poincaréschen Abschätzung erhält man nämlich leicht $A^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. All dies soll hier nicht weiter vertieft werden.

Vielmehr wollen wir uns im folgenden mit Streuproblemen in unbeschränkten Gebieten beschäftigen. Dabei wählen wir wieder einen einfachen Fall und setzen G als „Außengebiet“ voraus. G sei also das Komplement eines beschränkten Gebietes. Damit hat G einen beschränkten Rand. Selbstverständlich sind auch Streuprobleme bei unbeschränkten Rändern äußerst interessant, z.B. für die Halbebene, für periodische Strukturen oder für Wellenleiter. In Übersichtsartikeln berichten E. MEISTER [1987] über Beugungsprobleme an Keilen und P. WERNER [1987] über Resonanzphänomene in Wellenleitern. In seinen Büchern [1984] entwickelt C.H. WILCOX eine Streutheorie für Gitter und für geschichtete Medien.

Es soll nun das asymptotische Verhalten der Lösungen in Außengebieten für große Zeiten beschrieben werden. Dazu behandelt man zunächst den „Ganzraumfall“, d.h. den Fall $G = \mathbb{R}^3$ mit $a_{ik} = \delta_{ik}$. Dieser Fall läßt sich mit Hilfe der Fourier-Transformation explizit durchrechnen, und man kann so das asymptotische Verhalten der Lösungen angeben. Er dient anschließend zum Vergleich mit den Lösungen allgemeinerer Außenraumaufgaben.

Zur Vereinfachung der Darstellung wählen wir die komplexe Notation. Es seien im Ganzraumfall A_0 der zugrundeliegende Operator und u_0^0, u_0^1 die reellen Anfangswerte mit $u_0^1 \in \mathcal{D}(A_0^{-1/2})$. Es sei $v_0^0 := u_0^0 + iA_0^{-1/2}u_0^1$ und $v_0(t) := (\exp(-iA_0^{1/2}t)) \cdot v_0^0$. Dann ist $u_0(t) := \operatorname{Re} v_0(t)$ die Lösung der Aufgabe. v_0 nennen wir auch freie Lösung. Als Resultat folgt die Existenz von aus- bzw. einlaufenden Wellen $v_0^\pm(t, x) = G^\pm(|x| \mp t, x_0)/|x|$ mit $\lim \|v_0(t, \cdot) - v_0^\pm(t, \cdot)\| = \lim \|v_0^\mp(t, \cdot)\| = 0$ für $t \rightarrow \pm\infty$.

Um im Fall eines beliebigen Außengebiets weiterzukommen, muß man mehr über das Spektrum von A wissen. Es gilt $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \mathbb{R}_0^+$. Zum Beweis werden drei Resultate benutzt. Aus der Poincaréschen Abschätzung $\|\varphi/|\cdot|\| \leq 2\|\nabla\varphi\|$ für alle $\varphi \in \mathring{C}_1(G)$ folgt zunächst $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, und die RELICHSche Abschätzung [1943]

$$\exists p > 0 \quad \exists r_1 > r_a \quad \forall r > r_1 \quad \int_{r_a < |x| < r} |u(x)|^2 dx \geq p r$$

impliziert $\sigma_p(A) = \emptyset$ für $a_{ik} = \delta_{ik}$. Für variable Koeffizienten folgt das Ergebnis dann aus dem Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen von C. MÜLLER [1954].

Als nächstes betrachtet man wieder den zeitharmonischen Fall (Entwicklung der Lösung nach stehenden Wellen) und löst die Dirichletsche Randwertaufgabe zur Schwingungsgleichung $\partial_i a_{ik} \partial_k u + \lambda u = 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Weil λ zum Spektrum von A gehört, ist dies jedoch keine übliche Randwertaufgabe mehr. Man spricht viel mehr von „Außenraumaufgaben“ und sucht Lösungen

in einem Raum, der größer als \mathcal{H} ist. Das asymptotische Verhalten der Lösungen für große $|x|$ wird dabei vorgeschrieben. Und zwar stellt man eine Sommerfeldsche Ausstrahlungs- oder Einstrahlungsbedingung $(x_0 \nabla \mp i \sqrt{\lambda})u \in \mathcal{H}$, vgl. Gl. (2.5).

Für $a_{ik} = \delta_{ik}$ wurde die Eindeutigkeit der Lösungen der Dirichletschen Außenraum Aufgabe von V.D. KUPRADZE [1934], H. FREUDENTHAL [1939] und F. RELICH [1943] gezeigt. Ihre Existenz wurde von I.N. VEKUA [1943, vgl. 1967], H. WEYL [1952] und C. MÜLLER [1952] mit Hilfe der Integralgleichungsmethode bewiesen. Die Behandlung variabler Koeffizienten geschah dann mit Hilbertraummethode.

Zwei Bemerkungen sollen noch angeschlossen werden. Nämlich einmal, daß die Lösbarkeit von Außenraum Aufgaben zur Definition verallgemeinerter Eigenfunktionen und zu Entwicklungssätzen danach geführt hat. Dies ist vielfach verwandt worden, insbesondere wurde auch das Analogon zur Fourier-Transformation im \mathbb{R}^n für Außengebiete angegeben. Diese Entwicklung geht auf T. IKEBE [1960] zurück, vgl. auch C.H. WILCOX [1975].

