

Skript des Kurses
Mathematik II für Physiker

SoSe 2023, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Illia M. Karabash

unter der redaktionellen Hilfe von Antonia Wechselberger

Version Nr.6

Literatur.

- [AE1] Amann, H., und Escher, J., Analysis I, korrigierte Auflage. Birkhäuser, 2002 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [AE2] Amann, H., und Escher, J., Analysis II. Birkhäuser, 1999 (Papier-Buch in der Universitätsbibliothek).
- [AE3] Amann, H., und Escher, J., Analysis III, korrigierte Auflage. Birkhäuser, 2008 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [H2] Hildebrandt, S., Analysis 2. Springer-Verlag, 2003 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [FK1] Fischer, H. und Kaul, H., Mathematik für Physiker. Band 1. Springer Spektrum, 2018 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [FK2] Fischer, H. und Kaul, H., Mathematik für Physiker. Band 2. Springer Spektrum, 2014 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [FS] Forster, O., Szymczak, T., Übungsbuch zur Analysis 2: Aufgaben und Lösungen, 2003 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [KF] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., Elements of the theory of functions and functional analysis (in Englisch, andere Namen des Buches: "Introductory real analysis", "Measure, Lebesgue integrals, and Hilbert space", Papier-Buch in der Universitätsbibliothek).
- [R] Rudin, W., Analysis. De Gruyter Oldenbourg, 2022 (pdf-Volltext durch die Web-Seite der Universitätsbibliothek).
- [W2] Walter, W., Analysis 2. Springer-Verlag, 1990 (Papier-Buch in der Universitätsbibliothek).

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Übersicht des Kurses: mehrdimensionale Analysis | 7 |
| 1.1 | Übersicht des Themas 1: die Topologie der metrischen Räumen. | 7 |
| 1.2 | Übersicht des Themas 2: mehrdimensionale Differentialrechnung. | 10 |
| 1.3 | Übersicht des Themas 4: Vektoranalysis, grad -, div -, rot -Operatoren. . . . | 14 |
| 1.4 | Übersicht des Themas 3: mehrdimensionale Integralrechnung. | 15 |
| 2 | Metrische und normierte Räume. Innenprodukträume. | 16 |
| 2.1 | Metrische und normierte Räumen. | 16 |
| 2.2 | Innenprodukträume. | 18 |
| 3 | Topologie metrischer Räume. Konvergenz und Cauchy-Folgen, Vollständigkeit. | 20 |
| 3.1 | Topologie metrischer Räumen. | 20 |
| 3.2 | Konvergenz und Cauchy-Folgen. | 22 |
| 3.3 | Vollständigkeit. | 23 |
| 4 | Konvergenz, Rand, Vervollständigung und Kompaktheit. | 24 |
| 4.1 | Konvergenz, Abschluss und Rand. | 24 |
| 4.2 | Vervollständigung, dichte Mengen und Isometrie. | 26 |
| 4.3 | Teilfolgen und kompakte Mengen. | 27 |
| 5 | Erweiterte Zahlengerade, oberer/unterer Limes | 29 |
| 5.1 | Erweiterte reelle Zahlengerade, \limsup und \liminf | 29 |
| 5.2 | Obere und untere Grenzwerte. | 30 |
| 6 | Stetigkeit. Äquivalenzrelation und äquivalente Normen. | 31 |
| 6.1 | Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen auf metrischen Räumen. | 31 |
| 6.2 | Komponentenweise Stetigkeit. | 34 |
| 6.3 | Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen. Äquivalente Normen. | 34 |
| 6.4 | Stetigkeit von Einschränkungen. | 37 |
| 6.5 | Abschweifung: Äquivalenzrelation und äquivalente Normen. | 37 |
| 7 | Lipschitz-Stetigkeit. Operationen mit Grenzwerten und stetigen Funktionen. Beschränkte Lineare Operatoren. | 38 |
| 7.1 | Lipschitz-Stetigkeit. | 38 |
| 7.2 | Operationen mit stetigen Funktionen. | 39 |
| 7.3 | Stetige lineare Operatoren. | 40 |
| 7.4 | Polynome mehrerer Variablen. | 42 |
| 7.5 | Operationen mit Grenzwerten der Funktionen. | 43 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7.6 | Links-/rechtsseitige Grenzwerte und obere/untere Grenzwerte von Funktionen | 44 |
| 8 | Stetigkeit und Kompaktheit | 44 |
| 8.1 | Stetige Funktionen auf kompakten Mengen. | 44 |
| 8.2 | Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen (Hauptachsentransformation) . | 46 |
| 9 | Stetige Funktionen auf wegzusammenhängenden und zusammenhängenden Mengen. | 48 |
| 9.1 | Wegzusammenhängende Mengen und stetige Funktionen | 48 |
| 9.2 | Zusammenhängende Mengen. | 52 |
| 10 | Das mehrfache Riemann-Integral auf Zellen. | 53 |
| 10.1 | Die n-Zellen und ihre Zerlegungen. | 53 |
| 10.2 | Das mehrfache Riemann-Integral auf Zellen. | 54 |
| 10.3 | Vektorraum der Riemann-Integrierbaren Funktionen | 56 |
| 10.4 | Riemann-Integral durch Darboux-Obersummen & Untersummen | 57 |
| 11 | Iterierte und komponentenweise Integration. Integration auf quadrierbaren Mengen. | 58 |
| 11.1 | Sukzessive Integration auf n-Zellen. | 58 |
| 11.2 | Komponentenweise Integration der vektorwertigen Funktionen | 60 |
| 11.3 | Quadrierbare Mengen und Jordan-Maß | 61 |
| 11.4 | Riemann-Integral auf quadrierbaren Mengen | 62 |
| 11.5 | Cavalierisches Prinzip: iterierte Integration auf Normalbereichen. | 62 |
| 12 | Jordan-Maß als eine Erweiterung. Eigenschaften des Jordan-Maß und der quadrierbaren Mengen. | 64 |
| 12.1 | Elementarmengen und ihre (n-dim.) Inhalte. | 64 |
| 12.2 | Jordan-Erweiterung des Inhalts auf quadrierbare Mengen | 66 |
| 13 | Lebesgue-Maß, Lebesgue-Nullmengen und Riemann-Integrierbarkeit. | 69 |
| 13.1 | Erweiterung des Inhalts auf einem σ -Ring. | 69 |
| 13.2 | Anwendungen des Lebesgues-Maßes. | 73 |
| 13.3 | Anwendung der Lebesgue-Nullmengen zur Riemann-Integrierbarkeit. | 73 |
| 14 | Lebesgue-Integral. Fast überall definierte Funktionen. | 75 |
| 14.1 | Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist. | 75 |
| 14.2 | Komponentenweise Lebesgue-Integration. | 79 |
| 14.3 | Lebesgue-Integral für <i>fast überall</i> definierte Funktionen. | 80 |

| | |
|--|------------|
| 15 Verbindung zwischen uneigentlichem Riemann-Integral und Lebesgue-Integral. | 82 |
| 15.1 Uneigentliche Riemann-Integrale. | 82 |
| 15.2 Verbindung der Lebesgue- und uneigentlichen Riemann-Integrale. | 83 |
| 15.3 Anwendung auf den Integralvergleichsatz für Reihen | 84 |
| 16 Eigenschaften der Riemann- und Lebesgue-Integrale. Konvergenz von Lebesgue-Integralen. Satz von Fubini. | 84 |
| 16.1 Eigenschaften von Riemann- und Lebesgue- Integralen. | 84 |
| 16.2 Majorisierte und monotone Konvergenzen von Lebesgue-Integralen. | 89 |
| 16.3 Iterierte Integration und Satz von Fubini. | 91 |
| 17 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und Jacobimatrix. Kriterium der stetigen Differenzierbarkeit. Jacobideterminante. Transformationssatz. | 94 |
| 17.1 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und Jacobimatrix. | 94 |
| 17.2 Stetig differenzierbare Funktionen. | 97 |
| 17.3 Transformation von Integralen (Substitutionsregel) | 98 |
| 17.4 Erklärungen zum Transformationssatz. | 99 |
| 18 Umkehrsatz und Kettenregel. C^1-Diffeomorphismen. | 102 |
| 18.1 Der Umkehrsatz. | 102 |
| 18.2 Mehrdimensionale Kettenregel. | 103 |
| 18.3 Homöomorphismen und C^1 -Diffeomorphismen. | 104 |
| 18.4 $C^1(\bar{\Omega})$ -Abbildungen und Lipschitz-Stetigkeit. | 104 |
| 19 Wegintegrale. Länge eines Weges. Umparametrisierungen. | 105 |
| 19.1 Totale Variation und Länge eines Weges | 105 |
| 19.2 Wegintegrale. | 105 |
| 19.3 Beispiel der physikalischen Anwendung des Wegintegral bezüglich der Bogenlänge. | 111 |
| 19.4 Umparametrisierung von Wegintegralen. | 112 |
| 19.5 Andere Eigenschaften von Wegintegralen. | 117 |
| 20 C^q-Funktionen. Bewegung in einem Kraftfeld. Gradientenfelder, Stammfunktionen und Integrabilitätsbedingungen. | 119 |
| 20.1 C^q -Funktionen und partielle Ableitungen höherer Ordnung. | 119 |
| 20.2 Vektorfelder auf Gebieten. Kraftfelder und Arbeit. | 120 |
| 20.3 Wegunabhängigkeit, Gradientenfelder und Stammfunktionen. | 121 |
| 20.4 Integrabilitätsbedingungen. | 123 |
| 20.5 Einfach zusammenhängende Mengen und Homotopie. | 125 |

| | |
|--|------------|
| 21 Satz von der impliziten Funktion. Flächestücke, Flächeninhalt und Flächenintegrale. | 126 |
| 21.1 Zwei Weisen eine Fläche darzustellen. | 126 |
| 21.2 Satz von der impliziten Funktion. | 127 |
| 21.3 Flächestücke und Flächeninhalt. | 129 |
| 21.4 Flächenintegral bezüglich des skalaren Flächenelements $d\mathcal{A}(u)$ | 133 |
| 21.5 Integrale über 2-dim Flächen in \mathbb{R}^3 | 134 |
| 22 Divergenz. Gaußscher Integralsatz in \mathbb{R}^3. Rotation. Stokesscher Satz in \mathbb{R}^3. Lagrange-Multiplikatoren. | 136 |
| 22.1 Beispiele von Flächenintegralen bezüglich skalaren und vektoriellen Flächenelementen auf einer Kugel in \mathbb{R}^3 | 136 |
| 22.2 Divergenz und Gaußscher Integralsatz | 138 |
| 22.3 Die Rotation eines Vektorfelds. | 140 |
| 22.4 Jordanscher Kurvensatz und positiv orientierte geschlossene Jordan-Wege. . | 141 |
| 22.5 Satz von Stokes. | 141 |
| 23 L^2-Hilbertraum. Orthonormalbasen in Hilberträumen. Fourierreihen. | 145 |
| 23.1 Innenproduktraum. Hilbertraum. Halbhilbertraum. | 145 |
| 23.2 L^2 -Hilbertraum. | 147 |
| 23.3 Abstrakte Fourierreihen in Hilberträumen und Fourierreihen im L^2 -Hilbertraum. | 148 |

1 Übersicht des Kurses: mehrdimensionale Analysis

1.1 Übersicht des Themas 1: die Topologie der metrischen Räumen.

Definition 1.1 (metrischer Raum).

Ein *metrischer Raum* (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abstand-Funktion $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, die die folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in X$ hat:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ (*d ist positiv semidefinit*)
- (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*(a)+(b) \Leftrightarrow d ist positive definit*)
- (c) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- (d) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Funktion $d(\cdot, \cdot)$ heißt auch *der Abstand / die Metrik*.

Hier ist $A \times B = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$ das kartesische Produkt/Mengenprodukt der Mengen A und B .

Wir meinen mit \mathbb{K} immer den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beispiel 1.1 (metrische Räume). (a) (\mathbb{K}, d) und (\mathbb{Q}, d) mit $d(x, y) = |x - y|$ sind metrische Räume.

- (b) (\mathbb{K}^m, d_2) mit $d_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^m |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$ ist ein metrischer Raum. Hierbei sind $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ Vektoren in $\mathbb{K}^m = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (m Mal), wobei $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Wir bezeichnen als $|x| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^2\right)^{1/2}$ die euklidische Norm (den euklidischen Betrag) in \mathbb{K}^m . Damit gilt $d_2(x, y) = |x - y|$.

Satz 1.1 (normierte Räume sind metrische Räume).

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Mit $d(v, u) = \|v - u\|$ ist (V, d) ein metrischer Raum.

Definition 1.2 (normierter Raum).

Ein Vektorraum V über \mathbb{K} heißt *normierter (Vektor-)Raum*, wenn V mit einer Norm $\|\cdot\|$ ausgerüstet wird. In diesem Fall schreibt man den normierten Raum auch als $(V, \|\cdot\|)$.

Definition 1.3 (Erinnerung an den Norm-Begriff).

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn sie die folgenden Eigenschaften $\forall u, v \in V$ besitzt:

- (a) $\|u\| \geq 0$ (*positive Semidefinitheit*)
- (b) $\|u\| = 0$ genau dann, wenn $u = 0$, wobei $0 = 0_V$ der Nullvektor von V ist (hier bedeuten (a)+(b) zusammen *positive Definitheit*).
- (c) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(d) Dreieckungleichung : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Aufgabe 1.1.

Man beweise Satz 2.1 durch Definitionen 1.1 und 2.2.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $M \subseteq X$.

Definition 1.4 (die ϵ - δ -Definition der Stetigkeit).

Man sagt, dass eine Funktion (Abbildung) $f : M \rightarrow Y$ an der Stelle $p \in M$ stetig ist, falls es $\forall \epsilon > 0$ ein Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$ für alle $x \in M$ mit der Eigenschaft $d_X(x, p) < \delta$. Ist f stetig an allen Punkten $p \in M$, so heißt f stetig auf M .

Beispiel 1.2 (Stetigkeit der Norm).

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die Norm-Funktion $v \mapsto \|v\|$ eine stetige Funktion von M nach \mathbb{R} .

Aufgabe 1.2.

Beweisen Sie die Aussage des Beispiels 1.2 durch die Dreieckungleichung.

Man sagt, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$, falls es $\forall \epsilon > 0$ ein Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), y) < \epsilon \forall x \in M$ mit (der Eigenschaft) $d_X(x, x_0) < \delta$.

Die Topologie betrachtet offene, abgeschlossene, kompakte Mengen, Häufungspunkte, Ränder der Mengen und Konvergenz der Folgen und Teilfolgen. Wir betrachten sie nur in metrischen Räumen und benutzen allgemeinere topologische Räume nicht.

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 1.5 (offene Kugel).

Eine *offene Kugel* (in (X, d)) mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt/Zentrum $z \in X$ ist die Menge

$$K_r(z) := \{x \in X : d(z, x) < r\}.$$

Die Bezeichnung $:=$ bedeutet hier "ist definitionsgemäß gleich".

Der Doppelpunkt "": " in $\{x \in X : d(z, x) < r\}$ bedeutet auch "so dass". Also, "die Menge aller $x \in X$, so dass $d(z, x) < r$ ".

Definition 1.6 (offene und abgeschlossene Mengen). (a) Ein Punkt $x \in M$ heißt innerer Punkt von M , wenn es eine offene Kugel $K_r(x)$ gibt, so dass $K_r(x) \subseteq M$.

(b) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt offen, falls jedes $x \in M$ ein innerer Punkt von M ist.

(c) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus M$ offen ist.

Aufgabe 1.3.

Jede offene Kugel ist eine offene Menge.

Beispiel 1.3 (offene und abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}).

Sei (X, d) die reelle Zahlengerade \mathbb{R} mit $d(x, y) = d_2(x, y) = |x - y|$. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass $a < b$.

- (a) Das offene Intervall (a, b) ist eine offene Kugel $K_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und so auch eine offene (Teil)menge vom \mathbb{R} .
- (b) Die unendlichen Intervalle $(-\infty, c)$, $(d, +\infty)$, und ihre Vereinigung $(-\infty, c) \cup (d, +\infty)$ sind offene Mengen. (Warum?)
- (c) Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist eine abgeschlossene Menge. Das gilt auch für das degenerierte abgeschlossene Intervall $[a, a] = \{a\}$. (Warum?)

Aufgabe 1.4 (triviale offene und abgeschlossene Mengen).

Für einen beliebigen metrischen Raum (X, d) sind die Mengen X und \emptyset gleichzeitig offen und abgeschlossen.

Satz 1.2.

Falls $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen M_α ist, dann ist die Menge $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} M_\alpha$ auch abgeschlossen.

Die Menge \mathbb{A} aller Indizes α heißt Indexmenge.

Zum Beispiel, $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, $M_\alpha = [-1/\alpha, 1/\alpha]$, dann ist die Menge $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} M_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} [-1/\alpha, 1/\alpha] = \{0\}$ abgeschlossen.

Definition 1.7 (Der Abschluss und der Rand). (a) Sei $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen vom (X, d) mit der Eigenschaft $M \subseteq M_\alpha$. Dann heißt die abgeschlossene Menge $\overline{M} := \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} M_\alpha$ Abschluss (abgeschlossene Hülle) von M .

(b) Die abgeschlossene Menge $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$ heißt Rand von M .

Die Definitionen der Kompaktheit kommt später.

Theorem 1.1 (Kriterium der Kompaktheit von Mengen im \mathbb{K}^m).

Eine Teilmenge M des normierten Raum \mathbb{K}^m ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{K}^m ist.

Definition 1.8 (beschränkte Menge).

Eine Teilmenge M eines metrischen Raums (X, d) heißt beschränkt, wenn $M \subseteq K_r(z)$ für eine offene Kugel $K_r(x)$ im X .

Theorem 1.2 (Der Satz vom Minimum und Maximum).

Sei E eine kompakte Teilmenge vom (X, d) . Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Bezeichnen wir $m := \inf_{x \in E} f(x)$ und $M := \sup_{x \in E} f(x)$. Dann:

$-\infty < m \leq M < +\infty$, und $\exists x_{\min}, x_{\max} \in E$, so dass $f(x_{\min}) = m$ und $f(x_{\max}) = M$. Das bedeutet, dass f ihr Minimum m und ihr Maximum M auf E annimmt.

Beispiel 1.4 (Satz vom Minimum und Maximum).

Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre im \mathbb{R}^n . Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reell symmetrische $n \times n$ -Matrix. Sei $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle_{\mathbb{R}^n} = (Ax) \cdot x = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} x_j x_k$$

die entsprechende quadratische Form. Hier sind $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ standardmäßige Skalarprodukte des \mathbb{R}^n ; $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Abkürzung für den Matrizen-Vektorraum $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

Da Q auf S^{m-1} stetig ist und S^{m-1} in \mathbb{R}^m kompakt ist, impliziert der Satz vom Minimum und Maximum, dass Q auf S^{m-1} ihr Minimum m und ihr Maximum M annimmt. Eigentlich ist $m = \lambda_1$ der kleinste Eigenwert und $M = \lambda_m$ der größte Eigenwert von A .

Man kann durch dieses Beispiel den Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Hauptachsentransformation) beweisen (s. Linear Algebra).

1.2 Übersicht des Themas 2: mehrdimensionale Differentialrechnung.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ eine offene Menge. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine Funktion.

Definition 1.9 (Differenzierbarkeit und Ableitung im \mathbb{R}^n).

Die Funktion f heißt (Fréchet/total) differenzierbar an der Stelle $y \in \Omega$, wenn es einen linearen Operator (Homomorphismus) $A = A_y \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{|x - y|} (f(x) - f(y) - A(x - y)) = 0. \quad (1.1)$$

Der lineare Operator $A = A_y$ in (1.1) ist eindeutig bestimmt und heißt *Ableitung von f in y* . Man bezeichnet A_y als $\partial f(y)$ oder $Df(y)$.

Hier bezeichnen wir als $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ den Vektorraum der linearen Operatoren (Homomorphismen) $H : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Man kann die Ableitung $Df(y)$ durch partielle Ableitungen $\partial_j f(y) = \partial_{x_j} f(y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(y)$ darstellen. Sei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ die *Standardbasis im \mathbb{K}^n* .

Definition 1.10 (partielle Ableitungen).

Sei $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$. Die partielle Ableitung $\partial_j f(y) \in \mathbb{K}^m$ von f an der Stelle y ist der folgende Limes in \mathbb{K}^m

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(y) := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} (f(y + \zeta e_j) - f(y)) \quad (\text{falls dieser Limes existiert}).$$

Wenn $m = 1$, ist $\partial_j f(y)$ eine Zahl (das heißt $\partial_j f(y) \in \mathbb{R}$ oder $\partial_j f(y) \in \mathbb{C}$).

Satz 1.3. (a) Falls die totale Ableitung $A_y = Df(y)$ existiert, dann existieren auch alle partiellen Ableitungen in y .

(b) Seien $m = 1$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Dann können wir $Df(y)$ mit dem Zeilenvektor $(\partial_1 f(y), \partial_2 f(y), \dots, \partial_n f(y))$ identifizieren.

Beweis. In der Tat, falls $A = Df(y)$ existiert, ist $A \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ ein linearer Operator, der mit einer $1 \times n$ -Matrix identifiziert werden kann, das heißt, mit einem Zeilenvektor (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Definitionsgemäß

$$f(x) - f(y) - (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \dots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} = o(|x - y|), \text{ wenn } x \rightarrow y \quad (1.2)$$

wobei $g(x) = o(h(x))$, wenn $x \rightarrow y$ bedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow y} \frac{1}{|h(x)|} g(x) = 0$ (*klein o-Landau-Symbol* := "die Funktion g ist asymptotisch gegenüber h vernachlässigbar").

Man kann durch die Definition von $\partial_j f(y)$ zeigen, dass $a_j = \partial_j f(y)$ (Aufgabe). \square

Definition 1.11 (Gradient).

Sei $m = 1$. Sei f in $y \in \Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ differenzierbar. Dann kann man *den Gradient* $\nabla f(y)$ *von* f *in* y als den Spaltenvektor

$$(Df(y))^\top = (\partial_1 f(y), \partial_2 f(y), \dots, \partial_n f(y))^\top \in \mathbb{K}^n$$

definieren. Die Bezeichnungen für den Gradient sind $\nabla f(y)$ und **grad** $f(y)$.

Der Gradient $\nabla f(y)$ zeigt in \mathbb{K}^n die Richtung des größten Höhenanstiegs von f . Mit Hilfe des Gradienten kann man lokale Extrema bestimmen.

Satz 1.4 (notwendige Bedingung lokaler Extrema).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $y \in \Omega$ differenzierbar.

Falls y ein lokales Extremum ist, gilt $\nabla f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Definition 1.12 (kritische Punkte).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Falls $\nabla f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$, sagt man, dass f einen *kritischen Punkt* in y hat.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ eine offene Menge. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ eine Funktion.

Definition 1.13 (Differenzierbarkeit auf einer offenen Menge).

Ist eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ an jeder Stelle $x \in \Omega$ differenzierbar, sagt man, dass f in Ω differenzierbar ist. Dann definiert $(Df)(x) = A_x$, $x \in \Omega$ eine Abbildung (Ableitungsfunktion) $Df : \Omega \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $Df : x \mapsto A_x$.

Um die 2-te Ableitung von f als die Ableitung $D(Df)$ von der Ableitungsfunktion $Df(\cdot)$ zu definieren, braucht man die Definition von Konvergenz im Vektorraum $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Satz 1.5.

Der Vektorraum der linearen Operatoren $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|A\| = \|A\|_{\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)} := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Jetzt kann man höhere Ableitungen

$$D^2 f = D(Df) \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)),$$

$$D^3 f = D(D^2 f) \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m))), \dots,$$

definieren (bis zur Ordnung k , für die diese Ableitungen existieren).

Sei $m = 1$. Die Operatoren des Raums $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ heißen Linearformen. Man kann

- den Raum $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}))$ mit dem Vektorraum $\mathbb{L}^2(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ der bilinearen Formen $B : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ identifizieren,
- den Raum $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})))$ mit dem Vektorraum $\mathbb{L}^3(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ der trilinearen Formen $B : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ identifizieren, ...

Beispiel 1.5 (Hessematrix).

Sei $m = 1$ und sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei f 2-mal differenzierbar in Ω . Dann existiert für jedes $p \in \Omega$ die Hessematrix $H_f(p) = (\partial_j \partial_k f(p))_{j,k=1}^n$. Die entsprechende bilineare Form $b(x, y) = \langle H_f(p)x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j,k=1}^n \partial_j \partial_k f(p) x_k y_j$, $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kann man mit der 2-ten Ableitung $D^2 f(y)$ identifizieren.

Die Taylor-Formel der 2-ten Ordnung

$$f(x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} \langle H_f(y)(x - y), (x - y) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(|x - y|^2),$$

wenn $x \rightarrow y$, kann man benutzen um die Existenz eines lokalen Maximum/Minimum zu beweisen.

Hier bezeichnet das klein o -Landau-Symbol $o(|x - y|^2)$ eine Funktion g der Form $g(x) = \alpha(x)|x - y|^2$ mit $\alpha(x) \rightarrow 0$, wenn $x \rightarrow y$.

Falls y ein kritischer Punkt ist, das heißt, falls

$$\nabla f(y) = (\partial_1 f(y), \partial_2 f(y), \dots, \partial_n f(y))^T = 0,$$

haben wir

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2} \langle H_f(y)(x - y), (x - y) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(|x - y|^2) \text{ für } x \rightarrow y.$$

Also liefert die Hessematrix für kritische Punkte y die Approximation von $f(x) - f(y)$.

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2} \langle H_f(y)(x - y), (x - y) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(|x - y|^2), \text{ wenn } x \rightarrow y.$$

Theorem 1.3 (hinreichende Bedingungen lokaler Extrema).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Nehmen wir an, dass die 2-mal differenzierbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ einen kritischen Punkt $y \in \Omega$ hat. Dann gilt:

- (a) Der Punkt y ist eine lokale Minimumstelle, wenn die Hessematrix $H_f(y)$ positiv definit ist (das heißt, alle Eigenwerte von $H_f(y)$ sind > 0).
- (b) Der Punkt y ist eine lokale Maximumstelle, wenn $H_f(y)$ negativ definit ist (das heißt, alle Eigenwerte von $H_f(y)$ sind < 0).
- (c) Falls $H_f(y)$ mindestens einen negativen Eigenwert $\lambda_1 < 0$ und mindestens einen positiven Eigenwert $\lambda_n > 0$ hat, ist y keine Extremstelle.

Wenn $H_f(y)$ nur positiv oder negativ *semidefinit*, aber nicht definit, können wir Th. 1.3 nicht anwenden. Taylor-Formeln 3-ter Ordnung, 4-ter Ordnung, \dots , können doch manchmal helfen.

Um mit höheren Ableitungen zu arbeiten, brauchen wir die *funktionalen (Vektor)räume der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen* mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, wobei $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$ heißt C^0 -Funktion, falls f stetig ist. Also ist $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{K}^m) = C^0(\Omega, \mathbb{K}^m)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Definition 1.14 (C^k -Vektorräume). (a) Sei $k = 1$. Der Vektorraum $C^1(\Omega, \mathbb{K}^m)$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist der Raum aller Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$, so dass f differenzierbar in Ω ist und $Df \in C(\Omega, \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m))$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum $C^k(\Omega, \mathbb{K}^m)$ ist der Raum aller Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$, so dass f k -mal differenzierbar in Ω ist und die k -te Ableitung $D^k f$ ist eine stetige Funktion (mit Werten im Raum der k -lineare Abbildungen $\mathbb{L}^k(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$).

(c) Sei $k = (+)\infty$. Der Vektorraum $C^\infty(\Omega, \mathbb{K}^m)$ ist definitionsgemäß

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{K}^m) := \bigcap_{\ell=1}^{+\infty} C^\ell(\Omega, \mathbb{K}^m).$$

Das bedeutet, C^∞ -Funktionen sind unendlich oft differenzierbar (glatt).

Man nennt manchmal C^k -Funktionen C^k -glatte Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ eine offene beschränkte Menge. Dann ist der Abschluss $\bar{\Omega}$ eine abgeschlossene Menge, und sogar eine kompakte Menge (Aufgabe, benutzen Sie Th. 1.1).

Sei $C(\bar{\Omega}, \mathbb{K}^m)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Satz 1.6 (Supremums-Norm).

$C(\bar{\Omega}, \mathbb{K}^m)$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \|f\|_\infty := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \quad (s. Th 1.2).$$

Die Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ heißt *gleichmäßige Konvergenz*.

1.3 Übersicht des Themas 4: Vektoranalysis, grad-, div-, rot-Operatoren.

Die Abbildung $\mathbf{grad} : C^1(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{K}^n)$,

$$\mathbf{grad} f(x) = \nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

ist ein linearer Operator vom Raum der skalaren (\mathbb{K} -wertigen) Funktionen $C^1(\Omega, \mathbb{K})$ in den Raum $C(\Omega, \mathbb{K}^n)$ der stetigen Vektorfelder.

Definition 1.15 (Vektorfelder).

Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$ (oder manchmal $M \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$). Eine Funktion $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt ein Vektorfeld auf der Menge M .

Vektorfelder (besonders vom Typ $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$) spielen sehr wichtige Rolle in der Physik:

- Geschwindigkeitsfelder von Gasen und Flüssigkeiten,
- Kraftfelder, Gravitationsfelder,
- elektrische und magnetische Felder,
- Gradienten von skalarwertigen Funktionen (von Skalarfeldern).

Bemerkung 1.1.

Normalerweise benutzen wir den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und Vektorfelder vom Typ $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x, t)$,

$$\mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{w} : M \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei x in einer offenen Menge $M = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oder in einer abgeschlossenen Menge $M = \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$ ist.

Normalerweise nehmen wir an, dass Vektorfelder stetige oder C^k -Funktionen sind (C^k -Vektorfelder).

Sei $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ ein C^1 -Vektorfeld auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das heißt, $\mathbf{u} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man kann dann die linearen Operatoren **div** (Divergenz) und **rot** (Rotation) definieren:

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3, \quad \mathbf{div} : C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R}),$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_1 & u_1 \\ \mathbf{e}_2 & \partial_2 & u_2 \\ \mathbf{e}_3 & \partial_3 & u_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{rot} : C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

hier ist " \times " ein (formales) Vektorprodukt/Kreuzprodukt, und so gilt

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2)\mathbf{e}_1 + (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3)\mathbf{e}_2 + (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\mathbf{e}_3.$$

Man kann mit **div** und **rot** die *Maxwell-Gleichungen* kurz schreiben.

Seien $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ die elektrische und $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ die magnetische Feldstärken, ε_0 die Permittivität und μ_0 magnetische Permeabilität des Vakuums. Dann kann man das *einfachste Maxwell-Gleichungssystem (ohne elektrischen Strom und im Vakuum)* schreiben als

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E}(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(x, t), & \partial_t \mathbf{H}(x, t) &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}(x, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(x, t) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H}(x, t) &= 0\end{aligned}$$

1.4 Übersicht des Themas 3: mehrdimensionale Integralrechnung.

Betrachten wir das *Anfangswertproblem*

$$\mathbf{E}(x, 0) = \mathbf{E}^0(x), \mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}^0(x), x \in \mathbb{R}^3,$$

für das Maxwell-Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E}(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(x, t), & \partial_t \mathbf{H}(x, t) &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}(x, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(x, t) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H}(x, t) &= 0,\end{aligned}$$

mit zusätzlichen Bedingungen $0 = \operatorname{div} \mathbf{E}^0(x) = \operatorname{div} \mathbf{H}^0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Die *gesamte elektromagnetische Energie* (EM-Energie) zum Zeitpunkt t ist

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}(x, t)|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}(x, t)|^2) dx,$$

wobei die nichtnegative Funktion

$$(\varepsilon_0 |\mathbf{E}(x, t)|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}(x, t)|^2)$$

die elektromagnetische Energiedichte (im Vakuum) ist.

Sei das *3-dimensionale Riemann-Integral* $\mathcal{E}(0)$ endlich

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}^0(x)|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}^0(x)|^2) dx < +\infty,$$

dann ist es möglich die Lösung $\{\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)\}$ in solcher Weise zu definieren, dass sie existiert und eindeutig ist. Außerdem $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$ für alle $t \geq 0$. Mit anderen Worten, die *EM-Energie im \mathbb{R}^3 -Vakuum ist eine Erhaltungsgröße*.

Leider ist das 3-dim. Riemann-Integral für solche mathematischen Theorien nicht hinreichend. Partielle Differentialgleichungen haben oft eine gute Theorie in $L^2(\Omega)$ -Räumen (oder genereller im $L^p(\Omega)$ -Räumen), die durch Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral definiert werden.

Zusätzlich zum 3-dim. Riemann-Integral brauchen wir auch

- *skalare und vektorielle Kurven-Integrale* und
- *Oberflächenintegrale*,

um den physikalische Sinn von $\operatorname{div} \mathbf{u}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ zu verstehen (*Gauß-Integralsatz, Zirkulation, 3-dim. Stokes-Satz*).

2 Metrische und normierte Räume. Innenprodukträume.

2.1 Metrische und normierte Räumen.

Definition 2.1 (metrischer Raum).

Ein *metrischer Raum* (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abstand-Funktion $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, die die folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in X$ hat:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ (d ist positiv semidefinit)
- (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(zusammen mit (a) bedeutet es, dass d positiv definit ist)
- (c) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- (d) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Funktion $d(\cdot, \cdot)$ heißt auch *der Abstand / die Metrik*.

Wir bezeichnen als \mathbb{K} immer den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 2.2 (Norm).

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, wenn sie die folgenden Eigenschaften $\forall u, v \in V$ besitzt:

- (a) $\|u\| \geq 0$ (positive Semidefinitheit)
- (b) $\|u\| = 0$ genau wenn $u = 0_V$
(zusammen mit (a) bedeutet es positive Definitheit).
- (c) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- (d) Dreieckungleichung : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Definition 2.3 (normierter Raum).

Ein Vektorraum V über \mathbb{K} heißt *normierter Raum*, wenn V mit einer Norm $\|\cdot\|$ ausgerüstet ist. In diesem Fall schreibt man den normierten Raum als $(V, \|\cdot\|)$.

Satz 2.1 (normierte Räume sind metrische Räume).

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Mit $d(v, u) = \|v - u\|$ ist (V, d) dann ein metrischer Raum.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2.1 (Euklidische Räume über \mathbb{K}).

Der Vektorraum \mathbb{K}^n mit der Betrags-Norm $|x| = (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}$ ist ein normierter Vektorraum.

Und so ist \mathbb{K}^n auch ein metrischer Raum (\mathbb{K}^n, d_2) mit dem Abstand $d_2(x, y) = |x - y|$.

Satz 2.2.

Sei M eine Teilmenge des metrischen Raums (X, d) . Dann ist (M, d) auch ein metrischer Raum.

Bemerkung 2.1 (induzierter Abstand und Einschränkung).

Dieser Satz ist nicht komplett mathematisch streng geschrieben. Streng ist: (M, ρ) mit $\rho = d|_{M \times M}$ ist ein metrischer Raum, wobei $\rho = d|_{M \times M}$ die Einschränkung von $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf $M \times M$ ist.

“Einschränkung” bedeutet, dass $\rho(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in M$, aber der Definitionsbereich $M \times M$ von $\rho = d|_{M \times M}$ “kleiner” als der Definitionsbereich $X \times X$ von d ist. Der Abstand ρ heißt induzierter Abstand (durch den Abstand d).

Man sagt auch, dass die Betrags-Norm $|\cdot|$ den Abstand $d_2(x, y) = |x - y|$ in \mathbb{K}^n induziert.

Beispiel 2.2 (metrischer Raum, der kein Vektorraum ist).

Sei $S^2 = \partial K_1(0)$ die Einheitssphäre in (\mathbb{R}^3, d_2) , $d_2(x, y) := |x - y|$. Dann ist $(S^2, d_2) = (S^2, d_2|_{S^2 \times S^2})$ der metrische Raum mit dem induzierten Abstand $d_2|_{S^2 \times S^2}$.

Beispiel 2.3 (ℓ^2 -Raum).

Sei $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen (unendlicher Tupel) $x = (x_1, x_2, \dots)$ mit den Komponenten (Koordinaten) $x_j \in \mathbb{K} \quad \forall j$, so dass $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty$. Das bedeutet, $\ell^2 = \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$, wobei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots$ (abzählbar unendlichmal). Dann ist ℓ^2 ein Vektorraum und ein normierter Raum mit der Norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}$.

Bemerkung 2.2 (unendliche Dimensionalität vom ℓ^2 -Raum). (a) Der $\ell^2(\mathbb{N})$ -Raum ist eine unendlich-dimensionale Version des euklidischen Raums \mathbb{K}^n . Die Betrags-Norm $|x| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ in \mathbb{K}^n nennt man manchmal ℓ^2 -Norm. Man benutzt oft auch den Raum $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$, der isomorph mit $\ell^2(\mathbb{N})$ ist.

(b) Ein Vektorraum V über \mathbb{K} ist unendlich-dimensional, wenn V keine endliche Basis besitzt (eine Basis im Sinne von “Math I” heißt auch Hamelbasis).

(c) Sei U ein Untervektorraum des Vektorraums V . Dann ist die Dimensionalität von $U \leq$ der Dimensionalität von V .

Aufgabe 2.1.

Beweisen Sie, dass ℓ^2 ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Der ℓ^2 -Raum ist ein Vektorraum über \mathbb{K} , weil $\forall x, y \in \ell^2$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die Linearkombination

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) \text{ zu } \ell^2 \text{ gehört,}$$

das heißt, $x, y \in \ell^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j + \beta y_j|^2 < +\infty$.

Diese Aussage folgt z.B. aus der folgenden Ungleichung.

Satz 2.3 ($\ell^2(\mathbb{N})$ -Dreieckungleichung).

Für beliebige Folgen $(x_j)_{j=1}^{+\infty}, (y_j)_{j=1}^{(+)\infty}$ von komplexen Zahlen gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 \right)^{1/2},$$

wobei

$$(+\infty)^\alpha = +\infty \text{ für } \alpha > 0, \quad +\infty + c = +\infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{ und } +\infty \leq +\infty. \quad (2.1)$$

Der Beweis der $\ell^2(\mathbb{N})$ -Dreieckungleichung kann man aus der $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ -Dreiecksungleichung erhalten, oder aus der $\ell^2(\mathbb{N})$ -Version der Cauchy-(Bunjakowski-Schwarz)-Ungleichung.

Satz 2.4.

Der ℓ^2 -Vektorraum ist ein normierter Raum mit der Norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2}$.

Beweis. Die Eigenschaft (d) der Norm ist Satz 2.3 (ℓ^2 -Dreieckungleichung). Die restlichen Eigenschaften der Norm beweist man genauso wie für $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ im "Math I".

□

2.2 Innenprodukträume.

Beispiel 2.4 (Skalarprodukt des ℓ^2 -Raums).

Der ℓ^2 -Raum ist ein Beispiel eines Innenproduktraums mit dem inneren Produkt (Skalarprodukt)

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

Das innere Produkt induziert die Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\ell^2}}$, und so auch den Abstand $\|x - y\|_2$.

Definition 2.4 (inneres Produkt/Skalarprodukt).

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Ein *inneres Produkt/Skalarprodukt auf V* ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in V$:

- (a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- (b) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Linearität bzgl. der 1. Variable),
- (c) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (d) $\langle x, x \rangle = 0$ genau wenn $x = 0_V$.

Definition 2.5 (Innenproduktraum und Hilbertraum). (a) Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit einem inneren Produkt heißt *Innenproduktraum* (manchmal auch Prähilbertraum).

(b) Wenn die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften (a)-(c) der Def. 2.4 besitzt (und wir haben keine Information über Eigenschaft (d)), heißt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Halbhilbertraum*.

Bemerkung 2.3 (Symmetrie-Eigenschaft im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt reellwertig, und so, (a) \iff (a') $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (*Symmetrie*). Dann (b) \implies (b') $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) und (b') zusammen bedeuten, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine bilineare Form ist, und (a') bedeutet, dass diese bilineare Form symmetrisch ist.

Bemerkung 2.4 (hermitesche Symmetrie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (a) + (b) \implies

$$(b'') \langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \bar{\alpha} \langle z, x \rangle + \bar{\beta} \langle z, y \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(b'') bedeutet, dass $\langle x, y \rangle$ konjugiert linear bzgl. der 2. Variabel ist. In diesem Fall ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Sesquilinearform.

Satz 2.5 (Skalarprodukt induziert eine Norm).

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein Innenproduktraum. Dann ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V .

Der Beweis benutzt die folgende Ungleichung.

Theorem 2.1 (Cauchy-(Bunjakowski)-Schwarz-Ungl., CBS-Ungl.).

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein Halbhilbertraum. Dann

$$|\langle x, y \rangle_V| \leq \|x\|_V \|y\|_V, \text{ wobei } \|x\|_V := \sqrt{\langle x, x \rangle_V}.$$

Beweis des Satzes 2.5 (Skalarprodukt induziert eine Norm). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Sei $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Wir sollen beweisen, dass $\|\cdot\|$ die Eigenschaften der Norm erfüllt.

(d) Die Dreieckungleichung folgt aus CBS-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2, \text{ wobei } \operatorname{Re} \zeta \text{ der Realteil von } \zeta \in \mathbb{C} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Weil $|\operatorname{Re} \zeta| \leq |\zeta|$, haben wir aus der CBS-Ungleichung

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(a) $\|x\| \geq 0$, weil $\langle x, x \rangle \geq 0$.

(b) $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_V$.

(c) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|.$ □

Die Eigenschaften des inneren Produkts sind für $\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ offenbar. Die ℓ^2 -Dreieckungleichung folgt aus der CBS-Ungleichung für ℓ^2 .

Beispiel 2.5 (L^2 -Skalarprodukt).

Seien $-\infty < a < b < +\infty$. Die Menge $C[a, b] = C_{\mathbb{K}}[a, b]$ der stetigen \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf $[a, b]$ ist ein Vektorraum bzgl. der Addition der Funktionen und der Multiplikation der Funktionen mit den Zahlen. Mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in C_{\mathbb{K}}[a, b],$$

ist $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ ein Innenproduktraum.

Satz 2.6 (L^2 -Skalarprodukt in $C[a, b]$).

Die Sesquilinearform $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ definiert ein inneres Produkt im Vektorraum $C[a, b] = C_{\mathbb{C}}[a, b]$.

Beweis. Der Beweis der Eigenschaften (a)-(c) der Def. 2.4 ist offenbar.

Beweisen wir (d): $\langle f, f \rangle_{L^2} = 0$ genau wenn $f = 0$. $f = 0 = 0_{C[a, b]}$ bedeutet, dass $f \equiv 0$, das heißt, $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$. In diesem Fall, klar $\langle f, f \rangle_{L^2} = \int_a^b |f|^2 dx = 0$.

Umgekehrt, sei $f \neq 0$. Wir beweisen, dass $\langle f, f \rangle > 0$.

Weil $f \neq 0$, $\exists x_0 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) \neq 0$. Da f stetig ist, ist $|f|$ auch stetig, und \exists hinreichend kleine $\epsilon, \delta > 0$, so dass

$$|f(x)| > \delta \text{ für } x \in I_\epsilon = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap [a, b].$$

Dann $\langle f, f \rangle = \int_{I_\epsilon} |f|^2 dx + \int_{[a, b] \setminus I_\epsilon} |f|^2 dx \geq \int_{I_\epsilon} |f|^2 dx \geq \delta \int_{I_\epsilon} dx = \delta \cdot \nu_1(I_\epsilon) > 0$, wobei $\nu_1(I_\epsilon) = |I_\epsilon| > 0$ die Länge (1-dim. Jordan-Maß) des Intervalls I_ϵ ist. \square

3 Topologie metrischer Räume. Konvergenz und Cauchy-Folgen, Vollständigkeit.

3.1 Topologie metrischer Räumen.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq X$.

Definition 3.1 (offene Kugel und punktierte offene Kugel). (a) Eine offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt/Zentrum $z \in X$ ist definitiongemäß die Menge

$$K_r(z) := \{x \in X : d(z, x) < r\}.$$

(b) Dann heißt die Menge

$$K_r^\bullet(z) := \{x \in X : 0 < d(z, x) < r\} = K_r(z) \setminus \{z\}$$

die punktierte offene Kugel.

Definition 3.2 (innere, Häufungs-, isolierte Punkte). (a) Ein Punkt $p \in E$ heißt *innerer Punkt von E*, wenn es eine offene Kugel $K_r(p)$ gibt, so dass $K_r(p) \subseteq E$.

Die Menge aller inneren Punkte von E bezeichnen wir als E° .

(b) Ein Punkt $p \in X$ heißt *Häufungspunkt von E*, wenn $E \cap K_r^\bullet(p) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$.

Die Menge aller Häufungspunkt von E bezeichnen wir als E' .

(c) Falls $p \in E$ und $p \notin E'$, wird p ein *isolierter Punkt von E* genannt.

Definition 3.3 (offene und abgeschlossene Mengen). (a) Eine Menge $E \subseteq X$ heißt *offen*, falls $E = E^\circ$.

(b) Eine Menge $E \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X^c := X \setminus E$ *offen* ist.

Satz 3.1 (Kriterien von Abgeschlossenheit und Offenheit). (a) Eine Menge E ist genau dann abgeschlossen, wenn $E' \subseteq E$.

(b) Eine Menge E ist genau dann *offen*, wenn ihr Komplement $X^c = X \setminus E$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.1.

Beweisen Sie Satz 3.1. Für (b) benutzen Sie $(E^c)^c = E$.

Beispiel 3.1.

In $(\mathbb{C}, |\cdot|) \cong (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ betrachten wir die offene Kreisscheibe (2-dim. Kugel) $K_1(0) = \{|z| < 1\}$. Dann $(K_1(0))^o = K_1(0)$, und so ist $K_1(0)$ offen.

$(K_1(0))' = \{|z| \leq 1\} = \overline{K_1(0)} \not\subseteq K_1(0) \Rightarrow K_1(0)$ nicht abgeschlossen.

Die Menge der isolierten Punkten von $K_1(0)$ ist die *leere Menge* \emptyset .

Das Komplement $K_1(0)^c = \mathbb{C} \setminus K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ ist abgeschlossen, und $(\mathbb{C} \setminus K_1(0))' = \mathbb{C} \setminus K_1(0)$.

Satz 3.2.

Wenn $p \in E'$, gibt es in jeder $K_r(p)$ unendlich viele Punkte von E .

Beweis. $p \in E' \Rightarrow \exists p_1 \in E \cap K_{r_1}^\bullet(p)$.

Sei $0 < r_2 < d(p, p_1)$, dann $\exists p_2 \in E \cap K_{r_2}^\bullet(p)$. Klar $p_2 \neq p_1$.

Sei $0 < r_3 < d(p, p_2)$, dann ... □

Korollar 3.1 (endliche Mengen).