Zum zweiten sei darauf hingewiesen, daß D.M. EIDUS [1962] das „Prinzip der Grenzabsorption“ bewiesen hat. Damit ist gemeint, daß man für $f \in \mathcal{L}^{2f}(G)$ (\mathcal{L}^2 -Funktionen mit finitem Träger) die ausstrahlende bzw. einstrahlende Lösung u^\pm von $-\partial_i a_{ik} \partial_k u - \lambda u = f$ durch den Grenzübergang $u^\pm = \lim [A - (\lambda \pm i \varepsilon)]^{-1} f$ für $\varepsilon \downarrow 0$ erhält. Dieser Grenzwert existiert in einer gewichteten $\mathcal{H}_1(G)$ -Norm. Weil $\mathcal{L}^{2f}(G)$ in \mathcal{H} dicht ist, folgt damit aus der Stoneschen Formel, daß das Spektrum von A absolut stetig ist, also wegen $\sigma_p(A) = \emptyset$, vgl. [T. Kato 1976, 518],

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} := \{x \in \mathcal{H} \mid (P(\lambda)x, x) \text{ ist absolut stetig}\}.$$

Damit haben wir die notwendigen Resultate aus der Theorie der Schwingungsgleichung zusammengestellt und kehren zur Wellengleichung zurück. Aus der absoluten Stetigkeit des Spektrums und dem Riemann-Lebesgueschen Lemma folgt unmittelbar das Prinzip vom „lokalen Energieabfall“, also $\forall K \subset G, K \subset\subset \mathbb{R}^3$, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \{ \|A^{1/2} u(t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} + \|u_t(t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \} = 0.$$

Man wird daher erwarten, daß $u(t)$ sich für große t wie eine freie Lösung verhält. Genauer, es seien $J_G : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, mit $(J_G u)(x) := u(x)$ für $x \in G$, null sonst, und $v^0 := u^0 + iA^{-1/2} u^1 \in \mathcal{H}$. Dann sucht man v_0^+ und $v_0^- \in \mathcal{H}_0$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| J_G e^{-iA^{1/2}t} v^0 - e^{-iA_0^{1/2}t} v_0^\pm \right\| = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{iA_0^{1/2}t} J_G e^{-iA^{1/2}t} v^0 - v_0^\pm \right\| = 0.$$

Weil das Spektrum von A absolut stetig ist, läßt sich die Existenz der unitären Wellenoperatoren $W^\pm : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_0$

$$W^\pm := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iA_0^{1/2}t} J_G e^{-iA^{1/2}t}$$

beweisen. Mithin existieren $v_0^\pm := W^\pm v^0$. $S := W^+(W^-)^*$ ist der „Streuoperator“, und es gilt $v_0^+ = S v_0^-$.

Es gibt verschiedene Methoden zum Nachweis der Existenz der Wellenoperatoren. P. LAX und R.S. PHILLIPS [1967] benutzen die Halbgruppentheorie, C.H. WILCOX [1975] die Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen, und T. KATO [vgl. 1976], A.L. BELOPOLSKII und M.S. BIRMAN [1968] sowie D.B. PEARSON [1978] verwenden Ergebnisse aus der Störungstheorie linearer Operatoren. Dazu wird gezeigt, daß der allgemeine Fall als nukleare Störung des freien gedeutet werden kann. Weitere Resultate aus der Streutheorie, insbesondere aus der Quantenstreutheorie, findet man im vierbändigen Buch von M. REED und B. SIMON [1972–1979].

Bisher wurde gezeigt, wie die Lösungen von Anfangsrandwertaufgaben im Grenzfall großer Zeiten durch die einfacher zu konstruierenden Lösungen von Ganzraumproblemen approximiert

werden können. Wie gesagt, es gibt andere Grenzfälle, in denen Approximationen durch einfachere Näherungslösungen möglich sind. Dazu gehört der Grenzfall hoher Frequenzen, also der Grenzübergang zur geometrischen Optik.

Ein erster Ansatz in dieser Richtung geht auf G. KIRCHHOFF [1891] zurück. Zur Berechnung der an einem Hindernis B reflektierten Welle macht er den Ansatz $u(t, x) = e^{ikt} v(x)$, benutzt für v die Darstellung aus der Greenschen Formel

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n}(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right\} dy$$

und nimmt für die fehlenden Randwerte die der geometrischen Optik.

Der nächste wichtige Schritt wurde von A. SOMMERFELD und I. RUNGE [1911] getan. Sie gingen von „ebenen Wellen“ $e^{ik(\omega x - t)}$ mit $\omega \in S^2$ aus und versuchten, allgemeinere Lösungen der Wellengleichung durch den Ansatz $u(t, x) = e^{ik(\varphi(x) - t)} v(x)$ zu erhalten. u genügt für alle $k > 0$ der Wellengleichung, wenn

$$(\nabla\varphi)^2 = 1 \tag{5.1}$$

und $2(\nabla\varphi)(\nabla v) + (\Delta\varphi)v = i(\Delta v)/k$ gelten. Die Approximation besteht nun darin, die zweite Gleichung zu vereinfachen und nur

$$2(\nabla\varphi)(\nabla v) + (\Delta\varphi)v = 0 \tag{5.2}$$

zu verlangen. Gl. (5.1) ist die „Eikonalgleichung“. Sie wurde von W.R. HAMILTON in seinen Arbeiten über Optik in den Jahren 1827-32 eingeführt. Er betrachtet ein Bündel von Lichtstrahlen, das von einem leuchtenden Punkt y ausgeht und das am Hindernis B reflektiert wird. Zu jedem Punkt x dieses Bündels wird dann durch den Strahl in diesem Punkt eine Richtung definiert, nämlich $\nabla\varphi(x)$. Der Wert von $\varphi(x)$ ist der Abstand des Punktes x von y entlang des Strahls.

Das soeben beschriebene Vorgehen von SOMMERFELD-RUNGE ist die einfachste Version einer allgemeineren Methode, Differentialgleichungen, die einen Parameter enthalten, näherungsweise zu lösen; nämlich die Methode der asymptotischen Reihen. Asymptotische Reihen waren schon im vorigen Jahrhundert bekannt. Die hier interessierende Methode ist die sogenannte „WKB-Methode“, die nach G. WENTZEL [1926], H.A. KRAMERS [1926] und L. BRILLOUIN [1926] benannt ist. Bevor wir sie schildern, sei noch auf einen anderen Zusammenhang hingewiesen.

Bisher haben wir für die Lösungen der Wellengleichung den Begriff der Lösung mit endlicher Energie in den Vordergrund gestellt und sie durch stehende Wellen approximiert. Dadurch entsteht vielleicht der Eindruck einer Glattheit der Lösungen, der nicht richtig ist. In der Einführung wurde schon für den \mathbb{R}^1 die d'Alembertsche Darstellung der Lösung der Wellengleichung angegeben. Analoge Formeln gelten im \mathbb{R}^n . Im \mathbb{R}^3 ist $u(t) = \partial_t I(t) u^0 + I(t) u^1$ mit

$$(I(t)v)(x) := \int_{\mathbb{R}^3} v(x-y) g_3(t, y) dy = \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} v(x-t\omega) d\omega.$$

Das ist die „Kirchhoffsche Formel“. Dabei ist g_3 die Grundlösung der Wellengleichung, nämlich $g_3(t, x) = \delta(t - |x|)/(4\pi|x|)$. Im \mathbb{R}^2 erhält man analog die „Poissonsche Formel“ mit $g_2(t, x) = H(t - |x|)/(2\pi\sqrt{t^2 - x^2})$. Dabei ist wie üblich $H(s) := 1$ für $s \geq 0$, null sonst, die Heaviside-Funktion. Es sei $C^+(x_0) := \{(t, x) \mid t > 0, |x - x_0| < t\}$ der „Zukunftskegel“. Dann ist $\text{supp } g_3 = \partial C^+(0)$, aber $\text{supp } g_2 = C^+(0)$. Im \mathbb{R}^3 gilt also das „Huygenssche Prinzip“; Dirac-Signale setzen scharf ein und aus. Im \mathbb{R}^2 gibt es jedoch Nachhall. In beiden Fällen hat man aber eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Für das Verständnis der Wellenausbreitung ist das Studium der Singularitäten äußerst wichtig. In allgemeineren Fällen ist das aber nicht mehr so einfach wie gerade geschildert. So treten

schon bei den Elastizitätsgleichungen für homogene isotrope Medien im \mathbb{R}^3 zwei verschiedene Ausbreitungsrichtungen und Geschwindigkeiten auf. Die Ausbreitung der Singularitäten der Lösungen wird heute in der mikrolokalen Analysis intensiv untersucht. Eine der ersten Arbeiten in dieser Theorie ist die von P. LAX [1957b]. Tiefliegende Resultate wurden von L. HÖRMANDER erhalten, über die in [1983-85] berichtet wird. Hingewiesen sei auch auf die Vorlesung von L. GARDING [1987].

Doch nun zurück zur WKB-Methode. Es seien wieder G ein Außengebiet, $y \in G$ fest, $r(t, x, y) := g_3(t, x - y)$ und $R(t, x, y)$ die entsprechende Grundlösung zur Dirichletschen Randwertaufgabe der Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$ in G . Dann soll R in der Form

$$R(t, x, y) \sim r(t, x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1}(t - \varphi(x, y)) \cdot z_n(x, y) \quad (5.3)$$

dargestellt werden. Dabei ist $H_{-1}(s) := \delta(s)$ und $H_n(s) := s^n/n!$ für $s \geq 0$, null sonst. Für diese Funktionen gilt also $H'_n = H_{n-1}$. Die Funktionen φ und z_n in Gl. (5.3) müssen so bestimmt werden, daß die Differentialgleichung und die Randbedingung erfüllt sind. Einsetzen und gliedweises Nullsetzen ergeben $(\nabla\varphi)^2 = 1$ und $2(\nabla\varphi)(\nabla z_n) + (\Delta\varphi)z_n = -\Delta z_{n-1}$ mit $z_{-1} := 0$, sowie für $x \in \partial G$ $\varphi(x, y) = |x - y|$, $z_0(x, y) = -1/(4\pi|x - y|)$ und $z_n(x, y) = 0$ für $n > 0$.

Man erhält also wieder Gleichungen analog zu Gln. (5.1–2). Natürlich wird die Reihe im Ansatz (5.3) i.a. nicht konvergieren. Es geht vielmehr darum zu zeigen, daß eine Differenz $R - R_k$ mit $R_k := r + \sum_{n=0}^k H_{n-1}(t - \varphi) \cdot z_n$, $0 \leq n \leq k$, genügend regulär ist.

Den Zusammenhang mit der Schwingungsgleichung erhält man durch Fourier-Transformation bzgl. t . So ist

$$G(k, x, y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} R(t, x, y) dt$$

die Greensche Funktion für die Schwingungsgleichung, und für sie lautet die entsprechende Entwicklung

$$G(k, x, y) \sim \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + e^{ik\varphi(x,y)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n z_n(x, y).$$

Bei konvexen Hindernissen gilt diese asymptotische Entwicklung für alle x , die nicht auf Tangentialstrahlen liegen. Das folgt aus Ergebnissen von C.S. MORAWETZ und D. LUDWIG [1968] sowie von C.S. MORAWETZ, W. RALSTON und W. STRAUSS [1977]. Auch auf Tangentialstrahlen ist diese Asymptotik untersucht worden. Weitere Einzelheiten findet man im Übersichtsartikel von H.D. ALBER und dem Verfasser [1988].

Mit diesen und anderen Methoden sind auch Verfahren zur Lösung inverser Streuprobleme gewonnen worden. Hierzu sei auf die Übersichtsartikel von B.D. SLEEMAN [1982] und D. COLTON [1984] hingewiesen.

6 Nichtlineare Probleme

In den vorangegangenen Abschnitten ist viel über lineare Fragen berichtet worden. Aber auch in der nichtlinearen Analysis hat es eine Menge schöner Resultate gegeben, von denen hier nur noch zwei angeschnitten werden sollen. Zunächst werden einfache nichtlineare Erhaltungsgleichungen untersucht, und anschließend wird speziell die Frage nach der Existenz globaler glatter Lösungen bei der nichtlinearen Wellengleichung behandelt.

Wir beginnen mit Erhaltungsgleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (6.1)$$

mit der Anfangsbedingung $u(0, x) = u^0(x)$. Dabei sei zunächst $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Gl. (6.1) bzw. entsprechende Systeme treten beim Studium von Wellenphänomenen ohne Dissipation vielfältig auf. Sie können auch unstetige Lösungen besitzen. Das bedeutet, daß zunächst wieder ein geeigneter Lösungsbegriff gebildet werden muß. Die Theorie solcher Gleichungen geht auf E. HOPF [1950] zurück. Es folgen Arbeiten von O. OLEINIK, insbesondere [1957], und P. LAX [1954, 1957a]. Eine ausführliche Darstellung findet man in J. SMOLLER [1983].