Sei $E = \{p_j\}_{j=1}^n$ eine Menge mit endlich vielen $n \in \mathbb{N}$ Punkten. Dann:

(a) E hat keine Häufungspunkte.

(b) E ist abgeschlossen.

(c) Jedes $p_j \in E$ ist ein isolierter Punkt von E .

Bilden wir ein Beispiel der unendlichen Menge E mit $E' = \emptyset$.

Beispiel 3.2.

In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ hat \mathbb{Z} keine Häufungspunkte, $\mathbb{Z}' = \emptyset$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{Z}$ ist isoliert. \mathbb{Z} ist abgeschlossen. $\mathbb{Z}^o = \emptyset$.

Beispiel 3.3 (E^o, E', E^c hängen vom metrischen Raum X ab). (a) In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist \mathbb{R} gleichzeitig abgeschlossen und offen. (Erinnerung: im (X, d) sind X und \emptyset gleichzeitig abgeschlossen und offen.) $\mathbb{R}' = \mathbb{R} = \mathbb{R}^o, \mathbb{R}^c = \emptyset$.

(b) In $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist \mathbb{R} abgeschlossen, aber nicht offen. $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^o = \emptyset, \mathbb{R}^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \neq 0\}$, wobei $\text{Im } z$ Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3.2 (Abgeschlossenheit hängt vom metrischen Raum X ab).

Bilden Sie ein Beispiel mit zwei Teilmengen E und M im $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, so dass alle folgenden Aussagen wahr sind:

- $E \subseteq M$,
- E ist abgeschlossen im induzierten metrischen Raum (M, d_2) ,
- E ist nicht abgeschlossen im $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Satz 3.3 (Vereinigungen und Schnitte offener Mengen). (a) Für jede Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ offener Mengen G_α ist ihre Vereinigung $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} G_\alpha$ offen.

(b) Für jede (endliche) Familie $\{G_j\}_{j=1}^n$ offener Mengen G_j ist ihre Schnittmenge $\bigcap_{j=1}^n G_j$ offen.

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} E_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} E_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} E_\alpha^c \quad \implies \text{(Dualität)}$$

Korollar 3.2 (Vereinigungen & Schnitte abgeschlossener Mengen). (a) Für jede Familie $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ abgeschlossener Mengen F_α ist ihre Schnittmenge $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} F_\alpha$ abgeschlossen.

(b) Für jede (endliche) Familie $\{F_j\}_{j=1}^n$ abgeschlossener Mengen F_j ist ihre Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n F_j$ abgeschlossen.

3.2 Konvergenz und Cauchy-Folgen.

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.4 (Konvergenz).

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ konvergiert gegen $p \in X$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, p) = 0$. In diesem Fall sagt man, dass p der Grenzwert (oder der Limes) von $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ist.

Bezeichnungen: $p_n \rightarrow p$, wenn $n \rightarrow \infty$, oder $\lim p_n = p$.

Definition 3.5 (äquivalente “ ε - δ Definition”).

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ konvergiert gegen $p \in X$, wenn es $\forall \varepsilon > 0$ eine Nummer $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(p_n, p) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.

Diese zwei Definitionen sind offenbar äquivalent.

Definition 3.6 (Cauchy-Folgen).

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ heißt Cauchy-Folge, wenn es $\forall \varepsilon > 0$ eine Nummer $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.

Satz 3.4.

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Der Beweis ist wie im Kurs “Math 1”.

(Gegen)beispiel 3.4 (Cauchy-Folge \Rightarrow konvergente Folge).

Die Folge der rationalen Zahlen $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ mit $p_1 = 2$ und $p_n = \frac{p_{n-1}}{2} + \frac{1}{p_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$, im metrischen Raum (\mathbb{Q}, d_2) ist eine Cauchy-Folge, aber $\{p_n\}$ konvergiert nicht im Raum \mathbb{Q} .

Die Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert im $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegen die positive Wurzel der Gleichung $x = x/2 + 1/x$ (Aufgabe). Also $|p_n - \sqrt{2}| \rightarrow 0$, und so ist $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge im $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und im (\mathbb{Q}, d_2) .

Als \mathbb{Q} bezeichnen wir den Körper aller rationalen Zahlen.

3.3 Vollständigkeit.

Definition 3.7 (vollständige Räume). (a) Falls jede Cauchy-Folge im metrischen Raum (X, d) konvergiert, sagt man, dass (X, d) vollständig ist.

(b) Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, wenn V mit dem induzierten Abstand $d(u, v) = \|u - v\|$ vollständig ist.

(c) Ein Innenproduktraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt vollständig, wenn der induzierte normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ mit $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ vollständig ist.

Beispiel 3.5 (vollständige und nicht vollständige Räume). (a) (\mathbb{Q}, d_2) ist nicht vollständig, s. Beispiel 3.4.

(b) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ist vollständig ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(c) $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ und $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$ sind vollständige Innenprodukträume.

Definition 3.8 (Banachräume und Hilberträume). (a) Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

(b) Ein vollständiger Innenproduktraum heißt Hilbertraum.

Theorem 3.1.

$\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ und $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$ sind Hilberträume.

Sei $-\infty < a < b < +\infty$.

Theorem 3.2.

Der Innenproduktraum $(C_{\mathbb{K}}[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ ist nicht vollständig und damit kein Hilbertraum.

Bemerkung 3.1 (die 1. Definition vom Raum $L^2[a, b]$). (a) Der Lebesgue-Raum $L_{\mathbb{K}}^2[a, b]$ kann als die Vervollständigung des Raums $(C_{\mathbb{K}}[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ definiert werden.

$L_{\mathbb{K}}^2[a, b]$ ist ein Hilbertraum.

(b) Die Hilberträume $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$, $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$, und $L_{\mathbb{K}}^2[a, b]$ sind isometrisch isomorph.

4 Konvergenz, Rand, Vervollständigung und Kompaktheit.

4.1 Konvergenz, Abschluss und Rand.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq X$.

Definition 4.1 (Umgebung [AE1],[W2]).

Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $p \in X$, wenn $p \in U^\circ$. Das bedeutet, U ist genau dann eine Umgebung von p , wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $K_r(p) \subseteq U$.

Bemerkung 4.1 ([R], [H1]).

Die r -Umgebung von p ist gleichbedeutend mit der Kugel $K_r(p)$.

Bemerkung 4.2.

In manchen Büchern ist eine Umgebung immer offen (und manchmal soll die Umgebung sogar eine zusätzliche Bedingung erfüllen [FK1]).

Definition 4.2 (äquivalente 3. Definition der Konvergenz).

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ konvergiert gegen $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von p eine Nummer $N = N(U)$ gibt, so dass $p_n \in U \quad \forall n \geq N$.

Diese Definition ist äquivalent mit der 1. und 2. Definitionen der Konvergenz.

Satz 4.1 (Grenzwert im metrischen Raum ist eindeutig).

Wenn $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ gegen p_1 konvergiert und gegen p_2 konvergiert, dann $p_1 = p_2$.

Definition 4.3.

Wenn eine Folge ein Grenzwert hat, sagt man, dass die Folge konvergiert (oder konvergent ist).

Wenn eine Folge keinen Grenzwert in (X, d) hat, sagt man, dass die Folge divergent ist (in (X, d)).

Korollar 4.1.

Betrachten wir $E \subset X$ als einen metrischen Unterraum (E, d) von (X, d) (das heißt, der Abstand d induziert den Abstand $d|_{E \times E}$ in E). Nehmen wir an, dass $\exists \{p_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ mit solchem (X, d) -Grenzwert $\lim p_n = p$, so dass $p \notin E$. Dann:

(a) In (E, d) ist $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ nicht konvergent, aber eine Cauchy-Folge;

(b) Der metrische Unterraum (E, d) ist nicht vollständig.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $m \in \mathbb{N}$.

Satz 4.2 (Konvergenz im \mathbb{K}^m ist komponentenweise).

Sei $\{x^{[n]}\}_{n=1}^\infty$ mit $x^{[n]} = (x_1^{[n]}, x_2^{[n]}, \dots, x_m^{[n]}) \in \mathbb{K}^m$ eine Folge in $(\mathbb{K}^m, |\cdot|)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\{x^{[n]}\}_{n=1}^\infty$ konvergiert in \mathbb{K}^m gegen $x = (x_1, \dots, x_m)$;

(b) $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x komponentenweise, das heißt, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{[n]} = x_j$ im Sinne von \mathbb{K} für jedes j mit $1 \leq j \leq m$.

Der Beweis ist eine Aufgabe.

Satz 4.2 ist *nicht wahr* in ℓ^2 (in ℓ^2 setzen wir $m = \infty$). In ℓ^2 haben wir: (a) \Rightarrow (b), aber (b) $\not\Rightarrow$ (a).

Satz 4.3 (Cauchy-Folgen in \mathbb{K}^m).

Sei $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}^m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(a) $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathbb{K}^m ;

(b) jede Folge $\{x_j^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} .

Der Beweis des Satzes 4.3 ist eine Aufgabe.

Bemerkung 4.3 (Beweis der Vollständigkeit von \mathbb{K}^m).

Satz 4.2 + Satz 4.3 + die Vollständigkeit von $\mathbb{K} \implies$ die Vollständigkeit von \mathbb{K}^m .

Die Menge aller Häufungspunkt von E bezeichnen wir als E' .

Satz 4.4 (Konvergenz und Häufungspunkten).

$p \in E'$ genau dann, wenn $\exists \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \setminus \{p\}$, so dass $\lim p_n = p$.

Der Beweis folgt direkt aus der Definition von Häufungspunkten (Aufgabe).

Definition 4.4 (Erinnerung von Vorlesung 1: Abschluss und Rand). (a) Sei $\{E_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ die

Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von (X, d) mit der Eigenschaft $E \subseteq E_{\alpha}$.

Dann heißt die abgeschlossene Menge $\bar{E} := \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} E_{\alpha}$ Abschluss (abgeschlossene Hülle) von E .

(b) Die Menge $\partial E = \bar{E} \cap \bar{E}^c$ heißt Rand von E . (Erinnerung: $E^c := X \setminus E$.)

Satz 4.5 (Abschluss und Rand durch Dualität). (a) $\bar{E} = ((E^c)^{\circ})^c$,

(b) $\partial E = ((E^c)^{\circ} \cup E^{\circ})^c = \bar{E} \setminus E^{\circ}$

Bemerkung 4.4. (a) Als Schnittmengen von abgeschlossenen Mengen sind *ein Rand und ein Abschluss immer abgeschlossen*.

(b) Der Abschluss \bar{E} ist die "kleinste" abgeschlossene Menge M mit der Eigenschaft $E \subseteq M$.

(c) E ist genau dann abgeschlossen, wenn $E = \bar{E}$.

Korollar 4.2.

Sei (X, d) vollständig. Betrachten wir $E \subset X$ als einen metrischen Unterraum (E, d) von (X, d) . Dann ist (E, d) genau dann vollständig, wenn E in (X, d) abgeschlossen ist.

Der Beweis ist eine Aufgabe.

Satz 4.6 (Abschluss und Rand durch Konvergenz). (a) $p \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\exists \{p_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, so dass $\lim p_n = p$.

(b) $p \in \partial E$ genau dann, wenn $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ und $\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset E^c$, so dass $\lim x_n = p = \lim y_n$.

Satz 4.7 (Verbindung zwischen \overline{E} , E' und ∂E).
 $\overline{E} = E \cup E' = E \cup \partial E$

4.2 Vervollständigung, dichte Mengen und Isometrie.

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 4.5 (dichte Mengen).

Eine Menge $E \subseteq X$ heißt dicht in X , wenn $\overline{E} = X$.

Bemerkung 4.5.

Sei (X, d) vollständig. Sei $E \subseteq X$ und sei (E, d) der induzierte metrische Raum. Dann ist (\overline{E}, d) eine Vervollständigung von (E, d) .

Falls zusätzlich E dicht in X ist, ist (X, d) eine Vervollständigung von (E, d) (z.B. ist $X = \mathbb{R}$ die Vervollständigung von $E = \mathbb{Q}$). Eine Vervollständigung ist *wesentlich* eindeutig.

Definition 4.6 (Isometrie und isometrische Isomorphie).

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räumen.

(a) Eine Abbildung (Funktion) $\varphi : X \rightarrow Y$ heißt Isometrie, wenn $d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$.

(b) Eine Isometrie φ heißt isometrischer Isomorphismus (von metrischen Räumen), wenn φ surjektiv ist.

Aufgabe 4.1. (a) Jede Isometrie ist injektiv.

(b) Und damit ist jeder isometrische Isomorphismus bijektiv.

(c) Die Umkehrabbildung φ^{-1} einer Isometrie ist eine Isometrie von $(\varphi(X), d_Y)$ nach (X, d_X) .

(d) Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ eines isometrischen Isomorphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ ist auch ein isometrischer Isomorphismus.

Definition 4.7 (Erinnerung: Bild und Umkehrabbildung). (a) Die Menge $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$ heißt Bild von X unter φ .

(b) Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ injektiv. Dann existiert die Abbildung $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x \quad \forall x \in X$. Diese Abbildung φ^{-1} heißt Umkehrabbildung von φ .

Definition 4.8 (Vervollständigung).

Ein vollständiger metrischer Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ heißt Vervollständigung von (X, d) , wenn es eine solche Isometrie $\varphi : X \rightarrow \widehat{X}$ gibt, so dass das Bild $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$ dicht in \widehat{X} ist.

Theorem 4.1.

Jeder metrische Raum kann vervollständigt werden.

Z.B. ist $(L^2[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ eine Vervollständigung von $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$.

Bemerkung 4.6.

Eine Vervollständigung ist *wesentlich eindeutig*, in dem Sinn, dass zwei Vervollständigungen $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ immer isometrisch isomorph sind (das heißt, \exists ein isometrischer Isomorphismus $\psi : \widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_2$).

4.3 Teilfolgen und kompakte Mengen.

Sei $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge im metrischen Raum (X, d) .

Definition 4.9 (Teilfolgen und Teilfolgengrenzwerte). (a) Betrachten wir eine streng monoton steigende Folge $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ (das heißt, $n_k < n_{k+1} \quad \forall k$). Dann heißt die Folge $\{p_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ eine Teilfolge von $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.

(b) Wenn $\{p_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ gegen $p \in X$ konvergiert, heißt p Teilfolgengrenzwert von $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.

Beispiel 4.1 (mehrere Teilfolgengrenzwerte für eine Folge).

Für die Folge $x_n = (-1)^n + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, in \mathbb{R} gibt es genau zwei Teilfolgengrenzwerte ± 1 (das heißt, die Teilfolgengrenzwerte sind 1 und (-1)). Die Folge $\{x_n\}$ ist divergent. Die Teilfolgen $\{x_{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{x_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sind konvergente Teilfolgen mit den Grenzwerten (-1) und 1.

Satz 4.8.

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \iff$ jede Teilfolge $\{p_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ konvergiert gegen p .

Definition 4.10 (Folgenkompaktheit).

Eine Menge $K \subseteq X$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ einen Teilfolgengrenzwert in K hat.

Die Definition vom Kompaktheit kommt später.

Theorem 4.2.

In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Menge K genau dann kompakt, wenn K folgenkompakt ist.

Es gibt topologische Räume, in denen Th.4.2 nicht wahr ist.

Wir arbeiten fast immer mit metrischen Räumen und verstehen so Kompaktheit meistens als Folgenkompaktheit.

Theorem 4.3 (äquival. mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß).

Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ in \mathbb{R} ist kompakt.

Beispiel 4.2 (archimedische Spirale A).

Betrachten wir im \mathbb{C} die Menge $A = \{re^{i\varphi} : r = \phi, \phi > 0\}$. Wir benutzen hier *Polarkoordinaten in \mathbb{C}* : jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat eine Darstellung $z = re^{i\varphi} = r \exp(i\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r > 0$ und 'Winkel' $\varphi \in \mathbb{R}$. Der Radius $r = |z|$ ist hier eindeutig, aber das (komplexe) Argument φ ist nicht eindeutig, $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi n)} \forall n \in \mathbb{Z}$.

Unter einer zusätzliche Bedingung $\varphi \in (c, c + 2\pi]$ (mit einer fixierten Konstante $c \in \mathbb{R}$) wird φ eindeutig.

Das komplexe Argument φ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heißt *normalisiertes Argument* von z . Die entsprechende Funktion

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi], \text{ so dass } z = |z|e^{i\arg(z)} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

heißt Hauptzweig des (komplexen) Argument. Die archimedische Spirale A ist nicht kompakt.

(Manchmal benutzt man $\varphi \in [0, 2\pi)$ für die Normierung und den Hauptzweig [AE1]). Die archimedische Spirale A ist nicht kompakt, weil sie nicht beschränkt ist.

Definition 4.11 (beschränkte Menge).

Eine Teilmenge E eines metrischen Raums (X, d) heißt beschränkt, wenn $E \subseteq K_r(z)$ für eine offene Kugel $K_r(x)$ im X .

Theorem 4.4 (notwendige Bedingung der Kompaktheit).

Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beispiel 4.3. (a) \mathbb{R} und \mathbb{C} sind nicht kompakt (nicht beschränkt).

(b) $K_r(0)$ in \mathbb{K}^n ist nicht kompakt (nicht abgeschlossen).

(c) In \mathbb{R}^n sind $\overline{K_1(0)} = \{|x| \leq 1\}$ und $\partial K_1(0) = S^{n-1}$ kompakt.

Theorem 4.5 (Kriterium des Kompaktheit der Mengen im \mathbb{K}^m).

Eine Teilmenge M des normierten Raum \mathbb{K}^m ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{K}^m ist.

In unendlich dimensionalen Hilberträumen ist Th.4.5 nicht wahr.

Beispiel 4.4.

Im ℓ^2 ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{K_1(0)}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt. (Warum?)

Definition 4.12 (Überdeckungen und Teilüberdeckungen).

Eine offene Überdeckung der Menge E ist eine Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ von offenen Mengen G_α , so dass $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} G_\alpha$.

Wenn zusätzlich $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}_1} G_\alpha$ für eine Teilindexmenge $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}$, sagt man, dass $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_1}$ eine Teilüberdeckung ist.

Falls die Indexmenge \mathbb{A} (oder \mathbb{A}_1) endlich ist, sagt man, dass $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ eine endliche Überdeckung (bzw. Teilüberdeckung) ist.

Definition 4.13 (Kompaktheit).

Eine Menge K heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine *endliche* Teilüberdeckung enthält.

Definition 4.14 (beschränkte Folge).

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ beschränkt ist.

Satz 4.9. (a) Für jede in (X, d) konvergente Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ist die Menge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ kompakt.

(b) Jede in (X, d) konvergente Folge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ist beschränkt.

Satz 4.10.

Sei K eine kompakte Teilmenge von (X, d) .

(a) Sei $F \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $F \cap K$ kompakt.

(b) Sei $F \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist F kompakt.

Bemerkung 4.7.

Es ist möglich, dass in (X, d) der ganze Raum X kompakt ist. Dann sagt man, dass (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist.

Z.B. nehmen wir wie im Satz 4.10 eine kompakte Teilmenge S^{n-1} des \mathbb{R}^n . Dann ist (S^{n-1}, d_2) ein kompakter metrischer Raum.

5 Erweiterte Zahlengerade, oberer/unterer Limes

5.1 Erweiterte reelle Zahlengerade, \limsup und \liminf .

Sei $\widehat{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und sei $\arctan(\pm\infty) := \pm\frac{\pi}{2}$. Definieren wir $d_{\arctan}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Satz 5.1.

$(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ ist ein kompakter metrischer Raum.

Beweis. Die Abbildung $\arctan : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ nach $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (mit dem Betrag-Abstand d_2). Da $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kompakt ist (Satz von Bolzano-Weierstraß), ist $(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ auch kompakt. \square

Bemerkung 5.1.

$(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ ist eine Vervollständigung von $(\mathbb{R}, d_{\arctan})$, denn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist eine Vervollständigung von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist isometrisch isomorph mit $(\mathbb{R}, d_{\arctan})$.

Bemerkung 5.2.

Nehmen wir an, dass $-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \widehat{\mathbb{R}}$. Dann kann man sagen, dass $(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ eine Kompaktifizierung von \mathbb{R} mit vollständiger Totalordnung ist. $(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ oder einfach $\widehat{\mathbb{R}}$ heißt die *erweiterte reelle Zahlengerade*.

Wir benutzen auch die strikte Ungleichungen $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definition 5.1 (unendliche Grenzwerte $\pm\infty$).

Für eine reelle Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ bedeutet der Limes $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty$ definitionsgemäß, dass $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen $\pm\infty$ im metrischen Raum $(\widehat{\mathbb{R}}, d_{\arctan})$ konvergiert.

Die Definition vom Limes $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ durch einen metrischen Raum (stereografische Projektion) kommt später. Jetzt machen wir das einfacher, aber äquivalent.

Definition 5.2 (unendlicher Grenzwert ∞).

Für eine reelle oder komplexe Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ bedeutet der Limes $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$ definitionsgemäß, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Man kann diese Definition auch in \mathbb{K}^m benutzen.

5.2 Obere und untere Grenzwerte.**Satz 5.2.**

Für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ ist die Menge T aller Teilfolgengrenzwerte nicht leer.

Beweis. $T \neq \emptyset$, weil $\widehat{\mathbb{R}}$ kompakt (eigentlich folgenkompakt) ist. □

Definition 5.3 (obere und untere Grenzwerte).

Sei T die Menge T aller Teilfolgengrenzwerte von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$. Dann:

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf T$ heißt unterer Grenzwert von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup T$ heißt oberer Grenzwert von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Man benutzt auch die Bezeichnungen $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Beispiel 5.1. (a) Für die Folge $\{x_n\} = \{(-1)^n + 1/2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert in \mathbb{R} nicht.

- (b) Für $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. In \mathbb{R} und in $\widehat{\mathbb{R}}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nicht (die Folge divergiert), aber $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (im Sinne der Definition 5.2).

- (c) Die Folge $\{x_n\} = \{(-1)^n n + n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert in \mathbb{R} , aber konvergiert in $\widehat{\mathbb{R}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
Zur Beachtung: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ist auch wahr.

Satz 5.3. (a) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ konvergiert genau dann in $\widehat{\mathbb{R}}$, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. In diesem Fall, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- (b) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert genau dann in \mathbb{R} , wenn die obere und untere Grenzwerte gleich und endlich sind.

Theorem 5.1 (Konvergenzradius der Potenzreihe, s. Math 1).

Für jede Potenzreihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (z - z_0)^k, \text{ mit } a_k \in \mathbb{C} \quad \forall k, \quad (5.1)$$

gibt es eine Zahl $\rho \in [0, +\infty]$, die Konvergenzradius heißt, so dass:

- (a) die Reihe (5.1) konvergiert für alle $z \in K_\rho(z_0)$ (zudem konvergiert sie absolut);
(b) die Reihe (5.1) divergiert (in \mathbb{C}) für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho\}$;

(c) $\rho = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$, wobei $\rho = \begin{cases} 0, & \text{if } \limsup |a_n|^{1/n} = +\infty \\ +\infty, & \text{if } \limsup |a_n|^{1/n} = 0 \end{cases}$.

Die Kreisscheibe $K_\rho(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ heißt "Konvergenzkreis".

6 Stetigkeit. Äquivalenzrelation und äquivalente Normen.

6.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen auf metrischen Räumen.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Sei $f : E \rightarrow Y$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich E und mit der Zielmenge/dem Zielraum Y .

Definition 6.1 (Grenzwert einer Funktion).

Sei $p \in E'$. Die Funktion f hat einen Grenzwert/Limes q an der Stelle p , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = q \text{ für jede Folge } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ mit } \lim x_n = p.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$, oder $f(x) \rightarrow q$, wenn $x \rightarrow p$.

Bemerkung 6.1.

Man kann eine äquivalente $\varepsilon - \delta$ Definition von $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = q$ geben (Aufgabe).

Korollar 6.1.

Hat f einen Grenzwert an der Stelle $p \in E'$, ist dieser Grenzwert eindeutig.

Der Beweis folgt aus Satz 5.1 (Eindeutigkeit vom Limes einer Folge).

Definition 6.2 (Stetigkeit durch Umgebungen).

Eine Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in E$ (in $x_0 \in E$), falls es zu jeder Umgebung $W \subseteq Y$ von $f(x_0)$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt, so dass $f(U) \subseteq W$.

Bemerkung 6.2 (äquivalente $\varepsilon - \delta$ Definition).

Man kann in Def. 6.2 “Umgebung W ” mit ε -Umgebung $K_\varepsilon(f(x_0))$ und “Umgebung U ” mit δ -Umgebung $K_\delta(x_0)$ ersetzen.

Das produziert die äquivalente $\varepsilon - \delta$ Definition: Eine Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt stetig an $x_0 \in E$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in K_\delta(x_0)$.

Definition 6.3 (Folgenstetigkeit \Leftrightarrow Def. 6.2 in metrischen Räumen).

Eine Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt stetig an $x_0 \in E$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = x_0$.

Bemerkung 6.3.

In metrischen Räumen sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent. Die gilt in topologischen Räumen nicht allgemein.

Bemerkung 6.4.(a) Falls x_0 ein isolierter Punkt des Definitionsbereichs E ist, ist f an x_0 immer stetig (gemäß unsere Definitionen).

(b) Falls $x_0 \in E'$, ist f und x_0 genau dann stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definition 6.4.

Falls f an der Stelle x_0 stetig ist, heißt x_0 eine Stetigkeitsstelle (von f). Wenn f an der Stelle x_0 unstetig ist, heißt x_0 eine Unstetigkeitsstelle (von f).

Wir brauchen Beispiele von (Un)stetigkeitsstellen.

Beispiel 6.1 (Dirichletfunktion ohne Stetigkeitsstellen).

Die Funktion $f_D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (6.1)$$

hat keine Stetigkeitsstellen. Sie ist unstetig an jede Stelle des Definitionsbereichs $[0, 1]$.

Ist das möglich, dass eine (nichttriviale) Funktion nur eine einzige Stetigkeitsstelle hat?

Beispiel 6.2 (Funktion mit einzelner Stetigkeitsstelle).

Die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (6.2)$$

hat nur eine Stetigkeitsstelle $x_0 = 0$. Sie ist unstetig an jedem Punkt $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Beispiel 6.3 ((Un)stetigkeit des Hauptzweigs des komplexen Arguments).

Erinnerung: Die Funktion $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ heißt der Hauptzweig des (komplexen) Argument und wird definiert durch

$$z = |z|e^{i \arg(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (6.3)$$

Sie hat den Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und den Zielraum \mathbb{R} (oder die Zielmenge $(-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$). Die Menge der Stetigkeitsstellen ist $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, wobei $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Die Menge der Unstetigkeitsstellen ist \mathbb{R}_- .

Beispiel 6.4 (Stetigkeit der Norm).

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ hat den Definitionsbereich V und die Zielmenge $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Alle Vektoren $u \in V$ sind Stetigkeitsstellen von $\|\cdot\|$. In der Tat, $|\|u\| - \|u_0\|| \leq \|u - u_0\|$ (aus der Dreieckungleichung). Daher $\|u\| \rightarrow \|u_0\|$, wenn $u \rightarrow u_0$ (Folgenstetigkeit \Leftrightarrow Stetigkeit).

Definition 6.5 (Stetigkeit auf eine Menge).

Ist eine Funktion f stetig für jedes $x \in M \subseteq E$, so heißt f stetig auf der Menge M .

Falls hier $M = E$ der Definitionsbereich ist, sagt man einfach, dass f eine stetige Funktion ist (z.B., $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ ist stetig).

Theorem 6.1 (topologische Stetigkeit).

Seien X und Y zwei metrische Räume. Sei $f : X \rightarrow Y$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig (auf X);
- (b) für jede offene Menge $G \subseteq Y$ ist ihr Urbild $f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$ eine offene Menge (in X);
- (c) für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq Y$ ist $f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

Die Aussage (b) ist die Definition der Stetigkeit in topologischen Räumen.

Definition 6.6.

Seien $f : E \rightarrow Y$ und $g : M \rightarrow Z$, wobei $f(E) \subseteq M \subseteq Y$. Dann ist die Komposition/Verknüpfung von f mit g die Funktion $h : E \rightarrow Z$, die durch $h(x) = g(f(x))$, $x \in E$, definiert wird. Die Bezeichnung für die Komposition ist $h = g \circ f$.

Satz 6.1 (Stetigkeit der Komposition von stetigen Funktionen). (a) Ist f stetig an $x \in E$ und g stetig an $f(x) \in M$, so ist $h = g \circ f$ stetig an x .

(b) Ist f stetig auf E und ist g stetig auf $f(E)$, dann ist $h = g \circ f$ stetig auf E .

Beispiel 6.5 (Stetigkeit der quadratischen Form $\langle u, u \rangle$).

Sei $(V, \langle u, u \rangle)$ ein Innenproduktraum über \mathbb{K} . Dann ist die Funktion $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, $q(u) = \langle u, u \rangle$ stetig (auf V). In der Tat, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. So ist $q(u) = \|u\|^2$ die Komposition der stetigen Funktion $\|\cdot\|$ mit der stetigen Funktion $g(y) = y^2$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen Satz 6.1 ist die quadratische Form q stetig.

Was ist mit der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle u, w \rangle$, $u, w \in V$?

6.2 Komponentenweise Stetigkeit.

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq X$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$ kann man komponentenweise darstellen

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), x \in E,$$

wobei $f_j : E \rightarrow \mathbb{K}$ die j -te *Komponentenfunktion* von f heißt.

Satz 6.2 (Komponentenweise Stetigkeit).

Sei $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), x \in E, f_j : E \rightarrow \mathbb{K}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig an der Stelle $x \in E$;
- (b) alle $f_j, j = 1, \dots, m$, sind stetig an der Stelle $x \in E$.

Man kann hier "an der Stelle $x \in E$ " mit "auf E " ersetzen.

Beweis. Wir verbinden die Folgenstetigkeit mit Satz 5.2.

Satz 5.2. Sei $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ mit $x^n = (x_1^n, \dots, x_m^n) \in \mathbb{K}^m$ eine Folge in \mathbb{K}^m . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert in \mathbb{K}^m gegen $x = (x_1, \dots, x_m)$;
- (b) $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert gegen x komponentenweise, das heißt, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n = x_j$ für jedes j .

Folgenstetigkeit. Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$ heißt stetig an $x \in E$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = f(x)$ für jede Folge $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x^n = x$. □

6.3 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen. Äquivalente Normen.

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Innenproduktraum. Wie können wir die Stetigkeit des Skalarprodukts $f(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle, f : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, definieren?

Sei $m \in \mathbb{N}$. Seien $(V_j, \|\cdot\|_{V_j})$ normierte Räume, $j = 1, \dots, m$. Betrachten wir den Vektorraum $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$, der *Produktvektorraum* heißt. Das bedeutet $V = \{u = (u_1, \dots, u_m) : u_j \in V_j, j = 1, \dots, m\}$, z.B., wenn $V_j = \mathbb{K} \quad \forall j$, haben wir $V = \mathbb{K}^m$.

Die Linearstruktur eines Vektorraums ist auf V durch

$$\alpha u + \beta w = (\alpha u_1 + \beta w_1, \dots, \alpha u_m + \beta w_m) \quad \forall u, w \in V \text{ und } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

definiert.

$$V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m = \{u = (u_1, \dots, u_m) : u_j \in V_j, j = 1, \dots, m\}.$$

Satz 6.3 (ℓ^p -Produktnormen). (a) Die Funktion $\|\cdot\|_\infty : V \rightarrow [0, +\infty)$, $\|u\|_{(+)\infty} := \max_{1 \leq j \leq m} \|u_j\|_{V_j}$, ist eine Norm im Produktvektorraum $V = V_1 \times \cdots \times V_m$.

(b) Sei $1 \leq p < +\infty$. Die Funktion $\|\cdot\|_p : V \rightarrow [0, +\infty)$, $\|u\|_p := \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{V_j}^p\right)^{1/p}$, ist eine Norm im V .

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq V = V_1 \times \cdots \times V_m$. Sei $f : E \rightarrow X$ eine Funktion $f(u_1, \dots, u_m)$, die für die Kombinationen der Variablen $u_1 \in V_1, \dots, u_m \in V_m$ mit der Eigenschaft $(u_1, \dots, u_m) \in E$ definiert ist.

Definition 6.7 (Stetigkeit im Produktvektorraum).

Sei $1 \leq p \leq +\infty$ (hier $p = +\infty$ bedeutet $p = \infty$ in der Normbezeichnung). Sei $f : E \rightarrow X$. Dann:

(a) Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $v = (v_1, \dots, v_m) \in E$, wenn sie stetig an der Stelle v im Sinne des Produktvektorraum $(V, \|\cdot\|_p)$ ist, das heißt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass $d_X(f(u), f(v)) < \varepsilon \forall u \in E : \|u - v\|_p < \delta$.

(b) Die Funktion f heißt stetig in (auf) E , wenn f stetig an jeder Stelle $v \in E$ ist.

Z.B. ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \star \rangle_H$ stetig (auf dem Produktraum $H \times H$).

Bemerkung 6.5.

Die Stetigkeit der Funktion in der Def. 6.7 ist unabhängig von dem Wert des Parameters $p \in [0, +\infty]$, weil alle Produktnormen $\|\cdot\|_p$ mit verschiedenen p einander äquivalent sind.

Definition 6.8 (äquivalente Normen).

Die Normen $|\cdot|_\alpha$ und $|\cdot|_\beta$ auf einem Vektorraum W sind äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_2|w|_\alpha \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha \quad \forall w \in W.$$

Bemerkung 6.6.

Äquivalente Normen generieren die gleiche Topologie (und gleiche Systeme der Umgebungen). Das impliziert Bem.6.5.

Satz 6.4.

Das Skalarprodukt $f(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle_H$ ist stetig, das heißt, stetig auf dem Produktraum $V = H \times H$ bezüglich einer der Produktnormen $\|\cdot\|_p$ (und damit bezüglich aller Produktnormen $\|\cdot\|_p$).

Beweis. Wir beweisen die Stetigkeit von $f(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle_H$ an $u = (u_1, u_2) \in H \times H$, wobei H der Innenproduktraum mit der Norm $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ ist.

Sei $w = (w_1, w_2) \in K_\delta(u)$. Dann $\|w - u\|_p < \delta \Rightarrow \|w_j - u_j\| < \delta$.

$$\begin{aligned} |f(w) - f(u)| &= |\langle w_1, w_2 \rangle - \langle u_1, u_2 \rangle| = |\langle w_1 - u_1 + u_1, w_2 \rangle - \langle u_1, u_2 \rangle| \\ &= |\langle w_1 - u_1, w_2 - u_2 + u_2 \rangle + \langle u_1, w_2 - u_2 \rangle| \\ &\leq |\langle w_1 - u_1, w_2 - u_2 \rangle| + |\langle w_1 - u_1, u_2 \rangle| + |\langle u_1, w_2 - u_2 \rangle| \end{aligned}$$

Mit der CBS-Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(w) - f(u)| &\leq \|w_1 - u_1\| \|w_2 - u_2\| + \|w_1 - u_1\| \|u_2\| + \|u_1\| \|w_2 - u_2\| \\ &< \delta^2 + \delta(\|u_1\| + \|u_2\|) \leq \delta(\delta + 2\|u\|_p) < \varepsilon, \end{aligned}$$

wenn $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2\|u\|_p}\}$ (für beliebige $p \in [1, +\infty]$). Also ist f stetig an u , und das ist wahr für beliebige $u \in H \times H$. \square

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq V = V_1 \times \dots \times V_m$.

Sei $f : E \rightarrow X$ eine Funktion $f(u_1, \dots, u_m)$, die für die Werte der Variablen $u_1 \in V_1, \dots, u_m \in V_m$ mit $(u_1, \dots, u_m) \in E$ definiert ist.

Definition 6.9 (Stetigkeit bezüglich einer der Variablen).

Die Funktion f heißt stetig bezüglich der Variable u_j an der Stelle $v = (v_1, \dots, v_m) \in E$, wenn die Funktion

$$g(u_j) = f(v_1, \dots, v_{j-1}, u_j, v_{j+1}, \dots, v_m)$$

von der Variable u_j stetig an der Stelle $u_j = v_j$ ist (hier sind alle v_k mit $k \neq j$ fixiert und somit keine Variablen für g).

Satz 6.5.

Wenn f an der Stelle $v = (v_1, \dots, v_m) \in E$ stetig (im Sinne des Produktraums) ist, ist f stetig an der Stelle v bezüglich jeder Variable u_j , $j = 1, \dots, m$.

Der Beweis ist eine Aufgabe (Hinweis: Folgenstetigkeit).

Bemerkung 6.7.

Generell impliziert die Stetigkeit bezüglich jeder Variable *nicht* die Stetigkeit (im Sinne des Produktraums).

Beispiel 6.6 (Stetigkeit bezüglich jeder Variable $\not\Rightarrow$ Stetigkeit).

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Die Funktion $g_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ von der Variable x ist *stetig auf* \mathbb{R} für jedes fixierte $y_0 \in \mathbb{R}$. (Wenn $y_0 = 0$, $g_0 \equiv 0$).

Die Funktion $h_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ von der Variable y ist *stetig auf* \mathbb{R} für jedes fixierte $x_0 \in \mathbb{R}$.

Die Funktion f ist *unstetig an* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Dies sieht man so: Betrachten wir f auf der Gerade $G_\alpha = \{y = \alpha x\}$ mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F_\alpha(x) = f(x, \alpha x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Wenn $\alpha \neq 0$, ist F_α unstetig an $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ ist unstetig auf G_α an $(0, 0)$

$\Rightarrow f$ ist unstetig an $(0, 0)$ (z.B., wir benutzen die Folgenstetigkeit-Def.).

6.4 Stetigkeit von Einschränkungen.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Sei $f : E \rightarrow Y$.

Im Beispiel 6.6 haben wir die folgende Aussage benutzt.

Satz 6.6.

Falls $f : E \rightarrow Y$ stetig (auf E) und $M \subseteq E$, ist die Einschränkung $f|_M : M \rightarrow Y$ auch stetig (auf M).

Erinnerung: $g = f|_M$ ist die Funktion $g : M \rightarrow Y$, so dass $g(x) = f(x) \quad \forall x \in M$.

Beweis. Der Satz folgt aus der Folgenstetigkeitsdefinition. □

Bemerkung 6.8.

Sei $M_x = \{x\}$ mit $x \in E$. Dann ist $f|_{M_x}$ stetig für beliebige Funktion f . Das ist nicht verbunden mit der Stetigkeit von f an der Stelle x .

In der Tat, x ist ein isolierter Punkt der einpunktigen Menge M_x . Somit ist $f|_{M_x}$ immer stetig in einem isolierten Punkt ihres Definitionsbereichs M_x .

Bemerkung 6.9.

Sei $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ und sei $f|_{E_\alpha}$ stetig $\forall \alpha \in A$. Das impliziert nicht, dass f stetig auf E ist. Für ein Gegenbeispiel kann man z.B. Bemerkung 6.8 und $E = \bigcup_{x \in E} M_x$ benutzen,

oder auf $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \overline{\mathbb{R}_+}$ die Heaviside-Funktion $H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ betrachten. Hier

$\mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$.

6.5 Abschweifung: Äquivalenzrelation und äquivalente Normen.

Bemerkung 6.10.

Def.6.8 (äquivalente Normen) definiert eine Äquivalenzrelation \sim auf der Familie aller Normen in W .

Def.6.8. Normen $|\cdot|_\alpha$ und $|\cdot|_\beta$ auf einem Vektorraum W sind äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass $c_2|w|_\alpha \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha \quad \forall w \in W$.

Definition 6.10 (Äquivalenzrelation).

Eine Relation \sim auf einer abstrakten Mengen M heißt Äquivalenzrelation, wenn \sim die folgenden Eigenschaften hat

- (a) $x \sim x \quad \forall x \in M$ (das heißt, \sim ist reflexiv);
- (b) Falls $x \sim y$ und $y \sim z$, dann $x \sim z$ (Transitivität);
- (c) Falls $x \sim y$, dann $y \sim x$ (Symmetrie).

Beweis von Bemerkung 6.10. (a) Reflexivität: $c_2|w|_\alpha \leq |w|_\alpha \leq c_1|w|_\alpha$ mit $c_1 = c_2 = 1$ ist wahr $\forall w \in W$.

- (b) Transitivität: $|\cdot|_\alpha \sim |\cdot|_\beta$ und $|\cdot|_\beta \sim |\cdot|_\gamma$
 $\iff c_2|w|_\alpha \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha$ und $b_2|w|_\beta \leq |w|_\gamma \leq b_1|w|_\beta \quad \forall w$
 $\Rightarrow c_2|w|_\alpha \leq b_2^{-1}|w|_\gamma$ und $b_1^{-1}|w|_\gamma \leq c_1|w|_\alpha$
 $\Rightarrow b_2c_2|w|_\alpha \leq |w|_\gamma \leq b_1c_1|w|_\alpha \quad \Rightarrow |\cdot|_\alpha \sim |\cdot|_\gamma.$
- (c) Symmetrie: $|\cdot|_\alpha \sim |\cdot|_\beta \quad \Rightarrow \quad c_2|w|_\alpha \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha \quad \forall w \quad \Rightarrow \quad c_1^{-1}|w|_\beta \leq |w|_\alpha$
und $|w|_\alpha \leq c_2^{-1}|w|_\beta \quad \Rightarrow \quad |\cdot|_\beta \sim |\cdot|_\alpha.$

□

Theorem 6.2. (a) Auf \mathbb{K}^m sind alle Normen äquivalent.

(b) Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent.

Beispiel 6.7 (nicht äquivalente Normen).

Auf $C[a, b]$ sind die Normen $\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ und $\|f\|_{L^2} = (\int_a^b |f|^2 dx)^{1/2}$ nicht äquivalent.

Das sieht man so: $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a,b]})$ ist vollständig. $(C[a, b], \|\cdot\|_{L^2})$ ist nicht vollständig. Also sind diese zwei Normen nicht äquivalent.

$C[a, b]$ ist unendlichdimensional.

7 Lipschitz-Stetigkeit. Operationen mit Grenzwerten und stetigen Funktionen. Beschränkte Lineare Operatoren.

7.1 Lipschitz-Stetigkeit.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$.

Definition 7.1 (Lipschitz-Stetigkeit).

Eine Abbildung/Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt Lipschitz-stetig, wenn $\exists \alpha > 0$, so dass $d_Y(f(p), f(q)) \leq \alpha d_X(p, q) \forall p, q \in E$.

In diesem Fall, heißt α Lipschitz-Konstante von f .

Beispiel 7.1.

Jede Isometrie f ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $\alpha = 1$, weil $d_Y(f(p), f(q)) = d_X(p, q)$.

Beispiel 7.2.

Die Konjugationsabbildung $\mathcal{K} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{K}(z) = \bar{z}$, ist eine Isometrie von \mathbb{C} in sich selbst, \mathcal{K} ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $\alpha = 1$.

Erinnerung: $\bar{z} = \overline{(x, y)} = (x, -y)$, $z \in \mathbb{C}$. Mit Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{i\bar{\varphi}} = re^{-i\varphi}.$$

Satz 7.1 (Lipschitz-Stetigkeit \Rightarrow Stetigkeit).

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Der Beweis ist offenbar von den Definitionen der Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

Beispiel 7.3 (Lipschitz-Stetigkeit des Abstands zu einer Menge).

Sei $\emptyset \neq E \subseteq X$. Definieren wir die Funktion $\text{dist}_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\text{dist}_E(p) = \inf_{x \in E} d_X(p, x)$.

Der Abstand $\text{dist}_E(\cdot)$ zu E ist eine Lipschitz-stetige (und so stetige) Funktion auf X .

Aufgabe 7.1.

Finden Sie eine Lipschitz-Konstante für $\text{dist}_E(\cdot)$.

7.2 Operationen mit stetigen Funktionen.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Satz 7.2.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, z.B. $V = \mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Definieren wir

(a) $\mathcal{A} : V \times V \rightarrow V$, $\mathcal{A}(u, w) = u + w$;

(b) $\mathcal{M} : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, $\mathcal{A}(\alpha, u) = \alpha u$.

(c) $\mathcal{K}_m : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, $\mathcal{K}_m : (z_1, \dots, z_m) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

Die Abbildungen \mathcal{A} , \mathcal{M} und \mathcal{K}_m sind stetig.

Beweis. (a) folgt aus der Dreieckungleichung.

(b) kann man ähnlich wie die Stetigkeit des Skalarprodukts beweisen.

(c) folgt, weil $\mathcal{K}(z) = \bar{z}$ eine Isometrie ist.

□

Bemerkung 7.1.

Eigentlich ist $\mathcal{K}_m : (z_1, \dots, z_m) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ ein isometrischer Isomorphismus vom metrischen Raum $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_p)$ in sich selbst für jedes $p \in [1, +\infty]$ (Aufgabe).

Achtung:

\mathcal{K}_m ist kein Isomorphismus im Sinne von Vektorräumen über \mathbb{C} (kein Endomorphismus), weil $\mathcal{K}_m(\alpha u) = \bar{\alpha} \mathcal{K}_m(u) \neq \alpha \mathcal{K}_m(u)$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$.

Definition 7.2.

Sei M eine beliebige Menge. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} (z.B., $V = \mathbb{K}^m$). Dann ist die Menge $V^M = \text{Abb}(M, V)$ aller Abbildungen $f : M \rightarrow V$ ein Vektorraum mit der folgenden Linearstruktur:

(a) Für $f, g \in \text{Abb}(M, V)$ wird $h = f + g \in \text{Abb}(M, V)$ durch $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in M$, definiert.

(b) Für $f : M \rightarrow V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ wird $g = \alpha f \in \text{Abb}(M, V)$ durch $g(x) = \alpha f(x)$, $x \in M$, definiert.

Sei E eine Teilmenge des metrischen Raums X . Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über \mathbb{K} (z.B., $V = \mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$).

Satz 7.3 (lineare Kombinationen von stetigen Funktionen sind stetig).

Die Menge $C(E, V)$ aller stetigen Abbildungen $f : E \rightarrow V$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen $\text{Abb}(E, V)$.

Das bedeutet: falls $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $f, g \in C(E, V)$ (das heißt, falls Funktionen f und g stetig sind), gilt $\alpha f + \beta g \in C(E, V)$ (das heißt, die Funktion $\alpha f + \beta g$ ist auch stetig).

Beweis. Funktionen $F(x) = (f(x), g(x))$ mit Werten im Produktvektorräumen $V \times V$ (oder $\mathbb{K} \times V$) sind genau dann stetig, wenn sie komponentenweise stetig sind.

Die Additionsoperation $\cdot + \star$ von $V \times V$ nach V und die Multiplikationsoperation mit einem Skalar von $\mathbb{K} \times V$ nach V sind stetig (Satz 7.2).

Eine Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig (Satz 6.4). □

Satz 7.4 (Produkte von stetigen Funktionen sind stetig).

Seien $\alpha \in C(E, \mathbb{K})$ und $f \in C(E, V)$. Dann ist die Funktion $h = \alpha f$, die durch $h(x) = \alpha(x)f(x)$ definiert wird, auch stetig (das heißt, $\alpha f \in C(E, V)$).

Satz 7.5 (Skalarprodukt von stetigen Funktionen ist stetig).

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum über \mathbb{K} . Seien $f, g \in \text{Abb}(E, H)$. Dann wird die Abbildung $h = \langle f, g \rangle$, $h : E \rightarrow \mathbb{K}$, definiert durch $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, $x \in E$.

Falls $f, g \in C(E, H)$, ist $h = \langle f, g \rangle$ eine stetige Abbildung von E nach \mathbb{K} , das heißt, $h \in C(E, \mathbb{K})$.

Die Beweise sind ähnlich zum Beweis des Satzes 7.3.

Satz 7.6.

Sei $f \in C(E, V)$. Sei $\alpha \in C(E, \mathbb{K})$ und $\alpha(x) \neq 0 \forall x \in E$. Dann:

(a) Die Funktion $g(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ ist stetig, das heißt $g \in C(E, \mathbb{K})$.

(b) Die Funktion $h(x) = \frac{1}{\alpha(x)}f(x)$ ist stetig, das heißt $h \in C(E, V)$.

Beweis. Die Funktion $z \rightarrow 1/z$ ist stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (s. Math 1). Dann benutzen wir den Satz über die Komposition von stetigen Funktionen. □

7.3 Stetige lineare Operatoren.

Seien V und W zwei Vektorräume über \mathbb{K} .

Definition 7.3 (Erinnerung: lineare Operatoren).

Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt linearer Operator (Homomorphismus) falls

- $A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2)$ ($= \alpha A u_1 + \beta A u_2$)
- $\forall u_1, u_2 \in V$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume über \mathbb{K} .

Definition 7.4 (beschränkte Funktionen und lineare Operatoren). (a) Eine Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt beschränkt, wenn ihre Bild $f(E)$ beschränkt ist.

Eine Funktion f heißt beschränkt auf $M \subseteq E$, wenn $f(M)$ beschränkt ist.

(b) Ein linearer Operator $A : V \rightarrow W$ heißt beschränkt, wenn A auf der Einheitskugel $K_1(0) \subseteq V$ beschränkt ist.

Bemerkung 7.2.

Ein linearer Operator kann beschränkt sein (als ein linearer Operator), und gleichzeitig unbeschränkt als eine Funktion. (Eigentlich passiert das fast immer).

Sei der normierte Vektorraum V zusätzlich nicht trivial (das heißt, $V \neq \{0\}$).

Beispiel 7.4. (a) Betrachten wir den Null-Operator $0 = 0_{V \rightarrow W} : V \rightarrow W$, $0_{V \rightarrow W}(u) = 0_W \quad \forall u \in V$. Der Operator $A = 0_{V \rightarrow W}$ ist beschränkt als Operator und als eine Funktion, $A(V) = \{0_W\} = A(K_1(0_V))$.

(b) Sei $B : V \rightarrow W$ ein beschränkter linearer Operator, so dass $B \neq 0_{V \rightarrow W}$. Dann ist B unbeschränkt als eine Funktion von V nach W .

In der Tat, $\exists u \in V$, so dass $Bu = w \neq 0_W$. Dann $B(V) \supseteq \{\alpha w : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Die Menge $\{\alpha w : \alpha \in \mathbb{K}\}$ ist unbeschränkt. $\Rightarrow B(V)$ ist unbeschränkt. $\Rightarrow B$ ist unbeschränkt als eine Funktion.

Satz 7.7 (Raum der beschränkten linearen Operatoren).

Die Menge $\mathbb{L}(V, W)$ aller beschränkten linearen Operatoren $A : V \rightarrow W$ ist ein Vektorraum mit der natürlichen Vektorraumstruktur

$$(\alpha A + \beta B)(u) = \alpha Au + \beta Bu, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$

$\mathbb{L}(V, W)$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|A\| := \sup_{\|u\|_V < 1} \|Au\|_W.$$

Ein linearer Operator $A : V \rightarrow W$ ist genau dann beschränkt, wenn $\|A\| < +\infty$.

Satz 7.8 (äquivalente Formen der Norm in $\mathbb{L}(V, W)$).

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_V < 1} \|Au\|_W = \sup_{\|u\|_V \leq 1} \|Au\|_W = \sup_{\|u\|_V = 1} \|Au\|_W = \sup_{u \neq 0_V} \frac{\|Au\|_W}{\|u\|_V}.$$

Beispiel 7.5 (Einheitsoperator).

Sei $V = W$ (z.B., $V = W = \mathbb{K}^m$). Betrachten wir den Einheitsoperator $I = I_V : V \rightarrow V$, $Iu = u \quad \forall u \in V$. Dann $\|I\| = \sup_{u \neq 0_V} \frac{\|Iu\|_V}{\|u\|_V} = \sup_{u \neq 0_V} \frac{\|u\|_V}{\|u\|_V} = 1$.

Theorem 7.1 (für lineare Operatoren ist *beschränkt* \Leftrightarrow *stetig*).

Die folgenden Aussagen für einen linearen Operator $A : V \rightarrow W$ sind äquivalent:

- (a) A ist beschränkt.
- (b) A ist stetig (auf V).
- (c) A ist stetig in einem Punkt $u \in V$.
- (d) A ist stetig im Nullvektor $u = 0_V$.

Also kann man den Raum $\mathbb{L}(V, W)$ der beschränkten linearen Operatoren von V nach W äquivalent auch den Raum $\mathbb{L}(V, W)$ der stetigen linearen Operatoren von V nach W nennen.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$.

Theorem 7.2. (a) Jeder linearer Operator $A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist stetig (und damit beschränkt).

(b) Sei V endlichdimensional. Dann ist jeder linearer Operator $A : V \rightarrow W$ beschränkt (und damit stetig).

Betrachten wir den Fall, dass $W = \mathbb{K}$ eindimensional ist.

Definition 7.5 (Linearform).

Ein linearer Operator $L : V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Linearform.

Beispiel 7.6.

Sei $V = \mathbb{K}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_j \in \mathbb{K} \quad \forall j\}$. Sei $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Betrachten wir die k -te Koordinatenfunktion/Projektion $\text{pr}_k(x) = x_k$. Die Funktion $\text{pr}_k : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine Linearform, stetig und beschränkt.

7.4 Polynome mehrerer Variablen.

Sei $V = \mathbb{K}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_j \in \mathbb{K} \quad \forall j\}$. Sei $c \in \mathbb{K}$. Sei $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Beispiel 7.7 (verschiedene Monome).

Die folgenden Funktionen $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ sind stetig:

- (a) $f(x_1, \dots, x_m) = c \quad \forall x \in \mathbb{K}^m$ (konstante Funktion);
- (b) $f(x_1, \dots, x_m) = cx_k$, (das heißt, $f = c \text{pr}_k$ ist eine Linearform);
- (c) $f(x_1, \dots, x_m) = cx_1x_3$;
- (d) $f(x_1, \dots, x_m) = cx_1^2x_2x_3$;

Definition 7.6 (Monom).

Generell heißt $f(x_1, \dots, x_m) = c_n x^n := c_{n_1, n_2, \dots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ mit $n_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall j$, $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$, Monom.

Hier heißt $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ Multiindex. Die Konstante $c_n = c_{n_1, n_2, \dots, n_m} \in \mathbb{K}$ heißt ein Koeffizient. Falls $c_n \neq 0$, heißt die Summe der Exponenten $\|n\|_1 = \sum_{j=1}^m n_j$ der Grad des Monoms.

Bemerkung 7.3.

Falls $c_n = 0$, kann man $c_n x^n$ als $c_{0,0,\dots,0} x_1^0 x_2^0 \dots x_m^0$ schreiben mit $c_{0,0,\dots,0} = 0$. Ein solches Monom ist eine Konstante und hat definitionsgemäß Grad 0.

Sei $N \in \mathbb{N}_0$.

Definition 7.7 (Polynom).

Eine Summe von Monomen

$$P(x) = \sum_{\|n\|_1 \leq N} c_n x^n, \quad P: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K},$$

heißt Polynom.

Der Grad vom Polynom P ist $\deg P = \max\{\|n\|_1 : c_n \neq 0\}$, andere Bezeichnung $\deg P = \text{Grad } P$.

Satz 7.9.

Jedes Polynom ist stetig.

7.5 Operationen mit Grenzwerten der Funktionen.

Sei E eine Teilmenge des metrischen Raums X . Sei $p \in E'$.

Satz 7.10.

Seien $f, g \in \text{Abb}(E, \mathbb{C})$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b \in \mathbb{C}.$$

Dann:

(a) $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = a + b;$

(b) $\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = ab;$

(c) Falls zusätzlich $b \neq 0$ und p ein Häufungspunkt von $g^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$ ist, dann

$$\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}.$$

Satz 7.11.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über \mathbb{K} (z.B., $V = \mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$). Seien $f, g \in \text{Abb}(E, V)$, $\alpha \in \text{Abb}(E, \mathbb{K})$, so dass $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = u \in V$, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = w \in V$, $\lim_{x \rightarrow p} \alpha(x) = a \in \mathbb{K}$. Dann:

(a) $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = u + w;$

(b) $\lim_{x \rightarrow p} (\alpha f)(x) = au;$

(c) Falls zusätzlich $a \neq 0$ und p ein Häufungspunkt von $\alpha^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{x \in E : \alpha(x) \neq 0\}$ ist, dann

$$\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{a} u.$$

(d) Wenn $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum ist, gilt $\lim_{x \rightarrow p} \langle f, g \rangle = \langle u, w \rangle$.

7.6 Links-/rechtsseitige Grenzwerte und obere/untere Grenzwerte von Funktionen

Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raume.

Definition 7.8 (Links-/rechtsseitige Grenzwerte).

Seien $a \in \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \rightarrow Y$.

(a) Falls a ein Häufungspunkt von $M_{a-} := M \cap (-\infty, a)$ ist, definieren wir $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_{M_{a-}}$.

Andere Bezeichnungen sind $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

(b) Falls a ein Häufungspunkt von $M_{a+} := M \cap (a, +\infty)$ ist, definieren wir $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_{M_{a+}}$;

Andere Bezeichnungen sind $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq X$.

Definition 7.9.

Sei $p \in E'$. Sei $f : E \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$.

(a) $\liminf_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \inf_{x \in E \cap K_\delta^\bullet(p)} f(x)$;

(b) $\limsup_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \sup_{x \in E \cap K_\delta^\bullet(p)} f(x)$.

Erinnerung: $K_\delta^\bullet(p) = K_\delta(p) \setminus \{p\} = \{x \in X : 0 < d_X(x, p) < \delta\}$.

Aufgabe 7.2.

(a) Formulieren Sie die Def. 7.9 in Anlehnung an die Folgenstetigkeit um.

(b) Formulieren Sie für Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Definitionen von $\liminf x_n$ und $\limsup x_n$ in Anlehnung an Def. 7.9 um.

8 Stetigkeit und Kompaktheit

8.1 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen.

Theorem 8.1 (Erinnerung: 1-dim. Satz vom Minimum & Maximum).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Sei $m := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Dann:

(a) $-\infty < m \leq M < +\infty$;

(b) $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, so dass $f(x_{\min}) = m$ und $f(x_{\max}) = M$.

Das bedeutet, die Funktion f nimmt ihr Minimum m und ihr Maximum M an.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$.

Theorem 8.2.

Sei E eine kompakte Teilmenge von X . Sei $f : E \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(E)$ eine kompakte Teilmenge von Y .

Beweis. Betrachten wir (E, d_X) als induzierter metrischer Raum und benutzen wir topologische Stetigkeit. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ eine offene Überdeckung von $f(E)$. Dann ist $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ eine offene Überdeckung von E im Sinne von (E, d_X) . Da E kompakt in X ist, ist (E, d_X) ein kompakter metrischer Raum. $\Rightarrow \exists$ endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{j=1}^n, n \in \mathbb{N}$, von E . $\Rightarrow \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^n$ ist eine endliche Teilüberdeckung der Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ von $f(E)$. \square

Aufgabe 8.1.

Geben Sie den Beweis des Thm. 8.2 durch Folgenkompaktheit/-stetigkeit.

Korollar 8.1.

Sei E eine kompakte Teilmenge von X . Sei $f : E \rightarrow Y$ stetig. Dann:

(a) $f(E)$ ist abgeschlossen und beschränkt.

(b) Die Funktion f ist beschränkt.

Errinerung. Eine Funktion $f : E \rightarrow Y$ heißt beschränkt, wenn ihr Bild $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ beschränkt ist.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Korollar 8.2 (mehrdimensionaler Satz vom Minimum & Maximum).

Sei E kompakt (z.B., $E \subset \mathbb{K}^m$ abgeschlossen und beschränkt). Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $m := \inf_{x \in E} f(x)$ und $M := \sup_{x \in E} f(x)$. Dann:

(a) $-\infty < m \leq M < +\infty$;

(b) $\exists x_{\min}, x_{\max} \in E$, so dass $f(x_{\min}) = m$ und $f(x_{\max}) = M$.

Das bedeutet, dass jede stetige reellwertige Funktion f ihr globales Minimum m und ihr globales Maximum M auf kompakten Mengen annimmt.

Beweis. $f(E)$ ist kompakt. $\Rightarrow f(E)$ ist beschränkt und abgeschlossen. $\Rightarrow -\infty < m \leq M < +\infty$ und $\{m, M\} \in f(E)$, wobei $m := \inf_{x \in E} f(x)$ und $M := \sup_{x \in E} f(x)$. $\Rightarrow \exists x_{\min} \in f^{-1}(m)$ und $\exists x_{\max} \in f^{-1}(M)$. \square

8.2 Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen (Hauptachsentransformation)

Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K}^{m \times n} = \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ die Menge aller $m \times n$ -Matrizen $A = (a_{j,k})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ mit Einträgen $a_{j,k} \in \mathbb{K}$.

Dann ist $\mathbb{K}^{m \times n}$ ein Vektorraum über \mathbb{K} mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation mit Skalaren $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad \gamma A = (\gamma a_{j,k})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Sei jetzt $n = m \in \mathbb{N}$.

Definition 8.1 (Adjungierte und selbstadjungierte quadratische Matrizen).

Eine quadratische Matrix $B = (b_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *adjungierte Matrix* von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ falls

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

(mit $\langle \cdot, \star \rangle = \langle \cdot, \star \rangle_{\mathbb{C}^n}$). In diesem Fall schreibt man $B = A^*$, und das ist äquivalent mit

$$b_{j,k} = \overline{a_{k,j}} \quad \forall j, k$$

(adjungierte = transponiert-konjugierte).

$A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *selbstadjungierte Matrix* falls $A = A^*$, das heißt, falls $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}} \forall j, k$.

Beispiel 8.1.

Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine *selbstadjungierte Matrix*.

Betrachten wir die entsprechende quadratische Form $\forall x \in \mathbb{C}^n$:

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} x_k \overline{x_j}.$$

Die quadratische Form $q_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, denn die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Komposition von stetigen Funktionen.

Zeigen wir, dass $q_A(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Da $A = A^*$, gilt $\forall x \in \mathbb{C}^n$:

$$q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^* x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{q_A(x)} \quad \Rightarrow \quad q_A(x) \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir q_A auf der kompakten Kugel $E = \overline{K_1(0)} = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| \leq 1\}$. Wegen des Satzes vom Minimum & Maximum gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in \overline{K_1(0)}$, so dass $q_A(x_{\min}) = m = \min_{|x| \leq 1} q_A(x)$, $q_A(x_{\max}) = M = \max_{|x| \leq 1} q_A(x)$.

Wie können wir m und M finden?

Bemerkung 8.1.

Es ist einfach zu sehen, dass man solche globalen Extrema x_{\min} und x_{\max} auf $\overline{K_1(0)}$ und sogar auf $\partial K_1(0) = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| = 1\}$ finden kann.

Theorem 8.3 (Spektralsatz/Hauptachsentransformation).

Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{u^k\}_{k=1}^n$ des Raums \mathbb{C}^n , so dass

(a) $Au^k = \lambda_k u^k \quad \forall k$, das heißt, u^k sind Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_k ,

(b) $\lambda_k \in \mathbb{R} \quad \forall k$, und $\{\lambda_k\}$ ist die Menge aller Eigenwerte von A mit den entsprechenden Vielfachheiten.

Bemerkung 8.2.

Man kann $\{u^k\}_{k=1}^n$ in solcher Weise umordnen, dass

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Im Folgenden, nehmen wir an, dass $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Bemerkung 8.3 (Hauptachsen für symmetrische $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Math 1).

Falls alle $a_{j,k} \in \mathbb{R}$, ist $A = A^*$ äquivalent mit $a_{j,k} = a_{k,j} \quad \forall j, k$. Das heißt, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stellt in $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \star \rangle)$ genau dann einen selbstadjungierten linearen Operator dar, wenn A symmetrisch ist.

In diesem Fall sind für jeden Eigenvektor $u^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k)^\top$ zum λ_k auch $v^k = (\operatorname{Re}(u_1^k), \operatorname{Re}(u_2^k), \dots, \operatorname{Re}(u_n^k))^\top$ und $w^k = (\operatorname{Im}(u_1^k), \operatorname{Im}(u_2^k), \dots, \operatorname{Im}(u_n^k))^\top$ Eigenvektoren von A zum λ_k (das folgt aus $\lambda_k \in \mathbb{R}$ und $a_{j,k} \in \mathbb{R} \quad \forall j, k$).

Man kann zeigen, dass man in diesem Fall eine Orthonormalbasis $\{u^k\}_{k=1}^n$ der Eigenvektoren auf solche Weise wählen kann, dass $u_j^k \in \mathbb{R} \quad \forall j, k$ (für alle Koordinaten der Vektoren u^k).

Satz 8.1.

Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert. Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A und sei $\{u^k\}_{k=1}^n$ die entsprechende Orthonormalbasis der Eigenvektoren. Betrachten wir $q_A(x) = \langle Ax, x \rangle_{\mathbb{C}^n}$ als eine \mathbb{R} -wertige Funktion auf $\overline{K_1(0)} = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| \leq 1\}$. Dann:

(a) $m = \min_{|x| \leq 1} q_A(x) = \lambda_1$, $M = \max_{|x| \leq 1} q_A(x) = \lambda_n$;

(b) u^1 und u^n sind globale Minimum- bzw. Maximum-Stellen von $q_A|_{\overline{K_1(0)}}$, das heißt, $q_A(u^1) = \lambda_1$ und $q_A(u^n) = \lambda_n$.

Beweis. Jedes $x \in \overline{K_1(0)}$ hat eine Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^n c_j u^j$$

in der Basis $\{u^j\}_{j=1}^n$ mit $\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \|x\|^2 \leq 1$. Daher

$$q_A(x) = \left\langle A\left(\sum_{j=1}^n c_j u^j\right), \sum_{j=1}^n c_j u^j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j A(u^j), \sum_{j=1}^n c_j u^j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j u^j, \sum_{j=1}^n c_j u^j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2.$$

$$\text{Also, } \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \leq q_A(x) \leq \lambda_n \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \lambda_n \forall x \in \overline{K_1(0)}.$$

Zeigen wir, dass $q_A|_{\overline{K_1(0)}}$ wirklich die Werte λ_1 und λ_n annimmt.

Das folgt aus $q_A(u^j) = \langle Au^j, u^j \rangle = \langle \lambda_j u^j, u^j \rangle = \lambda_j \langle u^j, u^j \rangle = \lambda_j$.

Also ist u^1 eine Minimumstelle von $q_A|_{\overline{K_1(0)}}$ und u^n ist eine Maximumstelle von $q_A|_{\overline{K_1(0)}}$. (Sind sie die einzigen Extremstellen?) \square

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei

$$\text{dist}(E, M) = \inf_{\substack{x \in E \\ y \in M}} d_X(x, y)$$

der Abstand zwischen den Mengen $E, M \subseteq X$.

Falls $E = \{x\}$ schreiben wir $\text{dist}(x, M) = \text{dist}(\{x\}, M) = \text{dist}_M(x)$.

Satz 8.2. (a) *Der Abstand von einem $p \in X$ zu einer kompakten Menge $K \subseteq X$ wird angenommen, das heißt, $\exists x \in K$ mit $d_X(x, p) = \text{dist}(p, K)$.*

(b) *Sei $X = \mathbb{K}^m$. Dann wird der Abstand von beliebigen $p \in \mathbb{K}^m$ und einer abgeschlossenen Menge $E \subseteq \mathbb{K}^m$ angenommen.*

(c) *Seien $E, K \subset \mathbb{K}^m$, so dass $E \neq \emptyset \neq K$ und $E \cap K = \emptyset$. Falls K kompakt ist und E abgeschlossen ist, gilt $\text{dist}(K, E) > 0$.*

Der Beweis folgt aus dem Satz von Minimum und Maximum und der Folgenkompaktheit (Aufgabe).

9 Stetige Funktionen auf wegzusammenhängenden und zusammenhängenden Mengen.

9.1 Wegzusammenhängende Mengen und stetige Funktionen

Theorem 9.1 (Zwischenwertsatz von Bolzano).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall. Im Besonderen, falls $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ für manche $x_1, x_2 \in I$, dann besitzt die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung $x \in I$.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$.

Definition 9.1 (Wege).

Sei $-\infty < a < b < +\infty$. Jede stetige Funktion $w \in C([a, b], X)$ heißt *Weg* (in X). Dieser Weg hat den *Anfangspunkt* $w(a)$ und den *Endpunkt* $w(b)$. Die *Spur* $\text{Spur}(w) = w([a, b]) = \{w(t) : t \in [a, b]\}$ des Weges w ist definitionsgemäß *sein Bild* (somit ist die Spur(w) eine Teilmenge von Y).

Der Anfangspunkt $w(a)$ und der Endpunkt $w(b)$ werden zusammen Endpunkte des Weges w genannt.

Definition 9.2 (wegzusammenhängende Mengen).

Eine Menge E heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu jedem Paar $x, y \in E$ ein Weg $w : [a, b] \rightarrow E$ gibt mit $x = w(a)$ und $y = w(b)$. (In diesem Fall $\text{Spur}(w) \subseteq E$.)

Sei V ein normierter Raum.

Beispiel 9.1.

Jede Spur eines Weges ist wegzusammenhängend. Eine einpunktige Menge ist wegzusammenhängend. (Formell ist \emptyset auch wegzusammenhängend).

Beispiel 9.2 (eine Strecke im abstrakten normierten Raum).

Seien $u, v \in V$. Die *Strecke* $[u, v] = \{(1-t)u + tv : t \in [0, 1]\} \subset V$ ist die Spur des Weges $w : [0, 1] \rightarrow V$, $w(t) = (1-t)u + tv$, $t \in [0, 1]$. Die Strecke $[u, v]$ ist wegzusammenhängend.

Definition 9.3 (konvexe Mengen).

Eine Menge $M \subseteq V$ heißt *konvex*, falls für jede Strecke $[u, v] = \{(1-t)u + tv : t \in [0, 1]\}$ mit Endpunkten $u, v \in M$ gilt

$$[u, v] \subseteq M.$$

Die letzte Bemerkung und Definition implizieren den folgenden Satz.

Satz 9.1 (konvex \Rightarrow wegzusammenhängend).

Jede konvexe Teilmenge M eines normierten Raums ist wegzusammenhängend.

Beispiel 9.3.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Sei $x \in \mathbb{K}^m$.

- (a) Die Mengen $K_r(x)$ und $\overline{K_r(x)}$ sind konvex, und somit wegzusammenhängend.
- (b) Die Menge $\partial K_r(x)$ ist nicht konvex, aber wegzusammenhängend.

Theorem 9.2.

Sei $E \subseteq X$ wegzusammenhängend und sei $f : E \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(E)$ wegzusammenhängend.

Beispiel 9.4.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Sei $x \in \mathbb{K}^m = V$.

- (a) Die Mengen $K_r(x)$ und $\overline{K_r(x)}$ sind konvex, und so wegzusammenhängend.

(b) Die Menge $\partial K_r(x)$ ist nicht konvex, aber wegzusammenhängend.

Was passiert, wenn $m = 1$?

Satz 9.2 (1-dim. konvexe/wegzusammenhängende Mengen).

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) E ist ein Intervall.

(b) E ist konvex.

(c) E ist wegzusammenhängend.

Beispiel 9.5.

Sei $m = 1$ und $V = \mathbb{K}^m = \mathbb{K}$.

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist $K_r(x) \subset V$ das Intervall $(x-r, x+r)$. Alle Intervalle sind konvex und wegzusammenhängend. Betrachten wir in \mathbb{R} den Rand $\partial K_r(x) = \{x-r, x+r\}$. Die zweipunktige Menge $\{x-r, x+r\}$ ist nicht konvex (wegen der Def. der konvexen Menge), $\{x-r, x+r\}$ ist *nicht wegzusammenhängend* (z.B., wegen Thm. 9.3).

(b) Sei $m = 1$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist in $V = \mathbb{C}$ $\partial K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ isometrisch isomorph mit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. $\partial K_1(0) = \{w(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ ist die Spur des Weges $w(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und somit wegzusammenhängend. Aber $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist nicht konvex.

3-dim. Kugelkoordinaten/Polarkoordinaten

Betrachten wir die stetige Abbildung

$$F_3 : [0, +\infty) \times (-\pi, -\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F_3 : (r, \varphi, \theta) \mapsto (x_1, x_2, x_3), \\ x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad x_3 = r \cos(\theta).$$

Der Winkel $\varphi \in (-\pi, -\pi]$ heißt Azimutwinkel, $\theta \in [0, \pi]$ heißt Polarwinkel. Eine graphische Darstellung sieht man in Abbildung 1.

F_3 ist surjektiv, aber nicht injektiv. Die Einschränkung von F_3 auf $(0, +\infty) \times (-\pi, -\pi] \times (0, \pi)$ ist injektiv und hat das Bild $\mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.

Beispiel 9.6.

Eine 2-dim. Sphäre $\partial K_r(p) \subset \mathbb{R}^3$ ist wegzusammenhängend, denn die 2-dim. Einheits-sphäre $S^2 = \partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ ist das Bild von $P = \{1\} \times (-\pi, -\pi] \times [0, \pi]$ unter F_3 .

Das Rechteck P ist konvex und somit wegzusammenhängend. Es ist $\partial K_1(0) = F_3(P)$ wegzusammenhängend wegen Th. 9.5. $\partial K_r(p)$ ist das Bild von $\partial K_1(0)$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto rx + p$, und somit ist $\partial K_r(p)$ wegzusammenhängend.

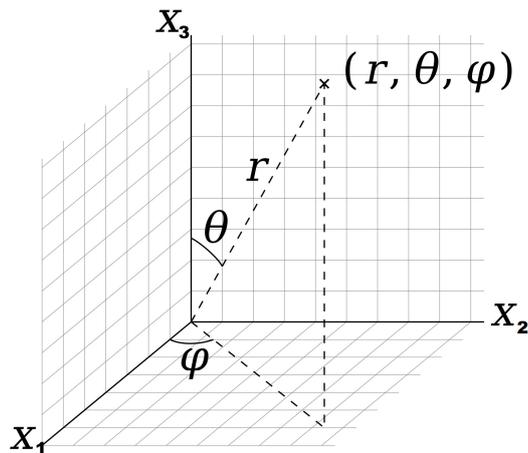


Abbildung 1: 3-dimensionale Polarkoordinaten

m-dim. Kugelkoordinaten

Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Betrachten wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned}
 F_m : [0, +\infty) \times (-\pi, -\pi] \times [0, \pi]^{m-2} &\rightarrow \mathbb{R}^m, (r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}) \mapsto x = (x_1, \dots, x_m), \\
 r \geq 0, \varphi \in (-\pi, -\pi], \theta_j \in [0, \pi], j = 1, \dots, m-2, \\
 x_1 &= r \cos(\varphi) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{m-2}), \\
 x_2 &= r \sin(\varphi) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{m-2}), \\
 x_3 &= r \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{m-2}), \\
 x_4 &= r \cos(\theta_2) \dots \sin(\theta_{m-2}), \\
 &\dots \\
 x_m &= r \cos(\theta_{m-2}).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1.

Beweisen Sie, dass jede $(m-1)$ -dim. Sphäre $\partial K_r(p) \subset \mathbb{R}^m$ wegzusammenhängend ist.

Satz 9.2 und Theorem 9.5 implizieren den folgenden mehrdimensionalen Zwischenwertsatz.

Theorem 9.3 (mehrdimensionaler Zwischenwertsatz).

Sei $E \subseteq X$ wegzusammenhängend und sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann:

- (a) $f(E)$ ist ein Intervall.
- (b) Wenn es $x_1, x_2 \in E$ gibt, so dass, $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ für ein $y \in \mathbb{R}$, dann hat die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung $x \in E$.

Beispiel 9.7.

Finden Sie die Werte des Parameters $\alpha > 0$, so dass das Gleichungssysteme

$$|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha - |x_3|^\alpha + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

eine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ hat.

Lösung. Die Funktion $f_\alpha(x) = |x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha - |x_3|^\alpha + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ist stetig auf \mathbb{R}^3 für jedes $\alpha > 0$. Die Menge $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ist wegzusammenhängend. Weil $f_\alpha(1, 0, 0) = 1$ und $f_\alpha(0, 0, 1) = -1 \forall \alpha > 0$, hat die Gleichung $|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha - |x_3|^\alpha + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ mindestens eine Lösung $x \in S^2$ für alle $\alpha > 0$.

9.2 Zusammenhängende Mengen.

Definition 9.4 (zusammenhängende Räumen und Mengen). (a) Ein metrischer Raum (X, d_X) heißt zusammenhängend, wenn X nicht als eine Vereinigung von zwei offenen nichtleeren disjunkten Teilmengen dargestellt werden kann. Das bedeutet, (X, d_X) ist genau dann *nicht zusammenhängend*, wenn \exists offene $A, B \subset X$, so dass $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ und $A \neq \emptyset \neq B$.

(b) Eine Teilmenge E eines metrischen Raums (Y, d_Y) heißt zusammenhängend, wenn der induzierte metrische Raum (E, d_Y) zusammenhängend ist.

Der Abstand (oder genereller, die Topologie) spielt eine wesentliche Rolle für die Definitionen von zusammenhängenden und wegzusammenhängenden Mengen.

Beispiel 9.8 (Beispiel mit pathologischem metrischen Raum). (a) Die Menge $[0, 1]$ ist im (\mathbb{R}, d_2) zusammenhängend und wegzusammenhängend. Hier $d_2(x, y) = |x - y|$.

(b) Betrachten wir $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$ mit der diskreten Metrik (Abstand)

$$d_{\text{disc}}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Im $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$ ist $[0, 1]$ nicht zusammenhängend, denn im $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$ sind $\{0\}$ und $(0, 1]$ offene nichtleere disjunkte Menge, und $[0, 1] = \{0\} \cup (0, 1]$.

Aufgabe 9.2.

Im $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$ ist $[0, 1]$ auch nicht wegzusammenhängend.

Hinweis: beschreiben Sie alle Wege im $(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$.

Beispiel 9.9.

Die Menge $E = [0, 1] \cup [2, 3]$ ist im (\mathbb{R}, d_2) nicht zusammenhängend, denn im induzierten Raum (E, d_2) sind $[0, 1]$ und $[2, 3]$ offene nichtleere disjunkte Menge.

Die Menge $E = [0, 1] \cup [2, 3]$ ist im (\mathbb{R}, d_2) auch nicht wegzusammenhängend.

Bemerkung 9.1.

Die Begriffe “zusammenhängende Menge” und “wegzusammenhängende Menge” sind verbunden aber nicht äquivalent.

Satz 9.3.

Jede wegzusammenhängende Menge ist zusammenhängend.

Beispiel 9.10 (zusammenhängend $\not\Rightarrow$ wegzusammenhängend).

Betrachten wir die *Sinus-Kurve* $T_{\sin} \subset \mathbb{R}^2$ der *TopologInnen*: $T_{\sin} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, 1)\} \cup \{(0, 0)\}$.

Die Menge T_{\sin} ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Beispiel 9.11.

Die Menge Q aller rationaler Zahlen ist nicht zusammenhängend (und so nicht wegzusammenhängend) in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Theorem 9.4.

Eine offene Menge $E \subseteq V$ ist genau dann wegzusammenhängend, wenn E zusammenhängend ist.

Definition 9.5.(a) Ein Weg $w : [a, b] \rightarrow V$ heißt (stetiger) Streckenzug, falls es eine Zerlegung $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so dass $\forall j = 0, \dots, n$

$$w((1-s)t_j + st_{j+1}) = (1-s)w(t_j) + sw(t_{j+1}), \quad s \in [0, 1]. \quad (9.1)$$

(b) Wir sagen, dass ein Streckenzug w ein Streckenzug in $E \subseteq V$ ist, falls $\text{Spur}(w) \subseteq E$.

(c) Die Länge $L(w)$ des Streckenzuges w ist definitionsgemäß $L(w) := \sum_{j=1}^n \|w(t_j) - w(t_{j-1})\|$.

Theorem 9.5.

Sei $E \subseteq V$ eine offene, nichtleere und zusammenhängende Menge. Dann lassen sich je zwei Punkte $x, y \in E$ durch einen Streckenzug in E verbinden.

Dieses Theorem zusammen mit dem Satz 9.3 \Rightarrow Theorem 9.4.

10 Das mehrfache Riemann-Integral auf Zellen.

10.1 Die n-Zellen und ihre Zerlegungen.

Definition 10.1 (kompakte & offene Zellen und ihr Inhalt).(a) Eine *kompakte n-Zelle* $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Mengenprodukt $Z = I_1 \times \dots \times I_n$ von n kompakten Intervallen $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$. Das bedeutet, $Z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$.

(b) Eine *offene n-Zelle* $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Mengenprodukt $Z = I_1 \times \dots \times I_n$ von n offenen Intervallen $I_j = (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$ (hier $Z = \emptyset$ ist möglich).

(c) In beiden Fällen (a) und (b) wird der (n -dim.) *Inhalt* $|Z| = v_n(Z)$ von Z als

$$|Z| := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \quad (10.1)$$

definiert. Der n -dim. Inhalt $|Z| = v_n(Z)$ wird auch als n -dim. Volumen oder *n-dim. Jordan-Maß* bezeichnet.

Bemerkung 10.1 (z.B., s. [H2] Hildebrandt, Analysis 2).(a) Eine 1-Zelle I ist ein beschränktes Intervall $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, oder (a, b) . In diesem Fall ist der 1-dim. Inhalt (das 1-dim. Jordan-Maß) $|I| = v_1(I) = b - a$ die Länge von I .

(b) Dann können wir $v_n(Z)$ in Def.10.1 als $v_n(Z) = \prod_{j=1}^n |I_j|$ schreiben.

(c) Eine n -Zelle/ n -Quader/ n -Intervall $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Mengenprodukt $Z = I_1 \times \cdots \times I_n$ von n beschränkten 1-dim. Intervallen. In diesem allgemeinen Fall gilt die Formel $v_n(Z) = \prod_{j=1}^n |I_j|$ auch.

(d) Für eine kompakte n -Zelle Z ist Z° eine offene n -Zelle und $|Z| = |Z^\circ|$. In diesem Fall ist die kompakte Menge $E = Z \setminus Z^\circ$ eine Vereinigung von endlich vielen n -Zellen $Z^{[j]} = \overline{Z^{[j]}}$ mit $|Z^{[j]}| = 0$, und E ist ein nichttriviales Beispiel der Menge mit dem Inhalt Null.

Sei $Z = I_1 \times \cdots \times I_n$ eine kompakte n -Zelle wie in Def.10.1 (a). Sei $\zeta^{(1)} : a_1 \leq x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} = b_1$ eine Zerlegung von $I_1 = [a_1, b_1]$ mit der Feinheit $\Delta_{\zeta^{(1)}} = \max_{1 \leq j \leq k_1} (x_{1,j} - x_{1,j-1})$. Sei $\zeta^{(2)} : a_2 \leq x_{2,0} < x_{2,1} < \cdots < x_{2,k_2} = b_2$ eine Zerlegung von $I_2 = [a_2, b_2]$, mit der Feinheit $\Delta_{\zeta^{(2)}} = \max_{1 \leq j \leq k_2} (x_{2,j} - x_{2,j-1})$ und so weiter ...

Das bedeutet, $\zeta^{(j)} : a_j \leq x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j$ ist eine Zerlegung von $I_j = [a_j, b_j]$, mit der Feinheit $\Delta_{\zeta^{(j)}} = \max_{1 \leq \ell \leq k_j} (x_{j,\ell} - x_{j,\ell-1})$, $j = 1, \dots, n$.

Als $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ bezeichnen wir einen Multiindex mit $1 \leq \alpha_j \leq k_j$, $j = 1, \dots, n$, und als \mathbb{A} die Familie aller solcher Multiindices.

Sei $I_{j,\alpha_j} = \{x_{j,\alpha_j-1} \leq x_j \leq x_{j,\alpha_j}\}$ das α_j -te Intervall der Zerlegung $\zeta^{(j)}$.

Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{A}$ betrachten wir die n -Zelle

$$Z_\alpha := I_{1,\alpha_1} \times I_{2,\alpha_2} \times \cdots \times I_{n,\alpha_n}.$$

Definition 10.2 (n -Zerlegung und ihre Feinheit).(a) Man sagt, dass soeben beschriebener Prozess eine n -Zerlegung $\zeta = \zeta^{(1)} \times \cdots \times \zeta^{(n)}$ der kompakten n -Zelle Z in Teilzellen Z_α , $\alpha \in \mathbb{A}$ liefert.

(b) Die Feinheit der n -Zerlegung ζ ist

$$\Delta_\zeta := \max\{\Delta_{\zeta^{(1)}}, \dots, \Delta_{\zeta^{(n)}}\}.$$

Satz 10.1 (Additivität des Inhalts im einfachsten Fall).

Für eine n -Zerlegung von Z in Teilzellen Z_α gilt $|Z| = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} |Z_\alpha|$.

10.2 Das mehrfache Riemann-Integral auf Zellen.

Sei V ein normierter Raum über \mathbb{K} .

Satz 10.2 (normierter Raum der beschränkten Funktionen).

Sei $E \neq \emptyset$ eine abstrakte Menge.

(a) Die Menge $B(E, V)$ aller beschränkten Funktionen $f : E \rightarrow V$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums $\text{Abb}(E, V)$ aller Abbildungen von X nach V .

(b) $B(E, V)$ ist ein normierter Raum mit der Norm $\|f\|_B = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_V$.

Bemerkung 10.2.

Im Fall $V = \mathbb{R}$ bezeichnen wir $B(E) := B(E, \mathbb{R})$. Wir arbeiten meistens mit dem Raum $B(E, \mathbb{K}^m)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sei Z eine kompakte n -Zelle. Sei $f : Z \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Definition 10.3 (Riemann-Zwischensumme).

Wählen wir aus jeder Teilzelle Z_α der n -Zerlegung ζ einen Zwischenpunkt $\xi_\alpha \in Z_\alpha$, so wird

$$S_\zeta = S_{\zeta, \xi}(f) := \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} f(\xi_\alpha) |Z_\alpha|$$

eine (Riemann)-Zwischensumme genannt. (Ihr Wert $S_{\zeta, \xi}(f)$ hängt von der Auswahl der Familie $\xi = \{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ der Zwischenpunkte ab.)

Definition 10.4 (Riemann-Summendefinition).

Sei $f \in B(Z, \mathbb{K}^m)$ eine beschränkte Funktion.

(a) Die Funktion f heißt Riemann-Integrierbar, wenn ein Vektor $w = \mathcal{I}_{\text{Ri}}(f) \in \mathbb{K}^m$ mit der folgenden Eigenschaft existiert:

Für jede Folge $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ von Zerlegungen von Z mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{\zeta_k} = 0$ (und beliebige entsprechende Riemann-Zwischensummen S_{ζ_k}) gilt

$$S_{\zeta_k} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{Ri}}(f) \text{ wenn } k \rightarrow \infty.$$

(b) In diesem Fall, nennt man den Vektor $w = \mathcal{I}_{\text{Ri}}(f) \in \mathbb{K}^m$ das Riemann-Integral von f auf Z und benutzt auch die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} I_{\text{C}_{\text{Ri}}}(f) &= \int_Z f(x) dv_n(x) = \int_Z f = \int_Z f(x) dx = \int_Z f(x) d^n x \\ &= \int_Z f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_Z f dV. \end{aligned}$$

Warum fordern wir $f \in B(Z, \mathbb{K}^m)$ in der Riemann-Summendefinition?

Beispiel 10.1.(a) Sei $f \in C(Z, \mathbb{K}^m)$. Dann ist f auf der kompakten n -Zelle Z Riemann-Integrierbar. (Wie könnten wir solches $\int_Z f dv_n$ berechnen?)

(b) Sei $m = 1$. Sei $Z^{[1]} \subseteq Z$ eine n -Zelle und sei

$$\chi_{Z^{[1]}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in Z^{[1]}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus Z^{[1]} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von $Z^{[1]}$. Dann ist $\chi_{Z^{[1]}}$ auf Z Riemann-Integrierbar und $\int_Z \chi_{Z^{[1]}}(x) dv_n = |Z^{[1]}|$.

Was passiert, wenn $Z^{[1]} \not\subseteq Z$?

Definition 10.5.

Die charakteristische Funktion/Indikatorfunktion einer Menge $E \subseteq V$ ist

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in V \setminus E \end{cases}$$

10.3 Vektorraum der Riemann-Integrierbaren Funktionen

Satz 10.3 (Vektorraum der Riemann-Integrierbaren Funktionen). (a) Die Menge $\mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m)$ aller Riemann-Integrierbaren Funktionen $f : Z \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raum $(B(Z, \mathbb{K}^m), \|\cdot\|_B)$ der beschränkten Funktionen.

(b) Das Riemann-Integral $\mathcal{I}_{\text{Ri}} : \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m) \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist ein stetiger linearer Operator.

Im Besonderen, $\int_Z (\alpha f(x) + \beta g(x)) dv_n = \alpha \int_Z f(x) dv_n + \beta \int_Z g(x) dv_n, \forall f, g \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Für n-Zellen $Z^{[1]}$ und $Z^{[2]}$

$$\int_{Z^{[1]}} \alpha \chi_{Z^{[2]}}(x) dv_n(x) = \alpha \int_{Z^{[1]}} \chi_{Z^{[2]}}(x) dv_n = \alpha |Z^{[1]} \cap Z^{[2]}|.$$

Im Fall $\alpha = 0, \int_Z 0 dv_n = 0$.

Bemerkung 10.3 (Theorem über gleichmäßige Konvergenz).

Die Konvergenz bezüglich $\|f\|_B = \sup_{x \in Z} |f(x)|$ ist die gleichmäßige Konvergenz mit der Bezeichnung $f_k \rightrightarrows f$ auf Z wenn $k \rightarrow \infty$. Das heißt, $f_k \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z} |f(x) - f_k(x)| = 0$.

Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m)$ und die Stetigkeit von \mathcal{I}_{Ri} in Satz 10.3 bedeuten die folgende Aussage:

Falls $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m)$ und $f_k \rightrightarrows f$, gilt $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m)$ und $\int_Z f dv_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Z f_k dv_n$.

Definition 10.6 (Treppenfunktion).

Eine Treppenfunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definitionsgemäß eine Linearkombination

$$f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{Z^{[j]}} \tag{10.2}$$

von charakteristischen Funktionen $\chi_{Z^{[j]}}$ von $k < \infty$ n-Zellen $Z^{[j]}$ mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, k$.

Aus der Definition folgt, dass jede Treppenfunktion in $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist.

Aus Beispiel 10.1 und Satz 10.3 folgt der folgende Satz.

Satz 10.4.

Sei eine Treppenfunktion f wie in (10.2) dargestellt. Dann:

(a) Es gibt eine kompakte n -Zelle Z , so dass $Z \supset \bigcup_{j=1}^k Z^{[j]}$.

(b) Für jede solche kompakte n -Zelle Z gilt

$$\int_Z f dv_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j |Z^{[j]}|.$$

Theorem 10.1.

Sei $f \in C(Z, \mathbb{R})$. Dann:

(a) Es gibt eine Folge $\{f_k\}$ von Treppenfunktionen, so dass $f_k \rightrightarrows f$ auf Z , das heißt, $\|f - f_k\|_{B(Z, \mathbb{R})} = \sup_{x \in Z} |f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$, wenn $k \rightarrow \infty$ (gleichmäßige Konvergenz).

(b) $\int_Z f dv_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Z f_k dv_n$.

Manchmal benutzt man dieses Theorem als die Definition vom Riemann-Integral einer stetigen Funktion (s. [FK1]).

Satz 10.5 (Eigenschaften des Riemann-Integrals der skalarwertigen Funktionen).

Sei $m = 1$. Dann besitzt das Riemann-Integral $\mathcal{I}_{\text{Ri}} : \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathcal{I}_{\text{Ri}} : f \mapsto \int_Z f(x) dv_n$ ist eine stetige Linearform auf $(\mathcal{R}(Z, \mathbb{K}), \|\cdot\|_B)$.

(b) Falls $g, f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ und $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in Z$, gilt

$$\int_Z g dv_n \leq \int_Z f dv_n \quad (\text{Monotonie}).$$

Im Besonderen, $0 \leq \int_Z f dv_n$ falls $0 \leq f(x) \quad \forall x \in Z$.

(c) $|\int_Z f dv_n| \leq \|f\|_B |Z|$ (Integralabschätzung). (Hier $\|f\|_B |Z| = \sup_{x \in Z} |f(x)| v_n(Z)$.)

Bemerkung 10.4.

Die Integralabschätzung $|\int_Z f dv_n| \leq \sup_{x \in Z} |f(x)| |Z|$ gilt für jede $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m)$. Das folgt aus der Dreieckungleichung in \mathbb{K}^m .

10.4 Riemann-Integral durch Darboux-Obersummen & Untersummen

Sei $f \in B(Z, \mathbb{R})$.

Definition 10.7 (Obersumme und Untersumme).

Sei ζ eine Zerlegung von Z in Teilzellen $Z_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}$. Für jede Teilzelle Z_α setzen wir

$$\underline{m}_\alpha := \inf_{x \in Z_\alpha} f(x), \quad \overline{m}_\alpha := \sup_{x \in Z_\alpha} f(x).$$

Dann heißen

$$\underline{S}_\zeta(f) := \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \underline{m}_\alpha |Z_\alpha| \quad \text{und} \quad \overline{S}_\zeta(f) := \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \overline{m}_\alpha |Z_\alpha|$$

Untersumme und Obersumme von f zur Zerlegung ζ .

Satz 10.6.