Wir wollen die Problematik an einem Beispiel entwickeln. Im linearen Fall $f(u) = u$ erhält man $u_t + u_x = 0$, eine Gleichung, die an die Wellengleichung erinnert. Interessanter ist schon der quadratische Fall, etwa $f(u) := u^2/2$. Gl. (6.1) mit diesem f heißt „Burgers-Gleichung“, genauer „Burgers-Gleichung ohne Viskosität“. Auch die „Straßenverkehrsgleichung“ ist vom Typ (6.1) mit quadratischem f .

Gleichungen der Form (6.1) oder mit $a(u) := f'(u)$

$$u_t + a(u) \cdot u_x = 0 \quad (6.2)$$

lassen sich mit der Charakteristikenmethode lösen. Es sei $\Gamma(\sigma) := (0, \sigma, u^0(\sigma))$ die Anfangskurve. Dann erhält man aus den Charakteristikengleichungen

$$t_\tau = 1, \quad x_\tau = a(z), \quad z_\tau = 0 \quad (6.3)$$

$t(\tau, \sigma) = \tau$, $x(\tau, \sigma) = \tau \cdot a(u^0(\sigma)) + \sigma$ und $z(\tau, \sigma) = u^0(\sigma)$. Kann man die beiden ersten Gleichungen nach τ, σ auflösen, dann ist $u(t, x) := z(\tau(t, x), \sigma(t, x))$ die Lösung. Sie ist entlang der Charakteristiken konstant.

Bei glatten Anfangsdaten u^0 existiert lokal in t eine glatte Lösung $u(t, x)$, die jedoch i.a. nach einiger Zeit Unstetigkeiten entwickelt. Das Verhalten der Lösungen sei an zwei typischen Beispielen für die Burgers-Gleichung erläutert. Zur Vereinfachung wählen wir die Anfangswerte bereits unstetig.

1. Es sei $u^0(\sigma) := -1 + 2H(\sigma)$. Dann erhält man $x(t, \sigma)$ bzw. $u(t, x)$ durch

$$x(t, \sigma) = \begin{cases} -t + \sigma & \text{für } \sigma < 0 \\ t + \sigma & \text{für } \sigma > 0 \end{cases} \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq t \\ -1 & \text{für } x \leq -t. \end{cases}$$

Man beachte, daß es in $|x| < t$ keine Charakteristiken gibt. Dort ist u also zunächst nicht erklärt. Es gibt jedoch ein Kontinuum von stückweise stetigen Lösungen in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, etwa mit $\alpha \geq -1$

$$u_\alpha(t, x) := \begin{cases} -1 & \text{für } 2x < -(1 + \alpha)t \\ -\alpha & \text{für } -(1 + \alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha & \text{für } 0 < 2x < (1 + \alpha)t \\ 1 & \text{für } (1 + \alpha)t < 2x. \end{cases}$$

2. Es sei $u^0(\sigma) := 1 - 2H(\sigma)$. Dann erhält man

$$x(t, \sigma) = \begin{cases} t + \sigma & \text{für } \sigma < 0 \\ -t + \sigma & \text{für } \sigma > 0 \end{cases} \quad u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \geq t \\ 1 & \text{für } x \leq -t. \end{cases}$$

Jetzt stoßen die Charakteristiken in $|x| < t$ aufeinander. Auch hier gibt es viele stückweise stetige Lösungen, etwa $u_1(t, x) = 1 - 2H(x)$ oder

$$u_2(t, x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x < -t \\ -3 & \text{für } -t < x < 0 \\ 3 & \text{für } 0 < x < t \\ -1 & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Um weiterzukommen definiert man zunächst wie üblich eine „schwache Lösung“ von Gl. (6.1) durch

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \{u \varphi_t + f(u) \varphi_x\} = - \int_{\mathbb{R}} u^0 \varphi(0, \cdot). \quad (6.4)$$

Dabei werden u^0 und u als beschränkt und meßbar angenommen. Schwache stückweise glatte Lösungen können nicht beliebig springen. u möge nämlich entlang der glatten Kurve $x = x(t)$ springen. Dann folgt aus Gl. (6.4) durch partielles Integrieren mit $s := dx/dt$ und $[u] := u_l - u_r$, der Differenz der Werte von links und rechts,

$$s \cdot [u] = [f(u)]. \quad (6.5)$$

Diese Gleichung heißt „Rankine-Hugoniot-Bedingung“.

Für die Burgers-Gleichung lautet sie $s = (u_l + u_r)/2$. Die im ersten Beispiel angegebenen Lösungen u genügen alle dieser Bedingung und sind schwache Lösungen. Eine stückweise glatte, aber nicht schwache Lösung wäre $u(t, x) := -1$ für $x < -t$, $:= 0$ für $-t < x < t$ und $:= 1$ für $t < x$. Auch die im zweiten Beispiel angegebenen Lösungen sind schwache Lösungen.

Eindeutigkeit läßt sich also aus Gln. (6.4,5) noch nicht beweisen. Hierzu ist eine weitere Bedingung erforderlich, die man im \mathbb{R}^1 auf verschiedene Weise erhalten kann:

1. Durch Verwenden der Viskositätsmethode. Die Lösung $u(t, x)$ wird durch $u := \lim u_\varepsilon$ für $\varepsilon \downarrow 0$ definiert, mit $u_{\varepsilon t} + f(u_\varepsilon)_x = \varepsilon u_{\varepsilon xx}$.
2. Die zweite Formulierung geht auf P. LAX [1957a] zurück. Sie besagt, daß die Charakteristiken längs Unstetigkeiten aneinanderstoßen, aber nicht verzweigen dürfen. Es werden also nur „Stoßwellen“ als Unstetigkeiten zugelassen. Um vom linearen Fall abzuheben, sei $a'(u) \neq 0$ (im linearen Fall gibt es „Kontaktunstetigkeiten“ entlang den Charakteristiken). Dann lautet die „Schockbedingung“

$$a(u_1) > s > a(u_2). \quad (6.6)$$

3. In der Physik gibt es „Entropiebedingungen“, die ebenfalls auf Gl. (6.6) hinauslaufen.

Von den in den Beispielen angegebenen Lösungen genügt nur u_1 aus dem zweiten Beispiel der Schockbedingung. Alle anderen Lösungen scheiden aus. Insbesondere fehlt also noch die Lösung für das zunächst einfacher aussehende erste Beispiel.