Für zwei beliebige Zerlegungen ζ_1 und ζ_2 (von Z) gilt

$$\underline{S}_{\zeta_1}(f) \leq \overline{S}_{\zeta_2}(f).$$

Definition 10.8 (Oberintegral und Unterintegral).

Für $f \in B(Z, \mathbb{R})$ definieren wir das Unterintegral

$$\underline{\mathcal{I}}(f) = \sup\{\underline{S}_{\zeta}(f) : \zeta \text{ ist eine Zerlegung von } Z\},$$

und das Oberintegral

$$\overline{\mathcal{I}}(f) = \inf\{\overline{S}_{\zeta}(f) : \zeta \text{ ist eine Zerlegung von } Z\}.$$

Satz 10.6 \Rightarrow

Satz 10.7.

Für jede Zerlegung ζ gilt

$$\underline{S}_{\zeta}(f) \leq \underline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{S}_{\zeta}(f).$$

Definition 10.9 (Darboux-Integrierbarkeit).

Eine Funktion $f \in B(Z, \mathbb{R})$ heißt *Darboux-Integrierbar*, wenn $\underline{\mathcal{I}}(f) = \overline{\mathcal{I}}(f)$.

Bemerkung 10.5.

Falls f Darboux-Integrierbar ist, gilt $\mathcal{I}_{\text{Ri}}(f) = \underline{\mathcal{I}}(f) = \overline{\mathcal{I}}(f)$. Das ist die Darboux-Definition des Riemann-Integrals.

Theorem 10.2 (Integrabilitätskriterien).

Sei $f \in B(Z, \mathbb{R})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist Riemann-Integrierbar.
- (b) f ist Darboux-Integrierbar.
- (c) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung ζ mit $\overline{S}_{\zeta}(f) - \underline{S}_{\zeta}(f) < \varepsilon$.
- (d) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung ζ mit $\Delta_{\zeta} < \delta$ die Ungleichung $\overline{S}_{\zeta}(f) - \underline{S}_{\zeta}(f) < \varepsilon$ gilt.

11 Iterierte und komponentenweise Integration. Integration auf quadrierbaren Mengen.

11.1 Sukzessive Integration auf n-Zellen.

Beispiel 11.1 (Iterierte Integration auf einer 2-Zelle).

Sei die kompakte 2-Zelle $Z = [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $f(x, y) = xye^{x^2y}$,

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ist stetig auf \mathbb{R}^2 , und so Riemann-Integrierbar auf Z . Es ist möglich das mehrfache Integral $\int_Z f dv_2$ zu 1-dim. Integralen zu reduzieren:

$$\begin{aligned} \int_Z f dv_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} e^{x^2 y} \right] dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} e^{x^2 y} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 [e^y - 1] dy = \frac{1}{2} e - 1. \end{aligned}$$

Theorem 11.1 (Iterierte Integration auf 2-dim. Zellen).

Sei $Z = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ eine 2-Zelle. Dann:

(a) Für $f \in C(Z, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_Z f dv_2 = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

(b) Für $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_Z f dv_2 = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx,$$

wobei man bei $\int_{a_j}^{b_j}^*$ das Obereintegral so wie das Untereintegral wählen kann.

Dieses Theorem kann auf den n-dim. Fall generalisiert werden.

Beispiel 11.2 (Integration mit 2-dim. rationalen Unstetigkeitsstellen).

Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gibt es eine eindeutige Darstellung durch einen vollständig gekürzten Bruch $x = \frac{p_x}{q_x}$ mit dem Nenner $q_x \in \mathbb{N}$ und dem Zähler $p_x \in \mathbb{Z}$.

Sei $Z = [0, 1]^2$. Betrachten wir die Funktion

$$f : Z \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \text{ und } y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist $\{(x, y) \in Z : x \in \mathbb{Q} \text{ und } y \in \mathbb{Q}\}$, und damit abzählbar (Aufgabe). Zudem ist $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ (Aufgabe). (Hinweis: für beide Aufgaben kann man einfach die Definitionen benutzen).

Die Formel in Th. 11.1 (a) macht keinen Sinn, weil für $x \in \mathbb{Q}$ das Riemann-Integral $\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$ nicht existiert, und für $y \in \mathbb{Q}$ das Riemann-Integral $\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$ nicht existiert. Aber die Formel in Th. 11.1 (b) macht Sinn und ist wahr. (Die Formel in Th. 11.1 (a) ist wahr auch im Sinne des Lebesgue-Integral).

Definition 11.1 (Symmetrische Gruppe \mathbb{S}_n).

Die symmetrische Gruppe \mathbb{S}_n des Grades n wird definiert als die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ausgerüstet mit der Kompositionsgruppenoperation.

Die bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißen Permutationen.

Theorem 11.2 (Iterierte Integration auf n-dim. Zellen).

Sei $Z = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Sei $\sigma \in \mathbb{S}_n$ eine Permutation. Dann:

Für $f \in C(Z, \mathbb{K}^n)$ gilt

$$\int_Z f(x_1, \dots, x_n) dv_n = \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \int_{a_{\sigma(n-1)}}^{b_{\sigma(n-1)}} \dots \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(n-1)} dx_{\sigma(n)}.$$

Für $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_Z f(x_1, \dots, x_n) dv_n = \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \int_{a_{\sigma(n-1)}}^{b_{\sigma(n-1)}} \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(n-1)} dx_{\sigma(n)},$$

wobei man bei $\int_{a_j}^{b_j} \int^*$ das Obereintegral so wie das Untereintegral wählen kann.

11.2 Komponentenweise Integration der vektorwertigen Funktionen

Sei $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine n-Zelle. Sei $f \in B(Z, \mathbb{K}^m)$,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T, \quad x \in Z.$$

Satz 11.1 (Komponentenweise Integration). (a) $f \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{K}^m) \Leftrightarrow$ alle $f_j \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{K})$, $j = 1, \dots, m$.

(b) In diesem Fall,

$$\int_Z f(x) dv_n = \left(\int_Z f_1(x) dv_n, \int_Z f_2(x) dv_n, \dots, \int_Z f_m(x) dv_n \right)^T$$

Beispiel 11.3.

Sei $Z = [0, T] \subset \mathbb{R}$, $T > 0$. Betrachten wir die Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$.

Identifizieren wir $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Dann $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Bestimmen wir das Integral

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^T f_1(t) dt \\ \int_0^T f_2(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T \cos(t) dt \\ \int_0^T \sin(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin T \\ 1 - \cos T \end{pmatrix},$$

oder

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)dt &= \int_0^T e^{it} dt = -ie^{it} \Big|_0^T = -i(e^T - 1) = e^{T-\pi/2} + i \\ &= \begin{pmatrix} \cos(T-\pi/2) \\ \sin(T-\pi/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin T \\ 1-\cos T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.1.

Integrale von komplexwertigen Funktionen kann man mit Hilfe der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als Integrale von \mathbb{R}^2 -wertigen Funktionen interpretieren.

11.3 Quadrierbare Mengen und Jordan-Maß

Definition 11.2 (quadrierbare Mengen und ihre n-dim. Inhalte).

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann existiert eine kompakte n-Zelle Z , so dass $\overline{E} \subset Z^\circ$.

- (a) E heißt *quadrierbar/Jordan-meißbar*, wenn $\chi_E \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ (das heißt, wenn die charakteristische Funktion χ_E auf Z Riemann-integrierbar ist).
- (b) In diesem Fall heißt $|E| = v_n(E) := \int_Z \chi_E dv_n$ *n-dim. Inhalt/Volumen/Jordan-Maß der Menge E* .
- (c) Die *Familie aller quadrierbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$* bezeichnen wir als \mathcal{Q}_n .

Bemerkung 11.1 (Jordan-Maß als eine wohldefinierte Funktion). (a) Wenn χ_E auf einer kompakten n-Zelle Z mit der Eigenschaft $\overline{E} \subset Z^\circ$ integrierbar ist, ist χ_E integrierbar auf jeder kompakten n-Zelle Z_* mit der selben Eigenschaft $\overline{E} \subset Z_*^\circ$.

- (b) In diesem Fall gilt $\int_Z \chi_E dv_n = \int_{Z_*} \chi_E dv_n$.
- (c) Jede n-Zelle ist $Z = I_1 \times \dots \times I_n$ quadrierbar, und der entsprechende Wert von $v_n(Z)$ in Def. 11.2 ist gleich mit $\prod_{j=1}^n |I_j|$.
- (d) **Zusammenfassung.** Das Jordan-Maß $|E| = v_n(E)$ ist wohldefiniert als eine Funktion $v_n : \mathcal{Q}_n \rightarrow [0, +\infty)$.
- (e) Die Bezeichnung dv_n in $\int_Z \chi_E dv_n$ heißt *n-dim. Volumenelement*.

Beispiel 11.4. (a) Jede Kugel $K_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ ist quadrierbar, das heißt $K_r(x) \in \mathcal{Q}_n$. Für jede (n-1)-dim. Sphäre $\partial K_r(x)$ gilt

$$\partial K_r(x) \in \mathcal{Q}_n \text{ und } v_n(\partial K_r(x)) = 0.$$

- (b) Wenn eine beschränkte Menge E in einer Hyperebene $\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_k = c\}$ liegt (wobei $k \in \{1, \dots, n\}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine fixierte Zahl), ist E quadrierbar und $v_n(E) = 0$.
- (c) Falls $k \in \mathbb{N}$ und $E_1, E_2, \dots, E_k \in \mathcal{Q}_n$, gilt $\bigcup_{j=1}^k E_j \in \mathcal{Q}_n$, $\bigcap_{j=1}^k E_j \in \mathcal{Q}_n$, $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{Q}$.

11.4 Riemann-Integral auf quadrierbaren Mengen

Definition 11.3.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Die kanonische Fortsetzung \tilde{f} von f (auf \mathbb{R}^n) ist die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0_{\mathbb{K}^m}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}.$$

Definition 11.4.

Sei $E \in \mathcal{Q}_n$. Sei $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$.

(a) Wir sagen, dass f auf E Riemann-Integrierbar ist und schreiben $E \in \mathcal{R}(E, \mathbb{K}^m)$, wenn die kanonische Fortsetzung \tilde{f} Riemann-integrierbar ist (auf einer abgeschlossenen n -Zelle Z mit $Z^\circ \supset \overline{E}$).

(b) In diesem Fall definieren wir das entsprechende Riemann-Integral als

$$\int_E f dv_n = \int_Z \tilde{f} dv_n.$$

Bemerkung 11.2.

Wenn die kanonische Fortsetzung \tilde{f} auf einer kompakten n -Zelle Z mit $\overline{E} \subset Z^\circ$ Riemann-Integrierbar ist, ist \tilde{f} auf jeder kompakten n -Zelle Z_* mit $\overline{E} \subset Z_*^\circ$ Riemann-Integrierbar, und

$$\int_Z \tilde{f} dv_n = \int_{Z_*} \tilde{f} dv_n.$$

Zusammenfassung. Für $E \in \mathcal{Q}_n$ und $f \in \mathcal{R}(E, \mathbb{K}^m)$ ist $\int_E f dv_n$ wohldefiniert.

11.5 Cavalierisches Prinzip: iterierte Integration auf Normalbereichen.

Definition 11.5 (Normalbereich bezüglich der x_j -Achse).

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Normalbereich* (bezüglich der x_j -Achse), wenn

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) : y = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in K, \varphi_-(y) \leq x_j \leq \varphi_+(y)\}$$

mit einer kompakten Menge $K \in \mathcal{Q}_{n-1}$ und $\varphi_-, \varphi_+ \in C(K, \mathbb{R})$, so dass $\varphi_- \leq \varphi_+$.

(Die Bezeichnung $\varphi_- \leq \varphi_+$ hier bedeutet $\varphi_-(y) \leq \varphi_+(y) \quad \forall y \in K$.)

Theorem 11.3 (Cavalierisches Prinzip).

Ist $E \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich wie in Def. 11.5 und ist $f \in C(E, \mathbb{K}^m)$, so gilt

$$\int_E f(x) dv_n(x) = \int_K \left(\int_{\varphi_-(y)}^{\varphi_+(y)} f(x) dx_j \right) dv_{n-1}(y),$$

wobei $dv_{n-1}(y)$ das $(n-1)$ -dim. Volumenelement auf $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist.

Beispiel 11.5 (Volumen einer 3-dim. Kugel).

Sei $E = \overline{K_r(0_{\mathbb{R}^3})} = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}$. Dann $v_3(E) = \frac{4\pi}{3}r^3$.

Dies sieht man so: Sei $D = \{y = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$. Dann $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : y = (x_1, x_2) \in D, \varphi_-(y) \leq x_3 \leq \varphi_+(y)\}$ mit stetigen Funktionen $\varphi_{\mp}(x_1, x_2) = \mp\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$. Also ist E ein Normalbereich in \mathbb{R}^3 bezüglich der x_3 -Achse. Wegen des Cavalierischen Prinzip gilt

$$\begin{aligned} v_3(E) &= \int_E 1 dv_3 = \int_D \left(\int_{\varphi_-(y)}^{\varphi_+(y)} dx_3 \right) dv_2(y) = \int_D [\varphi_+(y) - \varphi_-(y)] dv_2(y) \\ &= 2 \int_D \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} dv_2(y). \end{aligned}$$

Hier ist $D = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-R, R], -\rho(x_1) \leq x_2 \leq \rho(x_1)\}$ ein Normalbereich in \mathbb{R}^2 mit $\rho(x_1) = \sqrt{r^2 - x_1^2}$.

$$v_3(E) = 2 \int_D \sqrt{\rho^2(x_1) - x_2^2} dv_2(y) = 2 \int_{-R}^R \left(\int_{-\rho(x_1)}^{\rho(x_1)} \sqrt{\rho^2(x_1) - x_2^2} dx_2 \right) dx_1.$$

Für $t \in [-\rho, \rho]$ finden wir $\int \sqrt{\rho^2 - t^2} dt$.

Mit der Substitutionsformel $t = \rho \sin(s)$ haben wir,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\rho^2 - t^2} dt &= \int \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \sin^2(s)} d(\rho \sin(s)) \\ &= \rho^2 \int [1 - \sin^2(s)]^{1/2} \cos(s) ds = \rho^2 \left(\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{4} \sin(2s) + C_1 \right) \\ &= \frac{\rho^2}{2} \arcsin \frac{t}{\rho} + \frac{\rho^2}{2} \sin(s) \cos(s) + C_2 \\ &= \frac{\rho^2}{2} \arcsin \frac{t}{\rho} + \frac{t}{2} \sqrt{\rho^2 - t^2} + C_2. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} v_3(K_r(0_{\mathbb{R}^3})) &= v_3(E) = 2 \int_{-R}^R \left[\frac{\rho^2(x_1)}{2} \arcsin \frac{x_2}{\rho(x_1)} + \frac{x_2}{2} \sqrt{\rho^2(x_1) - x_2^2} \right]_{-\rho(x_1)}^{\rho(x_1)} dx_1 \\ &= \int_{-R}^R \rho^2(x_1) [\arcsin(1) - \arcsin(-1)] dx_1 \\ &= \int_{-R}^R (r^2 - x_1^2) \pi dx_1 = \pi [r^2 x_1 - x_1^3/3]_{-R}^R = \pi [2r^3 - 2r^3/3] = \frac{4\pi}{3} r^3. \end{aligned}$$

12 Jordan-Maß als eine Erweiterung. Eigenschaften des Jordan-Maß und der quadrierbaren Mengen.

12.1 Elementarmengen und ihre (n-dim.) Inhalte.

Erinnerung.

Für jede n-Zelle $Z = I_1 \times \dots \times I_n$ wird der Inhalt $|Z| = v_n(Z)$ durch $v_n(Z) := \prod_{j=1}^n |I_j|$ definiert. Hier sind I_j beschränkte Intervalle und $|I_j| = v_1(I_j)$ ihre Längen.

Unser Ziel ist es, die Funktion $v_n(\cdot)$ von der Familie aller n-Zellen auf eine größere Mengenfamilie \tilde{Q} zu erweitern, so dass die folgenden Anforderungen erfüllt werden:

(V0) jede n-Zelle $Z = I_1 \times \dots \times I_n$ ist ein Element von \tilde{Q} und $v_n(Z) := \prod_{j=1}^n |I_j|$ (Erweiterung).

(V1) $0 \leq v_n(E) \quad \forall E \in \tilde{Q}$ (Positivität).

(V2) Für disjunkte Mengen $E_j \in \tilde{Q}$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$\bigcup_{j=1}^k E_j \in \tilde{Q} \text{ und } v_n \left(\bigcup_{j=1}^k E_j \right) = \sum_{j=1}^k v_n(E_j) \text{ (Additivität).}$$

Erinnerung. Man sagt, dass $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von *disjunkten* Mengen ist, wenn $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha \neq \beta$.

Der 1. Kandidat für \tilde{Q} ist der *Ring \mathcal{E} der Elementarmengen*.

Definition 12.1 (Elementarmengen und ihre Inhalte).(a) Wir sagen, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Elementarmenge (in \mathbb{R}^n) ist, und schreiben $M \in \mathcal{E}$, wenn sie mindestens eine Darstellung

$$M = \bigcup_{j=1}^k Z_j$$

als eine *Vereinigung einer endlichen Anzahl $k \in \mathbb{N}$ von disjunkten n-Zellen* hat.

(b) In diesem Fall wird der Inhalt $|M| = v_n(M)$ von M durch

$$v_n(M) := \sum_{j=1}^k v_n(Z_j)$$

definiert.

Bemerkung 12.1 (Inhalt der Elementarmengen ist wohldefiniert).

Gibt es zwei Darstellungen $M = \bigcup_{j=1}^k Z_j = \bigcup_{j=1}^{\tilde{k}} \tilde{Z}_j$ von $M \in \mathcal{E}$ durch Vereinigungen endlicher Anzahlen $k, \tilde{k} \in \mathbb{N}$ von disjunkten n-Zellen, liefern diese Darstellungen *denselben Wert* von $v_n(M) \in \mathbb{R}$, das heißt $\sum_{j=1}^k v_n(Z_j) = \sum_{j=1}^{\tilde{k}} v_n(\tilde{Z}_j)$.

Definition 12.2 (Ring von Mengen).

Eine Familie \mathcal{Q} von Mengen heißt *Mengen-Ring*, wenn $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{Q}$ es gilt

$$M_1 \cup M_2 \in \mathcal{Q}, M_1 \setminus M_2 \in \mathcal{Q}, M_1 \cap M_2 \in \mathcal{Q}.$$

Theorem 12.1.

Die Familie \mathcal{E} der Elementarmengen ist ein Mengen-Ring.

Bemerkung 12.2. (a) $\emptyset = (a, a)^n \in \mathcal{E}$ spielt die Rolle vom neutralen Element, also $\emptyset \cup M = M$.

(b) Der Begriff des Mengen-Ringes unterscheidet sich von dem eines Rings im Sinne der Algebra. Beide stehen aber in gewissem Zusammenhang.

Satz 12.1 (Positivität & Additivität des Inhalts auf Elementarmengen).

Für die Inhaltsfunktion $v_n(\cdot)$ auf den Elementarmengen sind die Positivität- und Additivität-Eigenschaften wahr. Das bedeutet

- $0 \leq v_n(M) \quad \forall M \in \mathcal{E}$ (Positivität).
- Für disjunkte Mengen $M_j \in \mathcal{E}$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$v_n \left(\bigcup_{j=1}^k M_j \right) = \sum_{j=1}^k v_n(M_j) \quad (\text{Additivität}).$$

Beispiel 12.1 (Menge mit dem Inhalt Null).

Sei $Z = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ eine kompakte n -Zelle. Dann $\partial Z \in \mathcal{E}$ und $v_n(\partial Z) = 0$, denn

$$Z, Z^o \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \partial Z = \overline{Z} \setminus Z^o = Z \setminus Z^o \in \mathcal{E},$$

weil \mathcal{E} ein Ring von Mengen ist.

Da $Z = Z^o \cup \partial Z$ und $Z^o \cap \partial Z = \emptyset$, die Additivität $\Rightarrow |Z| = |Z^o| + |\partial Z|$. Aber $|Z| = |Z^o| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Also, $|\partial Z| = 0$.

Theorem 12.2 (σ -Subadditivität des Inhalts auf Elementarmengen).

Sei $M \in \mathcal{E}$. Falls $M \subseteq \bigcup_{j=1}^N M_j$, wobei $N \leq \infty$ und $\{M_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{E}$ eine endliche oder abzählbare Familie von Elementarmengen ist, so gilt

$$v_n(M) \leq \sum_{j=1}^N v_n(M_j).$$

Bemerkung 12.3 (σ -Subadditivität und Monotonie). (a) Die Eigenschaft, die in Th. 12.2 beschrieben ist, heißt σ -Subadditivität (abzählbare Subadditivität). Also sagt Th. 12.2, dass die Inhaltsfunktion $v_n(\cdot)$ auf \mathcal{E} σ -subadditiv ist.

(b) Th. 12.2 impliziert auch die *Monotonie*, das heißt, für $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$ folgt aus $M_1 \subset M_2$, dass $v_n(M_1) \leq v_n(M_2)$.

Aus der σ -Subadditivität von $v_n(\cdot)$ auf \mathcal{E} folgt das folgende Theorem:

Theorem 12.3 (σ -Additivität des Inhalts auf Elementarmengen).

Sei $M \in \mathcal{E}$. Seien $M_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j \cap M_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$. Falls $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, gilt $v_n(M) = \sum_{j=1}^{\infty} v_n(M_j)$.

Bemerkung 12.4 (σ -Additivität).

Die Eigenschaft, die in Th. 12.3 beschrieben ist, heißt σ -Additivität (abzählbare Additivität). Also ist die Inhaltsfunktion $v_n(\cdot)$ auf dem Mengen-Ring \mathcal{E} eine σ -additive Erweiterung des Inhalts vom Semiring aller n -Zellen, [Kolmogorov A.N., Fomin S.V., Introductory real analysis], [W2],[R].

Wenn $n \geq 2$, ist $K_r(0_{\mathbb{R}^n})$ keine Elementarmenge.

Wir brauchen eine größere Familie messbarer Mengen.

12.2 Jordan-Erweiterung des Inhalts auf quadrierbare Mengen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige beschränkte Menge. Dann $\exists S, T \in \mathcal{E}$, so dass $S \subseteq M \subseteq T$. (Als S kann man $S = \emptyset$ wählen).

Definition 12.3 (Archimedische Kompressionsmethode).(a) Der *innere Inhalt* von M wird durch

$$|M|_i := \sup\{v_n(S) : S \in \mathcal{E}, S \subseteq M\}$$

definiert.

(b) Der *äußere Inhalt* von M wird durch

$$|M|_a := \inf\{v_n(T) : T \in \mathcal{E}, M \subseteq T\}$$

definiert.

(c) Eine beschränkte Menge M heißt *Jordan-messbar*, wenn $|M|_i = |M|_a$. In diesem Fall heißt $|M| := |M|_i = |M|_a$ Jordan-Maß von M .

Bemerkung 12.5. (a) Sei $M \in \mathcal{E}$. Dann ist M Jordan-messbar und $v_n(M) = |M|_i = |M|_a$.

(b) Also ist das Jordan-Maß eine Erweiterung der Inhaltsfunktion $v_n(\cdot)$ von \mathcal{E} auf die Familie aller Jordan-messbaren Mengen. Im Folgenden bezeichnen wir das Jordan-Maß einer Jordan-messbaren Menge M als $v_n(M) = |M|$.

(c) Für jede Jordan-messbare Menge M gilt $v_n(M) \geq 0$ (*Positivität*).

(d) Wenn $|M|_a = 0$, gilt $M \in \mathcal{Q}_n$ und $v_n(M) = 0$. In diesem Fall sagt man, dass M eine *Jordan-Nullmenge* ist.

Theorem 12.4 (äquivalente Umformulierungen der Jordan-Messbarkeit).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $M \in \mathcal{Q}_n$, das heißt, M ist quadrierbar ($\chi_M \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$ für n -Zellen $Z = \overline{Z}$ mit $Z^\circ \supseteq M$).
- (b) M ist Jordan-messbar (im Sinne der Def. 12.3).
- (c) M ist beschränkt und der Rand ∂M ist eine Jordan-Nullmenge.
- (d) $\forall \varepsilon > 0 \exists S, T \in \mathcal{E}$, so dass $S \subseteq M \subseteq T$ und $|T \setminus S| < \varepsilon$.
- (e) $\forall \varepsilon > 0 \exists S, T \in \mathcal{E}$, so dass $S \subseteq M \subseteq T$ und $|T| - |S| < \varepsilon$.

Wenn (a)-(e) wahr sind, ist das Jordan-Maß in Def. 12.3 gleich mit dem n -dim. Inhalt in Def. 12.2, das heißt, $v_n(M) = \int_Z \chi_M$.

Seien M und M_j , $j \in \mathbb{N}$ beschränkte Teilmengen von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 12.6 (zusätzliche Eigenschaften von $|\cdot|_i$, $|\cdot|_a$ und $v_n(\cdot) = |\cdot|$). (a) \mathcal{Q}_n ist ein Mengen-Ring.

- (b) Sei $M_1 \subset M_2$. Dann $|M_1|_i \leq |M_2|_i$ und $|M_1|_a \leq |M_2|_a$. Falls zusätzlich $M_1, M_2 \in \mathcal{Q}_n$, dann $v_n(M_1) \leq v_n(M_2)$ (Monotonie).
- (c) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\{M_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{Q}_n$. Falls $M \subseteq \bigcup_{j=1}^k M_j$, gilt $v_n(M) \leq \sum_{j=1}^k v_n(M_j)$ (Subadditivität).
- (d) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\{M_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{Q}_n$, so dass $M_j \cap M_\ell = \emptyset \quad \forall j \neq \ell$. Falls $M = \bigcup_{j=1}^k M_j$ gilt $v_n(M) = \sum_{j=1}^k v_n(M_j)$ (Additivität).
- (e) $|M^\circ|_i = |M|_i \leq |M|_a = |\overline{M}|_a$.
- (f) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Dann $M^\circ, \overline{M} \in \mathcal{Q}_n$ und $|M^\circ| = |M| = |\overline{M}|$. Außerdem gilt für jedes E mit $M^\circ \subseteq E \subseteq \overline{M}$, dass $E \in \mathcal{Q}_n$ und $|E| = |M|$.

Beispiel 12.2 (offene Kugeln sind quadrierbar).

$$K_r(0_{\mathbb{R}^n}) \in \mathcal{Q}_n \text{ und } |K_r(0_{\mathbb{R}^n})| = |\overline{K_r(0_{\mathbb{R}^n})}| = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Satz 12.2 (Produktregel).

Seien $A \in \mathcal{Q}_n$ und $B \in \mathcal{Q}_m$. Dann:

- (a) $A \times B \in \mathcal{Q}_{n+m}$
- (b) $v_{n+m}(A \times B) = v_n(A) v_m(B)$

Beispiel 12.3 (Sphären sind Jordan-Nullmengen).

$$|\partial K_r(0_{\mathbb{R}^n})| = 0.$$

$$\text{Beweis 1. } K_r(0_{\mathbb{R}^n}) \in \mathcal{Q}_n \quad \Rightarrow \quad |\partial K_r(0_{\mathbb{R}^n})| = 0.$$

Beweis 2 für $n \geq 2$. $\partial K_r(0_{\mathbb{R}^n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n \leq 0\}$. Die Mengen $M_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, \pm x_n \geq 0\}$ sind Normalbereiche bezüglich der x_n -Achse. Wegen des Cavalierischen Prinzip,

$$|M_+| = \int_{\overline{K_r(0_{\mathbb{R}^{n-1}})}} \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx_n dv_{n-1}(y) = \int_{\overline{K_r(0_{\mathbb{R}^{n-1}})}} 0 dv_{n-1}(y) = 0.$$

In ähnlicher Weise, $|M_-| = 0$. Positivität + Subadditivität $\Rightarrow 0 \leq |\partial K_r(0_{\mathbb{R}^n})| \leq |M_-| + |M_+| = 0$.

Satz 12.3.

Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Menge. Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f

$$\text{Gr } f := \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K, x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

eine Jordan-Nullmenge.

Der Beweis folgt aus dem Cavalierischen Prinzip.

Sei $O(\mathbb{R}^n) = O(n)$ die orthogonale Gruppe von \mathbb{R}^n , das heißt, die Gruppe aller orthogonalen linearen Operatoren. Bezüglich der Standardbasis bedeutet $A \in O(n)$ für die entsprechende Matrix A , dass $A = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Bemerkung 12.7.

$O(n)$ ist die Menge aller isometrischen Isomorphismen vom normierten Raum $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ nach $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

Satz 12.4 (Jordan-Maß ist bewegungs- und spiegelungsinvariant).

Sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\psi(x) = Ux + u$, wobei $U \in O(n)$ und $u \in \mathbb{R}^n$. Dann:

(a) $M \in \mathcal{Q}_n \Leftrightarrow \psi(M) \in \mathcal{Q}_n$.

(b) In diesem Fall, $|M| = |\psi(M)|$.

Satz 12.5.

Seien $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\psi_j(x) = U_j x + u_j$, wobei $U_j \in O(n)$ und $u_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$, und $N \in \mathbb{N}$. Seien $f_j \in C(K_j, \mathbb{R})$, wobei $K_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt sind und $j = 1, \dots, N$. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, so dass

$$\partial M = \bigcup_{j=1}^N \psi_j(\text{Gr } f_j).$$

Dann:

(a) ∂M ist eine Jordan-Nullmenge.

(b) $M \in \mathcal{Q}_n$.

Wir brauchen ein Beispiel einer beschränkten und nicht Jordan-messbaren Menge.

Beispiel 12.4 (beschränkte und nicht Jordan-messbare Menge).

$M = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist nicht Jordan-messbar in \mathbb{R} . (Warum?)

13 Lebesgue-Maß, Lebesgue-Nullmengen und Riemann-Integrierbarkeit

13.1 Erweiterung des Inhalts auf einem σ -Ring.

Wir haben die Inhaltsfunktion $v_n : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty)$ als die *additive Erweiterung* der Inhaltsfunktion von der Familie von n -Zellen definiert. Diese Erweiterung ist eindeutig und sogar *σ -additiv* im folgenden Sinn:

Th.13.3. Seien $M \in \mathcal{E}$, $M_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j \cap M_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$ und $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Dann $v_n(M) = \sum_{j=1}^{\infty} v_n(M_j)$.

Unser Ziel ist es nun eine solche Erweiterung $\mu_n(\cdot)$ von $v_n(\cdot)$ auf dem größeren Mengenring \mathcal{L} zu konstruieren, so dass zusätzlich zu den gewöhnlichen Eigenschaften von Positivität, Monotonie und Additivität die folgende *Eigenschaft des Maß auf einem σ -Rings* auch wahr ist:

Wenn $M_j \in \mathcal{L}$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j \cap M_k = \emptyset \forall j \neq k$ und $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, dann gilt $M \in \mathcal{L}$ und $\mu_n(M) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(M_j)$.

Bemerkung 13.1. (a) Eine solche Erweiterung soll den Wert $\mu_n(M) = +\infty$ annehmen für manche $M \in \mathcal{L}$, z.B. für Vereinigungen $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$ von disjunkten n -Zellen Z_j , so dass $\sum_{j=1}^{\infty} v_n(Z_j) = +\infty$.

(b) im 2. Schritt wollen wir $\mu_n(M) = +\infty$ vermeiden. Wir *fixieren eine kompakte n -Zelle* $E = [a, b]^n$ mit $a < b$ und betrachten *nur Teilmengen von E* .

Im 3. Schritt betrachten wir auch unbeschränkte $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mu_n(M) = +\infty$ und mit $\mu_n(M) < +\infty$.

(c) Ähnlich fordern wir von quadrierbaren Mengen $M \in \mathcal{Q}_n$ immer Beschränktheit. Aber der Mengenring \mathcal{Q}_n besitzt die σ -Ring-Eigenschaft nicht, auch wenn wir nur \mathcal{Q}_n -Teilmengen von $E = [a, b]^n$ betrachten.

Gegenbeispiele: $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ in \mathbb{R} , oder $\mathbb{Q}^n \cap E$ in \mathbb{R}^n sind abzählbare Vereinigungen von einpunktigen Mengen, die beschränkt, aber nicht quadrierbar sind. *Die Familie \mathcal{Q}_n ist nicht groß genug* für "gute Integration".

Schritt 1. Äußeres Lebesgue-Maß. Der äußere Inhalt von M wird durch

$$|M|_a := \inf\{|T| : T \in \mathcal{E}, M \subseteq T\}$$

definiert.

Definition 13.1.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Das *äußere Lebesgue-Maß* $\mu_a(M) \in [0, +\infty]$ von M wird durch

$$\mu_a(M) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v_n(M_j) : M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j, \quad M_j \in \mathcal{E} \quad \forall j \right\}$$

definiert.

$$\mu_a(M) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v_n(M_j) : M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j, \quad M_j \in \mathcal{E} \quad \forall j \right\}$$

Beispiel 13.1.(a) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Dann $\mu_a(M) = v_n(M)$. Das folgt aus der Definitionen von $|\cdot|_a$, $|\cdot|_i$ und der σ -Subadditivität vom Jordan-Maß $v_n(\cdot)$.

(b) Jede abzählbare Menge M hat $\mu_a(M) = 0$. Z.B., $\mu_a(\mathbb{Q}^n) = 0 = \mu_a(\mathbb{Q}^n \cap [0, 1]^n)$.

(c) $\mu_a(\emptyset) = 0$.

(d) $\mu_a(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Aufgabe 13.1.

Sei $n = 2$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und betrachten 2-dim. $\mu_a(\cdot)$ in \mathbb{C} . Was ist der Wert von $\mu_a(\mathbb{R})$?

Satz 13.1 (Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maß). (a) $\mu_a(M)$ ist definiert $\forall M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 \leq \mu_a(M) \leq +\infty$.

(b) $\mu_a\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_a(M_j)$ (σ -Subadditivität).

(c) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \mu_a(M_1) \leq \mu_a(M_2)$ (Monotonie).

(d) $|M|_i \leq \mu_a(M) \leq |M|_a$ für jedes beschränkte M .

(e) $\mu_a(\cdot)$ ist bewegungs- und spiegelungs-invariant. Das bedeutet für $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x) = Ux + u$, $U \in O(n)$ und $u \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mu_a(M) = \mu_a(\psi(M))$.

Bemerkung 13.2 (generell ist σ -Additivität von μ_a nicht wahr).

Die σ -Additivität von μ_a ist nicht für alle Mengen wahr. Das bedeutet, es gibt eine Folge $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ von disjunkten Mengen M_j , so dass

$$\mu_a\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu_a(M_j),$$

(s. die verbundenen Beispiele von nicht Lebesgue-messbaren Mengen in [W2],[KF]).

Schritt 2. Inneres Lebesgue Maß und messbare beschränkte Mengen.

Fixieren wir eine kompakte n -Zelle E mit $v_n(E) > 0$, z.B., $E = [0, 1]^n$ mit $v_n(E) = 1 = \mu_a(E)$.

Definition 13.2 (Inneres Lebesgue-Maß).

Sei $M \subseteq E$. Dann definieren wir das *innere Lebesgue-Maß* $\mu_i(M)$ als

$$\mu_i(M) := v_n(E) - \mu_a(E \setminus M).$$

Definition 13.3 (Lebesgue-messbare Teilmengen von E).

Sei $M \subseteq E$.

- (a) Wir sagen, dass M *Lebesgue-messbar* ist, und schreiben $M \in \mathcal{L}_E$, wenn $\mu_i(M) = \mu_a(M)$.
- (b) In diesem Fall definieren wir das (n -dim.) *Lebesgue-Maß* $\mu_n(M)$ von M als $\mu_n(M) = \mu_i(M) = \mu_a(M)$.

Definition 13.4 (σ -Algebra von Mengen).

Sei \mathcal{L} ein abstrakter Mengen-Ring.

- (a) Der Mengen-Ring \mathcal{L} heißt σ -Ring, wenn für beliebige $M_j \in \mathcal{L}$, $j \in \mathbb{N}$, und $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ gilt, dass $M \in \mathcal{L}$.
- (b) Der Mengen-Ring \mathcal{L} heißt *Mengen-Algebra*, wenn es eine Menge $\hat{E} \in \mathcal{L}$ gibt, so dass $M \cap \hat{E} = M \forall M \in \mathcal{L}$. Eine solche Menge \hat{E} heißt *Einselement* der Mengen-Algebra \mathcal{L} .
(Aufgabe: Einselement ist immer eindeutig).
- (c) Wenn eine Familie \mathcal{L} von Mengen σ -Ring und Mengen-Algebra gleichzeitig ist, heißt \mathcal{L} σ -Algebra.

Satz 13.2.

Sei \mathcal{L} eine abstrakte σ -Algebra. Dann gilt für beliebige $M_j \in \mathcal{L}$, $j \in \mathbb{N}$, und $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$, dass $M \in \mathcal{L}$.

Theorem 13.1 (σ -additives Maß auf Lebesgue- σ -Algebra \mathcal{L}_E). (a) Die Familie \mathcal{L}_E aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von $E = [a, b]^n$ ist eine σ -Algebra (mit dem Einselement E). Im Besonderen gilt für beliebige $M_j \in \mathcal{L}_E$, $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{L}_E \text{ und } \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{L}_E$$

- (b) Das Lebesgue-Maß $\mu_n : \mathcal{L}_E \rightarrow [0, +\infty)$ ist σ -additiv. Das bedeutet, für beliebige $M_j \in \mathcal{L}_E$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j \cap M_k = \emptyset \forall j \neq k$, gilt

$$\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(M_j).$$

Bemerkung 13.3.

Die Familie der *quadrierbaren Teilmengen* von E ist *keine* σ -Algebra. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\{x\} \in \mathcal{Q}_n$, aber $\bigcup_{x \in \mathbb{Q}^n \cap E} \{x\} = \mathbb{Q}^n \cap E \notin \mathcal{Q}_n$.

Beispiel 13.2 (Lebesgue-Maß auf E ist eine Erweiterung von $v_n(\cdot)$). (a) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$ und $M \subseteq E$. Dann $M \in \mathcal{L}_E$ und $\mu_n(M) = v_n(M)$.

- (b) Sei $M_1 = \mathbb{Q}^n \cap E$. Dann $M_1 \notin \mathcal{Q}_n$ und $\nexists v_n(M_1)$.

Aber $M_1 \in \mathcal{L}_E$ mit $\mu_n(M_1) = 0$. (Warum?)

(c) Sei $M_2 = E \setminus \mathbb{Q}^n$. Dann $M_2 \notin \mathcal{Q}_n$ und $\#v_n(M_2)$.

Aber $M_2 \in \mathcal{L}_E$ mit $\mu_n(M_2) = v_n(E) = (b-a)^n$. (Warum?)

Schritt 3. Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n .

Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ ein Multiindex mit Komponenten $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Betrachten wir die folgende *disjunkte-Vereinigung-Darstellung* von \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} E_\alpha,$$

wobei $E_\alpha = [\alpha_1, \alpha_1 + 1) \times [\alpha_2, \alpha_2 + 1) \times \dots \times [\alpha_n, \alpha_n + 1)$.

Definition 13.5 (Lebesgue-Maß und Messbarkeit auf \mathbb{R}^n). (a) Wir sagen, dass $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar* ist, und schreiben $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, wenn $M \cap E_\alpha \in \mathcal{L}_{E_\alpha} \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n$.

(b) In diesem Fall definieren wir das (*n-dim.*) *Lebesgue-Maß* $\mu_n(M) \in [0, +\infty]$ von M als

$$\mu_n(M) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mu_n(M \cap E_\alpha).$$

Theorem 13.2 (σ -additives Maß auf Lebesgue- σ -Algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$). (a) Die Familie $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von \mathbb{R}^n ist eine σ -Algebra (mit dem Einselement \mathbb{R}^n).

(b) Das Lebesgue-Maß $\mu_n : \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, +\infty]$ ist σ -additiv im Sinn, dass für beliebige $M_j \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $M_j \cap M_k = \emptyset \forall j \neq k$, gilt

$$\mu_n \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(M_j).$$

Hier $(+\infty) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j := +\infty$ für beliebige $c_j \in [0, +\infty]$.

Theorem 13.3 (zusätzliche Eigenschaften des Lebesgue-Maß). (a) Sei $M_1, M_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und $M_1 \subset M_2$. Dann $\mu_n(M_1) \leq \mu_n(M_2)$ (*Monotonie*). Falls zusätzlich $\mu_n(M_1) < +\infty$, gilt $\mu_n(M_2 \setminus M_1) = \mu_n(M_2) - \mu_n(M_1)$.

(b) Sei $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ eine monoton fallende Folge von Lebesgue-messbaren Mengen im Sinn, dass $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$. Sei M ein Limes von $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ im Sinn, dass $M = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j$. Dann

$$\mu_n(M) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_n(M_j).$$

(c) Sei $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ eine monoton steigende Folge von Lebesgue-messbaren Mengen im Sinn, dass $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$. Sei M ein Limes von $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ im Sinn, dass $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$. Dann

$$\mu_n(M) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_n(M_j).$$

(d) $\mu_n(\cdot)$ ist bewegungs- und spiegelungs-invariant.

Satz 13.3.(a) Alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle abgeschlossenen Mengen $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-messbar.

(b) Abzählbare Vereinigungen und abzählbare Schnittmengen von offenen oder abgeschlossene Mengen sind Lebesgue-messbar.

Beispiel 13.3.

Die Menge $M_{a,\gamma} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\gamma} \right\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ für alle $a > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ als eine abgeschlossene Menge, und

$$\mu_n(M_{a,\gamma}) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} a^{1-\gamma}, & \gamma \in (1, +\infty) \\ +\infty, & \gamma \in (-\infty, 1] \end{cases}.$$

Wir prüfen nach: Im Fall $\gamma \neq 1$, $\mu_n(M_{a,\gamma}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_a^b = \frac{1}{1-\gamma} \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\gamma} - \frac{1}{1-\gamma} a^{1-\gamma}$. (Der Fall $\gamma = 1$ ist eine Aufgabe.)

Bemerkung 13.4 (uneigentliche Integrale auf halbunendlichen Intervallen).

Sei $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \quad \forall b \in (a, +\infty)$. Dann heißt

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

uneigentliches (Riemann-)Integral.

Man sagt, dass $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ gegen $c \in \widehat{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ konvergiert und schreibt $\int_a^{+\infty} f(x) dx = c$, wenn $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = c$.

Ähnlich kann man das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b$ als $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b$ definieren.

13.2 Anwendungen des Lebesgues-Maßes.

Die Hauptanwendungen des Lebesgue-Maßes und der Methode von der Lebesgue-Erweiterung sind:

- Axiomatischer Aufbau der *Wahrscheinlichkeitstheorie* und des *Wahrscheinlichkeitsmaß* (Felix Hausdorff 1923, Andrei Kolmogorow 1933).
- *Lebesgue-Integral.*
- *Lebesgue- L^p -Räume*, insbesondere der *L^2 -Raum*.

13.3 Anwendung der Lebesgue-Nullmengen zur Riemann-Integrierbarkeit.

Definition 13.6.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine (Lebesgue-)Nullmenge (in \mathbb{R}^n), wenn $\mu_a(M) = 0$ (das heißt, wenn das n-dim. äußere Lebesgue-Maß von M null ist).

Theorem 13.4.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) M ist eine Lebesgue-Nullmenge.
- (b) $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und $\mu_n(M) = 0$.
- (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von n -Zellen, so dass $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} v_n(Z_j) < \varepsilon$.
- (d) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von offenen (oder von abgeschlossenen) n -Zellen, so dass $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} v_n(Z_j) < \varepsilon$.

Beispiel 13.4.(a) Jede Jordan-Nullmenge ist eine Lebesgue-Nullmenge (aber *nicht jede* Lebesgue-Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge).

- (b) Endliche Mengen und *abzählbare Mengen* sind Lebesgue-Nullmengen.
- (c) \mathbb{Q} in \mathbb{R} ist eine Lebesgue-Nullmenge.
- (d) \mathbb{Q}^n in \mathbb{R}^n ist eine Lebesgue-Nullmenge.
- (e) \mathbb{R} in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.
- (f) Eine kompakte n -Zelle $Z = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ist genau dann eine Lebesgue-Nullmenge, wenn es mindestens ein Index $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $a_j = b_j$.

Beispiel 13.5.(a) Jede $M \in \mathcal{Q}_n$ mit $v_n(M) > 0$ ist keine Lebesgue-Nullmenge, weil $\mu_n(M) = v_n(M) > 0$.

- (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist *keine* Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{R} , aber $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
- (c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^2$ ist keine Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{C} .

Theorem 13.5 (Lebesgue-Kriterium der Riemann-Integrierbarkeit). (a) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^m$. Dann $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{K}^m) \Leftrightarrow f$ ist beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine Lebesgue-Nullmenge (in \mathbb{R}).

(b) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$ und $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$. Dann $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m) \Leftrightarrow f$ ist beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine Lebesgue-Nullmenge (in \mathbb{R}^n).

(c) Sei $M \in \mathcal{Q}_n$ und $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$. Dann $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m) \Leftrightarrow f$ ist beschränkt und die Menge $\{x \in M^\circ : f \text{ ist un stetig in } x\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Theorem 13.6 (äquivalente Umformulierungen der Jordan-Messbarkeit).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $M \in \mathcal{Q}_n$, das heißt, M ist quadrierbar.

(b) M ist Jordan-messbar.

(c) M ist beschränkt und ihr Rand ∂M ist eine Jordan-Nullmenge.

(d) M ist beschränkt und ∂M ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Beispiel 13.6 (Funktion, die *nicht Riemann-integrierbar*, aber *Lebesgue-integrierbar* ist).
 $\chi_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$, weil $[0, 1]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen der Einschränkung $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ ist, und so $\mu_1([0, 1]) = 1 \neq 0$.

Aber die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]$.

(Was ist der Wert des Lebesgue-Integrals $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x) d\mu_1(x)$?)

14 Lebesgue-Integral. Fast überall definierte Funktionen.

14.1 Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist.

Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist *nicht Riemann-integrierbar* auf $I = [0, 1]$ (und auch auf beliebigen $[a, b]$ mit $a < b$). Dies ist so, da $I = [0, 1]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen der Einschränkung $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ ist. Weil $\mu_1(I) = 1 \neq 0$, ist I keine Lebesgue-Nullmenge. Also,

$$f \notin \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$$

wegen des Lebesgue-Kriteriums der Riemann-Integrierbarkeit (Th. 14.5).

Beispiel 14.1.

Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) d\mu_1(x) &= \int_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) d\mu_1(x) + \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) d\mu_1(x) \\ &= \int_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} 1 d\mu_1(x) + \int_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}} 0 d\mu_1(x) \\ &= \mu_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(Warum *dürfen wir* diesen Vorgang *nicht für das Riemann-Integral* durchführen?)

Die Funktion $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ hat zwei Werte, 0 und 1. Es ist hier wichtig, dass die Urbilder $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(1)$ *Lebesgue-messbar* sind.

Dies ist mit der Jordan-Messbarkeit nicht wahr,

$$f^{-1}(0) \notin \mathcal{Q}_n, f^{-1}(1) \notin \mathcal{Q}_n.$$

Schritt 1. Messbare Funktionen.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ (das heißt, $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue-messbare Menge). Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 14.1.

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt messbar (auf M), wenn $f^{-1}(I) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, (das heißt, wenn alle Urbilder von Intervallen Lebesgue-messbar sind).

Wir brauchen Beispiele messbarer Funktionen.

Satz 14.1.

Jedes $f \in C(M, \mathbb{R})$ ist messbar.

Aufgabe 14.1.

Seien $n = 1$ und $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Dann ist jede monotone Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Bemerkung 14.1.

(1) Es ist *nicht notwendig* $f^{-1}(I) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ für *alle* Intervalle zu verifizieren.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) f ist messbar.
- (b) $\{x \in M : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \forall a \in \mathbb{R}$.
- (c) $\{x \in M : f(x) < a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \forall a \in \mathbb{R}$.
- (d) $\{x \in M : f(x) \geq a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \forall a \in \mathbb{R}$.
- (e) $\{x \in M : f(x) \leq a\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \forall a \in \mathbb{R}$.

(2) Es ist auch möglich für die Funktionen $f : M \rightarrow \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die Messbarkeit zu definieren, z.B. durch (1.b). In diesem Fall sind die Äquivalenzen (1.b) \Leftrightarrow (1.c) \Leftrightarrow (1.d) \Leftrightarrow (1.e) auch *wahr*.

Satz 14.2.

Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Sei $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Dann:

- (a) $h(x) = F(f(x), g(x))$ ist messbar auf M . Insbesondere sind $f+g$, fg und $F \circ g$ messbar.
- (b) $h_0(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ sind messbar auf M .
- (c) Der Positivteil $f^+ := \max\{0, f\}$ und der Negativteil $f^- := -\min\{0, f\}$ von f sind messbar auf M .
- (d) $|f|$ ist messbar.

Bemerkung 14.2.

Der Negativteil f^- von f erfüllt $f^- \geq 0$ ($\forall x \in M$). Auch, $f^+ \geq 0$. Jede \mathbb{R} -wertige Funktion f hat die Darstellung $f = f^+ - f^-$ mit $f^\pm \geq 0$. Für diese Darstellung gilt auch $|f| = f^+ + f^-$.

Satz 14.3.

Seien $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $j \in \mathbb{N}$. Dann:

(a) $h(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ und $g(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ sind messbar auf M .

(b) $H(x) = \limsup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ und $G(x) = \liminf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$ sind messbar auf M .

(c) Falls $f_j \rightarrow F$ punktweise auf M wenn $j \rightarrow \infty$ (das heißt, $\forall x \in M \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) =: F(x)$), dann ist F messbar auf M .

Bemerkung 14.3.

Es gibt $f \in C[0, 1]$ und messbare $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ nicht messbar ist.

Schritt 2. Lebesgue-Integral für nichtnegative messbare Funktionen.

Für jede nichtnegative messbare Funktion $f : M \rightarrow [0, +\infty)$ kann man das Lebesgue-Integral in folgender Weise definieren:

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir die unendliche Partition (das heißt, disjunkte-Vereinigung-Darstellung) von $[0, +\infty)$

$$[0, +\infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{m,j} \text{ mit Intervallen } I_{m,j} = \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right),$$

die Urbilder $A_{m,j} = f^{-1}(I_{m,j})$ und ihre Lebesgue-Maße $\mu_n(A_{m,j})$. Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\underline{S}_{\text{Le}}(f, m) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{j-1}{2^m} \mu_n(A_{m,j}) \in [0, +\infty].$$

die entsprechende Lebesgue-Untersumme im Sinne, dass

$$\frac{j-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{j}{2^m} \quad \forall x \in A_{m,j}.$$

$$I_{m,j} = \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m} \right), \underline{S}_{\text{Le}}(f, m) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{j-1}{2^m} \mu_n(f^{-1}(I_{m,j})) \in [0, +\infty].$$

Die Folge $\{\underline{S}_{\text{Le}}(f, m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ ist monoton nicht-fallend (Aufgabe), und besitzt somit einen Grenzwert $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) \in [0, +\infty]$.

Definition 14.2 (Lebesgue-Integral positiver messbarer Funktionen).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $f : M \rightarrow [0, +\infty)$ nichtnegativ und messbar. Dann wird das *Lebesgue-Integral* $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) = \int_M f(x) d\mu_n(x) \in [0, +\infty]$ als

$$\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{S}_{\text{Le}}(f, m)$$

definiert.

Aufgabe 14.2.

Verwenden Sie diese Definition für das Lebesgue-Integral $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} d\mu_1$ und überprüfen Sie das Ergebnis des Beipfels 1.

Bemerkung 14.4.

Man kann andere unendliche disjunkte-Vereinigung-Darstellungen

$$[0, +\infty) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{m,j}$$

betrachten mit der Bedingung, dass für die Feinheiten $\Delta_m = \sup_{j \in \mathbb{N}} |I_{m,j}|$ gilt, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$. Dann produziert die Prozedur das selbe Ergebnis $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{\text{Le}}(f, m) = \mathcal{I}_{\text{Le}}(f)$, (vergl. mit [W2], [KF], und mit dem Lebesgue-Satz von der dominierten Konvergenz).

Schritt 3. Lebesgue-Integrierbarkeit messbarer Funktionen.

Definition 14.3 (Lebesgue-Integrierbarkeit).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind die Lebesgue-Integrale $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^\pm) \in [0, +\infty]$ für den Positivteil $f^+ = \max\{0, f\}$ und Negativteil $f^- = -\min\{0, f\}$ von f wohldefiniert.

(a) Wenn mindestens eines der Integrale $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^+)$ und $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^-)$ endlich ist, definieren wir das *Lebesgue-Integral* $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) = \int_M f(x) d\mu_n(x) \in \widehat{\mathbb{R}}$ als

$$\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) = \mathcal{I}_{\text{Le}}(f^+) - \mathcal{I}_{\text{Le}}(f^-).$$

(Wir vermeiden die Situation $(+\infty) - (+\infty)$.)

(b) Wenn *beide* $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^+)$ und $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^-)$ endlich sind (das heißt, wenn $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f^\pm) \in [0, +\infty)$), sagt man, dass f *Lebesgue-integrierbar* ist und schreibt $f \in L(M) = L(M, \mathbb{R})$.

Bemerkung 14.5.

Seien $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann $f \in L(M) \iff f$ ist messbar und $\int_M f d\mu_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel 14.2.

Betrachten wir $f = \chi_{\mathbb{Q}} - 1$ auf verschiedenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Sei I kompakt. Dann $f \in L(I)$ und $\int_I f d\mu_1 = -|I| \in \mathbb{R}$.

(b) Sei das Intervall I unendlich (z.B. $I = \mathbb{R}$). Dann $f \notin L(I)$, aber das Lebesgue-Integral $\int_I f d\mu_1$ existiert (im Sinne von $\widehat{\mathbb{R}}$) und $\int_I f d\mu_1 = -\infty$.

Theorem 14.1 (Lebesgue-Integral als Erweiterung des Riemann-Integrals).

Seien $M \in \mathcal{Q}_n$ und $f \in \mathcal{R}(M)$. Dann

$$f \in L(M) \text{ und } \mathcal{I}_{\text{Ri}}(f) = \mathcal{I}_{\text{Le}}(f).$$

Theorem 14.2 (Monotonie und Hauptschätzung).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$ messbare Funktionen. Dann:

(a) Wenn $\int_M f d\mu_n$ und $\int_M g d\mu_n$ existieren, gilt $\int_M f d\mu_n \leq \int_M g d\mu_n$.

(b) Falls zusätzlich $\mu_n(M) < +\infty$ und f beschränkt ist, gilt $f \in L(M)$ und

$$\mu_n(M) \inf_{x \in M} f(x) \leq \int_M f \, d\mu_n \leq \mu_n(M) \sup_{x \in M} f(x).$$

Wir benutzen, dass für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\mu_n(M) < +\infty$ gilt, dass $\int_M c \, d\mu_n = c \mu_n(M)$.

Beispiel 14.3.

Betrachten wir die *Vorzeichen-Funktion* (*Signum-Funktion*)

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} x/|x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

auf verschiedenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Sei I kompakt. Dann $f \in L(I)$ und $\int_I \text{sign}(x) d\mu_1(x) = |I \cap \mathbb{R}_+| - |I \cap \mathbb{R}_-|$.

(b) Sei $I = \mathbb{R}$. In diesem Fall,

$$\text{sign}(\cdot) \notin L(I) \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) d\mu_1(x)$$

existiert nicht (sogar in $\widehat{\mathbb{R}}$).

(c) Sei $I = (a, +\infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann $\text{sign}(\cdot) \notin L(I)$ und

$$\int_a^{+\infty} \text{sign}(x) d\mu_1(x) = +\infty.$$

(d) Sei $I = (-\infty, b)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Dann $\text{sign}(\cdot) \notin L(I)$ und

$$\int_{-\infty}^b \text{sign}(x) d\mu_1(x) = -\infty.$$

14.2 Komponentenweise Lebesgue-Integration.

Definition 14.4.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, $x \in M$.

(a) f ist messbar, wenn die f_j messbar $\forall j$ sind.

(b) Wenn $f_j \in L(M) \forall j$, definiert man das Lebesgue-Integral $\mathcal{I}_{\text{Le}}(f) = \int_M f d\mu_n \in \mathbb{R}^n$ als

$$\int_M f d\mu_n = \left(\int_M f_1 d\mu_n, \int_M f_2 d\mu_n, \dots, \int_M f_m d\mu_n \right).$$

Bemerkung 14.6 (Integration der komplexwertigen Funktionen).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Dann identifizieren wir, um die Messbarkeit und das Lebesgue-Integral von f zu definieren, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und betrachten f als eine \mathbb{R}^2 -wertige Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x) \\ \operatorname{Im} f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in M.$$

14.3 Lebesgue-Integral für *fast überall* definierte Funktionen.

Sei $f_\alpha = \operatorname{sign}(x)|x|^\alpha$ mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fall 1. Sei $\alpha > 0$. Dann ist f_α definiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-1}^1 f_\alpha d\mu_1 = \int_{-1}^1 f^+ d\mu_1 - \int_{-1}^1 f^- d\mu_1 = \int_0^1 x^\alpha d\mu_1(x) - \int_{-1}^0 |x|^\alpha d\mu_1(x) = 0.$$

Aber $f_\alpha \notin L(\mathbb{R})$ und $\nexists \int_{\mathbb{R}} f_\alpha d\mu_1$ (Aufgabe).

Fall 2. Sei $\alpha < 0$. Dann ist f_α nur für $x \neq 0$ definiert.

Betrachten wir eine Erweiterung \tilde{f}_α von f_α auf \mathbb{R} mit einem Wert

$$\tilde{f}_\alpha(0) = c \in \mathbb{R}.$$

Fall 2 (a). Sei $\alpha \in (-1, 0)$. Dann gilt $\tilde{f}_\alpha \in L(M)$ für kompakte M . Z.B., für $M = [-1, 2]$,

$$\int_{-1}^2 \tilde{f}_\alpha d\mu_1 = \int_{[-1,2] \setminus \{0\}} f_\alpha d\mu_1 + \int_{\{0\}} c d\mu_1 = \int_{[-1,2] \setminus \{0\}} f_\alpha d\mu_1 + c\mu_1(\{0\}) = \int_{[-1,2] \setminus \{0\}} f_\alpha d\mu_1.$$

Der Wert von $\tilde{f}_\alpha(0) = c$ spielt keine Rolle. In einem solchem Fall schreibt man einfach $\int_{-1}^2 f_\alpha d\mu_1$ statt $\int_{-1}^2 \tilde{f}_\alpha d\mu_1$ oder statt $\int_{[-1,2] \setminus \{0\}} f_\alpha d\mu_1$, und integriert f_α 'ohne den Wert' an $x = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f_\alpha d\mu_1 &= \int_{-1}^2 f^+ d\mu_1 - \int_{-1}^2 f^- d\mu_1 = \int_0^2 x^\alpha d\mu_1(x) - \int_{-1}^0 (-x)^\alpha d\mu_1(x), \\ \int_0^2 x^\alpha d\mu_1(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^2 x^\alpha dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} \Big|_\varepsilon^2 \\ &= \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon^{1+\alpha} = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \\ \int_{-1}^0 (-x)^\alpha d\mu_1(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-0} \int_{-1}^{-\varepsilon} (-x)^\alpha dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-0} \frac{-1}{1+\alpha} (-x)^{1+\alpha} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{1}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Nun haben wir

$$\int_{-1}^2 f_\alpha d\mu_1 = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+\alpha} (2^{1+\alpha} - 1).$$

Fall 2 (b). Sei $\alpha \in (-\infty, -1]$. Dann erweitern wir $f_\alpha = \text{sign}(x)|x|^\alpha$ wie früher als \tilde{f}_α auf \mathbb{R} mit einem Wert $\tilde{f}(0) = c \in \mathbb{R}$.

Seien $a < 0 < b$. Dann $\tilde{f}_\alpha \notin L([a, b])$ und $\nexists \int_a^b \tilde{f}_\alpha d\mu_1$. Damit spielt der Wert von $\tilde{f}(0) = c$ auch keine Rolle.

Das sieht man so:

$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{f}_\alpha^+ d\mu_1 &= \int_0^b \tilde{f}_\alpha^+ d\mu_1 = \int_{(0,b]} \tilde{f}_\alpha^+ d\mu_1 \geq \int_\varepsilon^b x^\alpha dx \forall \varepsilon \in (0, b]. \\ \int_\varepsilon^b x^\alpha dx &= \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} \Big|_\varepsilon^b = \frac{\varepsilon^{1+\alpha} - b^{1+\alpha}}{|1+\alpha|} \rightarrow +\infty, \text{ wenn } \varepsilon \rightarrow 0 + 0. \end{aligned}$$

Daher $\int_a^b \tilde{f}_\alpha^+ d\mu_1 = \int_0^b x^\alpha d\mu_1 = +\infty$.

Ähnlich $\int_a^b \tilde{f}_\alpha^- d\mu_1 = \int_a^0 (-x)^\alpha d\mu_1 = +\infty$. Zusammenfassend, $\nexists \int_a^b \tilde{f}_\alpha d\mu_1$.

Definition 14.5.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Man sagt, dass eine Eigenschaft *fast überall (f.ü.)* auf M erfüllt ist, wenn es eine Nullmenge N gibt, so dass diese Eigenschaft auf $M \setminus N$ erfüllt ist.

Bemerkung 14.7.

Z.B. sei $M \in \mathcal{Q}_n$ und sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann folgt aus dem Lebesgue-Kriterium der Riemann-Integrierbarkeit (Th. 14.5), dass F genau dann auf M Riemann-integrierbar ist, wenn F f.ü. auf M stetig ist.

Definition 14.6.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei eine \mathbb{R} -wertige Funktion f f.ü. auf M definiert. Das bedeutet, es gibt eine Nullmenge N , so dass f auf $M \setminus N$ definiert ist.

(a) f heißt messbar auf M , wenn $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist.

(b) $\int_M f^\pm d\mu_n := \int_{M \setminus N} f^\pm d\mu_n$.

(c) $\int_M f d\mu_n$ existiert definitionsgemäß genau dann, wenn $\int_{M \setminus N} f d\mu_n$ existiert. In diesem

Fall, $\int_M f d\mu_n := \int_{M \setminus N} f d\mu_n$.

(d) $f \in L(M)$ definitionsgemäß genau dann, wenn $f \in L(M \setminus N)$.

Diese Definition ist *unabhängig von der Wahl der Nullmenge N* mit der Eigenschaft, dass f auf $M \setminus N$ definiert ist.

15 Verbindung zwischen uneigentlichem Riemann-Integral und Lebesgue-Integral.

15.1 Uneigentliche Riemann-Integrale.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $m \in \mathbb{N}$.

Definition 15.1 (uneigentliches Riemann-Integral).

Es sei eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}^m$, so dass $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{K}^m)$ für alle kompakten Intervalle $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Dann:

(a) $\int_a^b f dx = \int_{a+0}^{b-0} f dx$ heißt *uneigentliches (Riemann-)Integral*.

(b) Die Funktion f heißt *uneigentlich (Riemann-)integrierbar auf (a, b)* , wenn es $c \in$

(a, b) gibt, so dass die *beiden Grenzwerte* $\int_{a+0}^c f dx := \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^c f dx$ und $\int_c^{b-0} f dx :=$

$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_c^{\beta} f dx$ in \mathbb{K}^m existieren. In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral

$\int_a^b f dx$ *konvergiert*, und definiert seinen Wert durch $\int_a^b f dx := \int_{a+0}^c f dx + \int_c^{b-0} f dx$.

Bemerkung 15.1 (uneigentliches Integral ist wohldefiniert).

Die Definition und der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f dx$ sind *unabhängig* von der Wahl der *Konstante* $c \in (a, b)$.

Man kann $\int_a^b f dx$ auch als $\lim_{\substack{\alpha_k \rightarrow a \\ \beta_k \rightarrow b}} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f dx$ definieren.

Die Definition des uneigentlichen Integrals kann man auch auf Fälle wie $\int_{-1}^1 |x|^\gamma dx$ erweitern, und auch auf die Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $E \cap K_r(0) \in Q_n$ durch *erschöpfende Folgen der Teilmengen* (s. [W2, § 7.20]).

Bemerkung 15.2.

Es sei eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]) = \mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ für alle kompakten Intervalle $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Man kann den Wert des uneigentlichen Integral $\int_a^b f dx$ im *erweiterten Sinne* von $\widehat{\mathbb{R}} =$

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ als $\int_a^b f dx := \int_{a+0}^c f dx + \int_c^{b-0} f dx$ auch in den folgenden Fällen definieren:

(a) $\int_{a+0}^c f dx \in (-\infty, +\infty]$ und $\int_c^{b-0} f dx \in (-\infty, +\infty]$ (wie im Beispiel 1).

$$(b) \int_{a+0}^c f \, dx \in [-\infty, +\infty) \text{ und } \int_c^{b-0} f \, dx \in [-\infty, +\infty).$$

Beispiel 15.1.

Sei $f(x) = \frac{\text{sign}(x-1)}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Dann $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ für alle kompakte Intervalle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$, aber das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} f \, dx$ existiert *nicht*, auch nicht im Sinne von $\widehat{\mathbb{R}}$, denn $\int_{0+0}^1 f \, dx = -\infty$ und $\int_1^{+\infty} f \, dx = +\infty$, und $(-\infty) + (+\infty)$ ist ein unbestimmter Ausdruck.

15.2 Verbindung der Lebesgue- und uneigentlichen Riemann-Integrale.

Definition 15.2 (uneigentliche absolute Integrierbarkeit).

Es sei eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}^m$, so dass $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{K}^m)$ für alle kompakten Intervalle $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Die Funktion f heißt uneigentlich *absolut* (Riemann-)integrierbar auf (a, b) , wenn $\int_a^b |f| \, dx < +\infty$ (das heißt, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^b |f| \, dx$ konvergiert).

Theorem 15.1.

Sei f uneigentlich absolut Riemann-integrierbar auf (a, b) . Dann:

(a) f ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf (a, b) . (In diesem Fall sagt man, dass $\int_a^b f \, dx$ absolut konvergiert.)

(b) f ist Lebesgue-integrierbar auf (a, b) und $\int_a^b f \, d\mu_1 = \int_a^b f \, dx$.

Bemerkung 15.3.

Aus der (nicht absoluten) uneigentlichen Integrierbarkeit folgt nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit.

Beispiel 15.2 (uneigentliches Dirichlet-Integral).

Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$. Dann $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$ als ein *uneigentliches Riemann-Integral*.

Aber das Lebesgue-Integral $\int_0^{+\infty} f(x) \, d\mu_1(x)$ existiert *nicht*, weil

$$\int_{\mathbb{R}_+} f^+ \, d\mu_1(x) = +\infty = \int_{\mathbb{R}_+} f^- \, d\mu_1(x).$$

Theorem 15.2 (Majorantenkriterium absoluter Integrierbarkeit).

Es seien zwei Funktionen f, g auf (a, b) , so dass $f, g \in \mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{K}^m)$ für alle $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ und

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in (a, b).$$

Falls g uneigentlich absolut Riemann-Integrierbar ist auf (a, b) (oder falls g Lebesgue-integrierbar ist auf (a, b)), dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f \, dx$ absolut, und

$$\int_a^b |f| \, dx \leq \int_a^b |g| \, dx.$$

15.3 Anwendung auf den Integralvergleichssatz für Reihen

Theorem 15.3 (Integralvergleichssatz für Reihen).

Es sei $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fallend (das heißt $f(a) \geq f(b)$, wenn $a < b$) und $f(x) \geq 0 \forall x$. In diesem Fall konvergiert $\sum_{k=1}^{+\infty} f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ konvergiert.

Beispiel 15.3.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$.

16 Eigenschaften der Riemann- und Lebesgue-Integrale. Konvergenz von Lebesgue-Integralen. Satz von Fubini.

16.1 Eigenschaften von Riemann- und Lebesgue- Integralen.

Satz 16.1 (Riemann-Integral und Operationen mit skalarwertigen Funktionen).

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $f, g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann:

(a) $f, g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$, $f + g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$, $\alpha f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$.

(b) $\int_M (f + g) \, dv_n = \int_M f \, dv_n + \int_M g \, dv_n$, $\int_M \alpha f \, dv_n = \alpha \int_M f \, dv_n$, $\int_M 1 \, dv_n = v_n(M)$.

(c) $|f| \in \mathcal{R}(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M f \, dv_n \right| \leq \int_M |f| \, dv_n$.

(d) Im Fall, dass $f, g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{R})$ und $f \leq g$, gilt $\int_M f \, dv_n \leq \int_M g \, dv_n$.

(e) $\left| \int_M f \, dv_n \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| v_n(M)$ und $\left| \int_M fg \, dv_n \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \int_M |g| \, dv_n$.

(f) Wenn $|g| \geq c > 0$ mit einer Konstante $c > 0$, gilt $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$.

Der Beweis ist ähnlich mit dem 1-dim. Fall von "Math I". Man kann auch das *Lebesgue-Kriterium* der Riemann-Integrierbarkeit benutzen.

Satz 16.2.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathcal{Q}_n$. Sei $f : M \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$, so dass $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{R}^m)$. Sei E abgeschlossen und $g \in C(E, \mathbb{K})$. Dann $g \circ f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$.

Vergleichen wir jetzt mit dem Lebesgue-Integral.

Satz 16.3 (Lebesgue-Integral und Operationen).

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f, g \in L(M, \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann:

(a) $f + g \in L(M, \mathbb{K})$, $\alpha f \in L(M, \mathbb{K})$.

(b) $\int_M (f + g) d\mu_n = \int_M f d\mu_n + \int_M g d\mu_n$, $\int_M \alpha f d\mu_n = \alpha \int_M f d\mu_n$, $\int_M 1 d\mu_n = \mu_n(M)$.

(c) $|f| \in L(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M f d\mu_n \right| \leq \int_M |f| d\mu_n$.

(d) Im Fall, dass $f, g \in L(M, \mathbb{R})$ und $f \leq g$, gilt $\int_M f d\mu_n \leq \int_M g d\mu_n$.

(e) $\left| \int_M f d\mu_n \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \mu_n(M)$, wobei $\sup_{x \in M} |f(x)| \in [0, +\infty]$.

Bemerkung 16.1. (a) $f \in L(M, \mathbb{K}^m) \iff |f| \in L(M, \mathbb{K}^m)$. (Für Riemann-Integrierbare Funktionen ist hier " \Leftarrow " nicht wahr).

(b) Sei $f \in L(M, \mathbb{K}^m)$. Sei $g : M \rightarrow \mathbb{K}^\ell$ eine messbare Funktion, so dass $|g| \leq |f|$ f.ü. (fast überall) auf M . Dann $g \in L(M, \mathbb{K}^\ell)$.

Bemerkung 16.2.

$f, g \in L(M, \mathbb{K}) \not\Rightarrow fg \in L(M, \mathbb{K})$. Z.B., $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dann $f, g \in L(0, 1) = L((0, 1), \mathbb{R})$ (s. Beispiel 1 (b) und Thm 15.1), aber $(fg)(x) = \frac{1}{x} \notin L(0, 1)$ (vergleiche Beispiel 1 (b) mit Thm.15.2).

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Satz 16.4 (Lebesgue-Integral des Produkts).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $g \in L(M, \mathbb{K})$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und sei f wesentlich beschränkt im folgenden Sinne:

$$\exists N \text{ mit } \mu_n(N) = 0, \text{ so dass } \sup_{x \in M \setminus N} |f(x)| < +\infty.$$

Dann $fg \in L(M, \mathbb{K})$ und

$$\left| \int_M fg d\mu_n \right| \leq \sup_{x \in M \setminus N} |f(x)| \int_M |g| d\mu_n.$$

Korollar 16.1.

Sei $f \in L(M, \mathbb{K})$. Sei $g : M \rightarrow \mathbb{K}$ eine messbare Funktion auf M , so dass $|g| \geq c > 0$ fast überall auf M mit einer Konstante $c > 0$. Dann $\frac{f}{g} \in L(M, \mathbb{K})$.

Definition 16.1.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Das *wesentliche Supremum* $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} f$ von f auf M definiert man als

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} f := \inf_{N: \mu_n(N)=0} \sup_{x \in M \setminus N} f(x).$$

Eine Funktion f ist also genau dann *wesentlich beschränkt*, wenn $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f| < +\infty$.

Satz 16.5 (Riemann-Integral und Operationen mit vektorwertigen Funktionen).

Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $f, g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann:

(a) $\langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$, $f + g \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$.

(b)
$$\int_M (f + g) dv_n = \int_M f dv_n + \int_M g dv_n, \quad \int_M \alpha f dv_n = \alpha \int_M f dv_n.$$

(c) $|f| \in \mathcal{R}(M, \mathbb{R})$ und
$$\left| \int_M f dv_n \right| \leq \int_M |f| dv_n \leq \sup_{x \in M} |f(x)| v_n(M).$$

(d)
$$\left| \int_M \langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} dv_n \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \int_M |g| dv_n.$$

(e) Seien $p, q \in (1, +\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann

$$\left| \int_M \langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} dv_n \right| \leq \left(\int_M |f|^p dv_n \right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q dv_n \right)^{1/q}$$

(Höldersche Ungleichung für das Riemann-Integral; im Fall $p = q = 2$ heißt sie *Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-(CBS-)Ungleichung*).

Satz 16.6.

Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$ und $h \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K})$. Dann:

(a) $hf \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$

(b)
$$\left| \int_M hf dv_n \right| \leq \sup_{x \in M} |h(x)| \int_M |f| dv_n$$

(c)
$$\left| \int_M hf dv_n \right| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \int_M |h| dv_n$$

(d) Seien $p, q \in (1, +\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann

$$\left| \int_M hf dv_n \right| \leq \left(\int_M |h|^p dv_n \right)^{1/p} \left(\int_M |f|^q dv_n \right)^{1/q}$$

(Höldersche Ungleichung, im Fall $p = q = 2$ *CBS-Ungleichung*).

Vergleichen wir mit dem Lebesgue-Integral von vektorwertigen Funktionen.

Satz 16.7.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f, g \in L(M, \mathbb{K}^m)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann:

- (a) $f + g \in L(M, \mathbb{K}^m)$ und $\alpha f \in L(M, \mathbb{K}^m)$.
- (b) $\int_M (f + g) d\mu_n = \int_M f d\mu_n + \int_M g d\mu_n$, $\int_M \alpha f d\mu_n = \alpha \int_M f d\mu_n$.
- (c) $|f| \in L(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M f d\mu_n \right| \leq \int_M |f| d\mu_n$.
- (d) Wenn $0 < \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| < +\infty$ oder $0 < \mu_n(M) < +\infty$, gilt

$$\left| \int_M f d\mu_n \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| \mu_n(M)$$

(wenn $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| = +\infty$ oder $\mu_n(M) = +\infty$, wird diese Ungleichung im Sinne von $\widehat{\mathbb{R}}$ verstanden).

Satz 16.8.

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f \in L(M, \mathbb{K}^m)$ und $\alpha \in L(M, \mathbb{K})$. Seien $g : M \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $\beta : M \rightarrow \mathbb{K}$ messbare und wesentlich beschränkte Funktionen. Dann:

- (a) $\beta f \in L(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M \beta f d\mu_n \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |\beta(x)| \int_M |f| d\mu_n$.
- (b) $\alpha g \in L(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M \alpha g d\mu_n \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |g(x)| \int_M |\alpha| d\mu_n$.

Satz 16.9 (Lebesgue-Integral des Skalarprodukts).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$.

- (a) Sei $g \in L(M, \mathbb{K}^m)$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$ messbar und wesentlich beschränkt. Dann $\langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} \in L(M, \mathbb{R})$ und $\left| \int_M \langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} d\mu_n \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| \int_M |g| d\mu_n$ (im Sinne von $\widehat{\mathbb{R}}$).

- (b) Seien $p, q \in (1, +\infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $g : M \rightarrow \mathbb{K}^m$ messbare Funktionen, so dass $|f|^p \in L(M, \mathbb{R})$ und $|g|^q \in L(M, \mathbb{R})$. Dann $\langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} \in L(M, \mathbb{R})$ und

$$\left| \int_M \langle f, g \rangle_{\mathbb{K}^m} d\mu_n \right| \leq \left(\int_M |f|^p d\mu_n \right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q d\mu_n \right)^{1/q}$$

(Höldersche Ungleichung, im Fall $p = q = 2$ heißt sie CBS-Ungleichung).

Satz 16.10 (Additivität des Riemann-Integrals. Teil 1.).

Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $M_j \in \mathcal{Q}_n$, $j = 1, \dots, J$, $J \in \mathbb{N}$. Sei $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$. Dann:

(a) Wenn $v_n(M) = 0$, gilt $\int_M f \, dv_n = 0_{\mathbb{K}^m}$.

(b) Wenn $M = \bigcup_{j=1}^J M_j$ und $v_n(M_j \cap M_k) = 0 \forall j \neq k$, dann $f \in \mathcal{R}(M_j, \mathbb{K}^m) \forall j$, und es gilt

$$\int_M f \, dv_n = \sum_{j=1}^J \int_{M_j} f \, dv_n.$$

Satz 16.11 (Additivität des Riemann-Integrals. Teil 2.).

Seien $M_j \in \mathcal{Q}_n$, $j = 1, \dots, J$, $J < +\infty$, so dass $v_n(M_j \cap M_k) = 0 \forall j \neq k$. Sei $f \in \mathcal{R}(M_j, \mathbb{K}^m)$ und $M = \bigcup_{j=1}^J M_j$. Dann $M \in \mathcal{Q}_n$, $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$ und

$$\int_M f \, dv_n = \sum_{j=1}^J \int_{M_j} f \, dv_n.$$

Satz 16.12 (σ -Additivität des Lebesgue-Integrals. Teil 1.).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $M_j \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n} \forall j \in \mathbb{N}$. Sei $f \in L(M, \mathbb{K}^m)$. Dann:

(a) Wenn $\mu_n(M) = 0$, gilt $\int_M f \, d\mu_n = 0_{\mathbb{K}^m}$.

(b) Wenn $M = \bigcup_{j=1}^{+\infty} M_j$ und $\mu_n(M_j \cap M_k) = 0 \forall j \neq k$, dann $f \in L(M_j, \mathbb{K}^m) \forall j \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\int_M f \, d\mu_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{M_j} f \, d\mu_n.$$

(Hier ist $M_j = \emptyset$ möglich, und damit kann $\bigcup_{j=1}^{+\infty} M_j$ tatsächlich $\bigcup_{j=1}^J M_j$ mit $J < +\infty$ sein).

Satz 16.13 (σ -Additivität des Lebesgue-Integrals. Teil 2.).

Seien $M_j \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $\mu_n(M_j \cap M_k) = 0 \forall j \neq k$. Sei $f \in L(M_j, \mathbb{K}^m)$ und $M = \bigcup_{j=1}^{+\infty} M_j$. Dann:

(a) $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und f ist auf M messbar.

(b) Falls mindestens eine von den Summen

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{M_j} f^- \, d\mu_n \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{M_j} f^+ \, d\mu_n$$

endlich ist, dann gilt

$$\int_M f \, dv_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{M_j} f \, d\mu_n,$$

wobei das Integral und die Summe im Sinne von $\widehat{\mathbb{R}}$ existieren.

(c) $f \in L(M, \mathbb{K}^m) \iff \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{M_j} f^- \, d\mu_n < +\infty$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{M_j} f^+ \, d\mu_n < +\infty$. In diesem Fall,

$$\int_M f \, dv_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{M_j} f \, d\mu_n,$$

wobei das Integral im Sinne von \mathbb{R} existiert und die Summe absolut konvergiert.

16.2 Majorisierte und monotone Konvergenzen von Lebesgue-Integralen.

Theorem 16.1 (Stetigkeit des Riemann-Integrals bezüglich gleichmäßiger Konvergenz). Sei $M \in \mathcal{Q}_n$. Seien $f_j \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$, $j \in \mathbb{N}$, so dass $f_j \rightrightarrows f$ auf M für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$ (das heißt, $\|f - f_j\|_{B(M, \mathbb{R})} = \sup_{x \in M} |f(x) - f_j(x)| \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$).

Dann $f \in \mathcal{R}(M, \mathbb{K}^m)$ und $\int_M f \, dv_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j \, dv_n$.

- Dieses Theorem ist nicht anwendbar für mehrere wichtige Fälle.
- Im Fall des Riemann-Integrals ist es nicht leicht die Bedingung von der gleichmäßigen Konvergenz zu lockern.

Beispiel 16.1.

Seien $f_k(0) = 0$ und $f_k(x) = \frac{1}{|x|^\gamma} (\chi_{I_k}(x) - \chi_{J_k}(x))$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit dem Parameter $\gamma > 0$ und Folgen $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Intervallen.

(a) Seien $\gamma \in (0, 1)$, $I_k = [\frac{1}{k}, 1]$ und $J_k = \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{x^\gamma}$ auf $(0, 1]$ *punktweise* (das heißt, für jeden $x \in (0, 1]$), und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k \, dx = \int_0^1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma},$$

wobei $\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$ als das uneigentliche Riemann-Integral (oder als das Lebesgue-Integral) verstanden wird.

Aber, $f_k \not\rightrightarrows \frac{1}{x^\gamma}$ auf $(0, 1]$.

Seien $f_k(0) = 0$ und $f_k(x) = \frac{1}{|x|^\gamma} (\chi_{I_k}(x) - \chi_{J_k}(x))$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit dem Parameter $\gamma > 0$ und Folgen $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Intervallen.

(b) Seien $\gamma \geq 1$, $I_k = [\frac{1}{k}, 1]$ und $J_k = [-1, -\frac{1}{k}]$, $k \in \mathbb{N}$. Dann $f_k(x) \rightarrow \frac{x}{|x|^{\gamma+1}}$ *punktweise* auf $[0, 1) \cap (0, 1]$, wenn $k \rightarrow \infty$, $f_k(0) = 0 \quad \forall k$ und $\int_{-1}^1 f_k dx = 0 \quad \forall k$. Aber das Integral $\int_{-1}^1 \frac{x}{|x|^{\gamma+1}} dx$ **!** sowohl als uneigentliches Riemann-Integral, als auch als Lebesgue-Integral.

Seien $f_k(0) = 0$ und $f_k(x) = \frac{1}{|x|^\gamma} (\chi_{I_k}(x) - \chi_{J_k}(x))$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) Seien $\gamma \in (0, 1)$, $J_k = [-\alpha_k, -k]$, $I_k = [k, \beta_k]$ und $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = +\infty$ mit $\alpha_k, \beta_k > k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann $f_k \rightrightarrows 0$ auf \mathbb{R} .

Aber für jedes $G \in \widehat{\mathbb{R}}$ existieren Folgen $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = +\infty$, $\alpha_k, \beta_k > k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, und $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k dx \rightarrow G$.

Zusammenfassung von (c): Für *uneigentliche Riemann-Integrale* ist das Thm.16.1 über die gleichmäßige Konvergenz generell *nicht wahr*.

Die Lösung wird durch den Satz von Lebesgue über *majorisierte/dominierte Konvergenz* gegeben.

Theorem 16.2 (majorisierte Konvergenz von Lebesgue-Integralen).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f_j : M \rightarrow \mathbb{K}^m$, $j \in \mathbb{N}$, messbare Funktionen, so dass $f_j(x) \rightarrow f(x)$ f.ü. (fast überall) auf M . Nehmen wir auch an, dass

$$|f_j(x)| \leq \varphi(x) \text{ f.ü. } \forall j \in \mathbb{N}$$

für manche $\varphi \in L(M, \mathbb{R})$ gilt.

Dann $f \in L(M, \mathbb{K}^m)$ und

$$\int_M f d\mu_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j d\mu_n.$$

Bemerkung 16.3.

Die Lebesgue-integrierbare Funktion φ im Theorem heißt *Majorante*.

Beispiel 16.2 (Fortsetzung des Beispiels 16.1 (a)).

Seien $\gamma \in (0, 1)$, $f_k(x) = \frac{1}{x^\gamma} \chi_{I_k}(x)$ mit $I_k = [\frac{1}{k}, 1]$, $k \in \mathbb{N}$. Dann $f_k(x) \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^\gamma}$ (punktweise) f.ü. auf $[0, 1]$, wenn $k \rightarrow \infty$,

$$f_k = |f_k| \leq f(x) \text{ f.ü. auf } [0, 1]$$

und $f \in L([0, 1], \mathbb{R})$ (siehe Vorlesung 15 oder 16).

Wegen des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz gilt $\int_0^1 f_k d\mu_1 \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} d\mu_1 = \frac{1}{1-\gamma}$, wenn $k \rightarrow \infty$.

Bemerkung 16.4.

In den Fällen (b) und (c) vom Beispiels 16.1 kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz nicht verwenden. (Warum?)

Auf das Beispiel 16.2 kann man auch das folgende Theorem anwenden.

Theorem 16.3 (Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f_j \in L(M, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, so dass

$$f_1(x) \leq \dots \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x) \leq \dots$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ fast überall auf M und

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_M f_j d\mu_n < +\infty.$$

Dann existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j(x)$ f.ü. auf M (im Sinne von \mathbb{R}), die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar auf M und

$$\int_M f d\mu_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j d\mu_n.$$

Aufgabe 16.1.

Reformulieren Sie den Satz von B. Levi für die Summe $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M g_k$ von nichtnegativen Funktionen $g_k \in L(M, \mathbb{R})$.

Theorem 16.4 (Lemma von Fatou).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$. Seien $f_j \in L(M, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, so dass

$$\liminf_{j \in \mathbb{N}} \int_M f_j d\mu_n < +\infty.$$

Dann ist $f(x) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} f_j(x)$ endlich f.ü. auf M , die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar auf M , und

$$\int_M f d\mu_n \leq \liminf_{j \in \mathbb{N}} \int_M f_j d\mu_n.$$

16.3 Iterierte Integration und Satz von Fubini.

Betrachten wir die iterierte Integration für das Lebesgue-Integral.

Man kann die Lebesgue-Integration auf Lebesgue-messbaren Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ auf den Fall $M = \mathbb{R}^n$ reduzieren.

Erinnerung. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$. Die kanonische Fortsetzung \tilde{f} von f (auf \mathbb{R}^n) ist die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0_{\mathbb{K}^m}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}.$$

Satz 16.14.

Seien $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und $f \in L(M, \mathbb{K}^m)$. Dann $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^m)$ und $\int_M f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} \, d\mu_n$.

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{K}^\ell$. Wir schreiben $f(z)$ als $f(x, y)$, wobei $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 16.5 (Satz von Fubini auf \mathbb{R}^n).

Sei $f \in L(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{K}^\ell)$. Dann:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z) \, d\mu_{m+n}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, d\mu_n(y) d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\mu_m(x) d\mu_n(y).$$

Bemerkung 16.5 (Erklärung zum Satz von Fubini).

Für ein fixiertes $y \in \mathbb{R}^n$ sei $g_y(x) := f(x, y)$ die Funktion von x . Für ein fixiertes $x \in \mathbb{R}^m$, sei $h_x(y) := f(x, y)$ die Funktion von y . Der Satz von Fubini ist eine kurze Schreibweise der folgenden Aussagen.

Sei $f \in L(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{K}^\ell)$. Dann:

- (a) $g_y(\cdot) = f(\cdot, y) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}^\ell)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ (bezüglich μ_n).
- (b) $h_x(\cdot) = f(x, \cdot) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^\ell)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ (bezüglich μ_m).
- (c) Die Funktion $\mathcal{I}_1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, d\mu_n(y)$ ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ definiert und $\mathcal{I}_1 \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}^\ell)$.
- (d) Die Funktion $\mathcal{I}_2(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\mu_m(x)$ ist für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ definiert und $\mathcal{I}_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}^\ell)$.
- (e) $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(z) \, d\mu_{m+n}(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{I}_1(x) \, d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}_2(y) \, d\mu_n(y)$.

Bemerkung 16.6 (Querschnitte von Lebesgue-messbaren Mengen).

Seien $n = m = 1$. Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\mu_2(M) < +\infty$. Dann $\chi_M \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und der Satz von Fubini ist anwendbar. Für jedes $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir

$$M_{x_0} := \{y \in \mathbb{R} : (x_0, y) \in M\} \subseteq \mathbb{R}, M_{y_0} := \{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in M\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann folgt aus dem Satz von Fubini

- (a) Für fast alle $x \in \mathbb{R}$, $M_x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.
- (b) Für fast alle $y \in \mathbb{R}$, $M_y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.
- (c) Die Funktion $\mathcal{I}_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_M(x, y) \, d\mu_1(y) = \mu_1(M_x)$ ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ definiert und $\mathcal{I}_1 \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (d) Die Funktion $\mathcal{I}_2(y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_M(x, y) \, d\mu_1(x)$ ist für fast alle $y \in \mathbb{R}$ definiert und $\mathcal{I}_2 \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$(e) \mu_2(M) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_M \, d\mu_2 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}_1(x) \, d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}_2(y) \, d\mu_1(y).$$

Man kann die Aussagen (a) und (b) für $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\mu_2(M) = +\infty$ mit Hilfe der σ -Additivität erreichen.

Man kann die *Bemerkung über Querschnitte* für den Fall $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{m+n}}$ zusammen mit der Definitionen von M_x , $x \in \mathbb{R}^m$, und M_y , $y \in \mathbb{R}^n$ generalisieren.

Man kann den Satz von Fubini für drei oder mehrere iterierte Integralen generalisieren.

Bemerkung 16.7 (Satz von Fubini auf Lebesgue-messbaren Mengen).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{m+n}}$. Sei $f \in L(M, \mathbb{K}^\ell)$. Dann:

(a) Für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist $M_y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$ und $f(\cdot, y) \in L(M_y, \mathbb{K}^\ell)$ (wenn $M_y = \emptyset$, nehmen wir an, dass jede \mathbb{K}^ℓ -wertige Funktion g Lebesgue-integrierbar auf \emptyset ist).

(b) Für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ ist $M_x \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ und $f(x, \cdot) \in L(M_x, \mathbb{K}^\ell)$.

(c) Die Funktion $\mathcal{I}_1(x) = \int_{M_x} f(x, y) \, d\mu_n(y)$ ist auf \mathbb{R}^m Lebesgue-integrierbar.

(d) Die Funktion $\mathcal{I}_2(y) = \int_{M_y} f(x, y) \, d\mu_m(x)$ ist auf \mathbb{R}^n Lebesgue-integrierbar.

(e)

$$\int_M f \, d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{M_x} f(x, y) \, d\mu_n(y) \, d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{M_y} f(x, y) \, d\mu_m(x) \, d\mu_n(y).$$

Theorem 16.6 (Satz von Fubini-Tonelli).

Sei $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{m+n}}$. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}^\ell$ messbar. Nehmen wir an, dass mindestens eins von den Integralen

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{M_x} |f(x, y)| \, d\mu_n(y) \, d\mu_m(x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_{M_y} |f(x, y)| \, d\mu_m(x) \, d\mu_n(y)$$

im Sinne von \mathbb{R} existiert (das heißt existiert und ist endlich), dann:

(a) Das andere Integral existiert auch im Sinne von \mathbb{R} .

(b) $f \in L(M, \mathbb{K}^\ell)$

$$(c) \int_M f \, d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{M_x} f(x, y) \, d\mu_n(y) \, d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{M_y} f(x, y) \, d\mu_m(x) \, d\mu_n(y).$$

17 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und Jacobi- matrix. Kriterium der stetigen Differenzierbarkeit. Jaco- bideterminante. Transformationssatz.

17.1 Richtungsableitungen, partielle Ableitungen und Jacobimatrix.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei V ein Banachraum über \mathbb{R} , z.B., $V = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei $f : \Omega \rightarrow V$ eine Funktion.

Def. 1.9. (Erinnerung)

Die Funktion f heißt (Fréchet/total) differenzierbar an der Stelle $p \in \Omega$, wenn es einen linearen Operator (Homomorphismus) $A = A_p \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, V)$ gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{|x - p|} (f(x) - f(p) - A(x - p)) = 0. \quad (17.1)$$

Der lineare Operator $A = A_p$ in (17.1) ist eindeutig bestimmt und heißt (Fréchet) Ableitung von f in p (an der Stelle p). Man bezeichnet A_p als $\partial f(p)$ oder $Df(p)$.

Satz 17.1 (Differenzierbarkeit \Rightarrow Stetigkeit). (a) Wenn f an der Stelle p Fréchet-differenzierbar ist, ist f an p stetig.

(b) Wenn $f : \Omega \rightarrow V$ auf Ω Fréchet-differenzierbar ist, ist f auf Ω stetig (das heißt, $f \in C(\Omega, V)$).

Seien $w \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Betrachten wir die Funktion $g(\zeta) := f(p + \zeta w)$, wobei $\zeta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$.

Definition 17.1 (Richtungsableitung).

Ist die Funktion $g(\zeta) := f(p + \zeta w)$ an $\zeta_0 = 0$ differenzierbar, so heißt ihre (1-dim.) Ableitung $\frac{dg}{d\zeta}(0)$ Richtungsableitung von f an der Stelle $p \in \Omega$ in der Richtung $w \in \mathbb{R}^n$, und wird mit $D_w f(p)$ bezeichnet.

$$D_w f(p) := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} (f(p + \zeta w) - f(p)) \in V.$$

Beispiel 17.1 (Erinnerung: partielle Ableitungen).