Um sie zu konstruieren, berechnet man die Charakteristik durch (t_0, x_0, u_0) mit $|x_0| < t_0$. Sie darf die bereits vorhandenen nicht treffen, weil das Verzweigen ergeben würde. So erhält man $x = u_0 t$. Also ist

$$u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -t \\ x/t & \text{für } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{für } t < x \end{cases} \quad (6.7)$$

die Lösung dieser Aufgabe. Man spricht in diesem Falle von „Verdünnungswellen“.

Im \mathbb{R}^1 kann man Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen (mit Schockbedingung) für $u^0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ zeigen, indem man die Aufgabe in eine Differenzgleichung überführt. Die Methode der Differenzenapproximation wurde zur Lösung partieller Differentialgleichungen zuerst in der berühmten Arbeit von R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY [1928] verwandt. P. LAX [1954] hat einen solchen Existenzbeweis für nichtlineare Erhaltungsgleichungen gegeben.

Bei den zweireihigen Systemen im \mathbb{R}^1 ist besonders das Riemann-Problem, das ursprünglich in der Gasdynamik auftrat, von großem Interesse. Hier sind die Anfangsdaten für $x < 0$ und $x > 0$ jeweils konstant. Mit Hilfe der Riemann-Invarianten läßt sich dieses Problem explizit durchrechnen. Schockbedingungen können formuliert werden, und wenn die Differenz der Anfangswerte $|u_l^0 - u_r^0|$ genügend klein ist, herrscht Eindeutigkeit. Das analoge Resultat gilt für entsprechende m -reihige Systeme.

Für variable Anfangswerte mit kleiner Totalvariation wurde für m -reihige Systeme im \mathbb{R}^1 von J. GLIMM [1965] ein Existenzbeweis mit Differenzenapproximation geführt. Die Frage nach der Eindeutigkeit scheint noch nicht völlig geklärt zu sein. Für weitere Einzelheiten sei noch einmal auf das Buch von J. SMOLLER [1983] und auf das von A. MAJDA [1984] verwiesen.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts soll über die Existenz globaler glatter Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung berichtet werden. Hier sind in den letzten Jahren von F. JOHN und seinen Schülern interessante Ergebnisse erzielt worden. Es soll also im \mathbb{R}^n die Gleichung $y_{tt} - \Delta y = f(Dy, \nabla Dy)$ mit $y(0) = y^0$ und $y_t(0) = y^1$ gelöst werden. Dabei ist $D := (\partial_t, \nabla)$. Wir verwenden auch $u := Dy$ und $u^0 := (y^1, \nabla y^0)$. Dann ist

$$u_t + Au = F(u, \nabla u) \quad (6.8)$$

mit $A := -\begin{pmatrix} 0 & \text{div} \\ \text{grad} & 0 \end{pmatrix}$, $F := \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u(0) = u^0$.

Im \mathbb{R}^1 entwickeln Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung immer Singularitäten, wie von F. JOHN [1974] und 1976 (zitiert in [1987]) gezeigt wurde. Bei großen Daten gilt das i.a. auch im \mathbb{R}^n . Von F. JOHN wurde 1981 (zitiert in [1987]) die „Lebensdauer“ solcher Lösungen definiert und abgeschätzt. Andererseits wurde bereits von K. JÖRGENS [1961] im \mathbb{R}^3 für spezielle $f = f(y)$ mit kubischem Wachstum und für große Daten die globale Existenz von Lösungen gezeigt, und es gibt auch ein Beispiel von L. NIRENBERG zur globalen Existenz glatter Lösungen im \mathbb{R}^3 mit quadratischem Wachstum in f für kleine Daten (in S. KLAINERMAN [1980, S. 45]).

Für eine große Klasse rechter Seiten wurde die globale Existenz glatter Lösungen bei kleinen Daten von S. KLAINERMAN [1980] und 1982 (zitiert in [1986]) bewiesen. Dazu verwendet er einmal einen lokalen Existenzsatz, der auf J. SCHAUDER [1935] und T. KATO [1975] zurückgeht, und zum anderen zunächst ein recht kompliziertes Iterationsschema mit Nash-Moser-Technik (vgl. J. MOSER [1961] und L. HÖRMANDER [1976]). In einer weiteren Arbeit gemeinsam mit G. PONCE [1983] verbessert er dann die benötigte \mathcal{L}^∞ -Abschätzung der Lösungen der linearen Gleichungen und ersetzt sie durch \mathcal{L}^q -Abschätzungen.

Man möchte dann die Anfangsdaten so klein wählen, daß die Lebensdauer lang genug wird, bis der lineare Einfluß der Streuung dominiert und die Lösung daran hindert zu explodieren. Auf diese Weise wird das Iterationsverfahren vermieden, und man kann einen eleganten Existenzbeweis führen. Die wesentlichen Beweisschritte werden im folgenden für den \mathbb{R}^3 angegeben. Dabei setzen wir

$$|F(u, \nabla u)| \leq c(|u| + |\nabla u|)^3 \quad (6.9)$$

für kleine $|u| + |\nabla u|$ voraus.

Es sei $v(t) = e^{-At}v^0$ die Lösung der linearen Gleichung. Dann folgen aus der Energieerhaltung und der Kirchhoffschen Formel unmittelbar

$$\|v(t)\|_{\mathcal{L}^2} = \|v^0\|_{\mathcal{L}^2} \quad \text{und} \quad \|v(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq c_\infty(1+t)^{-1} \cdot \|v^0\|_{\mathcal{L}^3}. \quad (6.10)$$

Dabei treten rechts Ableitungen bis zur dritten Ordnung auf. Durch Interpolieren erhält man daraus eine „ \mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q -Abschätzung“, nämlich

$$\|v(t)\|_{\mathcal{L}^q} \leq c_q(1+t)^{-1+2/q} \cdot \|v^0\|_{\mathcal{L}^p, N_p} \quad (6.11)$$

mit $q \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq 2$ und $3(2-p)/p \leq N_p < 3(2-p)/p + 1$.