Sei $\{e_j\}_{j=1}^n$ die Standardbasis in \mathbb{R}^n , das heißt, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Richtungsableitung $D_{e_j}(p)$ an der Stelle p in der Richtung e_j heißt partielle Ableitung nach x_j von f an der Stelle p , und wird bezeichnet als

$$\partial_j f(p) = \partial_{x_j} f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

Also

$$\partial_j f(p) := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} (f(p + \zeta e_j) - f(p)) \in V$$

(falls dieser Limes existiert).

Satz 17.2.

Sei f Fréchet-differenzierbar an $p \in \Omega$ mit der Ableitung $A_p \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, V)$. Dann:

- (a) Für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ existiert die Richtungsableitung $D_w f(p)$ und $D_w f(p) = A_p w$. Statt $A_p(w) = A_p w$ schreibt man normalerweise $D_w f(p) = (Df(p))w = Df(p)[w]$.
- (b) Insbesondere existieren an p alle partiellen Ableitungen

$$\partial_1 f(p) = Df(p)[e_1], \dots, \partial_n f(p) = Df(p)[e_n].$$

Man kann die Ableitung $Df(p)$ durch partielle Ableitungen

$$\partial_j f(p), \quad j = 1, \dots, n$$

darstellen. Sei $V = \mathbb{R}^m$. Sei $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$ die *komponentenweise Darstellung* der Funktion f bzgl. der Standardbasis von \mathbb{R}^m . Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $p \in \Omega$.

Satz 17.3.

Falls die totale Ableitung $A_p = Df(p)$ von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, besitzt der lineare Operator A_p die folgende Darstellung bzgl. Standardbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m :

$$\text{wt} Df(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(p) & \partial_2 f_1(p) & \dots & \partial_n f_1(p) \\ \partial_1 f_2(p) & \partial_2 f_2(p) & \dots & \partial_n f_2(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_m(p) & \partial_2 f_m(p) & \dots & \partial_n f_m(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Definition 17.2 (Jacobimatrix).

Die darstellende Matrix $\tilde{D}f(p)$ vom Satz 17.3 heißt *Jacobimatrix* von f an der Stelle p (oder, in p).

Man bezeichnet die Jacobimatrix $\tilde{D}f(p)$ oft als $Df(p)$ oder $f'(p)$ (sehr selten auch $J_f(p)$, aber wir benutzen diese Bezeichnung nicht).

Beispiel 17.2 (Transformationsformeln für Zylinderkoordinaten).

Die kartesische Koordinaten (x, y, z) in \mathbb{R}^3 und die Zylinderkoordinaten um den Ursprung sind durch Transformationsformeln verbunden:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi] \text{ (oder } \varphi \in [0, 2\pi)), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Man kann diese Transformationsformeln als eine Einschränkung der entsprechenden total differenzierbaren Abbildung $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F : (r, \varphi, z)^T \rightarrow (x, y, z)^T$ schreiben.

$$\begin{cases} x = F_1(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \\ y = F_2(r, \varphi, z) = r \sin \varphi \\ z = F_3(r, \varphi, z) = z \end{cases}$$

Die Jacobimatrix (Jacobimatrix-Funktion) $\tilde{D}_F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ von F ist

$$\tilde{D}_F(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & (-r) \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Determinante ist

$$\det \tilde{D}_F(r, \varphi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $n = m$. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine total differenzierbare Funktion. Dann ist die Jacobimatrix $\tilde{D}f(p)$ eine quadratische $n \times n$ -Matrix,

$$\tilde{D}f(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Definition 17.3 (Jacobideterminante/Funktionaldeterminante).

Sei $n = m$. Dann heißt die Determinante $\det \tilde{D}f(p)$ der quadratischen Jacobimatrix $\tilde{D}f$ *Jacobideterminante*. Man bezeichnet die Jacobideterminante als

$$\det Df = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

(und auch als J_f).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $m = 1$.

Beispiel 17.3 (Jakobmatrix skalarwertiger Funktion und Gradient).

Sei eine skalarwertige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar an $p \in \Omega$. In diesem Fall, *identifiziert man manchmal die Jacobimatrix $\tilde{D}f(p)$ mit dem Gradient $\nabla f(p) = \mathbf{grad} f(p)$ von f und schreibt den Gradient als Zeilenvektor*

$$(\partial_1 f(p), \partial_2 f(p), \dots, \partial_n f(p)).$$

Für eine vektorwertige Fréchet-differenzierbare Abbildung

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell, F(x) = (F_1(x), \dots, F_\ell(x))^\top,$$

benutzt man dann diese Bezeichnung in der folgenden Weise

$$\tilde{D}F = \begin{pmatrix} \mathbf{grad} F_1 \\ \dots \\ \mathbf{grad} F_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_\ell}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 17.1 (geometrischer Sinn des Gradienten).

In anderen Quellen schreibt man den Gradienten einer skalarwertigen Funktion als einen Spaltenvektor. Dann $\mathbf{grad} f = (\tilde{D}f)^\top$.

Dies ist mit dem *geometrischen Sinn des Gradienten* verbunden: Falls $\mathbf{grad} f(p) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,

$$\left\{ \frac{\mathbf{grad} f(p)}{|\mathbf{grad} f(p)|} \right\} = \operatorname{argmax}_{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ |w|=1}} D_w f(p).$$

Diese Formel bedeutet, dass der Vektor $w_* = \frac{\mathbf{grad} f(p)}{|\mathbf{grad} f(p)|}$ die *eindeutige Lösung* des folgenden Maximierungsproblem ist:

Seien p und eine an p differenzierbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fixiert. *Maximiere den Wert der Richtungsableitung $D_w f \rightarrow \max$ unter der Nebenbedingung $|w| = 1$ (wobei $w \in \mathbb{R}^n$).*

17.2 Stetig differenzierbare Funktionen.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei V ein Banachraum über \mathbb{R} , z.B., $V = (\mathbb{R}^m, |\cdot|)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Def. (Erinnerung: C^1 -Funktionen, s. Def.2.4.) Die Funktion $f : \Omega \rightarrow V$ heißt *stetig differenzierbar* auf Ω (oder $C^1(\Omega, V)$ -Funktion), wenn f auf Ω total differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion $Df(\cdot)$ stetig als die Funktion $Df : \Omega \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, V)$ ist.

Definition 17.4 (stetige partielle Differenzierbarkeit). (a) Die Funktion heißt *partiell differenzierbar* an $p \in \Omega$ (auf Ω), wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)$ an p (auf Ω) existieren.

(b) Die Funktion heißt *stetig partiell differenzierbar* auf Ω , wenn alle partiellen Ableitungen auf Ω existieren und stetig sind.

Theorem 17.1 (stetige Differenzierbarkeit \Leftrightarrow stetige partielle Differenzierbarkeit). $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn f stetig partiell differenzierbar ist.

Bemerkung 17.2.

Man kann Thm.17.1 in der folgenden Weise umformulieren: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig differenzierbar auf Ω , wenn die *Jacobimatrix $\tilde{D}f(p)$ an jeder Stelle $p \in \Omega$ existiert und jede ihrer Komponenten $\partial_k f_j(\cdot)$ auf Ω stetig ist.*

Beispiel 17.4 (stetige Differenzierbarkeit von Zylinderkoordinaten).

Sei $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die Einschränkung $F|_\Omega$ der Abbildung

$$F : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = F_1(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \\ y = F_2(r, \varphi, z) = r \sin \varphi \\ z = F_3(r, \varphi, z) = z \end{cases},$$

die die Zylinderkoordinaten definiert, ist *stetig partiell differenzierbar*. Das heißt,

$$\tilde{D}F = \begin{pmatrix} \cos \varphi & (-r) \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

existiert an jedem $p = (r, \varphi, z) \in \Omega$ und alle Komponenten der Jacobimatrix-Funktion sind stetig auf Ω .

Thm.17.1 \Rightarrow F ist auf Ω *Fréchet-differenzierbar* und

$$DF \in C(\Omega, \mathbb{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{L}^3)) \cong C(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}).$$

Also gilt $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (tatsächlich gibt es mehr: $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$).

17.3 Transformation von Integralen (Substitutionsregel)

Substitutionsregel (Erinnerung von Math 1.).

Seien $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$ und $\psi \in C^1[\alpha, \beta]$. Sei $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Dann

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(s)) \psi'(s) ds.$$

Wir brauchen eine *mehrdimensionale Verallgemeinerung*.

Erinnerung: $\det D\psi(p) = \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p)$ ist die Jacobideterminante von ψ .

Theorem 17.2 (Transformationsatz für Riemann-Integrale, [W2]).

Sei $\Omega \in \mathcal{Q}_n$ offen. Sei $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv und Lipschitz-stetig. Dann:

(a) Die Menge $\Omega_* = \psi(\Omega)$ ist quadrierbar.

(b) $f \in \mathcal{R}(\Omega_*, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow (f \circ \psi) |\det D\psi| \in \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R}^m)$

(c) Wenn $f \in \mathcal{R}(\Omega_*, \mathbb{R}^m)$, gilt

$$\int_{\Omega_*} f(x) dv_n(x) = \int_{\Omega} f(\psi(y)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dv_n(y)$$

Theorem 17.3 (Transformationsatz für Lebesgue-Integrale, [W2]).

Sei Ω offen. Sei ψ eine injektive $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ -Abbildung, so dass die Jakobideterminante keine Nullstellen in Ω hat (das heißt, $\det D\psi(p) \neq 0 \forall p \in \Omega$). Sei $\Omega_* = \psi(\Omega)$. Dann:

(a) Eine nichtnegative Funktion $f : \Omega_* \rightarrow [0, +\infty)$ ist genau dann messbar, wenn $(f \circ \psi) |\det D\psi|$ messbar ist. In diesem Fall (im Sinne von \mathbb{R}),

$$\int_{\Omega_*} f(x) d\mu_n(x) = \int_{\Omega} f(\psi(y)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| d\mu_n(y)$$

(b) $f \in L(\Omega_*, \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn $(f \circ \psi) |\det D\psi| \in L(\Omega, \mathbb{R}^m)$. In diesem Fall gilt auch die Transformationsgleichung von (a) (im Sinne von \mathbb{R}).

Erinnerung: 3-dim. Kugelkoordinaten Betrachten wir die Abbildung

$$\Psi : [0, +\infty) \times (-\pi, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, F : (r, \varphi, \theta) \mapsto (x_1, x_2, x_3), \begin{cases} x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ x_3 = r \cos(\theta) \end{cases},$$

$\varphi \in (-\pi, \pi]$ Azimutwinkel, $\theta \in [0, \pi]$ Polarwinkel.

Die Ableitung ist

$$D\Psi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & (-r) \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & (-r) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$|\det D\Psi| = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \varphi, \psi)} \right| = |(-r^2) \sin(\theta)| = r^2 \sin(\theta).$$

Die Funktion Ψ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Wenn $r = 0$, $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, gilt $\det D\Psi = 0$. Die Einschränkung von F auf offene $\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ ist injektiv und hat das Bild $\mathbb{R}^3 \setminus (\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_1 < 0, x_2 = 0\})$. Aber $\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_1 < 0, x_2 = 0\}$ ist eine *Lebesgue-Nullmenge* und *spielt keine Rolle* für die Integration.

Sei $f(x) = g(|x|) = g(r)$ stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Sei $0 \leq \rho < R < +\infty$. Dann

$$\int_{K_R(0) \setminus K_\rho(0)} f(x) \, dv_n(x) = \int_\rho^R \int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi g(r) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_\rho^R g(r) r^2 \, dr.$$

Beispiel 17.5.

Betrachten wir jetzt den Fall $\rho = 1$, $R = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{|x|^\gamma}$, und benutzen ein Lebesgue-

Integral. Wegen $|x| = r$ und $\frac{1}{|x|^\gamma} = \frac{1}{r^\gamma}$ haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_1(0)} \frac{1}{|x|^\gamma} \, d\mu_n(x) = 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{r^2}{r^\gamma} \, dr = 4\pi \int_1^{+\infty} r^{2-\gamma} \, dr = \begin{cases} +\infty, & \gamma \leq 3 \\ \frac{4\pi}{\gamma-3}, & \gamma > 3 \end{cases}.$$

17.4 Erklärungen zum Transformationssatz.

Sei $\Omega \in \mathcal{Q}_n$ (das heißt, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist quadrierbar). Sei Ω offen. Als $\det D\psi(p) = \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p)$ bezeichnen wir die Jacobideterminante von $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Wir erinnern uns an den Transformationssatz:

Sei $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *injektiv und Lipschitz-stetig*. Dann:

- (a) Die Menge $\Omega_* = \psi(\Omega)$ ist quadrierbar.
 (b) $f \in \mathcal{R}(\Omega_*, \mathbb{R}^m) \iff (f \circ \psi) |\det D\psi| \in \mathcal{R}(\Omega, \mathbb{R}^m)$
 (c) Wenn $f \in \mathcal{R}(\Omega_*, \mathbb{R}^m)$, gilt

$$\int_{\Omega_*} f(x) \, dv_n(x) = \int_{\Omega} f(\psi(y)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dv_n(y)$$

Warum erscheint hier der Betrag der Jacobideterminante $\left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|$?

Bemerkung 17.3.

Sei $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ eine nichtnegative Lebesgue-integrierbare Funktion. Dann kann man ein *neues Maß* (Maß-Funktion) $\lambda_\rho : \mathcal{L}_\Omega \rightarrow [0, +\infty]$ für Lebesgue-messbare Teilmengen $M \subseteq \Omega$ durch

$$\lambda_\rho(M) := \int_M \rho(y) d\mu_n(y)$$

definieren. Generell ist das Maß λ_ρ *nicht bewegungsinvariant* und ist *nicht gleich* mit der Inhaltfunktion (Jordan-Maß) $v(M)$ für $M \in \mathcal{Q}_n$.

Aber λ_ρ hat viele gute Eigenschaften des Lebesgue-Maßes: σ -Additivität, Monotonie, Stetigkeit bezüglich monotoner Mengenfolgen und $\lambda_\rho(M) = 0$ für *Lebesgue-Nullmengen* M (*absolute Stetigkeit* bezüglich des Lebesgue-Maßes). Die Funktion ρ heißt die *Dichtefunktion* des Maßes λ_ρ .

Sei jetzt $\rho = \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|$. Dann sagt der Transformationssatz

$$\int_{\psi(\Omega)} f(x) \, d\mu_n(x) = \int_{\Omega} f(\psi(y)) \, d\lambda_\rho(y).$$

Zusammenfassung: Wenn $\rho(y) = \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|(y)$, entspricht das neue Maß $\lambda_\rho : M \mapsto \int_M \rho(y) d\mu_n(y)$ *bezüglich der y-Variable* dem Lebesgue-Maß μ_n *bezüglich der Variable* $x = \psi(y)$.

Warum ist $\left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|$ die richtige *Dichtefunktion* hier?

Sei der Einfachheit halber $\Omega = Z$ eine offene n-Zelle.

Betrachten wir die Frage vom Standpunkt der Zwischensummen. Eine Zerlegung ζ von Z in Teilzellen $Z_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}$ generiert die folgende ‘*gekrümmte*’ Zerlegung $\Omega_* = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} \psi(Z_\alpha)$ von $\Omega_* = \psi(\Omega)$ und die Gleichung für die ‘Zwischensummen’:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{A}} f(x^\alpha) v_n(\psi(Z_\alpha)) = \sum_{\alpha} f(\psi(y^\alpha)) b_\alpha v_n(Z_\alpha),$$

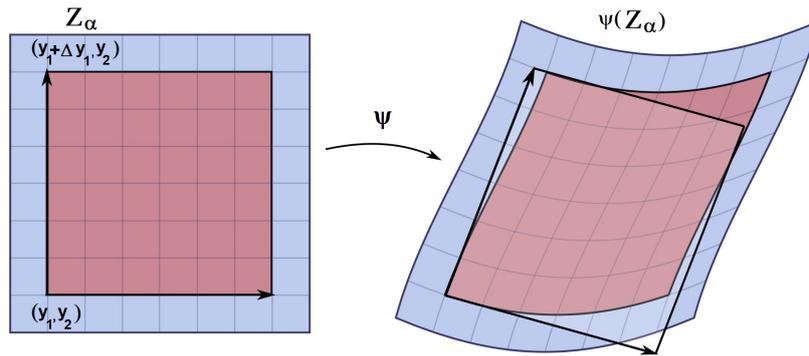


Abbildung 2: Modified from 'Jacobian determinant and distortion.svg',
<https://en.wikipedia.org/wiki/User:Blacklemon67>, license (CC BY-SA 3.0),
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>

wobei $x^\alpha = \psi(y^\alpha)$ und $y^\alpha \in Z_\alpha$ Zwischenpunkten sind. Die Konstanten b_α verbinden Jordan-Maße bezüglich x - und y -Variablen:

$$v_n(\psi(Z_\alpha)) = b_\alpha v_n(Z_\alpha).$$

Betrachten wir diese Verbindung für eine n -Zelle

$$Z_\alpha = [y_1, y_1 + \Delta y_1] \times [y_2, y_2 + \Delta y_2] \times \cdots \times [y_n, y_n + \Delta y_n]$$

mit kleinen Längen Δy_j der Seiten $[y_j, y_j + \Delta y_j]$.

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) = (\psi_1(y), \dots, \psi_n(y))$ das Bild der 'Ecke' $y = (y_1, \dots, y_n)$ von Z_α . Sei $A_y = D\psi(y)$. Dann

$$\psi(\tilde{y}) - \psi(y) = A_y(\tilde{y} - y) + o(\tilde{y} - y),$$

wenn $\tilde{y} \rightarrow y$.

Das n -Parallelogramm $\{x + A_y(u - y) : u \in Z_\alpha\}$ approximiert das Bild $\psi(Z_\alpha)$, und $v_n(\{A_y(u - y) : u \in Z_\alpha\}) \approx v_n(\psi(Z_\alpha))$. Das n -Parallelogramm $\Pi = \{A_y(u - y) : u \in Z_\alpha\}$ wird von Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &:= A_y(\Delta y_1, 0, \dots, 0)^\top = \Delta y_1 A_y \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{w}_2 &:= A_y(0, \Delta y_2, \dots, 0)^\top = \Delta y_2 A_y \mathbf{e}_2, \\ &\dots, \\ \mathbf{w}_n &:= A_y(0, 0, \dots, \Delta y_n)^\top = \Delta y_n A_y \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

aufgespannt.

Erinnerung von 'Math 1': $v_n(\Pi) = |\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)|$ (das Volumen ist der geometrische Sinn der Determinate).

Die Vektorspalten $A_y \mathbf{e}_1, A_y \mathbf{e}_2, \dots, A_y \mathbf{e}_n$ sind Vektorspalten der Jacobimatrix $A_y = D\psi(y)$ von ψ . Also

$$v_n(\psi(Z_\alpha)) \approx |\det D\psi(y)| \prod_{j=1}^n \Delta y_j = \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(y) \right| v_n(Z_\alpha).$$

Zusammenfassung:

$$b_\alpha \approx \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(y) \right|$$

und

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{A}} f(x^\alpha) v_n(\psi(Z_\alpha)) = \sum_{\alpha} f(\psi(y^\alpha)) b_\alpha v_n(Z_\alpha) \approx \sum_{\alpha} f(\psi(y^\alpha)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(y^\alpha) \right| v_n(Z_\alpha)$$

konvergiert gegen $\int_{\Omega} f(\psi(y)) \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dv_n(y)$, wenn die Feinheit der Zerlegung gegen 0 geht.

18 Umkehrsatz und Kettenregel. C^1 -Diffeomorphismen.

18.1 Der Umkehrsatz.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Theorem 18.1 (Umkehrsatz für C^1 -Abbildungen).

Sei $\Psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit der Ableitungsfunktion $D\Psi(y) = A_y$, $y \in \Omega$. Sei die Ableitung $A_p = D\Psi(p)$ an $p \in \Omega$ invertierbar (das ist äquivalent mit $\det \tilde{D}\Psi(p) \neq 0$, s. 'Math 1'). Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von p mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $U_* = \Psi(U)$ ist offen.
- (b) Die Einschränkung $\psi = \Psi|_U$ ist eine bijektive Abbildung von U auf U_* .
- (c) Die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $\varphi = \psi^{-1} : U_* \rightarrow U$ ist eine $C^1(U_*, U)$ -Abbildung.

In diesem Fall ist die Ableitung $B_x = D\varphi(x)$ der Umkehrfunktion an $x = \psi(y)$ invertierbar mit $(B_x)^{-1} = A_y \forall x \in U_*$ (im Besonderen gilt für Jacobimatrizen $(\tilde{D}\psi(y))^{-1} = \tilde{D}\varphi(x)$).

Bezeichnen wir als y die Variable in Ω und, für $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, als $x = \psi(y)$ die Variable in $U_* = \psi(\Omega)$. Dann $\det D\psi(y) \neq 0$ in Ω impliziert für $y = \psi^{-1}(x) = \varphi(x)$

$$\det D\psi(y) = (\det D\varphi(x))^{-1} \forall y \in \Omega$$

(oder $\forall x = \psi(y) \in U_*$).

Manchmal bezeichnet man diese Jacobideterminanten auch als

$$\det D\psi(y) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$$

und

$$\det D\varphi(x) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Dann gilt $\left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\right)^{-1} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$. Das entspricht auch gut der Leibnitz-Notation für die Differential- und Integral-Rechnung. Den *Transformationssatz* kann man als

$$\int_{\Omega_*} f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\Omega} f(\psi(y)) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

schreiben.

18.2 Mehrdimensionale Kettenregel.

Bezeichnen wir als y die Variable in Ω und, für $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, als $x = \psi(y)$ die Variable in $\Omega_* = \psi(\Omega)$. Dann $\det D\psi(y) \neq 0$ in Ω impliziert für $y = \psi^{-1}(x) = \varphi(x)$

$$(D\psi(y))^{-1} = D\varphi(x).$$

Das kann man durch die folgende Kettenregel beweisen (Aufgabe).

Theorem 18.2 (mehrdimensionale Kettenregel).

Seien $U_* \subseteq \mathbb{R}^l$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Seien $\varphi : U_* \rightarrow U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 -Abbildungen. Dann

$$g = f \circ \varphi \in C^1(U_*, \mathbb{R}^m)$$

und

$$Dg(x) = [(Df)(\varphi(x))] [(D\varphi)(x)]$$

(die Jacobimatrix der Verknüpfung $f \circ \varphi$ ist das Produkt der Jacobimatrizen von f und φ).

Beispiel 18.1.

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein Weg, der an der Stelle $t_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. Dann ist die Funktion $g(t) = f(\varphi(t))$ an t_0 differenzierbar und

$$\frac{dg(t_0)}{dt} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\varphi(t_0)) \frac{d\varphi_j(t_0)}{dt}.$$

Bemerkung 18.1.

Für differenzierbare Wege $\varphi(t), t \in [a, b]$, interpretiert man oft t als die Zeit-Variable, und schreibt $\dot{\varphi}(t_0)$ für die Ableitung $\varphi'(t_0) = \frac{d}{dt}\varphi(t_0)$.

Die Formel in Beispiel 18.1 schreibt man z.B. oft als

$$\frac{d}{dt}g(t_0) = \nabla f(\varphi(t_0)) \cdot \dot{\varphi}(t_0).$$

18.3 Homöomorphismen und C^1 -Diffeomorphismen.

Im Umkehrsatz haben wir eine bijektive C^1 -Abbildung $\psi : U \rightarrow U_*$ mit $\det D\psi(y) \neq 0$ für alle $y \in \Omega$. Dann ist ψ ein $C^1(U, U_*)$ -Diffeomorphismus.

Definition 18.1 (Homöomorphismen und C^1 -Diffeomorphismen).

Seien Mengen $U, U_* \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

- (a) Eine *bijektive* Abbildung $\psi : U \rightarrow U_*$ heißt *Homöomorphismus*, wenn ψ und ψ^{-1} stetig sind. Die Familie *aller Homöomorphismen von U auf U_** bezeichnet man als $\text{Diff}^0(U, U_*)$.
- (b) Ein Homöomorphismus $\psi : U \rightarrow U_*$ heißt *C^1 -Diffeomorphismus*, wenn $\psi \in C^1(U, U_*)$ und $\psi^{-1} \in C^1(U_*, U)$. Die Familie *aller C^1 -Diffeomorphismen von U auf U_** bezeichnet man als $\text{Diff}^1(U, U_*)$.

Bemerkung 18.2 (Verbindung zwischen $\det D\psi(y) \neq 0$ und Injektivität).

Die Bedingungen $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\det D\psi(y) \neq 0$ im Umkehrsatz (und im Transformationssatz für Lebesgue-Integrale) implizieren, dass ψ ein *lokaler C^1 -Diffeomorphismus* ist (und so *lokal injektiv* ist). „*Lokaler*“ bedeutet hier, dass ψ ein C^1 -Diffeomorphismus in einer (möglicherweise sehr kleinen) offenen Umgebung U von y ist (s. [AE2]).

Generell kann eine Abbildung ein *lokaler C^1 -Diffeomorphismus* in einer offenen Umgebung *jedes Punktes* $y \in \Omega$ sein und gleichzeitig *global in Ω nicht injektiv* sein (und so, global kein $C^1(\Omega)$ -Diffeomorphismus).

Aufgabe 18.1.

Finden Sie ein Beispiel zur Bemerkung 18.2.

18.4 $C^1(\overline{\Omega})$ -Abbildungen und Lipschitz-Stetigkeit.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Def. (Erinnerung. Lipschitz-Stetigkeit, s. Def 8.1)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn $\exists \alpha \geq 0$, so dass

$$|f(p) - f(q)| \leq \alpha |p - q| \forall p, q \in M.$$

In diesem Fall, heißt α eine *Lipschitz-Konstante* von f . Die Familie aller Lipschitz-stetigen Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezeichnet man $\text{Lip}(M)$ oder $\text{Lip}(M, \mathbb{R}^m)$.

Theorem 18.3 (Verbindung zwischen $\psi \in C^1(\Omega)$ und Lipschitz-Stetigkeit).

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann $f \in \text{Lip}(M)$ für jede kompakte Menge $M \subset \Omega$.

Der Beweis von Th.18.3 wird auf dem folgenden Satz gegründet.

Satz 18.1 (Hadamards Lemma und Mittelwertabschätzung).
 Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Seien $p, q \in \Omega$, so dass $[p, q] \subset \Omega$, wobei

$$[p, q] = \{p + t(q - p) : 0 \leq t \leq 1\}$$

die Verbindungsstrecke zwischen p und q ist. Dann:

(a) Es gilt $f(p) - f(q) = \mathcal{A}(p - q)$, wobei $\mathcal{A} := \int_0^1 Df(p + t(q - p)) dt$.

(b) $|f(p) - f(q)| \leq |p - q| \max_{t \in [0,1]} \|Df(p + t(q - p))\|$.

Teil (a) (Hadamards Lemma) folgt aus der Kettenregel des Beispiels 18.1 (Aufgabe).
 Teil (b) aus (a) und der Hauptabschätzung für Integrale.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 18.2 ($C^1(\overline{\Omega})$ -Funktionen).

Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *von der Klasse $C^1(M, \mathbb{R}^m)$* , wenn es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ gibt, so dass $M \subseteq U$ und $f = F|_M$ (das heißt, wenn f eine $C^1(\Omega)$ -Erweiterung auf dem offenen Ω hat).

Beispiel 18.2 ($C^1[a, b]$ -Wege und links-/rechtsseitige Ableitungen).

Sei $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg. Es gilt $f \in C^1[a, b] = C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn

$$f \in C^1((a, b), \mathbb{R}^m),$$

die einseitigen Ableitungen

$$\partial_+ f(a) := \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}, \quad \partial_- f(b) := \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{f(t) - f(b)}{t - b}$$

existieren, und

$$\partial_+ f(a) = \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{f}(t), \quad \partial_- f(b) = \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{f}(t).$$

Korollar 18.1 (Verbindung zwischen $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ und Lipschitz-Stetigkeit).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Dann $f \in \text{Lip}(\overline{\Omega})$.

19 Wegintegrale. Länge eines Weges. Umparametrisierungen.

19.1 Totale Variation und Länge eines Weges

19.2 Wegintegrale.

Erinnerung. Ein Weg γ in \mathbb{R}^n ist eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (die als eine Trajektorie des Punkts $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b]$ interpretiert wird). Der Weg γ hat den Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$, die zusammen Endpunkten des Weges w genannt

werden.

Die *Spur*

$$\text{Spur}(w) = w([a, b]) = \{w(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$$

des Weges w ist definitionsgemäß *sein Bild*.

Definition 19.1.(a) Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise- C^1* , wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ mit $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\gamma \in C^1[t_{j-1}, t_j] \forall 1 \leq j \leq k.$$

(b) Ein Weg γ heißt *doppelpunktfrei*, wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist.

(c) $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt *geschlossener Weg (oder Schleife)* falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(d) Eine Schleife $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossener Jordan-Weg*, wenn aus $t_1 < t_2$ und $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ folgt, dass $t_1 = a$ und $t_2 = b$ (das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist *einzigster Doppelpunkt* von γ .)

Bemerkung 19.1.

Generell ist es für einen stückweise- C^1 -Weg γ *möglich*, dass $\gamma \notin C^1[a, b]$, weil $\partial_- \gamma(t_j) \neq \partial_+ \gamma(t_j)$ für manche t_j (das heißt, die linksseitige Ableitung $\partial_- \gamma(t_j)$ kann nicht gleich mit der rechtsseitigen Ableitung $\partial_+ \gamma(t_j)$ sein).

Definition 19.2 (Wegintegral bezüglich skalarem Bogenelement).

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise- C^1 -Weg. Sei $f : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion auf der Spur mit der Eigenschaft, dass $f \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$. Dann wird das *Wegintegral bezüglich der Bogenlänge (oder des skalaren Bogenelements)* durch

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

definiert. Hier heißt $ds = |\dot{\gamma}(t)| \, dt$ *skalares Bogenelement*.

Bemerkung 19.2.

Das Wegintegral bezüglich skalarem Bogenelement $\int_{\gamma} f \, ds$ heißt oft *skalares Kurvenintegral (skalares Wegintegral)*. Merken wir an, dass für $f : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt \in \mathbb{R}^m$$

ein *Vektor* ist, sofern $m \geq 2$. Deswegen benutzen wir den Name “skalares Wegintegral” sehr selten.

Bezeichnen wir als \mathbf{x} die Variable im Vektorraum \mathbb{R}^n .

Definition 19.3 (Wegintegral bezüglich vektoriellem Bogenelement $d\mathbf{x}$).

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise- C^1 -Weg. Sei $\mathbf{f} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathbb{R}^n -wertige Funktion mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^n)$. Dann wird das *Wegintegral bezüglich des vektoriellem Bogenelement* durch

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \gamma(t) \, dt = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, dt$$

definiert. Hier heißt $d\mathbf{x} = \dot{\gamma}(t) \, dt$ das *vektorielle Bogenelement*.

Bemerkung 19.3.

Sei $n = 3$. Nehmen wir an, dass das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein *Kraftfeld* beschreibt, und ein Massenpunkt P sich unter dem Einfluss dieses Kraftfelds bewegt. Dann stellt $A = \int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ die *Arbeit* dar, die das Feld bei der Verschiebung von P längs des Weges γ leistet.

Bemerkung 19.4.

Das Wegintegral bezüglich des vektoriellem Bogenelement $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ heißt oft *vektorielles Kurvenintegral (vektorielles Wegintegral)*.

Merken wir an, dass das Ergebnis

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, dt \in \mathbb{R}$$

immer ein Skalar ist. Deswegen benutzen wir den Name vektorielles Wegintegral sehr selten.

Def. 10.2 (Erinnerung.) Streckenzüge in \mathbb{R}^n .

(a) Ein Weg $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Streckenzug*, falls es eine Zerlegung $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ gibt, s.d. $\forall j = 0, \dots, k$

$$w((1-s)t_j + st_{j+1}) = (1-s)w(t_j) + sw(t_{j+1}), s \in [0, 1].$$

(b) Wir sagen, dass ein Streckenzug w ein *Streckenzug in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$* ist, falls $\text{Spur}(w) \subseteq \Omega$ (das heißt, $w(t) \in \Omega \, \forall t \in [a, b]$).

(c) Die Länge $\mathcal{L}(w)$ des Streckenzuges w ist definitionsgemäß $\mathcal{L}(w) := \sum_{j=1}^k |w(t_j) - w(t_{j-1})|$.

Für ein Streckenzug $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, so dass

$$w((1-s)t_j + st_{j+1}) = (1-s)w(t_j) + sw(t_{j+1}), s \in [0, 1]. \quad (19.1)$$

Definition 19.4 (totale Variation).

Betrachten wir eine (nicht obligatorisch stetige) Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (a) Der Streckenzug $w_{\mathcal{Z},f}$, der mit f und eine Zerlegung $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ assoziiert ist, wird als der Streckenzug der Form (19.1) mit

$$w(t_j) = w_{\mathcal{Z},f}(t_j) = f(t_j), j = 0, \dots, k,$$

definiert. Die Länge des Streckenzuges $w_{\mathcal{Z},f}$ bezeichnen wir als $L_{\mathcal{Z}}(f)$, das heißt,

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|.$$

- (b) $\text{Var}(f) = \text{Var}(f, [a, b]) := \sup\{\mathfrak{L}_{\mathcal{Z}}(f) : \mathcal{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$ heißt (totale) Variation der Funktion f über $[a, b]$.

Definition 19.5.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man sagt, dass die Funktion f von beschränkter Variation ist, falls $\text{Var}(f, [a, b]) < +\infty$.

Beispiel 19.1.(a) Wenn $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ (das heißt f ist C^1 -Weg), ist f von beschränkter Variation.

- (b) $\text{Var}(\chi_{\mathbb{Q}}, [0, 1]) = +\infty$ (Bemerkung: $\chi_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ ist kein Weg).

- (c) $\text{Var}(\text{sign}(\cdot), [-a, a]) = 2 \forall a > 0$.

- (d) Für beliebige $n \in \mathbb{N}$, gibt es stetige Funktionen (Wege) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{Var}(\gamma) = +\infty$.

Wir brauchen Beispiele von Typ (d) mit $n = 1$ und $n = 2$.

Definition 19.6.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg (das heißt, $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$).

- (a) Dann nennt man die Variation $\text{Var}(\gamma, [a, b])$ die Länge vom Weg γ und bezeichnet diese Länge als

$$\mathfrak{L}(\gamma) := \text{Var}(\gamma, [a, b]).$$

- (b) Wenn $\mathfrak{L}(\gamma) < +\infty$, sagt man, dass der Weg γ rektifizierbar ist.

Beispiel 19.2.

Betrachten wir $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ |t|^\alpha \sin(\frac{1}{t}) \end{pmatrix}, & t \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0_{\mathbb{R}^2}, & t = 0 \end{cases}.$$

- (a) Für $\alpha \leq 0$ ist γ kein Weg, weil $\gamma \notin C([0, 1], \mathbb{R}^2)$.
- (b) Für $0 < \alpha \leq 1$ ist γ ein *nicht rektifizierbarer Weg*, das heißt, $\gamma \in C([-1, 1], \mathbb{R}^2)$, aber $\mathfrak{L}(\gamma) = +\infty$.
- (c) Für $\alpha > 1$ ist γ ein *rektifizierbarer Weg*, das heißt, $\gamma \in C([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ und $\mathfrak{L}(\gamma) = \int_{-1}^1 |\dot{\gamma}(t)| dt < +\infty$.

Theorem 19.1.

Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise- C^1 Weg. Dann ist γ rektifizierbar mit der Länge $\mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Bemerkung 19.5 (Länge als ein Wegintegral bezüglich der Bogenlänge).

Das bedeutet, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} 1 ds := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ von $f \equiv 1$ bezüglich der Bogenlänge die Länge $\mathfrak{L}(\gamma)$ des Weges γ ist.

Bemerkung 19.6 (über den Beweis Thm-s 19.1).

Die Rektifizierbarkeit vom stückweise- C^1 Weg γ folgt aus der folgenden Aussagen:

- (a) Falls $\gamma \in \text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit der Lipschitz-Konstante λ gilt es die Rektifizierbarkeit und $\mathfrak{L}(\gamma) \leq \lambda(b - a) < +\infty$.
- (b) Jeder stückweise- C^1 Weg γ ist Lipschitz-stetig.

Den Beweis von $\mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ kann man in, z.B., [H1, §2.1] finden.

Aufgabe 19.1.

Beweisen Sie $\mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ für Streckenzüge γ .

Bemerkung 19.7 (Geschwindigkeit und die Länge der Trajektorie).

Falls wir einen stückweise- C^1 Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ komponentweise schreiben

$$\gamma(t) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top,$$

bedeutet Th.19.1, dass

$$\mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b (|\gamma_1'(t)|^2 + \dots + |\gamma_n'(t)|^2)^{1/2} dt.$$

Die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ ist der *momentane Geschwindigkeitsvektor* zum Zeitpunkt t . Die skalarwertige Funktion $|\dot{\gamma}(t)|$ gibt die momentane (skalare) Geschwindigkeit als ihren Werte.

Beispiel 19.2 (c) (Fortsetzung)

Sei

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(|t|^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right), & t \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0_{\mathbb{R}^2}, & t = 0 \end{cases}, \alpha > 1.$$

Für $t \in (-1, 1)$ gilt

$$\gamma'_1(t) = 1 = \partial_+ \gamma_1(-1) = \partial_- \gamma_1(1), \text{ also } \gamma_1 \in C^1[-1, 1].$$

$$\partial_+ \gamma_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} t^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 = \partial_- \gamma_2(0).$$

Für $t > 0$ gilt $\gamma'_2(t) = \alpha t^{\alpha-1} \sin \frac{1}{t} - t^{\alpha-2} \cos \frac{1}{t}$.

(c.1) Für $\alpha > 2$ gilt $\lim_{t \rightarrow 0+0} \gamma'_2(t) = 0 = \partial_+ \gamma_2(0) = \partial_- \gamma_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0-0} \gamma'_2(t)$ und auch offenbar $\partial_\pm \gamma_2(\mp 1) = \lim_{t \rightarrow \mp 1 \pm 0} \gamma'_2(t)$

Daraus folgt

$$\gamma_2 \in C^1[-1, 1] \quad \Rightarrow \quad \gamma \in C^1[-1, 1]$$

rektifizierbar. Das heißt

$$\mathfrak{L}(\gamma) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (\gamma'_2)^2} dt < +\infty.$$

(c.2) Für $1 < \alpha \leq 2$ ~~ist~~ $\lim_{t \rightarrow 0 \pm 0} \gamma'_2(t)$. Es ist für $1 < \alpha \leq 2$ also γ_2 ein Beispiel der Funktion, die auf $[-1, 1]$ differenzierbar ist, aber nicht stückweise- C^1 Funktion ist. Doch für $1 < \alpha \leq 2$ ist γ rektifizierbar.

Das kann man aus der uneigentlichen absoluten Konvergenz von

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (\gamma'_2)^2} dt < +\infty$$

erhalten (es braucht eine zusätzliche Begründung).

Zusammenfassung: Für $1 < \alpha \leq 2$ ist γ ein Beispiel für einen Weg, der auf $[-1, 1]$ rektifizierbar ist, aber kein stückweise- C^1 Weg ist.

Satz 19.1.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise- C^1 Funktion. Dann:

(a) $\gamma(t) = (t, f(t))^\top$, $t \in [a, b]$, ist ein stückweise- C^1 Weg in \mathbb{R}^2 , so dass Spur γ mit dem Graph $\text{Gr } f$ der Funktion f übereinstimmt.

$$(b) \mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dt.$$

Satz 19.2 (Länge des Weges in zylindrischen Koordinaten).

Seien $r : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise- C^1 Funktionen.

Dann:

$$(a) \gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ definiert einen stückweise-}C^1 \text{ Weg in } \mathbb{R}^3.$$

$$(b) \mathfrak{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + (r\varphi')^2 + (z')^2} dt.$$

Beweis. $\gamma'_1 = r' \cos \varphi - r \sin(\varphi) \varphi'$, $\gamma'_2 = r' \sin \varphi + r \cos(\varphi) \varphi'$, $\gamma_3 = z'$. $|\dot{\gamma}|^2 = (r')^2 + r^2(\varphi')^2 + (z')^2$. \square

19.3 Beispiel der physikalischen Anwendung des Wegintegral bezüglich der Bogenlänge.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stückweise- C^1 Weg mit endlich vielen Doppelpunkten, der ein Draht mit Lebesgue-integrierbarer linearer Massendichte $\rho : \text{Spur } \gamma \rightarrow [0, +\infty)$ modelliert (die lineare Massendichte ist Masse pro Längeneinheit). Dann:

(a) Die Gesamtmasse M des Drahts ist

$$M = \int_{\gamma} \rho(\mathbf{x}) ds = \int_a^b \rho(\gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau.$$

(b) Der Radiusvektor \mathbf{S} des Schwerpunkts vom Draht ist

$$\mathbf{S} = \frac{1}{M} \int_{\gamma} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) ds = \frac{1}{M} \int_a^b \gamma(\tau) \rho(\tau) |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau.$$

(c) Wenn wir komponentenweise $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)^\top$ schreiben, gilt

$$S_j = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x_j \rho(\mathbf{x}) ds = \frac{1}{M} \int_a^b \gamma_j(\tau) \rho(\tau) |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau,$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

19.4 Umparametrisierung von Wegintegralen.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise- C^1 Weg. Dann existiert die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ für alle $t \in [a, b]$ ohne möglicherweise endlich viele t . An den Endpunkten a und b verstehen wir die Ableitung als $\dot{\gamma}(a) := \partial_+ \gamma(a)$ und $\dot{\gamma}(b) := \partial_- \gamma(b)$.

Definition 19.7.(a) Falls $\dot{\gamma}(t)$ existiert und $\dot{\gamma}(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, heißt $\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_\gamma(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ der *Tangenteneinheitsvektor* an γ im Punkt $\gamma(t)$.

(b) In diesem Fall, heißt die Gerade

$$G = \gamma(t) + \mathbb{R}\mathbf{T}(t) = \{\gamma(t) + \alpha\mathbf{T}(t) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

die *Tangente* an γ im Punkt $\gamma(t)$.

Bemerkung 19.8. (a) In Doppelpunkten $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ kann γ mehrere Tangenten besitzen, die verschiedene Zeitpunkten t_j entsprechen.

(b) In Zeitpunkten t , so dass $\dot{\gamma}(t)$ aber $\partial_\pm \gamma(t)$ existieren, kann γ verschiedene linksseitige und rechtsseitige Tangenteneinheitsvektoren haben.

Bemerkung 19.9 (Verbindung zwischen beiden Typen der Wegintegrale).

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise- C^1 Weg mit *endlich vielen Doppelpunkten* und *endlich vielen Zeitpunkten t mit der Eigenschaft $\dot{\gamma}(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$* . Sei $\mathbf{f} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathbb{R}^n -wertige Funktion mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Wegintegrale bezüglich des vektoriellen Bogenelements $\int_\gamma \mathbf{f} d\mathbf{x}$ und bezüglich der Bogenlänge $\int_\gamma g ds$ sind verbunden durch

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \mathbf{T}_\gamma(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_\gamma g(\mathbf{x}) ds,$$

wobei $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_\gamma(\gamma^{-1}(\mathbf{x})) \rangle_{\mathbb{R}^n}$ für alle \mathbf{x} ohne möglicherweise endlich viele Punkte \mathbf{x} wohldefiniert ist und $g(\gamma(\cdot)) \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Deswegen sind *Eigenschaften von Wegintegralen beider Type verbunden* (aber manchmal nichttrivial verbunden).

Definition 19.8 (C^q -Parameterwechsel).

Seien I_1 und I_2 Intervalle in \mathbb{R} .

(a) Man sagt, dass eine Abbildung $\psi : I_1 \rightarrow I_2$ ein *Homöomorphismus* ist, und schreibt $\psi \in \text{Diff}^0(I_1)$, wenn ψ eine bijektive stetige Abbildung ist und die umgekehrte Abbildung $\varphi = \psi^{-1}$ auch stetig ist. (Dann ist $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ auch ein Homöomorphismus).

(b) Man sagt, dass $\psi : I_1 \rightarrow I_2$ ein C^1 -*Diffeomorphismus* ist und schreibt $\psi \in \text{Diff}^1(I_1)$, wenn $\psi \in \text{Diff}^0(I_1)$, $\psi \in C^1(I_1)$ und $\varphi := \psi^{-1} \in C^1(I_2)$. (Dann gilt auch $\varphi \in \text{Diff}^1(I_2)$).

- (c) Sei $q = 0$ oder $q = 1$. Man sagt, dass $\psi : I_1 \rightarrow I_2$ ein (*orientierungserhaltender*) C^q -Parameterwechsel ist, wenn $\psi \in \text{Diff}^q(I_1)$ und ψ strikt wachsend sind. (Dann ist $\varphi = \psi^{-1}$ auch ein C^q -Parameterwechsel). Eine Funktion $\psi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*monoton*) *wachsend*, falls $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$ für alle $t_1 < t_2$ gilt.

Definition 19.9 (C^q -Umparametrisierung).

Sei $q = 0$ oder $q = 1$. Ein Weg $\xi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (*orientierungserhaltende*) C^q -Umparametrisierung vom Weg $\gamma : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn es einen orientierungserhaltenden C^q -Parameterwechsel $\psi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ gibt mit $\xi = \gamma \circ \psi$. In diesem Fall sagen wir, dass ξ und γ *äquivalente C^q -Parametrisierungen* sind, und schreiben $\xi \sim \gamma$.

Satz 19.3.

Seien $\gamma : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\xi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege in \mathbb{R}^n , so dass $\xi \sim \gamma$. Dann:

- (a) $\mathfrak{L}(\gamma) = \mathfrak{L}(\xi)$ und $\text{Spur } \gamma = \text{Spur } \xi$.
- (b) $\gamma(a_1) = \xi(a_2)$, $\gamma(b_1) = \xi(b_2)$.
- (c) γ ist *stückweise- C^1* genau dann, wenn ξ *stückweise- C^1* ist.
- (d) Seien γ und ξ *stückweise- C^1* Wege. Dann ist $g : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit der Eigenschaft $g \circ \gamma \in \mathcal{R}([a_1, b_1], \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn $g \circ \xi \in \mathcal{R}([a_2, b_2], \mathbb{R}^m)$. In diesem Fall, $\int_{\gamma} g ds = \int_{\xi} g ds$.
- (e) Seien γ und ξ *stückweise- C^1* Wege. Falls $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a_1, b_1], \mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{f} \circ \xi \in \mathcal{R}([a_2, b_2], \mathbb{R}^n)$ für ein \mathbb{R}^n -wertiges Vektorfeld $\mathbf{f} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann gilt $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\xi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$.

Aufgabe 19.2.

Seien I_1 und I_2 Intervalle in \mathbb{R} , so dass $\exists \psi \in \text{Diff}^0(I_1, I_2)$. Dann:

- I_1 ist genau dann kompakt, wenn I_2 kompakt ist.
- I_1 ist genau dann offen, wenn I_2 offen ist.

Bemerkung 19.10.

Um zu sagen, dass γ und ξ äquivalente C^1 -Parametrisierungen sind, braucht man die zusätzliche Bedingungen, dass γ und ξ C^1 -Wege sind. Nämlich, sei $\gamma : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\xi : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege in \mathbb{R}^n , so dass $\gamma \in C^1[a_1, b_1]$ und $\xi = \gamma \circ \psi$ mit einem orientierungserhaltenden C^1 -Parameterwechsel $\psi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$. Dann $\xi \in C^1[a_2, b_2]$ und man sagt, dass ξ und γ *äquivalente C^1 -Parametrisierungen* sind. Die entsprechende Bezeichnung ist die selbe Bezeichnung $\xi \sim \gamma$, aber jetzt $\xi \sim \gamma$ im Sinne der C^1 -Parametrisierungen (im C^1 -Sinne).

Bemerkung 19.11 (Bezeichnung mit der Pfaffschen Form/Differentialform vom Grad 1). Für das Wegintegral bezüglich des vektoriellen Bogenelements $d\mathbf{x} = \dot{\gamma} dt$ gibt es noch eine

Bezeichnung:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(t) \gamma'_j(t) dt,$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ und

$$d\mathbf{x}(t) = d\gamma(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))^{\top} dt.$$

Beispiel 19.3.

Seien $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^{\top}$, $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\xi(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))^{\top}, t \in [-1, 1].$$

- (a) Dann sind γ und ξ geschlossene C^1 -Wege (Schleifen), und $\gamma \sim \xi$ als C^1 -Parametrisierungen des Einheitskreises

$$S^1 = \partial K_1(0) = \text{Spur } \gamma = \text{Spur } \xi \subset \mathbb{R}^2.$$

- (b) Sei jetzt $\zeta(t) = (\cos(\pi t^3), \sin(\pi t^3))^{\top}$, $t \in [-1, 1]$. ζ ist ein geschlossener C^1 -Weg, der $S^1 = \text{Spur } \zeta$ parametrisiert, $\zeta \not\sim \xi$ im Sinne von C^1 -Parametrisierungen, aber $\zeta \sim \xi$ im Sinne von C^0 -Parametrisierungen. In der Tat, $\zeta(t) = \xi(\psi(t))$ mit $\psi(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$, $\psi : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $\psi \in C^1[-1, 1]$, aber $\varphi = \psi^{-1} \in C[-1, 1] \setminus C^1[-1, 1]$, weil $\varphi(t) = t^{1/3}$ an $t_0 = 0$ nicht differenzierbar ist. Wir benutzen hier, dass γ und ξ nur einen einzigen Doppelpunkt $(-1, 0)$ haben. Und so ist die C^0 -Umparametrisierung ψ eindeutig.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, \sin t)^{\top}, t \in [-\pi, \pi], \\ \xi(t) &= (\cos(\pi t), \sin(\pi t))^{\top}, t \in [-1, 1], \\ \zeta(t) &= (\cos(\pi t^3), \sin(\pi t^3))^{\top}, t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

- (c) $\zeta \not\sim \gamma$ im Sinne von C^1 -Parametrisierungen, aber $\zeta \sim \gamma$ im Sinne von C^0 -Parametrisierungen. Das kann man in zwei Weisen zeigen.

(c.1) Man kann das direkt zeigen: $\zeta(t) = \gamma(\sigma(t))$ mit $\sigma(t) = \pi t^3$, $\sigma \in C^1([-1, 1], [-\pi, \pi])$ und ist bijektiv. Aber $\frac{d\sigma(0)}{dt} = 0$, und so ist σ^{-1} an der Stelle $\sigma(0) = 0$ nicht differenzierbar. Also $\sigma \notin \text{Diff}^1([-1, 1], [-\pi, \pi])$, obwohl $\sigma \in \text{Diff}^0([-1, 1], [-\pi, \pi])$.

(c.2) Der zweite Beweis: \sim im Sinne der C^1 -Parametrisierungen ist eine *Äquivalenzrelation*, und \sim im Sinne der C^0 -Parametrisierungen ist eine *Äquivalenzrelation*. Also, $\zeta \sim \xi$ und $\xi \sim \gamma$ im C^0 -Sinne $\Rightarrow \zeta \sim \gamma$ im C^0 -Sinne. Und $\zeta \not\sim \xi$ und $\xi \sim \gamma$ im C^1 -Sinne $\Rightarrow \zeta \not\sim \gamma$ im C^1 -Sinne.

Definition 19.10 (Äquivalenzklassen).

Sei \sim eine abstrakte Äquivalenzrelation, die auf einer abstrakten Menge X definiert wird.

- (a) Dann definiert man für jedes $x \in X$ die *Äquivalenzklasse* $[x]$ von x (bezüglich \sim) als $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$.
- (b) Jedes $y \in [x]$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]$.
- (c) Man bezeichnet X/\sim als die Familie aller Äquivalenzklassen bezüglich \sim .

Bemerkung 19.12. (a) $y \in [x] \Rightarrow [y] = [x]$.

(b) x ist offenbar ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$.

(c) $X = \bigcup_{x \in X} [x] = \bigcup_{\alpha \in X/\sim} \alpha$ und für jedes y gibt es genau eine Äquivalenzklasse $\alpha \in X/\sim$, so dass y ein Repräsentant von dieser Äquivalenzklasse α ist. Also $X = \bigcup_{\alpha \in X/\sim} \alpha$ ist eine Zerlegung von X in disjunkte Äquivalenzklassen.

Satz 19.4. (a) Die Äquivalenz \sim im Sinne der C^1 -Parametrisierungen ist eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller Wege.

(b) Die Äquivalenz \sim im Sinne der C^0 -Parametrisierungen ist eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller Wege.

Bemerkung 19.13.

Die entsprechende Äquivalenzklassen $\Gamma = [\gamma]$ von C^1 -Wegen und bzw. (C^0 -)Wegen heißen *kompakte C^1 -Kurven*, bzw. *kompakte (C^0 -)Kurven* (s. [AE2]).

Sie heißen kompakte Kurven, weil die Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf kompakten Intervallen $[a, b]$ definiert sind. (Das impliziert auch, dass $\text{Spur } \Gamma := \text{Spur } \gamma$ eine kompakte Menge ist.)

Gibt es für eine kompakte Kurve $\Gamma = [\gamma]$ eine besonders bequeme Parametrisierung?

Definition 19.11 (Parametrisierung nach Bogenlänge).

Ist der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Parametrisierung einer kompakten C^1 -Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit der Eigenschaft

$$|\dot{\gamma}(t)| = 1 \forall t \in [a, b],$$

sagt man, dass die Kurve Γ durch γ nach Bogenlänge parametrisiert wird.

Bemerkung 19.14 (Existenz der Parametrisierung nach Bogenlänge, [AE2]). (a) Ein C^1 -Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

(b) Jeder regulärer C^1 -Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat eine C^1 -Umparametrisierung nach der Bogenlänge. In der Tat, sei $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$ die Länge von Teilweg $\gamma|_{[a,t]}$. Dann definiert $\varphi : t \rightarrow s(t)$ ein C^1 -Diffeomorphismus $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, \mathfrak{L}(\gamma)]$, $\psi = \varphi^{-1}$ ist der umkehrte C^1 -Diffeomorphismus auf $[0, \mathfrak{L}(\gamma)]$, und ist $\xi(s) = \gamma(\psi(s))$ eine

C^1 -Umparametrisierung von γ nach Bogenlänge. Die neue Variable $s = s(t)$ hat die Ableitung $s'(t) = |\dot{\gamma}(t)|$. Das erklärt die Bezeichnung $ds = |\dot{\gamma}(t)|dt$ im Wegintegral bezüglich der Bogenlänge:

$$\int_{\gamma} g \, ds = \int_0^{\mathfrak{L}(\gamma)} g(\xi(s)) \, ds = \int_a^b g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt.$$

Bemerkung 19.15. (a) Man kann ähnlich allgemeinere (nicht obligatorisch kompakte) Kurven $\Gamma = [\gamma]$ definieren, wenn man die stetige Abbildungen $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf *allgemeineren Intervallen* $J \subset \mathbb{R}$ betrachtet (ohne die Bedingung, dass J kompakt ist, s. [AE2]).

(b) C^q -Wege, C^q -Kurven, und C^q -Umparametrisierungen $\psi \in \text{Diff}^q(J)$ kann man für beliebige $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachte (s. Vorlesung 2 für die Definition von C^q -Abbildungen und [AE2]). Z.B. sind

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^\top, t \in [-\pi, \pi],$$

und

$$\xi(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))^\top, t \in [-1, 1],$$

äquivalente C^q -Parametrisierungen $\forall q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Jede Differenzierbarkeitsklasse C^q entspricht einer *eigenen Äquivalenzrelation* \sim .

Beispiel 19.4.

Seien

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^\top, t \in [-\pi, \pi],$$

$$\xi(t) = (\cos(2t), \sin(2t))^\top, t \in [-\pi, \pi],$$

$$\zeta(t) = (\cos(-t), \sin(-t))^\top, t \in [-\pi, \pi].$$

(a) Dann $\gamma \not\sim \xi$ im C^0 -Sinne (und folglich, *in beliebigem C^q -Sinne*), weil jeder Punkt von der Spur ξ ein Doppelpunkt ist, und Spur γ nur einen einzigen Doppelpunkt $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi)$ hat.

(b) Spur ζ hat auch nur einen einzigen Doppelpunkt $\zeta(-\pi) = \zeta(\pi)$ und Spur $\zeta = \text{Spur } \gamma$. Aber $\zeta \not\sim \gamma$, weil $\zeta(t) = \gamma(\psi(t))$ mit $\psi(t) = -t$. Eigentlich $\psi \in \text{Diff}^q([-\pi, \pi], [-\pi, \pi]) \forall q \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, aber ψ ist *keine* orientierungserhaltende C^q -Umparametrisierung, weil ψ eine *orientierungsumkehrende C^q -Umparametrisierung* ist.

Definition 19.12 (orientierungsumkehrender C^q -Parameterwechsel).

Man sagt, dass $\psi : I_1 \rightarrow I_2$ *orientierungsumkehrender C^q -Parameterwechsel* ist, wenn $\psi \in \text{Diff}^q(I_1)$ und ψ *strikt fallend* sind. (Dann ist $\varphi = \psi^{-1}$ auch ein orientierungsumkehrender C^q -Parameterwechsel).

Satz 19.5 (Wegintegrale mit orientierungsumkehrendem C^q -Parameterwechsel).

Sei $\gamma : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise C^1 -Weg. Sei $\psi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ ein orientierungsumkehrender C^1 -Parameterwechsel und $\xi = \gamma \circ \psi$. Dann:

(a) ξ ist ein stückweise- C^1 Weg.

(b) Eine Funktion $g : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitzt die Eigenschaft $g \circ \gamma \in \mathcal{R}([a_1, b_1], \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn $g \circ \xi \in \mathcal{R}([a_2, b_2], \mathbb{R}^m)$. In diesem Fall,

$$\int_{\gamma} g ds = \int_{\xi} g ds.$$

(c) Eine Funktion $\mathbf{f} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Eigenschaft $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a_1, b_1], \mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $\mathbf{f} \circ \xi \in \mathcal{R}([a_2, b_2], \mathbb{R}^n)$. In diesem Fall,

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\xi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

Der Beweis folgt aus der 1-dim. Substitutionregel (Aufgabe).

19.5 Andere Eigenschaften von Wegintegralen.

Seien $\gamma^1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma^2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege (hier 1 und 2 in γ^1, γ^2 sind Indizes).

Definition 19.13 (Konkatenation der Wege).

Wenn $\gamma^1(b_1) = \gamma^2(a_2)$ entsteht ein Weg $\gamma := \gamma^1 \oplus \gamma^2$ durch die stetige Funktion

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \gamma^1(\tau - c_1), & \tau \in [a_1 + c_1, b_1 + c_1] \\ \gamma^2(\tau - c_2), & \tau \in [a_2 + c_2, b_2 + c_2] \end{cases}$$

definiert, wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist und $c_2 = c_1 + b_1 - a_2$. Der Weg $\gamma := \gamma^1 \oplus \gamma^2$ heißt *Konkatenation/Aneinanderreihung*.

Bemerkung 19.16.

Ähnlich kann man

$$\gamma^1 \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 := (\gamma^1 \oplus \gamma^2) \oplus \gamma^3 = \gamma^1 \oplus (\gamma^2 \oplus \gamma^3)$$

definieren, und auch

$$\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^k = \bigoplus_{j=1}^k \gamma^j$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Satz 19.6 (Eigenschaften der Konkatenation).

Seien Wege $\gamma^j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$, so dass $\gamma = \gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^k$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, wohldefiniert ist.

(a) $\text{Spur}(\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^k) = \text{Spur}(\gamma^1) \cup \dots \cup \text{Spur}(\gamma^k)$;

(b) $\mathcal{L}(\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^k) = \mathcal{L}(\gamma^1) + \dots + \mathcal{L}(\gamma^k)$;

(c) Falls γ^j stückweise- C^1 Wege sind, ist γ auch ein stückweise- C^1 -Weg.

(d) Seien γ^j stückweise- C^1 Wege und $f \circ \gamma^j \in \mathcal{R}([a_j, b_j], \mathbb{R}^m)$, $j = 1, \dots, k$. Dann $f \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$ und

$$\int_{\gamma} f \, ds = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma^j} f \, ds.$$

(e) Seien γ^j stückweise- C^1 -Wege und $\mathbf{f} \circ \gamma^j \in \mathcal{R}([a_j, b_j], \mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, k$. Dann $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma^j} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

Satz 19.7.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise C^1 -Weg. Seien Funktionen $f : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass $f \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$ und $g \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$, $j = 1, 2$. Dann:

(a) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{\gamma} (\alpha g + \beta f) \, ds = \alpha \int_{\gamma} g \, ds + \beta \int_{\gamma} f \, ds$ (Linearität).

(b) $|\int_{\gamma} g \, ds| \leq \int_{\gamma} |g| \, ds \leq \mathcal{L}(\gamma) \sup_{x \in \text{Spur } \gamma} |g(x)|$ (Hauptabschätzung).

Satz 19.8.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise C^1 -Weg. Seien Funktionen $\mathbf{f} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass $\mathbf{f} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$ und $\mathbf{g} \circ \gamma \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^m)$, $j = 1, 2$. Dann:

(a) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\gamma} (\alpha \mathbf{g} + \beta \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

(Linearität).

(b)

$$|\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}| \leq \int_{\gamma} |\mathbf{f}| \, ds \leq \mathcal{L}(\gamma) \sup_{x \in \text{Spur } \gamma} |\mathbf{f}(x)|$$

(Hauptabschätzung).

20 C^q -Funktionen. Bewegung in einem Kraftfeld. Gradientenfelder, Stammfunktionen und Integrabilitätsbedingungen.

20.1 C^q -Funktionen und partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Seien $1 \leq j_1, j_2, \dots \leq n$ (möglicherweise $j_k = j_\ell$ für manche $k \neq \ell$).

Definition 20.1 (partielle Ableitung 2-ter Ordnung).

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine in Ω partiell differenzierbare Funktion.

- (a) Eine *partielle Ableitung 2-ter Ordnung* $\partial_{j_2} \partial_{j_1} f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(a)$ an der Stelle $a \in \Omega$ definiert man als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_{j_2}}(a),$$

wobei $g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(x)$, falls die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x_{j_2}}(a)$ an der Stelle a existiert.

- (b) Falls die partielle Ableitung 2-ter Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(x)$ für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \leq j_1, j_2 \leq n$ existieren, sagt man, dass f *2-mal partiell differenzierbar in Ω* ist.

Definition 20.2 (partielle Ableitung 3-ter Ordnung).

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine in Ω 2-mal partiell differenzierbare Funktion.

- (a) Eine *partielle Ableitung 3-ter Ordnung* $\partial_{j_3} \partial_{j_2} \partial_{j_1} f(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_3} \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(a)$ an $a \in \Omega$ definiert man als

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_3} \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_{j_3}}(a),$$

wobei $g(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(x)$, falls die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x_{j_3}}(a)$ existiert.

- (b) Falls die partielle Ableitung 3-ter Ordnung $\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_3} \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}$ für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq n$ existieren, sagt man, dass f *3-mal partiell differenzierbar in Ω* ist.

Und so weiter ... bis zur partiellen Ableitungen q -ter Ordnung, $q \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 20.1. (a) Es gibt Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f \notin C^2(\Omega, \mathbb{R})$, aber f 2-mal partiell differenzierbar in Ω ist (s. Beispiel 20.1).

- (b) Die q -mal partielle Differenzierbarkeit ist *nicht hinreichend für mehrere Anwendungen*, wenn wir *keine Information über die Stetigkeit* von partiellen Ableitungen der entsprechenden Ordnungen haben.

Theorem 20.1.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann q -mal stetig differenzierbar (das heißt $f \in C^q(\Omega, \mathbb{R})$), wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ q -mal partiell differenzierbar in Ω
- und alle partiellen Ableitungen bis Ordnung q einschließlich sind stetig auf Ω .

Theorem 20.2 (Satz von H.A. Schwarz).

Sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(x)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \leq j_1, j_2 \leq n$.

Bemerkung 20.2. (a) Der Satz von H.A. Schwarz impliziert den folgenden Satz:

Seien $q \in \mathbb{N}$ und $f \in C^q(\Omega, \mathbb{R})$. Wenn $k \leq q$, sind die Werte der k -ten partiellen Ableitungen unabhängig von der Ordnung, in welcher wir k sukzessive partielle Ableitungen 1-ter Ordnung nehmen.

Z.B., falls $f \in C^4(\Omega, \mathbb{R})$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_3} \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(x)$, für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq n$.

(b) $f \in C^{q+1}(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^q(\Omega, \mathbb{R})$, das heißt, $C^{q+1}(\Omega, \mathbb{R}) \subset C^q(\Omega, \mathbb{R})$.

(c) $f \in C^q(\Omega, \mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn für alle Komponenten f_i von f alle partielle Ableitungen bis zur Ordnung q einschließlich stetig auf Ω sind.

Wir geben ein *Gegenbeispiel* zum "Pseudosatz von H.A. Schwarz ohne die Stetigkeit der partiellen Ableitungen".

Beispiel 20.1 (2-mal partiell differenzierbare Funktion, die keine C^2 -Funkt. ist).

Betrachten wir auf \mathbb{R}^2 die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

Dann ist die Funktion 2-mal partiell differenzierbar an jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Aber $\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = -1 \neq 1 = \partial_1 \partial_2 f(0, 0)$.

Mit dem Satz von H.A. Schwarz folgt, dass $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, das heißt, f ist keine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Tatsächlich $f \notin C^2(K_r(0_{\mathbb{R}^2}))$ für beliebige $r > 0$.

20.2 Vektorfelder auf Gebieten. Kraftfelder und Arbeit.

Definition 20.3 (Gebiet).

Eine nichtleere offene wegzusammenhängende Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet* (in \mathbb{R}^n).

Bemerkung 20.3 (Umformulierung der Definition vom Gebiet).

Th 10.2 sagt, dass eine *offene* Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Ω zusammenhängend ist. Das liefert die äquivalente Umformulierung der Definition vom Gebiet:

Eine nichtleere offene *zusammenhängende* Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet (in \mathbb{R}^n).

Aufgabe 20.1.

Konstruieren sie ein Beispiel einer offenen Menge, die kein Gebiet ist.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. In dieser Vorlesung verstehen wir Vektorfelde \mathbf{f} in Ω als \mathbb{R}^n -wertige Funktionen auf G . *Kraftfelder* \mathbf{f} sind wichtige Beispiele von Vektorfeldern in $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$. Nehmen wir an, dass ein Massenpunkt P sich unter dem Einfluß des Kraftfelds \mathbf{f} bewegt. Das Integral

$$A = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

bezüglich des vektoriellen Bogenelement stellt die *Arbeit* A dar, die das Feld bei der Verschiebung vom Massenpunkt P längs des Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ leistet.

Beispiel 20.2.

Sei das Kraftfeld \mathbf{f} *konstant*, das heißt, $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}_0 \forall x \in G$. (Z.B., kann man das *Schwerefeld* $(0, 0, -g)^\top$ im Gebiet $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ betrachten). Dann *hängt* für ein stückweise- C^1 Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ die geleistete Arbeit

$$A = \int_{\gamma} \mathbf{f}_0 \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{f}_0 \cdot (\gamma(b) - \gamma(a))$$

nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab (das konstante Kraftfeld ist fixiert).

Das sieht man so: Sei $\mathcal{Z} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ eine Zerlegung vom $[a, b]$. Betrachten wir eine beliebige Riemann-Summe

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{Z}} &= \sum_{j=1}^k \mathbf{f}(\gamma(\xi_k)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) = \left\langle \mathbf{f}_0, \sum_{j=1}^k (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \langle \mathbf{f}_0, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

(*Teleskopsumme*). Also,

$$A = \int_{\gamma} \mathbf{f}_0 \cdot d\mathbf{x} := \lim_{\Delta_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0} S_{\mathcal{Z}} = \mathbf{f}_0 \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

20.3 Wegunabhängigkeit, Gradientfelder und Stammfunktionen.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $\mathbf{f} \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

Definition 20.4 (Wegunabhängigkeit der “vektoriellen” Wegintegrale).

Man sagt, dass Wegintegrale von \mathbf{f}

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

wegunabhängig sind, wenn für jede zwei stückweise- C^1 Wege $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow G$, $j = 1, 2$, mit gleichem Anfangspunkt $p = \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ und gleichem Endpunkt $q = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

(das heißt, wenn $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ abhängt). In

diesem Fall schreibt man $\int_p^q \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ statt $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ für Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit $p = \gamma(a)$ und $q = \gamma(b)$.

Definition 20.5 (Gradientenfeld/Potentialfeld).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Gradientenfeld*, wenn eine \mathbb{R} -wertige Funktion $U \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\nabla U = \mathbf{f}$ existiert (das heißt, $\mathbf{f}(x) = \nabla U = \mathbf{grad} U = (\partial_1 U(x), \dots, \partial_n U(x))^T \forall x \in G$).

In diesem Fall heißt U *Stammfunktion* in G von \mathbf{f} , und $V = -U$ heißt *Potential* von \mathbf{f} .

Bemerkung 20.4.

Manchmal heißt in mathematischen Büchern U Potential statt $(-U)$. Gradientenfelder \mathbf{f} nennt man auch manchmal konservative Felder oder Potentialfelder. Stammfunktionen U werden manchmal auch Potentialfunktionen genannt [H2].

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $\mathbf{f} \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

Theorem 20.3. (a) Wegintegrale $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ sind genau dann im Gebiet G wegunabhängig, wenn \mathbf{f} ein Gradientenfeld ist.

(b) Falls U eine Stammfunktion in G vom Gradientenfeld \mathbf{f} ist, gilt für jeden stückweise- C^1 Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, dass

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = U|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

(c) Falls Wegintegrale $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ auf G wegunabhängig sind, ist für jeden fixierten Anfangspunkt p die Funktion $U(\tilde{x}) = \int_p^{\tilde{x}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ von der Variable $\tilde{x} \in G$ eine Stammfunktion von \mathbf{f} .

Offenbar, (b) + (c) \Rightarrow (a).

Bemerkung 20.5 (Erklärungen zum Th. 20.3).(a) Th. 20.3 ist die n-dimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes (der Differential- und Integral- Rechnung).

(b) Der Beweis von Th. 20.3 (b) folgt aus *dem Hauptsatz und der Kettenregel*.

Sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$ und sei U eine Stammfunktion von \mathbf{f} . Da

$$\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^n \partial_j U(\gamma(t)) \gamma'_j(t) = \langle \nabla U(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

gilt

$$\int_a^b \langle \mathbf{f}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(\gamma(t)) dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

(c) Für den Beweis von Th. 20.3 (c) berechnet man alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \int_p^{\tilde{x}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ mit Hilfe des Hauptsatzes s. z.B. [FK1].

Aus Th. 20.3 (c) folgt

Korollar 20.1.

Wenn U_1 und U_2 zwei Stammfunktionen vom Vektorfeld \mathbf{f} in einem Gebiet G sind, dann existiert eine Konstante C , so dass $U_2(x) = U_1(x) + C \forall x \in G$.

Aus Th. 20.3 folgt

Korollar 20.2.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Wegintegrale $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ sind im Gebiet G wegunabhängig.

(b) \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld.

(c) Für jeden geschlossenen stückweise- C^1 Weg ξ gilt

$$\int_{\xi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

20.4 Integrabilitätsbedingungen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^\top$ ein Vektorfeld in Ω .

Gibt es eine Möglichkeit zu überprüfen, ob \mathbf{f} ein Gradientenfeld ist?

Anders gesagt, gibt es Lösungen U zur partiellen Differentialgleichung $\nabla U(x) = \mathbf{f}(x) \forall x \in \Omega$?

Satz 20.1 (notwendige Bedingungen für Gradientenfelder).

Wenn $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n.$$

Der Beweis folgt aus dem Satz von H.A. Schwarz.

Bemerkung 20.6 (Integrabilitätsbedingungen für Gradientenfelder).

Falls $k = j$ ist die Bedingung $\frac{\partial f_k}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$ trivial und immer erfüllt. Die Familie aller nichttrivialen notwendigen Bedingungen im Satz 20.1

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad j \neq k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n,$$

heißt die *Integrabilitätsbedingung*.

Bemerkung 20.7 (rotationsfrei Felder).

Im Fall $n = 3$ (und auch $n = 2$) heißt ein Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, *rotationsfrei/wirbelfrei*. In der Tat gilt, dass die Integrabilitätsbedingungen äquivalent ist zu $0 = \mathbf{rot} \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \Omega$, wobei

$$\mathbf{rot} \mathbf{f} := \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_1 & f_1 \\ \mathbf{e}_2 & \partial_2 & f_2 \\ \mathbf{e}_3 & \partial_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

die Rotation des Feldes \mathbf{f} ist.

Bemerkung 20.8.

Sei \mathbf{f} ein C^1 -Vektorfeld in einem Gebiet G . Generell sind die Integrabilitätsbedingungen *nicht hinreichend* für die Existenz einer Stammfunktion in G .

Beispiel 20.3 (wirbelfreies Feld in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, das kein Gradientenfeld ist).

Wir betrachten das \mathbb{R}^2 -Vektorfeld

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1} \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2} \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2)$$

im Gebiet $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

(a) Die Integrabilitätsbedingungen für \mathbf{f} sind erfüllt.

(b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow G, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Dann

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot dx = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos(t) \cos(t)) dt = 2\pi \neq 0.$$

- (c) γ ist ein geschlossener C^1 -Weg. Korollar 20.2 $\Rightarrow \mathbf{f}$ ist kein Gradientenfeld in G .
- (d) Aber in einer beliebigen 2-dim Kugel $K_r(p)$, so dass $p \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ und $K_r(p) \subset G$, ist \mathbf{f} ein Gradientenfeld (Aufgabe). Hinweis: man kann das Poincaré-Lemma benutzen.

Theorem 20.4 (Poincaré-Lemma).

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei $\mathbf{f} \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Die Integrabilitätsbedingungen für \mathbf{f} sind erfüllt.
- (b) \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld.

Das Poincaré-Lemma + Beispiel 20.3 \Rightarrow

Beispiel 20.4.(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

- (b) $K_R(0_{\mathbb{R}^2}) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend $\forall R > 0$. Für $R > 1$ folgt es direkt aus Beispiel 20.3. Für $0 < R < 1$ modifiziert man Beispiel 20.3 mit einem Kreis-Weg $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, der den Radius $r < R$ hat.

Theorem 20.5.

Sei $n = 2$. Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn der Rand ∂G zusammenhängend ist.

Bemerkung 20.9. (a) Für nicht beschränkte Gebiete in \mathbb{R}^2 ist dieses Theorem allgemein nicht wahr.

Gegenbeispiel: das nicht einfach zusammenhängende Gebiet $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ hat den zusammenhängenden Rand $\partial G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

- (b) Es ist möglich dieses Theorem für Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu modifizieren.

20.5 Einfach zusammenhängende Mengen und Homotopie.

Sei (X, d_X) ein wegzusammenhängender metrischer Raum, so dass $X \neq \emptyset$. Geschlossene Wege in X heißen *Schleifen*. Das bedeutet, $\gamma \in C([a, b], X)$ ist eine Schleife, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition 20.6.

Zwei Schleifen $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow X$ und $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ heißen *homotop*, wenn es eine Abbildung $H \in C([a, b] \times [0, 1], X)$ mit der folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) $H(t, 0) = \gamma_0(t), H(t, 1) = \gamma_1(t) \forall t \in [a, b]$;
- (b) $\gamma_s(t) = H(t, s), t \in [a, b]$, definiert eine Schleife $\gamma_s : [a, b] \rightarrow X$ für alle $s \in [0, 1]$.

Die Abbildung H heißt (Schleifen-)Homotopie.

Definition 20.7 (nullhomotope Schleifen). (a) Eine Schleife $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt *Punktschleife*, wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine konstante Funktion ist, das heißt, wenn $\gamma(t) = z \in X \forall t \in [a, b]$.

In diesem Fall bezeichnen wir diese Punktschleife als $\gamma^{\{z\}}$.

(b) Jede Schleife in X , die zu einer Punktschleife homotop ist, heißt *nullhomotop*.

Definition 20.8 (einfach zusammenhängende Räume und Mengen). (a) Ein wegzusammenhängender metrischer Raum (X, d_X) heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede Schleife in X nullhomotop ist.

(b) Eine wegzusammenhängende Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn M einfach zusammenhängend als der induzierte metrische Raum (M, d_X) ist.

Bemerkung 20.10 (einfach zusammenhängende Gebiete).

Also, ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede Schleife $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow G$ zu einer Punktschleife $\gamma^{\{z\}}$ mit $z \in G$ homotop ist mit einer Homotopie $H \in C([a, b] \times [0, 1], G)$.

Hier betrachten wir den induzierten metrischen Unterraum $(G, d_{\mathbb{R}^n})$ vom normierten Raum $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

21 Satz von der impliziten Funktion. Flächestücke, Flächeninhalt und Flächenintegrale.

21.1 Zwei Weisen eine Fläche darzustellen.

Beispiel 21.1.

(a) Betrachten wir die Einheitssphäre im 3-dim. Vektorraum \mathbb{R}^3

$$S^2 = \partial K_1(0_{\mathbb{R}^3}) = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 = 1\},$$

die eine 2-dim. Fläche (die 2-dim. Mannigfaltigkeit) ist. Man kann sagen, dass die Gleichung

$$|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 = 1 \tag{21.1}$$

die Einheitssphäre S^2 definiert.

Es gibt eine andere Möglichkeit ein *Flächenstück* von S^2 im einer R -Umgebung $K_R(\mathbf{e}_3) \subset \mathbb{R}^3$ vom Punkt $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \in S^2$ zu beschreiben, wenn der Radius R hinreichend klein ist.

(b) Es gibt eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^2$ von $0_{\mathbb{R}^2}$, so dass

$$S^2 \cap K_R(\mathbf{e}_3) = \{\boldsymbol{\xi} \in K_R(\mathbf{e}_3) : (\xi_1, \xi_2) \in W, \xi_3 = (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{1/2}\}.$$

Das gilt z.B. sofern $R \leq \sqrt{2}$ und $W = K_r(0_{\mathbb{R}^2})$ mit $r = R\sqrt{1 - R^2/4}$.

Wir haben das lokale Flächenstück $S^2 \cap K_R(\mathbf{e}_3)$ von S^2 in der Nähe von $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ als Graph $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$ der Funktion

$$g(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}$$

dargestellt. Oder man kann sagen, dass die Funktion $g(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}$ die *Auflösung* der Gleichung (21.1) nach ξ_3 (als Funktion von ξ_1 und ξ_2) *lokal in der Nähe* von \mathbf{e}_3 ist.

Man kann auch sagen, dass die Funktion g durch (21.1) lokal in der Nähe von \mathbf{e}_3 *implizit definiert* ist.

Es ist möglich die Gleichung (21.1) lokal in der Nähe von anderen Punkten $\mathbf{p} \in S^2$ aufzulösen, aber *nicht für alle Punkten* $\mathbf{p} \in S^2$.

(c) Sei \mathbf{p} ein Punkt vom Kreis $Q = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1, \xi_3 = 0\}$. Dann gibt es für beliebige Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von \mathbf{p} Punkte $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2 \cap U$ mit $\xi_3 \neq 0$, so dass auch $(\xi_1, \xi_2, -\xi_3) \in S^2 \cap U$. Also ist die eindeutige lokale Auflösung von (21.1) *nach* ξ_3 in der Nähe von solchen \mathbf{p} *unmöglich*. Man kann *nicht sagen*, dass (21.1) lokal in der Nähe von \mathbf{p} eine Funktion von ξ_1 und ξ_2 implizit definiert.

(d) Doch für *beliebige* Punkt \mathbf{p} vom Kreis Q gibt es eine eindeutige lokale Auflösung von (21.1) entweder nach ξ_2 , oder nach ξ_1 .

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Wie und unter welchen Bedingungen können wir eine Gleichung

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

mit $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $n < N$ in der Nähe von $\boldsymbol{\xi}^0 \in \Omega$ *nach Variablen auflösen* und die entsprechende implizite Funktion *von den restlichen* $N - n$ Variablen definieren?

Klar, für stetige Funktionen \mathbf{f} *soll der Punkt* $\boldsymbol{\xi}^0$ *selbst ein Lösung sein* (andererseits impliziert $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, dass $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ in einer kleinen Umgebung von $\boldsymbol{\xi}^0$, und es gibt keine Lösungen in dieser Umgebung). Für C^1 -Funktionen ist die Antwort mit der *Ableitung/Jacobimatrix* verbunden und wird durch den *Satz von der impliziten Funktion* geliefert.

21.2 Satz von der impliziten Funktion.

Die Hauptidee ist, dass die Gleichung $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ in der Nähe von ‘guten Punkten’ als $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ aufgelöst werden kann, wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ mit $n + m = N$ eine Sortierung der Variablen ξ_1, \dots, ξ_N nach zwei Typen liefert.

Diese Auflösung ist nach Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ bezüglich Variablen $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Die ‘guten Punkte’ (oder ‘die gute Sortierung’ nach den Variablen \mathbf{x} und \mathbf{y}) wird durch die folgende *Bedingung* bestimmt.

Man ordnet ξ als $\xi = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ um und teilt die *Jacobimatrix* $\mathfrak{A} = \tilde{D}f(\xi^0)$ in zwei Teile:

- Ein Teil $\mathfrak{A}_x = \tilde{D}_x(\xi^0)$ entspricht den partiellen Ableitungen bezüglich der Variablen x_1, \dots, x_n ,
- Der andere Teil $\mathfrak{A}_y = \tilde{D}_y(\xi^0)$ entspricht den partiellen Ableitungen bezüglich der Variablen y_1, \dots, y_m .

Die *Auflösbarkeitsbedingung* für $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ ist, dass man die *lineare Approximation* $\mathfrak{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ eindeutig nach $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ bezüglich $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$ auflösen kann. Das passiert, wenn die quadratische $n \times n$ -Matrix \mathfrak{A}_x *invertierbar* ist.

In der Tat, es gilt

$$0_{\mathbb{R}^n} = \mathfrak{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathfrak{A}_x \tilde{\mathbf{x}} + \mathfrak{A}_y \tilde{\mathbf{y}}.$$

Im Fall, wenn \mathfrak{A}_x invertierbar, liefert $\tilde{\mathbf{x}} = -\mathfrak{A}_x^{-1} \mathfrak{A}_y \tilde{\mathbf{y}}$ die *eindeutige Lösung* von $\mathfrak{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen.

Theorem 21.1 (Satz von der impliziten Funktion).

Sei $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0) \in \Omega$, so dass $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und die $n \times n$ -Jacobiuntermatrix $\mathfrak{A}_x := \tilde{D}_x \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ von $(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0)$ und eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^m$ von $\tilde{\mathbf{y}}^0$, so dass die folgenden Aussagen wahr sind:

- jedem $\tilde{\mathbf{y}} \in W$ entspricht genau ein $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{y}})$, so dass $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in U$ und $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- die Aussage (a) definiert eine Funktion $\mathbf{g} \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaften

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{y}}), \tilde{\mathbf{y}}) = 0_{\mathbb{R}^n}, \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{y}}^0) = \tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{D}\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}^0) = -(\mathfrak{A}_x)^{-1} \mathfrak{A}_y.$$

Der Beweis wird durch den Umkehrsatz für die Abbildung $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y})$ begründet.

Bemerkung 21.1.

Die Bedingung, dass die $n \times n$ -Jacobiuntermatrix $\mathfrak{A}_x := \tilde{D}_x \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0)$ invertierbar ist, kann man in folgender Weise umformulieren:

$$\det \mathfrak{A}_x \neq 0.$$

Folglich ist der *Rang* $\text{rank } \mathfrak{A}$ der Jacobimatrix $\mathfrak{A} = \tilde{D}f$ in diesem Fall $\text{rank } \mathfrak{A} = n$, das heißt, der *maximal mögliche Rang* für $n \times (n+m)$ -Jacobimatrizen, und der lineare Operator $D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\mathbf{y}}^0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ ist *surjektiv*.

Bemerkung 21.2.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\xi^0 \in \Omega$ und $\mathbf{f}(\xi^0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Falls $\text{rank } \tilde{D} \mathbf{f}(\xi^0) = n$ (der maximal mögliche Rang), kann man in solcher Weise n Variablen x_1, \dots, x_n von ξ_1, \dots, ξ_{n+m} wählen, dass für die entsprechende $n \times n$ -Jacobiuntermatrix \mathfrak{A}_x gilt, dass $\det \mathfrak{A}_x \neq 0$ und \mathfrak{A}_x invertierbar ist. Also kann man wegen des Satzes von der impliziten Funktion die Gleichung $\mathbf{f}(\xi) = 0$ nach den Variablen x_1, \dots, x_n auflösen.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Definition 21.1.

Ein Punkt $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ heißt *regulärer Punkt* von \mathbf{f} , falls der lineare Operator $D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ surjektiv ist.

Bemerkung 21.3.

Sei $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^0)$ für $\boldsymbol{\xi}^0 \in \Omega$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Der Punkt $\boldsymbol{\xi}^0$ ist regulär für \mathbf{f} .
- (b) $\text{rank } \tilde{D} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^0) = n$ (der maximal mögliche Rang).
- (c) Die Gleichung $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{a}$ kann nach n Variablen aufgelöst werden.

21.3 Flächenstücke und Flächeninhalt.

Wir haben gesehen, dass eine ‘*m-dimensionale Fläche*’ im $\boldsymbol{\xi}$ -Raum \mathbb{R}^{m+n} durch eine Gleichung $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ mit $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ definiert werden kann. Wenn man \mathbf{f} komponentenweise schreibt $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = (f_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, f_n(\boldsymbol{\xi}))^\top$, ist $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ äquivalent mit dem (möglicherweise nichtlineare) *Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n+m}) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n+m}) &= 0. \end{aligned}$$

Wenn ein Punkt $\boldsymbol{\xi}^0$ der Fläche $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ regulär ist, kann man ein ‘*lokales Flächenstück*’ von $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ in einer anderen Weise definieren, als den Graph

$$\{(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in W\}$$

der implizite Funktion $\mathbf{g} : W \rightarrow \mathbb{R}^n, W \subseteq \mathbb{R}^m$. In diesem Fall parametrisiert die Abbildung $F : \mathbf{y} \rightarrow (\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ dieses lokale Flächenstück und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ ist der entsprechende (m-)Parameter.

Mann kann generell durch ‘gute’ parametrisierende Abbildungen $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $W \subseteq \mathbb{R}^m$ Flächenstücke definieren.

Definition 21.2 ($C^q(\overline{\Omega})$ -Abbildungen).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei $q \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Eine Abbildung $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt *C^q -Funktion* (mit der Bezeichnung $F \in C^q(M, \mathbb{R}^N)$), wenn es eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $H \in C^q(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gibt, so dass $M \subseteq \Omega$ und $F = H|_M$.

Definition 21.3 (Flächenstück [H2]).

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $F \in C^q(\overline{G}, \mathbb{R}^N)$ mit $q \geq 1$ und $m < N$ (oder genereller $m \leq N$). Dann:

- (a) Wir sagen, dass F ein *m-dimensionales C^q -Flächenstück* in \mathbb{R}^N ist.

- (b) Das Bild $\mathcal{F} = F(\overline{G}) = \text{Spur}(F)$ heißt *Spur* vom Flächenstück F .
- (c) Die Einschränkung $F|_{\partial G} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt die *Berandung* des Flächenstücks F . Ihr Bild $F(\partial G)$ heißt die *Berandung der Spur* $F(\overline{G})$.

Bemerkung 21.4. (a) Offenbar ist die Berandung der Spur $F(\partial G)$ fast immer *kein Rand* der Spur $F(\overline{G})$.

- (b) Man kann eine ähnliche Definition vom Flächenstück $F \in C^q(G, \mathbb{R}^N)$ ohne den Rand ∂G und ohne die Berandung betrachten. Dann ist $\text{Spur}(F) = F(G)$ das Bild der offenen Menge (Gebiet) G .

Bemerkung 21.5.

In anderen Quellen [FK1], [AE2] sind ein *Flächenstück* (oder eine *Fläche*) mit dem Bild $F(G)$ *identifiziert*. In diesem Fall, sagt man, dass

- die Abbildung $F \in C^q(G, \mathbb{R}^N)$ eine *C^q -Parametrisierung* der Fläche $F(G)$ ist,
- G der *Parameterbereich* ist, und
- die Variable $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in G$ *m -Parameter* des Flächenstücks ist.

Im Fall der Identifikation vom Flächenstück mit der Spur $F(\overline{G})$ erfordert man jedoch zusätzliche Bedingungen und unter diesen Bedingungen heißt F *zulässige oder reguläre Parametrisierung*. Beispiele von zusätzlichen Bedingungen:

- die Injektivität von F und die Stetigkeit von F^{-1} (s. [FK1]);
- die Injektivität von $DF(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in G$ (eine solche Abbildung F heißt *Immersion* von G nach \mathbb{R}^N , s. [AE2]).

Die Injektivität von $DF(\mathbf{u})$ für eine $C^1(G, \mathbb{R}^N)$ -Abbildung ist *äquivalent* mit $\text{rank } \tilde{D}F(\mathbf{u}) = m$ (*maximaler Rang*). Diese Injektivität impliziert auch *lokale Injektivität* von F und die lokale Existenz der Umkehrabbildung.

Wir verbinden diese zusätzlichen Bedingungen mit den Einstellungen von [H2]. Seien $q \geq 1, m \leq N, G \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $F \in C^q(\overline{G}, \mathbb{R}^N)$ ein *m -dim. Flächenstück*.

Definition 21.4.(a) Ein m -dim. C^q -Flächenstück F heißt *regulär*, wenn F auf G eine Immersion ist (das heißt, wenn $\text{rank } \tilde{D}F(\mathbf{u}) = m \quad \forall \mathbf{u} \in G$).

- (b) Ein reguläres m -dim. C^q -Flächenstück F heißt *m -dim. C^q -Einbettung* (oder eingebettete Fläche), wenn F injektiv ist und

$$F^{-1} : \text{Spur}(F) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig ist. (In diesem Fall ist F ein *Homöomorphismus*).

Beispiel 21.2 (Parametrisierung einer Sphäre mit dem Radius R).

Seien $x_1 = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$, $x_2 = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$, $x_3 = r \cos(\theta)$ die Kugelkoordinaten.

Die Sphäre $S_R = \partial K_R(0_{\mathbb{R}^3})$ kann man durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ definieren, die in Kugelkoordinaten $r = R$ geschrieben wird. Man kann S_R durch ein C^q -Flächenstück F in folgender Weise *parametrisieren*:

$$F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3, F(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix}, G = (-\pi, \pi) \times (0, \pi).$$

Hier kann man als die *Glattheit* q beliebige $q \in \mathbb{N}$ wählen, der Abschluss $\overline{G} = [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ vom Gebiet G ist der *Parameterbereich*. Der Azimutwinkel $u_1 = \varphi \in [-\pi, \pi]$ und der Polarwinkel $u_2 = \theta \in [0, \pi]$ sind die *Parameter* und bilden zusammen den *2-Parameter* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Die *Spur* $F(\overline{G})$ ist genau die Sphäre $F(\overline{G}) = S_R$.

F ist regulär. Aber auf \overline{G} ist F keine Einbettung, weil

$$F(\varphi, 0) = (0, 0, 1)^\top \forall \varphi, F(\varphi, \pi) = (0, 0, -1)^\top \forall \varphi, F(-\pi, \theta) = F(\pi, \theta) \forall \theta.$$

Bemerkung 21.6 (C^q -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N). (a) Sei F eine m -dim. C^q -Einbettung, dann ist $F(G)$ eine *m -dimensionale C^q -Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^N [AE2, Satz VII.9.10].

(b) Jede m -dimensionale C^q -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N ist *lokal* ein Bild $F(G)$ vom Gebiet G für eine m -dim. C^q -Einbettung $F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ [AE2, Th VII.9.12] (In diesem Fall ist die Spur $F(\overline{G})$ fast die Definition einer m -dimensionalen C^q -Untermannigfaltigkeit mit Rand.)

Die Parametrisierungen F liefern die Möglichkeit auf m -dim. Flächen (und auf m -dim. C^q -Untermannigfaltigkeiten) die *Differential- und Integral-Rechnung einzuführen* ähnlich wie im 1-dim. Fall von Wegen (und Kurven).

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet.

Definition 21.5 (Flächeninhalt). (a) Der (*m -dimensionale*) *Flächeninhalt* $\mathcal{A}(F)$ eines m -dim. beschränkten C^1 -Flächenstück $F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ wird definiert durch das m -dim. Riemann-Integral

$$\mathcal{A}(F) = \int_G \sqrt{\det \left[(\tilde{D}F(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}F(\mathbf{u}) \right]} dv_m(u).$$

(b) Für die m -dim. C^q -Einbettung F mit der Spur $\mathcal{F} = F(\overline{G})$ schreibt man auch $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}_m(\mathcal{F}) := \mathcal{A}(F)$ und nennt $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (m -dimensionalen) *Flächeninhalt* der Spur \mathcal{F} (oder m -dim. Hausdorff-Maß $\mathcal{H}_m(\mathcal{F})$ der C^q -Untermannigfaltigkeit $F(G)$).

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet.

Beispiel 21.3 (Flächeninhalt einer Sphäre im \mathbb{R}^3 mit dem Radius R).