Als nächstes wird der lokale Existenzsatz benutzt, um eine Lösung $u \in C([0, T], \mathcal{H}_s) \cap C_1([0, T], \mathcal{H}_{s-1})$ von Gl. (6.8) in $[0, T]$ mit $T > 1$ zu erhalten. Es folgt

$$\forall t \in [0, T] \quad \|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|\nabla u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} < 1.$$

$\|u^0\|_s$ wird dabei als klein vorausgesetzt ($\|\cdot\|_s$ bezeichnet die \mathcal{L}^2 -Norm aller Ableitungen bis zur Ordnung s , $s \geq 3$).

Im dritten Schritt werden „Energieabschätzungen“ durch elementares, aber trickreiches partielles Integrieren und Verwenden des Gronwallschen Lemmas hergeleitet, nämlich

$$\|u(t)\|_s \leq c_s \|u^0\|_s \exp \left\{ c_s \int_0^t \left(\|u(r)\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 + \|Du(r)\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \right) dr \right\}.$$

Der vierte Schritt ist wesentlich. Mit $\tau := 3$, $\rho := \tau + N_{6/5} = 5$ und $\sigma := 1 + \rho = 6$ definiert man zunächst

$$M_\tau(T) := \sup_{t \in [0, T]} (1+t)^{2/3} \cdot \|u(t)\|_{\mathcal{L}^6_\tau}$$

und zeigt dann, daß eine von T unabhängige Konstante M_0 existiert mit $M_\tau(T) \leq M_0$ für kleine $u^0 \in \mathcal{L}^2_{\sigma} \cap \mathcal{L}^{6/5}_\rho$. Um diese Abschätzung herzuleiten, geht man von

$$u(t) = e^{-At}u^0 + \int_0^t e^{-A(t-r)} F(u, \nabla u)(r) dr$$

aus, benutzt Ungleichungen für Produkte von Funktionen

$$\|F(u, \nabla u)\|_{\mathcal{L}^{6/5}_\rho} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} \cdot \|u\|_{\mathcal{L}^6_\tau}^2, \quad \text{sowie} \quad \|u\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^6_\tau}.$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der Differentialgleichung und der Sobolevschen Ungleichung. Mit $q = 6$ und $p = 6/5$ erhält man dann für $x := M_\tau(T)$ aus (6.11)

$$x \leq c\delta \left(1 + x^2 e^{cx^2} \right) \quad \text{mit} \quad \delta := \|u^0\|_{\mathcal{L}^2_\sigma} + \|u^0\|_{\mathcal{L}^{6/5}_\rho}.$$

Wenn δ genügend klein ist, impliziert das $M_\tau(T) \leq M_0$.

Daraus folgt für kleines δ eine a priori Abschätzung für die lokale Lösung $u(t)$, nämlich

$$\exists K_\sigma, \text{ unabhängig von } T, \quad \forall t \in [0, T] \quad \|u(t)\|_\sigma \leq K_\sigma \cdot \|u^0\|_\sigma.$$

Man kann deshalb den lokalen Existenzsatz wieder anwenden und erhält so die gewünschte globale Lösung $u \in C([0, \infty), \mathcal{H}_\sigma) \cap C_1([0, \infty), \mathcal{H}_{\sigma-1})$ für genügend kleines u^0 . Aus den vorangegangenen Resultaten folgt auch für $t \rightarrow \infty$

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^6_\tau} + \|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|Du(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} = O(t^{-2/3}).$$

Entsprechende Resultate gelten im \mathbb{R}^n für $n \geq 2$. Für $n \geq 6$ kann man in Gl. (6.9) quadratisches Wachstum zulassen. Auch für $n = 4, 5$ gilt das; allerdings muß dann der Beweis und insbesondere Abschätzung (6.10) modifiziert werden, indem man die \mathcal{L}^1 -Norm durch \mathcal{L}^2 -Normen geeigneter Γu^0 ersetzt. Die Γ sind Differentialoperatoren, die die Wellengleichung invariant lassen (vgl. S. KLAINERMAN [1985], D. CHRISTODOULOU [1986] und F. JOHN [1987]). Auch im \mathbb{R}^3 gibt es bei quadratischem Wachstum globale glatte Lösungen, wenn die Nichtlinearität eine „Null-Bedingung“ erfüllt [S. KLAINERMAN 1986]. Anfangsrandwertaufgaben in Außengebieten, z.B. für konvexe Hindernisse, wurden von Y. SHIBATA und Y. TSUTSUMI behandelt; und zwar 1983 mit Nash-Moser-Technik und [1986] mit a priori Abschätzungen. Weiteres findet man in den Vorlesungen von W.A. STRAUSS [1989] und F. JOHN [1990].

Literatur

- Adams, R.A. [1975]: Sobolev spaces. Academic Press; New York.
- Alber, H.D. and R. Leis [1988]: Initial-boundary value and scattering problems in mathematical physics. Springer Lect. Notes Math. 1357, 23–60.
- Arzelà, C. [1896/97]: Sul principio di Dirichlet. Rend. Ac. Sc. Bologna, nouv. série t. 1, 71–84.
- Beer, A. [1856]: Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction. Poggendorfs Annalen 98, 137–142.
- Belopol'skii, A.L. and M.Sh. Birman [1968]: The existence of wave operators in the theory of scattering with a pair of spaces. Math. USSR Izv. 2, 1117–1130.
- Brillouin, L. [1926]: La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives. C. R. 183, 24–26.
- Calderón, A.P. and A. Zygmund [1952]: On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 88, 85–139.
- Calderón, A.P. and A. Zygmund [1978]: On singular integrals with variable kernels. Applicable Anal. 7, 221–238.
- Carleman, T. [1923]: Sur les equations intégrales singulières à noyan réel et symétrique. Uppsala Univ. Arsskrift.
- Carleman, T. [1931]: La théorie des équations intégrales singulières et ses applications. Ann. de l'Inst. H. Poincaré 1, 401–430.
- Colton, D. [1984]: The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. SIAM Review 26, 323–350.
- Courant, R. [1920]: Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Z. 7, 1–57.
- Courant, R. K. Friedrichs und H. Lewy [1928]: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. 100, 32–74.
- Courant, R. und D. Hilbert [1924,1937]: Methoden der mathematischen Physik I, II. Springer-Verlag; Berlin et al.
- Dieudonné, J. [1981]: History of functional analysis. North-Holland; Amsterdam et al.
- Eidus, D.M. [1962]: The principle of limiting absorption. Math. Sb. 57 (99), 13–44 und AMS Transl. 47 (2), 157–191, (1965).
- Fréchet, M. [1907]: Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris, 144, 1414–1416.
- Fredholm, I. [1900]: Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Kong. Vetenskaps-Akademiens Förk. Stockholm 39–46.
- Fredholm, I. [1903]: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. 27, 365–390.
- Freudenthal, H. [1939]: Über ein Beugungsproblem aus der elektromagnetischen Lichttheorie. Compositio Math. 6, 221–227.

- Friedrichs, K.O. [1933]: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. *Math. Ann.* 109, 465–487 und 109, 685–713.
- Friedrichs, K.O. [1944]: The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Transact. Amer. Math. Soc.* 55, 132–151.
- Friedrichs, K.O. [1953]: On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 6, 299–326.
- Gårding, L. [1987]: Singularities in linear wave propagation. *Springer Lect. Notes Math.* 1241.
- Glimm, J. [1965]: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems and equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 18, 697–715.
- Hadamard, J. [1906]: Sur le principe de Dirichlet. *Bull. Soc. Math. Fr.* 34, 135–138.
- Hellwig, G. [1960]: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner; Stuttgart.
- Hilbert, D. [1904]: Über das Dirichletsche Prinzip. *Math. Ann.* 59, 161–186.
- Hilbert, D. [1905]: Über das Dirichletsche Prinzip. *J. reine angew. Math.* 129, 63–67.
- Hilbert, D. [1912]: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen. B.G. Teubner; Leipzig.
- Hille, E. and R. Phillips [1957]: Functional analysis and semigroups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* 31.
- Hopf, E. [1950]: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.* 3, 201–230.
- Hörmander, L. [1976]: The boundary problems of physical geodesy. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 62, 1–52.
- Hörmander, L. [1983–85]: The analysis of linear partial differential operators I–IV. Springer-Verlag; Berlin et al.
- Ikebe, T. [1960]: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 5, 1–34.
- John, F. [1974]: Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. *Comm. Pure Appl. Math.* 27, 377–405.
- John, F. [1987]: Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data. *Comm. Pure Appl. Math.* 40, 79–109.
- John, F. [1990]: Nonlinear wave equations, formation of singularities. *University Lecture Series No 2.* Amer. Math. Soc.; Providence, Rhode Island.
- Jörgens, K. [1961]: Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen. *Math. Z.* 77, 295–308.
- Jörgens, K. [1970]: Lineare Integraloperatoren. B.G. Teubner; Stuttgart.
- Kac, M. [1966]: Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73,4; 1–23.
- Kalf, H. U.W. Schmincke, J. Walter and R. Wüst [1975]: On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials. *Springer Lect. Notes Math.* 448, 182–226.
- Kasuga, T. [1957]: On Sobolev-Friedrichs generalisation of derivatives. *Proc. Jap. Ac.* 33, 596–599.
- Kato, T. [1975]: Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. *Springer Lect. Notes Math.* 448, 25–70.
- Kato, T. [1976]: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag; Berlin et al.
- Kirchhoff, G. [1891]: Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 2, Mathematische Optik. B.G. Teubner; Leipzig.
- Klainerman, S. [1980]: Global existence for nonlinear wave equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 33, 43–101.
- Klainerman, S. [1986]: The null condition and global existence to nonlinear wave equations. *Lect. Appl. Math.* 23, 293–326.
- Klainerman, S. and G. Ponce [1983]: Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 36, 133–141.
- Kodaira, K. [1950]: On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions. *Amer. J. Math.* 72, 502–544.
- Kondrachov, V.I. [1945]: Sur certaines propriétés des fonctions dans l'espace \mathcal{L}^p . *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 48, 535–538.
- Král, J. and J. Netuka [1977]: Contractivity of C. Neumann's operator in potential theory. *J. Math. Anal. Appl.* 61, 607–619.
- Kramers, H.A. [1926]: Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. *Z. für Physik* 39, 828–840.

- Krein, M.G. [1962]: Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments. *AMS Transl.* (2) 22, 163–288.
- Krein, M.G. and I.C. Gokhberg [1960]: Systems of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of arguments. *AMS Transl.* (2) 14, 217–287.
- Kupradze, V.D. [1934]: Über das „Ausstrahlungsprinzip“ von A. Sommerfeld. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1, 55–58.
- Lax, P.D. [1954]: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.* 7, 159–193.
- Lax, P.D. [1957a]: Hyperbolic systems of conservation laws II. *Comm. Pure Appl. Math.* 10, 537–566.
- Lax, P.D. [1957b]: Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.* 24, 627–646.
- Lax, P.D. and R.S. Phillips [1967]: *Scattering theory*. Academic Press; New York et al.
- Lebesgue, H. [1937]: Sur la méthode de Carl Neumann. *J. Math. Pures Appl.* 9 ser. 16, 205–217, 421–423.
- Leis, R. [1964]: Zur Eindeutigkeit der Randwertaufgaben der Helmholtzschen Schwingungsgleichung. *Math. Z.* 85, 141–153.
- Leis, R. [1986]: *Initial boundary value problems in mathematical physics*. B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart; John Wiley & Sons, Chichester et al.
- Levi, B. [1906]: Sul principio di Dirichlet. *Rend. Circ. Math. Palermo* 22, 293–360.
- Lewy, H. [1967/68]: On a variational problem with inequalities on the boundary. *J. Math. Mech.* 17, 861–884.
- Lichtenstein, L. [1909–1921]: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. *Encyklopädie d. math. Wiss.* II 3,1 197–210.
- Majda, A. [1984]: *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. *Appl. Math. Sci.* 53. Springer-Verlag; New York et al.
- Meister, E. [1987]: Einige gelöste und ungelöste kanonische Probleme der mathematischen Beugungstheorie. *Expo. Math.* 5, 193–237.
- Meyers, N.G. and J. Serrin [1964]: $H = W$. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 51, 1055–1056.
- Mikhlin, S.G. [1965]: *Multidimensional singular integrals and integral equations*. Pergamon; Oxford et al.
- Morawetz, C.S. and D. Ludwig [1968]: An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics. *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 187–203.
- Morawetz, C.S. J. Ralston and W. Strauss [1977]: Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 30, 447–508.
- Moser, J. [1961]: A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 47, 1824–1831.
- Müller, C. [1952]: Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl. *Math. Z.* 56, 80–83.
- Müller, C. [1954]: On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighborhood of a point. *Comm. Pure Appl. Math.* 7, 505–515.
- Muskhelishvili, N.I. [1953]: *Singular integral equations*. Noordhoff; Groningen.
- Neumann, C. [1877]: *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential*. B.G. Teubner; Leipzig.
- Neumann, C. [1887/88]: Über die Methode des arithmetischen Mittels I, II. *Leipziger Abh.* 13, 707–820 und 14, 565–726.
- Nirenberg, L. [1955]: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 8, 649–675.
- Noether, F. [1921]: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Math. Ann.* 82, 42–63.
- Oleinik, O. [1957]: Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Usp. Mat. Nauk (N.S.)* 12, 3–73 und *AMS Transl.* (2) 26, 95–172, (1963).
- Pazy, A. [1983]: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag; New York et al.
- Pearson, D.B. [1978]: A generalization of the Birman trace theorem. *J. Funct. Anal.* 28, 182–186.
- Perron, O. [1923]: Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. *Math. Z.* 18, 42–54.