Sei $x = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$, $y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$ die Kugelkoordinaten. Die Sphäre $S_r = \partial K_r(0_{\mathbb{R}^3})$ kann man mit dem 2-dim. C^∞ -Flächenstück F in der folgenden Weise *parametrisieren*:

$$F: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3, F(\mathbf{u}) = F(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}, G = (-\pi, \pi) \times (0, \pi).$$

Der Abschluss $\bar{G} = [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ vom Gebiet G ist der *Parameterbereich*. Der Azimut-

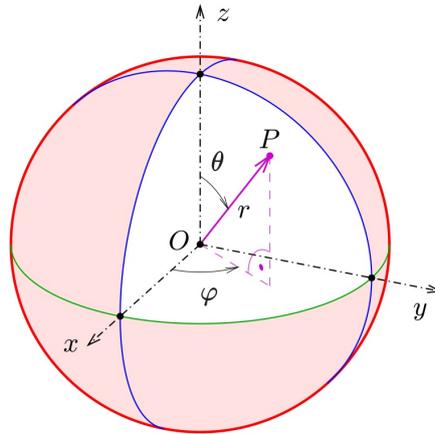


Abbildung 3: Von Ag2gaeh, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=41627945>

winkel $u_1 = \varphi \in [-\pi, \pi]$ und der Polarwinkel $u_2 = \theta \in [0, \pi]$ sind die *Parameter* und bilden zusammen den *2-Parameter* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Die *Spur* $F(\bar{G})$ ist genau die Sphäre $F(\bar{G}) = S_R$. Der 2-dim. Flächeninhalt $\mathcal{A}(F) = \int_G \sqrt{\det [(\tilde{D}F(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}F(\mathbf{u})]} dv_2(u)$. Die Rechnung ist dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{wt}DF(\varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ (\tilde{D}F(\varphi, \theta))^\top &= \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) & 0 \\ r \cos(\varphi) \cos(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ (\tilde{D}F(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}F(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \det[(\tilde{D}F(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}F(\mathbf{u})] = r^4 \sin^2(\theta) \\ \mathcal{A}(F) &= \int_G r^2 \sin(\theta) dv_2(u) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Da $F|_G$ injektiv ist, ist $\mathcal{A}(\text{Spur } F) = \mathcal{A}(S_r) = 4\pi r^2$ der *Flächeninhalt der Sphäre* S_r .

Seien $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C^1(G, \mathbb{R})$. Dann kann man den Graph $\text{Gr } f = \{(\mathbf{u}, f(\mathbf{u})) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{u} \in G\}$ von f mit dem m -dim Flächenstück $F : \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ parametrisieren.

Theorem 21.2 (Flächeninhalt des Graphs).

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann gilt für den m -dim. Flächeninhalt des Graphs

$$\mathcal{A}(\text{Gr } f) = \int_G \sqrt{1 + |\nabla f(\mathbf{u})|^2} \, dv_m(u),$$

wobei $\nabla f(\mathbf{u}) = (\partial_1 f, \dots, \partial_m f)^\top$ der Gradient von f an der Stelle \mathbf{u} ist.

Der Beweis für $m = 2$ und $m = 3$ ist eine einfache Aufgabe. Dann wird klar, wie der Beweis für beliebige $m \in \mathbb{N}$ funktioniert.

21.4 Flächenintegral bezüglich des skalaren Flächenelements $d\mathcal{A}(u)$.

Seien $m \leq N, G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet und $F \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^N)$ ein m -dim C^1 -Flächenstück in \mathbb{R}^N mit der Spur $\mathcal{F} = F(\overline{G})$.

Definition 21.6 (Flächenintegral bezüglich skalaren Flächenelements). (a) Sei $\mathbf{f} \in C(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$.

Dann wird das *Flächenintegral bezüglich des skalaren Flächenelements* $d\mathcal{A}(\mathbf{u})$ definiert als

$$\int_F \mathbf{f} \, d\mathcal{A} := \int_G \mathbf{f}(F(\mathbf{u})) \sqrt{g(\mathbf{u})} \, dv_m(\mathbf{u}),$$

wobei $g(\mathbf{u}) = \det \left[(\tilde{D}F(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}F(\mathbf{u}) \right]$ die *Gramsche Determinante* von $\tilde{D}F(\mathbf{u})$ ist.

(b) $d\mathcal{A} = d\mathcal{A}(u) = \sqrt{g(\mathbf{u})} \, dv_m(\mathbf{u})$ heißt *skalares Flächenelement*.

(c) Im besonderen Fall einer skalarwertige stetigen Funktion $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\int_F f \, d\mathcal{A}(\mathbf{u}) := \int_G f(F(\mathbf{u})) \sqrt{g(\mathbf{u})} \, dv_m(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$$

skalares (Ober-)Flächenintegral.

Bemerkung 21.7 (Parameterinvarianz).

Es folgt aus dem Trasformationssatz, dass

$$\int_F \mathbf{f} \, d\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \int_{F_*} \mathbf{f} \, d\mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

wobei $F_*(\mathbf{x}) = F(\psi(\mathbf{x}))$ mit einem C^1 -Diffeomorphismus $\psi : G_* \rightarrow G, \psi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}$.

21.5 Integrale über 2-dim Flächen in \mathbb{R}^3 .

Erinnerung. Vektorprodukt (Kreuzprodukt).

Seien $m = 3$ und $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Man kann das *Vektorprodukt/Kreuzprodukt* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ durch die symbolische Determinante schreiben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

Satz 21.1 (Eigenschaften des Vektorprodukts). (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) =: \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
 heißt Spatprodukt (gemischtes Produkt).

(c) $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ ist das Volumen $v_3(\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$ des 3-dim. Parallelogramms $\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, das von den Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannt ist.

(d) $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ und $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, das heißt, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

(e) $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \geq 0$ und $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = v_2(\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ mit von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramm $\Pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Def. von $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow$ (a), (b), (c). Dann (b) + (c) \Rightarrow (d) und (e).

Bemerkung 21.8.

Falls \mathbf{a} und \mathbf{b} linear unabhängig sind und $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, dann bilden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ein *positiv orientiertes Dreibein*. Das heißt, sie liegen im 3-dim. Raum wie Daumen, Zeigefinger, und Mittelfinger der rechten Hand (*Dreifingerregel*).

Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mathbf{F} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ ein 2-dim C^1 -Flächenstück in \mathbb{R}^3 mit der Spur $\mathcal{F} = F(\overline{G})$.

Satz 21.2 ('skalares' Flächenintegral auf 2-dim. Flächen).

Sei $\mathbf{f} \in C(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für das Flächenintegral bezüglich des skalaren Flächenelements $d\mathcal{A}(\mathbf{u})$

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{f} \, d\mathcal{A} := \int_G \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right| dv_2(\mathbf{u}),$$

wobei man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_j}$ und $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2}$ mit die Spalten

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} \partial_j F_1(\mathbf{u}) \\ \partial_j F_2(\mathbf{u}) \\ \partial_j F_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

der Jacobimatrix $\tilde{D}\mathbf{F}(\mathbf{u})$ identifizieren kann.

Bemerkung 21.9 (Erklärung des Integrals bezüglich des skalaren Flächenelements).(a)

Im Fall $m = 2 < 3 = N$ gilt für das skalare Flächenelement

$$d\mathcal{A} = \sqrt{g(\mathbf{u})} \, dv_2(\mathbf{u}) = \left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right| \, dv_2(\mathbf{u}),$$

weil die *Gramsche Determinante* $g(\mathbf{u}) = \det \left[(\tilde{D}\mathbf{F}(\mathbf{u}))^\top \tilde{D}\mathbf{F}(\mathbf{u}) \right]$ von $\tilde{D}\mathbf{F}(\mathbf{u})$ gleich mit dem Quadrat des 2-dim. Inhalts des von $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2}$ aufgespannten Parallelogramm, das heißt

$$\sqrt{g(\mathbf{u})} = v_2 \left(\Pi \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right) \right).$$

ist.

(b) Generell ist für $1 \leq m \leq N$ die *Gramsche Determinante* von einer $N \times m$ Matrix A das Quadrat des m -dim. Inhalts des m -Parallelotop, das ‘von den Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannt ist’. Das heißt,

$$\det [A^\top A] = [v_m(\Pi(\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet m}))]^2,$$

wobei $A = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet m})$ und $\mathbf{a}_{\bullet j}$ die j -te Spalte der Matrix A ist.

(c) Das und die linearen Approximationen erklären die Definition des Flächenintegrals bezüglich des skalaren Flächenelements.

Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mathbf{F} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ ein 2-dim. reguläres C^1 -Flächenstück in \mathbb{R}^3 , und sei zusätzlich \mathbf{F} *injektiv*. Sei $\mathcal{F} = F(\overline{G})$ die Spur.

Definition 21.7.

Für $\mathbf{u} \in G$ heißen die Vektoren

$$\mathbf{n}_\pm(\mathbf{u}^0) = \pm \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_2} \right|} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_2}$$

positiv orientierte und negativ orientierte *normale Einheitsvektoren* an die Fläche \mathbf{F} im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \in \mathbf{F}(G) \subset \mathcal{F}$.

Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mathbf{F} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ ein 2-dim. reguläres C^1 -Flächenstück in \mathbb{R}^3 , und zusätzlich \mathbf{F} *injektiv*. Sei $\mathcal{F} = F(\overline{G})$ die Spur.

Definition 21.8 (‘vektorielles’ Flächenintegral auf 2-dim. Flächen).

Sei $\mathbf{f} \in C(\mathcal{F}, \mathbb{R}^3)$. Das *Flächenintegral* bezüglich des positiv orientierten (bzw. negativ orientierten) *vektoriellen (Ober-)Flächenelements* $d\mathbf{O}(\mathbf{u})$ definiert man durch

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\mathcal{F}} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_\pm) d\mathcal{A} = \int_G \langle \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{u})), \pm \partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbb{R}^3} \, dv_2(\mathbf{u}).$$

22 Divergenz. Gaußscher Integralsatz in \mathbb{R}^3 . Rotation. Stokescher Satz in \mathbb{R}^3 . Lagrange-Multiplikatoren.

22.1 Beispiele von Flächenintegralen bezüglich skalaren und vektoriellen Flächenelementen auf einer Sphäre in \mathbb{R}^3 .

Die Sphäre $S_R = \partial K_R(0_{\mathbb{R}^3})$ kann man mit einem 2-dim. C^∞ -Flächenstück F in der folgenden Weise parametrisieren:

$$\mathbf{F} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix}, G = (-\pi, \pi) \times (0, \pi).$$

Die Spur $\mathcal{F} = \mathbf{F}(\overline{G})$ ist genau die Sphäre $F(\overline{G}) = S_R$. Die Abbildung \mathbf{F} ist auf G injektiv. Mit Hilfe der Gramschen Determinante haben wir berechnet, dass $\mathcal{A}(S_R) = 4\pi R^2$ der Flächeninhalt der Sphäre S_R ist (s. Vorlesung 24).

Erinnerung. Das skalare Flächenelement $d\mathcal{A}(\mathbf{u})$ durch das Vektorprodukt der Tangentialvektoren ist:

$$d\mathcal{A} = \left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right| dv_2(\mathbf{u}).$$

Berechne dies für die Parametrisierung F :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -R \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & -R \sin(\varphi) \sin(\theta) & R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \mathbf{e}_2 & R \cos(\varphi) \sin(\theta) & R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \mathbf{e}_3 & 0 & -R \sin(\theta) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2 \cos(\varphi) \sin^2(\theta) \\ -R^2 \sin(\varphi) \sin^2(\theta) \\ -R^2 \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \right| &= R^2 \sqrt{\cos^2(\varphi) \sin^4(\theta) + \sin^2(\varphi) \sin^4(\theta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \\ &= R^2 \sqrt{\sin^4(\theta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} = R^2 \sqrt{\sin^2(\theta) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))} \\ &= R^2 |\sin \theta| = R^2 \sin \theta, \text{ für } (\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \pi). \end{aligned}$$

Zusammenfassung: $d\mathcal{A}(\varphi, \theta) = R^2 \sin(\theta) dv_2(\mathbf{u}) = R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta$.

Beispiel 22.1.

Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \forall \mathbf{x} \in S_R$. Dann

$$\int_{S_R} \mathbf{e}_3 d\mathcal{A} = \int_G \mathbf{e}_3 R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta = \mathbf{e}_3 \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta = \mathbf{e}_3 \mathcal{A}(S_R) = 4\pi R^2 \mathbf{e}_3,$$

wobei $G = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$.

Erinnerung. Positiv orientiertes vektorielles Flächenelement $d\mathbf{O}$

$$d\mathbf{O} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial u_2} dv_2(\mathbf{u})$$

Beispiel 22.2.

Für die obengenannte Parametrisierung $\mathbf{F}(\varphi, \theta)$ von S_R ist das positiv orientierte vektorielle Flächenelement

$$d\mathbf{O} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} dv_2(\varphi, \theta) = -R^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin^2(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin^2(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{pmatrix} dv_2(\varphi, \theta).$$

Berechnen wir $\int_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{O}$ für $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{x} \in S_R$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{F}} \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{O} &= \int_G \left\langle \mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} dv_2(\varphi, \theta) \\ &= \int_G \left\langle \mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} dv_2(\varphi, \theta) \\ &= \int_0^\pi (-R^2) \cos(\theta) \left(\int_{-\pi}^\pi \sin(\varphi) d\varphi \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Erinnerung. Das *positiv orientierte* normale Einheitsvektorfeld an die Fläche \mathbf{F} ist

$$\mathbf{n}_+(\mathbf{u}) := \frac{1}{|\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{F}(\mathbf{u})|} \partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

Das *negativ orientierte* normale Einheitsvektorfeld an die Fläche \mathbf{F} ist

$$\mathbf{n}_-(\mathbf{u}) := -\mathbf{n}_+(\mathbf{u}) = -\frac{1}{|\partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{F}(\mathbf{u})|} \partial_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

Bemerkung 22.1.

Für beliebige $\mathbf{g} \in C(\text{Spur } F, \mathbb{R}^3)$ werden die Integrale bezüglich des positiv orientierten und negativ orientierten vektoriellem Flächenelement mit dem *Minuszeichen* verbunden:

$$\int_{\mathbf{F}} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}_- \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = \int_{\mathbf{F}} \langle \mathbf{g}, -\mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = - \int_{\mathbf{F}} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = - \int_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{O}.$$

Beispiel 22.3.

Für die obengenannte Parametrisierung $\mathbf{F}(\varphi, \theta)$ von S_R gilt für das negativ orientierte vektorielle Flächenelement

$$(-1) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} dv_2(\varphi, \theta) = R^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin^2(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin^2(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{pmatrix} dv_2(\varphi, \theta).$$

Für das entsprechende Integral von $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{e}_3$ bezüglich dem negativ orientierten vektoriellen Flächenelement gilt

$$\int_{\mathbf{F}} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}_- \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = - \int_{\mathbf{F}} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = - \int_{\mathbf{F}} \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{O} = 0$$

wegen des Beispiels 22.2.

22.2 Divergenz und Gaußscher Integralsatz

Beispiel 22.4. (a) Für die obengenannte Parametrisierung $\mathbf{F}(\varphi, \theta)$ von S_R und das positiv orientierte vektorielle Flächenelement $d\mathbf{O}$ gilt

$$\int_{\mathbf{F}} \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_R} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = 0, j = 1, 2, 3$$

(s. Beispiel 22.2). Also gilt wegen der *Linearität des Integrals* $\int_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{O} = 0$ für ein beliebiges konstantes \mathbb{R}^3 -Vektorfeld \mathbf{g} auf S_R .

(b) Der *Gaußsche Integralsatz* impliziert $\int_{\partial G} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}_\pm \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = 0$ für beschränkte Gebiete $G \subset \mathbb{R}^3$ mit C^1 -Rand ∂G und Vektorfelder $\mathbf{g} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ mit der Eigenschaft $\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G$, wobei für $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^\top$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \mathbf{div} \mathbf{g} := \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3$$

die *Divergenz* des Vektorfelds \mathbf{g} (s. auch Vorlesung 2) ist.

Theorem 22.1 (3-dimensionaler Gaußscher Integralsatz).

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand ∂G , den wir als eine 2-dim. C^1 -Untermannigfaltigkeit ∂G von \mathbb{R}^3 betrachten und der mit dem äußeren Einheitsnormalvektorfeld $\mathbf{n} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert wird.

Dann

$$\int_G \mathbf{div} \mathbf{f} dv_3 = \int_{\partial G} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A}$$

für jedes Vektorfeld $\mathbf{f} \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$.

Sei $q \in \mathbb{N}$. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet.

Definition 22.1 (beschränktes Gebiet mit dem C^q -Rand).

Der Rand ∂G des beschränkten Gebiets G heißt C^q -Rand, wenn es für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \partial G$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ und ein möglicherweise neues orthogonales Koordinatensystem $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ (mit neuem Ursprung) mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) es gibt $a_1, a_2, a_3 > 0$, so dass $U = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : -a_j < \xi_j < a_j, j = 1, 2, 3\}$;

- (b) es gibt eine C^q -Funktion $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Definitionsbereich $\tilde{U} = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : -a_j < \xi_j < a_j, j = 1, 2\}$, so dass

$$|\varphi(\xi_1, \xi_2)| \leq \frac{a_3}{2} \forall (\xi_1, \xi_2) \in \tilde{U},$$

$$G \cap U = \{\xi \in U : \xi_3 < \varphi(\xi_1, \xi_2)\}, \text{ und } \partial G \cap U = \{\xi \in U : \xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2)\}.$$

Bemerkung 22.2 (Gebiete mit Lipschitz-stetigen Rändern). (a) Man kann beschränkte Gebiete G mit Lipschitz-stetigen Rändern ∂G definieren, wenn man C^q -Funktionen φ in der Def.22.1 mit Lipschitz-stetigen Funktionen φ ersetzt.

- (b) Der Gaußscher Integralsatz gilt auch in beschränkten Gebieten G mit Lipschitz-stetigen Rändern ∂G . In diesem Fall ist das äußere Einheitsnormalvektorfeld $\mathbf{n} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$ nur fast überall auf ∂G definiert und ist messbar bezüglich des Lebesgue-Oberflächenmaß (2-dim. Hausdorffmaß [H2]). In $\int_{\partial G} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A}$ soll man dann $d\mathcal{A}$ als das Lebesgue-Oberflächenmaß interpretieren.

- (c) Z.B., der Rand ∂Z einer offenen 3-Zelle $Z = (0, 1)^3$ ist ein Lipschitz-stetiger Rand, aber kein C^1 -Rand.

Aufgabe 22.1.

Es sei G die offene beschränkte Menge, deren Rand vollständig in der Vereinigung der xy -, xz - und der yz -Ebenen sowie der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 6z = 12\}$ enthalten ist. Berechnen sie $\int_{\partial G} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A}$ für das Vektorfeld $\mathbf{f} = (x^2/2, y, z)^\top$, wobei \mathbf{n} die äußere Normale auf ∂G ist.

Lösung. Da G ein beschränktes Gebiet G mit Lipschitz-stetigem Rand ∂G ist, darf man den Gaußscher Integralsatz benutzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f} &= x + 1 + 1 = x + 2, \quad \int_{\partial G} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = \int_G (x + 2) dv_3(x, y, z), \\ \int_G (x + 2) dv_3 &= \int_0^6 (x + 2) \int_0^{4-2x/3} \int_0^{2-x/3-y/2} 1 dz dy dx \\ &= \int_0^6 (x + 2) \int_0^{4-2x/3} (2 - x/3 - y/2) dy dx \\ &= \int_0^6 (x + 2) [(2 - x/3)(4 - 2x/3) - (4 - 2x/3)^2/4] dx \\ &= \int_0^6 \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 8 \right) dx = \frac{1}{36}6^4 - \frac{10}{27}6^3 + \frac{2}{3}6^2 + 8 \cdot 6 = 28. \end{aligned}$$

Theorem 22.2 (koordinatenfreie Definition der Divergenz).

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt für die Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ des Vektorfelds \mathbf{f} an beliebiger Stelle $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{v_3(K_r(\mathbf{x}))} \int_{\partial K_r(\mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dA \left(= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{\partial K_r(\mathbf{x})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{O} \right),$$

wobei die Sphäre $\partial K_r(\mathbf{x})$ mit dem äußeren Einheitsnormalenvektorfeld $\mathbf{n} : \partial K_r(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert wird.

Bemerkung 22.3 (physikalische Deutung der Divergenz).

Das Skalarprodukt $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \langle \mathbf{f}(\mathbf{y}), \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ liefert den Wert des Flusses durch das Einheitsflächenstück auf ∂G an der Stelle $\mathbf{y} \in \partial G$. Falls $0 \neq \int_G \operatorname{div} \mathbf{f} \, dv_3 = \int_{\partial G} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} \, dA$, so müssen im Gebiet G Quellen oder Senken vorhanden sein (man kann eine Senke als eine ‘negative Quelle’ betrachten).

Th.22.2 bedeutet, dass die Divergenz-Funktion $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ die *Quelldichte* an der Stelle x ist.

22.3 Die Rotation eines Vektorfelds.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3)^\top$.

Definition 22.2 (Rotation).

Die *Rotation des Vektorfelds* \mathbf{f} kann man durch eine symbolische Determinante schreiben

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) \mathbf{e}_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) \mathbf{e}_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \mathbf{e}_3.$$

Man benutzt auch die Bezeichnung $\operatorname{curl} \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$.

Beispiel 22.5. (a) Im Beispiel 22.4 haben wir gesehen, dass

$$\int_{S_R} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} \, dA = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Eigentlich kann man jedes konstante Vektorfeld \mathbf{e}_j als ein Rotations-Vektorfeld $\nabla \times \mathbf{g}$ eines $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ Vektorfelds \mathbf{g} darstellen.

Z.B. nehmen wir $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (-\omega x_2, \omega x_1, h(x_3))^\top$ mit einer Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$ und beliebigem $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann $\nabla \times \mathbf{g} = (0, 0, 2\omega)^\top = 2\omega \mathbf{e}_3$ (die Funktion $g(x_3)$ spielt hier keine Rolle für $\nabla \times \mathbf{g}$).

Also,

$$0 = \int_F 2 \omega \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_R} \langle \nabla \times \mathbf{g}, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} \, dA.$$

(b) Für jedes $C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -Vektorfeld \mathbf{g} gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{g}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) = 0$.

(c) Aus (b) und dem Gaußschen Integralsatz folgt, dass

$$\int_{\partial G} \langle \nabla \times \mathbf{g}, \mathbf{n}_{\pm} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = 0$$

für beschränkte Gebiete $G \subset \mathbb{R}^3$ mit C^1 -Rand ∂G und $C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ -Vektorfelder \mathbf{g} , denn $\int_{\partial G} \langle \nabla \times \mathbf{g}, \mathbf{n}_{\pm} \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A} = \int_G \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) dv_3 = \int_G 0 dv_3 = 0$.

22.4 Jordanscher Kurvensatz und positiv orientierte geschlossene Jordan-Wege.

Errinerung.

- (a) $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt *geschlossener Weg* falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- (b) Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossener Jordan-Weg*, wenn aus $t_1 < t_2$ und $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ folgt, dass $t_1 = a$ und $t_2 = b$ (das heißt, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ der einzige Doppelpunkt ist von γ .)

Theorem 22.3 (Jordanscher Kurvensatz für Jordankurven in \mathbb{R}^2).

Sei $\Gamma = \operatorname{Spur} \gamma \subset \mathbb{R}^2$ für einen geschlossenen Jordan-Weg γ . Dann:

(a) Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ besteht aus genau zwei disjunkten Gebieten Ω und Ω_a , wobei ein Gebiet Ω beschränkt ist (es heißt *Innengebiet* von Γ) und das andere Gebiet Ω_a unbeschränkt ist (es heißt *Außengebiet* von Γ).

(b) $\partial\Omega = \Gamma = \partial\Omega_a$

Definition 22.3 (positiv orientierte geschlossene Jordan-Wege in \mathbb{R}^2).

Ein stückweise- C^1 geschlossener Jordan-Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *positiv orientiert* (oder *entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert*), falls für $\Gamma = \operatorname{Spur} \gamma$ das Innengebiet Ω links von Γ liegt, wenn wir $\gamma(t)$ in Richtung wachsender Parameterwerte t durchlaufen.

22.5 Satz von Stokes.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\partial\Omega = \operatorname{Spur} \gamma$ für einen stückweise- C^1 geschlossenen Jordan-Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, der *positiv orientiert* ist.

Sei $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ eine *2-dim. reguläre Einbettung* (eingebettetes Flächenstück) mit $\mathcal{F} = \operatorname{Spur} \mathbf{F} \subset E$, wobei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge ist.

Dann ist $\hat{\gamma}(s) = \mathbf{F}(\gamma(s))$, $s \in [a, b]$, ein stückweise- C^1 geschlossener Jordan-Weg im $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Theorem 22.4 (3-dimensionaler Stokesscher Satz).

Sei $\mathbf{g} \in C^1(E, \mathbb{R}^3)$. Sei

$$\mathbf{n}_+ = \frac{1}{|\partial_1 \mathbf{F} \times \partial_2 \mathbf{F}|} \partial_1 \mathbf{F} \times \partial_2 \mathbf{F}$$

das positiv orientierte normale Einheitsvektorfeld an dem Flächenstück \mathbf{F} . Dann

$$\int_{\mathbf{F}} (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{O} = \int_{\hat{\gamma}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x},$$

wobei

$$\int_{\mathbf{F}} (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{O} = \int_{\mathcal{F}} \langle \nabla \times \mathbf{g}, \mathbf{n}_+ \rangle_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{A}$$

das Flächenintegral bezüglich des vektoriellen Flächenelements ist und

$$\int_{\hat{\gamma}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{g}(\mathbf{F}(s)), \frac{d\hat{\gamma}(s)}{ds} \rangle_{\mathbb{R}^3} ds$$

das Wegintegral bezüglich des vektoriellen Bogenelements ist.

Bemerkung 22.4.(a) Dabei heißt $\mathbf{F}(\partial\Omega) = \mathbf{F}(\text{Spur } \gamma)$ positiv orientiert.

(b) Die Orientierungen vom Flächenstück \mathbf{F} und der Berandung $\mathbf{F}(\partial\Omega)$ soll im Stokesscher Satz übereinstimmend sein.

Bemerkung 22.5 (physikalische Deutung).

Im Stokesscher Satz ist $\int_{\hat{\gamma}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}$ die *Zirkulation des Vektorfeldes* \mathbf{g} längs des orientierten geschlossenen Jordan-Weges $\hat{\gamma}$.

Dann lautet der Stokesscher Satz:

Die Zirkulation des Vektorfeldes \mathbf{g} entlang der orientierten geschlossenen Jordan-Kurve $\hat{\gamma}$ ist gleich mit dem Fluß der Rotation $\nabla \times \mathbf{g}$ von \mathbf{g} durch ein in die Kurve eingespanntes Flächenstück.

Lagrangesche Multiplikatoren.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\ell < n$, wobei $\ell, n \in \mathbb{N}$. Betrachten wir die Funktionen $F, h_1, \dots, h_\ell \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und definieren $\mathbf{h}(x) = (h_1(x), \dots, h_\ell(x))$, $\mathbf{h} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$.

Ferner sei

$$M := \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \Omega : h_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, h_\ell(\mathbf{x}) = 0\}$$

nichtleer.

Theorem 22.5 (Lagrangesche Multiplikatorenregel).

Seien die Gradienten $\nabla h_1(\mathbf{y}), \dots, \nabla h_\ell(\mathbf{y})$ linear unabhängig für alle $\mathbf{y} \in M$ (das heißt, dass \mathbf{h} regulär ist).

Ist $p \in M$ ein Extrempunkt (lokale Minimum- oder Maximumstelle) von $F|_M$ (das heißt unter den Nebenbedingungen $h_1(p) = 0, \dots, h_\ell(p) = 0$), so gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ (Lagrangesche Multiplikatoren), sodass p ein kritischer Punkt der Funktion

$$G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

ist.

Bemerkung 22.6.

Durch die Lagrangesche Multiplikatorenregel wird die Aufgabe, *Extrema von F unter den Nebenbedingungen $h(x) = 0$ zu bestimmen*, zurückgeführt auf das Problem, kritische Punkte der Funktion G ohne Nebenbedingungen zu suchen.

Die kritischen Punkte und die Lagrangeschen Multiplikatoren werden durch Auflösen der $\ell + n$ Gleichungen $h_j(x) = 0, 1 \leq j \leq \ell$ und $\frac{\partial}{\partial x_k} (F(x) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j h_j(x)) = 0, 1 \leq k \leq n$ nach den $\ell + n$ Unbekannten $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ bestimmt. Dabei ist folgendes zu beachten:

- (i) Nach Berechnung der kritischen Punkte von G , muss überprüft werden, welche dieser tatsächlich Extrema von F realisieren.
- (ii) Die Punkte $x \in M$, für die $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_\ell(x)$ linear abhängig ist, müssen separat betrachtet werden.

Siehe: [Amann, Escher: Analysis II, Birkhäuser Verlag, 2006, pp.282-283].

Aufgabe 22.2 (Lagrangesch Multiplikatoren mit zwei Nebenbedingungen).

Seien

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

und

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x \in \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen sie $\inf_{x \in M} F(x)$ und $\sup_{x \in M} F(x)$.

Lösung. Wir definieren $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ und $h_2(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1$. Dann

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : h_1(x) = 0, h_2(x) = 0\}.$$

Da $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$, ist F auch stetig auf M . So besitzt $F|_M$ ein Minimum und ein Maximum. Wir können mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren alle mögliche Punkten für lokale Extremumstellen zu finden.

Schritt 1.

Untersuchen wir die Bedingung von linearer Unabhängigkeit von ∇h_1 und ∇h_2 :

$$\nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2, 0, 0)^\top, \nabla h_2(x) = (0, 0, 2x_3, 2x_4)^\top.$$

Somit sind $\nabla h_1(x)$ und $\nabla h_2(x)$ nur dann linear anhängig, wenn $x = 0_{\mathbb{R}^4}$. Weil $0_{\mathbb{R}^4} \notin M$, kann dieser Punkt keine Extremstelle von $F|_M$ sein.

Schritt 2.

$$G(x) = \sum_{j=1}^4 x_j - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_2(x_3^2 + x_4^2 - 1).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 1 - 2\lambda_1 x_1, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 1 - 2\lambda_1 x_2, \quad \frac{\partial G}{\partial x_3} = 1 - 2\lambda_2 x_3, \quad \frac{\partial G}{\partial x_4} = 1 - 2\lambda_2 x_4.$$

Als eine notwendige Bedingung für Extremstellen und die entsprechenden Lagrangeschen Multiplikatoren erhält man das folgende System:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_3^2 + x_4^2 &= 1 \\ 1 - 2\lambda_1 x_1 &= 0 \\ 1 - 2\lambda_1 x_2 &= 0 \\ 1 - 2\lambda_2 x_3 &= 0 \\ 1 - 2\lambda_2 x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt (3)-(6) $\Rightarrow \lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$. Dann $x_1 = \frac{1}{2\lambda_1} = x_2, x_3 = \frac{1}{2\lambda_2} = x_4$. Mit (1) und (2) kommt man auf

$$\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2} = 1, \quad \frac{1}{4\lambda_2^2} + \frac{1}{4\lambda_2^2} = 1.$$

Also, $\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\lambda_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, wobei zwei \pm unabhängig sind. Folglich $x_1 = x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = x_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, wobei zwei \pm unabhängig sind.

Schritt 3.

Wir sehen, dass es 4 mögliche Punkte gibt, an denen Extremstellen sein können:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top.$$

Um diese Punkte zu überprüfen, berechnen wir die Werte von F daran. Das impliziert, dass $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$ eine Minimumstelle mit dem Wert $F(p) = -2\sqrt{2}$ ist, und dass $q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$ eine Maximumstelle mit dem Wert $F(q) = 2\sqrt{2}$ ist.

Antwort.

$$\inf_{x \in M} F(x) = \min_{x \in M} F(x) = -2\sqrt{2} \text{ und } \sup_{x \in M} F(x) = \max_{x \in M} F(x) = 2\sqrt{2}.$$

23 L^2 -Hilbertraum. Orthonormalbasen in Hilberträumen. Fourierreihen.

23.1 Innenproduktraum. Hilbertraum. Halbhilbertraum.

Erinnerung. Hilberträume (s. Vorlesung 3). Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Def.3.4 (inneres Produkt/Skalarprodukt).

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Ein *inneres Produkt/Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in V$:

- (a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- (b) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Linearität bezüglich 1. Variable),
- (c) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (d) $\langle x, x \rangle = 0$ genau wenn $x = 0_V$.

Def 3.5. (Innenproduktraum/Prähilbertraum und Halbhilbertraum).

- (a) Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit einem inneren Produkt heißt *Innenproduktraum* (manchmal auch Prähilbertraum).
- (b) Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften (a)–(c) der Definition 3.4 besitzt (und wir haben keine Information über Eigenschaft (d)), heißt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Halbhilbertraum*.

In this corrected version, I made the following changes:

Th. 3.1. (Cauchy-(Bunjakowski)-Schwarz-Ungl., CS-Ungl.)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein Halbhilbertraum. Dann

$$|\langle x, y \rangle_V| \leq \|x\|_V \|y\|_V,$$

wobei $\|x\|_V := \sqrt{\langle x, x \rangle_V}$.

Bemerkung 23.1.

Sei V zusätzlich ein Innenproduktraum. Dann:

- (a) $\|\cdot\|_V$ ist eine Norm in V , die vom Skalarprodukt induzierte Norm. Also sind Innenprodukträume auch normierte Räume.
- (b) Die Gleichung $|\langle x, y \rangle_V| = \|x\|_V \|y\|_V$ in der CS-Ungleichung gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beispiel 23.1.

Der Vektorraum $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \overline{y_j}$ ist ein *Hilbertraum*.

Def. 4.8 (Hilbertraum) Ein Innenproduktraum V heißt *Hilbertraum*, wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum ist (das heißt, wenn der normierte Raum $(V, \|\cdot\|_V)$ vollständig ist).

Beispiel 23.2 (Halbhilbertraum $\tilde{L}^2(M)$).

Sei M eine nichtleere Lebesgue-messbare Menge in \mathbb{R}^m . Betrachten wir die Familie $\tilde{L}^2(M) = \tilde{L}_{\mathbb{K}}^2(M)$ aller messbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft $\int_M |f|^2 d\mu_m < \infty$ (das heißt $|f|^2 \in L(M)$). Für $f, g \in \tilde{L}^2(M)$ definiert man $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_M f \bar{g} d\mu_m$. Hier ist $\langle f, g \rangle_{L^2}$ eine *nichtnegative sequilinare Form* im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle f, g \rangle_{L^2}$ eine *nichtnegative bilineare Form*. Das bedeutet,

- (a) $\langle f, g \rangle_{L^2} = \overline{\langle g, f \rangle_{L^2}}$,
- (b) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle_{L^2} = \alpha \langle f, h \rangle_{L^2} + \beta \langle g, h \rangle_{L^2} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- (c) $\langle f, f \rangle_{L^2} \geq 0$.

Die Eigenschaft (d) " $\langle f, f \rangle = 0$ genau wenn $f \equiv 0$ " ist *nicht wahr*.

Also ist $\tilde{L}^2(M)$ ein *Halbhibertraum*, aber *kein Innenproduktraum*, weil $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ kein Skalarprodukt in $\tilde{L}^2(M)$ ist und $\|\cdot\|_{L^2}$ keine Norm in $\tilde{L}^2(M)$ ist. ($\|\cdot\|_{L^2}$ ist eine *Halbnorm*).

Untersuchen wir die Familie \mathcal{N} aller Funktionen $f \in \tilde{L}^2(M)$, so dass $\|f\|_{L^2} = 0$. Das heißt,

$$f \in \mathcal{N} \iff f \text{ ist auf } M \text{ messbar und } \int_M |f|^2 d\mu_m = 0.$$

Betrachten wir den *punktweise Träger* $\text{supp}_p f := \{x \in M : f(x) \neq 0\}$ von f .
Dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M |f|^2 d\mu_m = \int_{\text{supp}_p f} |f|^2 d\mu_m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^j < |f(x)| \leq 2^{j+1}\}} |f|^2 d\mu_m \\ &\geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \mu_m(\{2^j < |f(x)| \leq 2^{j+1}\}) \implies \mu_m(\text{supp}_p f) = 0. \end{aligned}$$

Und umgekehrt, falls f messbar und $\mu_m(\text{supp}_p f) = 0$, gilt

$$\int_M |f|^2 d\mu_m = \int_{\text{supp}_p f} |f|^2 d\mu_m = 0 \implies f \in \mathcal{N}.$$

Also besteht die Familie \mathcal{N} aus allen messbaren Funktionen, deren punktweise Träger Lebesgue-Nullmengen sind.

Anders gesagt, $f \in \mathcal{N} \iff f = 0$ fast überall (f.ü) auf M . Falls $f \in \mathcal{N}$, ist der ‘Quasi-Abstand’ $\|g - \tilde{g}\|_{L^2}$ zwischen $g \in \tilde{L}^2(M)$ und $\tilde{g} = g + f$ gleich $\|g - \tilde{g}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = 0$. Um einen Hilbertraum aus $\tilde{L}^2(M)$ zu produzieren, betrachtet man aller Elemente $g \in \tilde{L}^2(M)$ und $\tilde{g} \in \tilde{L}^2(M)$ mit dem ‘Null-Quasi-Abstand’ $\|g - \tilde{g}\|_{L^2} = 0$ als ein Element vom Raum.

Satz 23.1.

Die Gleichung $f = g$ fast überall auf M definiert eine L^2 -Äquivalenzrelation $f \sim g$ auf $\tilde{L}^2(M)$.

23.2 L^2 -Hilbertraum.

Definition 23.1.

Den Vektorraum $L^2(M) = L^2_{\mathbb{K}}(M)$ definiert man als den Vektorraum $\tilde{L}^2_{\mathbb{K}}(M)/\sim$ aller Äquivalenzklassen für die L^2 -Äquivalenzrelation $f \sim g$ auf $\tilde{L}^2_{\mathbb{K}}(M)$.

Theorem 23.1 (Hilbertraum $L^2(M)$). (a) Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : L^2(M) \times L^2(M) \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_M f \bar{g} \, d\mu_m$$

ist auf dem Vektorraum $L^2(M) = L^2_{\mathbb{K}}(M)$ (von Äquivalenzklassen) wohldefiniert im Sinne, dass für $f \sim \tilde{f}$ und $g \sim \tilde{g}$ gilt, dass

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2}.$$

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ist ein Skalarprodukt in $L^2(M)$ (im Besonderen ist die Eigenschaft (d) wahr in $L^2(M)$).

(c) Folglich ist $\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$ eine Norm im $L^2(M)$.

(d) Der normierte Raum $(L^2(M), \|\cdot\|_{L^2})$ ist vollständig.

Zusammenfassung: $L^2(M)$ ist ein Hilbertraum.

Bemerkung 23.2.

Sei $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann kann man $L^2[a, b] := L^2(M)$ mit der Vollständigkeit des Innenproduktraums $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ identifizieren.

Definition 23.2 (Konvergenz in $L^2(M)$).

Man sagt, dass eine Folge $f_n \in L^2(M), n \in \mathbb{N}$, von L^2 -Funktionen im quadratischen Mittel (oder bezüglich der L^2 -Norm) konvergiert, wenn die Folge der entsprechenden Äquivalenzklassen $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ im Raum $L^2(M)$ konvergiert, das heißt, wenn $\exists [f] \in L^2(M)$, so dass

$$\|[f] - [f_n]\|_{L^2} = \left(\int_M |f - f_n|^2 \, d\mu_m \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

wenn $n \rightarrow +\infty$.

Normalweise schreibt man f_n statt $[f_n]$ für Elemente von $L^2(M)$ und spricht über L^2 -Funktionen als Elemente von $L^2(M)$ (aber streng genommen sind diese Elemente in Wirklichkeit Äquivalenzklassen).

Bemerkung 23.3.(a) L^2 -Konvergenz $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0 \not\Rightarrow$ “fast überall”-Konvergenz $f_n \rightarrow f$ fast überall.

(b) $f_n \rightarrow f$ fast überall $\not\Rightarrow L^2$ -Konvergenz $\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0$.

Theorem 23.2.

Falls $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$, dann existiert eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall.

23.3 Abstrakte Fourierreihen in Hilberträumen und Fourierreihen im L^2 -Hilbertraum.

Definition 23.3 (Schauder-Basis).

Eine abzählbares oder endliches System von Vektoren $\{w_n\}_{n=1}^N$, $N \leq \infty$ in einem Banachraum V über \mathbb{K} heißt *Schauder-Basis*, falls jeder Vektor $w \in V$ eine eindeutige Darstellung als eine konvergente Reihe $w = \sum_{n=1}^N \alpha_n w_n$ mit $\alpha_n \in \mathbb{K}$ hat.

Beispiel 23.3.

Das System $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ mit $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots)$, \dots , ist eine Schauder-Basis im Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$.

Eigentlich ist $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Orthonormalbasis* in $\ell^2(\mathbb{N})$. Ähnlich kann man eine Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$ bilden.

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über \mathbb{K} mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$.

Definition 23.4.(a) Ein System $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset H$ (das heißt, eine indexierte Teilmenge von H) heißt *Orthogonalsystem*, falls $u_\alpha \perp u_\beta \forall \alpha \neq \beta$ (das heißt, falls $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0 \forall \alpha \neq \beta$).

(b) Das Orthogonalsystem $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ heißt *orthonormal* falls $\|u_\alpha\| = 1 \forall \alpha \in \mathbb{A}$.

(c) Ein System $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset H$ heißt *Orthonormalbasis*, wenn $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ Orthonormalsystem und Schauder-Basis gleichzeitig ist.

Theorem 23.3 (Fourier-Orthonormalbasen in $L^2[-\pi, \pi]$). (a) Seien $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Dann ist $\{e_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis in $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$.

(b) Das System

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ist eine Orthonormalbasis sowohl in $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ als auch in $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$.

Definition 23.5.

Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem im abstrakten Hilbertraum H und sei $w \in H$ ein beliebiger Vektor in H .

(a) Die skalaren Zahlen

$$\widehat{w}(n) := \langle w, u_n \rangle,$$

die wir für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten, heißen (*abstrakte*) *Fourierkoeffizienten* vom Vektor w bezüglich des Systems $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{w}(n)u_n$ heißt (*abstrakte*) *Fourierreihe* vom Vektor w bezüglich $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Eine endliche Summe $P_k w := \sum_{n=1}^k \widehat{w}(n)u_n$ heißt die k -te Fourier-Partialsumme von w .

Aufgabe. $P_k : w \mapsto \sum_{n=1}^k \widehat{w}(n)u_n$ sind stetige lineare Operatoren im $H \forall k \in \mathbb{N}$.

Theorem 23.4 (abstrakte Parseval-Gleichung).

Sei $\{u_n\}_{n=1}^N$, wobei $N \leq \infty$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für jeden Vektor $w \in H$ gilt $w = \sum_{n=1}^N \widehat{w}(n) u_n$.

(b) $\{u_n(\cdot)\}_{n=1}^N$ ist eine Orthonormalbasis in H .

(c) $\|w\|^2 = \sum_{n=1}^N |\widehat{w}(n)|^2$ (abstrakte Parseval-Gleichung)

(d) Die lineare Hülle

$$\text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^N = \left\{ \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n : k \in \mathbb{N}, k \leq N, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$$

ist dicht in H .

Bemerkung 23.4.(a) $(w - P_k w) \perp \text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^k$ und der Operator

$$P_k : w \mapsto \sum_{n=1}^k \widehat{w}(n)u_n$$

heißt *Orthogonalprojektion auf* $\text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^k$.

(b) Für jedes $w \in H$ ist $P_k w$ die *beste Approximation* von w im endlich-dimensionalen Unterraum $\text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^k$ im Sinne

$$\|w - P_k w\| = \text{dist}(w, \text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^k) = \min_{h \in \text{Spann}\{u_n\}_{n=1}^k} \|w - h\|$$

(*die Methode der kleinsten Quadrate*).

(c) (a)+(b) $\Rightarrow \sum_{n=1}^k |\widehat{w}(n)|^2 \leq \|w\|^2 \forall w \in H \forall k \in \mathbb{N}, k \leq N$, für beliebige Orthonormalsystem $\{u_n\}_{n=1}^N$ in H .

(d) Falls $N = \infty$, gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{w}(n)|^2 \leq \|w\|^2 \quad \forall w \in H \quad \forall k \in \mathbb{N}$ für beliebige Orthonormalsystem $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in H . Diese Ungleichung heißt (abstrakte) *Bessel-Ungleichung*.

Bemerkung 23.5.

Th.23.4 (b)-(c) sagt, dass ein Orthonormalsystem genau dann eine Orthonormalbasis ist, wenn die Bessel-Ungleichung für jedes $w \in H$ ein Parseval-Gleichung wird.

Bemerkung 23.6.

Seien $N \leq \infty$ und $\tilde{N} \leq \infty$. Wenn $\{u_n\}_{n=1}^N$ und $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\tilde{N}}$ zwei Orthonormalbasen (oder sogar zwei Schauder-Basen) im Hilbertraum H sind, gilt $N = \tilde{N}$ und diese Zahl ist die *Dimensionalität* des Hilbertraums H .

Beispiel 23.4 (Sägezahnfunktion).

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, so dass $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$. Betrachten wir die Einschränkung $f = F|_{[-\pi, \pi]}$ auf $[-\pi, \pi]$. Dann $f \in L^2[-\pi, \pi]$ in dem Sinne, dass $f \in \tilde{L}^2[-\pi, \pi]$ und f generiert eine Äquivalenzklasse $[f]$ in $L^2[-\pi, \pi]$, die wir mit f identifizieren (nicht total streng).

Finden wir *Fourierkoeffizienten von f bezüglich der Orthonormalbasis*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

des Theorems 23.3.

Schritt 1. f ist eine ungerade Funktion auf $(-\pi, \pi)$ (zwei Punkte $\pm\pi$ spielen keine Rolle für Lebesgue-Integralen) \Rightarrow

$$0 = \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \cos(nt) \rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt,$$

$$0 = \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, 1 \rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t dt.$$

Schritt 2.

$$\begin{aligned} \beta_n &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \sin(nt) \rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t d \cos(nt) = -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left([t \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right) \\ &= -\frac{(-1)^n \pi - (-1)^n (-\pi)}{n\sqrt{\pi}} = \frac{(-1)^{n+1} 2\sqrt{\pi}}{n}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung. Wegen Th.23.3 konvergiert die Fourierreihe von f

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \quad (1)$$

gegen f im quadratischen Mittel (das heißt, bezüglich der L^2 -Norm).

Theorem 23.5 (Umformulierung des Theorems 23.3 über Fourierbasen). (a) Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} d\mu_1(t)$ gegen f bezüglich der L^2 -Norm.

(b) Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

von f gegen f bezüglich der L^2 -Norm, wobei die entsprechenden Fourierkoeffizienten durch $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu_1(t)$, $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) d\mu_1(t)$, $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) d\mu_1(t)$ definiert werden.