- Poincaré, H. [1894]: Sur les équations de la physique mathématique. Rend. Circ. Mat. Palermo 8, 70–76.
- Prym, F.E. [1871]: Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. J. reine angew. Math. 73, 340–364.
- Reed, M. and B. Simon [1972–79]: Methods of modern mathematical physics I–IV. Academic Press; New York.
- Rellich, F. [1930]: Ein Satz über mittlere Konvergenz. Göttinger Nachr. 30–35.
- Rellich, F. [1943]: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jber. Dt. Math.-Verein. 53, 57–65.
- Riesz, F. [1907]: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C. R. Acad. Sc. Paris 144, 615–619, 734–736.
- Riesz, F. [1907]: Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommable. C. R. Acad. Sci. Paris, 144, 1409–1411.
- Riesz, F. [1918]: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. 41, 71–98.
- Riesz, F. [1934]: Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Acta Sci. Math. Szeged 7, 34–38
- Riesz, F. and B. Sz.-Nagy [1956]: Vorlesungen über Funktionalanalysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Berlin.
- Schauder, J. [1930]: Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. Studia Math. 2, 183–196.
- Schauder, J. [1931–32]: Potentialtheoretische Untersuchungen. Math. Z. 33, 602–640 und 35, 536–538.
- Schauder, J. [1935]: Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen. Fund. Math. 24, 213–246.
- Schmidt, E. [1907]: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann. 63, 433–476.
- Schmidt, E. [1908]: Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rend. Circ. mat. Palermo 25, 53–77.
- Seeley, R.T. [1978]: A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of \mathbb{R}^3 . Adv. Math. 29, 244–269.
- Shibata, Y. and Y. Tsutsumi [1986]: On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain. Math. Z. 191, 165–199.
- Sleeman, B.D. [1982]: The inverse problem of acoustic scattering. IMA J. Appl. Math. 29, 113–142.
- Smoller, J. [1983]: Shock waves and reaction-diffusion equations. Grundlehren d. math. Wiss. 258; Springer-Verlag, New York et al.
- Sobolev, S.L. [1936]: Méthode nouvelle á résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. Mat. Sborn. (N.S.) 1, 39–72.
- Sobolev, S.L. [1950]: Applications of functional analysis in mathematical physics. Leningrad und Amer. Math. Soc. Transl. Math. Mono. 7 (1963).
- Sommerfeld, A. [1912]: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jber. d. DMV 21, 309–353.
- Sommerfeld, A. und I. Runge [1911]: Anwendungen der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik. Ann. Phys. 35, 277–298.
- Stone, M.H. [1932]: Linear transformations in Hilbert space. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 15; New York.
- Strauss, W.A. [1989]: Nonlinear wave equations. Regional Conference Series in Mathematics No 73. Amer. Math. Soc.; Providence, Rhode Island.
- Vekua, I.N. [1967]: New methods for solving elliptic equations. North-Holland; Amsterdam et al.
- Vishik, M. and O.A. Ladyzhenskaya [1956]: Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations. Uspechi Mat. Nauk 11, 41–97 (6,72) und AMS Transl. (2) 10, 223–281.
- Weierstraß, K. [1895]: Über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip. Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14.7.1870. Mathematische Werke von Karl Weierstraß; Bd. II, 49–54. Mayer & Müller; Berlin.
- Wentzel, G. [1926]: Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik. Z. für Physik. 38, 518–529.

- Werner, P. [1962]: Randwertprobleme der mathematischen Akustik. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 10, 29–66.
- Werner, P. [1987]: Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern. *ZAMM* 67, T43–T54.
- Weyl, H. [1909]: Singuläre Integralgleichungen. *Math. Ann.* 66, 273–324.
- Weyl, H. [1910]: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. *Math. Ann.* 68, 220–269.
- Weyl, H. [1912]: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung. *Math. Ann.* 71, 441–479.
- Weyl, H. [1940]: The method of orthogonal projection in potential theory. *Duke Math. J.* 7, 411–444.
- Weyl, H. [1952]: Kapazität von Strahlungsfeldern. *Math. Z.* 55, 187–198.
- Wiener, N. [1924]: The Dirichlet problem. *J. Math. Phys.* 3, 127–146.
- Wiener, N. und E. Hopf [1931]: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 30–32, 696–706.
- Wilcox, C.H. [1962]: Initial-boundary value problems for linear hyperbolic partial differential equations of the second order. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 10, 361–400.
- Wilcox, C.H. [1975]: Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains. *Springer Lect. Notes Math.* 442.
- Wilcox, C.H. [1984]: Scattering theory for diffraction gratings. *Sound propagation in stratified fluids.* *Appl. Math. Sci.* 46, 50. Springer-Verlag; New York et al.
- Yosida, K. [1948]: On the differentiability and the representation of one-parameter semi groups of linear operators. *J. Math. Soc. Japan* 1, 15–21.
- Zaremba, S. [1927]: Sur une problème toujours possible comprenants, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann. *Journ. Math. pure et appl.* (9), 6, 127–163.