

Seminar S1G1: Mathematik in der Gesellschaft – Demokratie, Optimierung, Spieltheorie Peter Gladbach – Sommer 2023

Inhalt

In diesem Seminar behandeln wir an Hand von mehreren relevanten Themen die Wechselwirkungen zwischen Politik, Wirtschaft und Mathematik. Hierbei soll jeder Vortrag eine Einführung in eine mathematische Methode geben und die Anwendungen thematisiert und kritisch hinterfragt werden.

1 Wahlsysteme

- 1 Mehrheitswahlverfahren: Satz von Arrow, Schulze-Methode, Ranked choice
Referenz: [1, Kapitel 6,6.1,6.2,6.4]
Beweis: Satz von Arrow
- 2 Verhältniswahlverfahren: Zuordnung von Sitzplätzen in Parlamenten, Disproportionalitätsmaße
Referenz: [2, bis zur Überschrift "Additional Factors Influencing Disproportionality", plus Appendix], [3, Appendix 2]
Beweise: Sainte-Laguë-Verfahren minimiert Sainte-Laguë-Index, größtes-Rest-Verfahren minimiert Loosemore-Hanby-Index
- 3 Abgrenzung von Wahlkreisen: Gerrymandering, mathematische Methoden
Referenz: [4, bis Discussion], [5]
Beweis: Theorem 2 in [5]

2 Optimierung

- 4 Lineare Optimierung 1: konvexe Polyeder, Beispiele, Idee des Simplexalgorithmus
Referenz: [6, Kapitel 3 bis vor Proposition 3.13], [7, Kapitel 3.3,3.4,3.7]
Beweise: Proposition 3.9 und Proposition 3.11 in [6]. Zusätzlich die erste Richtung von Theorem 3.31, also jedes konvexe Polytop ist endlich generiert.
- 5 Lineare Optimierung 2: Beweis des Simplexalgorithmus, Dualität, Werttheorie, Beispiele
Referenz: [6, Kapitel 3.2 ab Proposition 3.13, Kapitel 3.4][7, Kapitel 12.1, 12.2]
Beweis: Proposition 3.13, Satz 3.14, Proposition 3.19, Satz 3.20 in [6]
- 6 Konvexe Optimierung 1: Konvexe Mengen, Separierende und stützende Hyperflächen, Epigraph, Minimum einer konvexen Funktion
Referenz: [8, Kapitel 2.5, 3.1.7] Beweis: Beweis 2.5.1 in [8]
- 7 Konvexe Optimierung 2: Dualität, Beispiele
Referenz: [8, Kapitel 5.1, 5.2, 5.3]
Beweis: Beweis 5.3.2 in [8]
- 8 Optimaler Transport: Logistik, duales Problem, Algorithmus
Referenz: [7, Kapitel 14]
Beweise: Alle aus Kapitel 14, insbesondere Problem 3

3 Gesellschaft

- 9 Spieltheorie 1: Normalformspiele, Nullsummenspiele, Nash-Gleichgewichte, Anwendungen
Referenz: [1, Kapitel 2, 3, 4.1]
Beweise: Satz 2, Satz 5
- 10 Spieltheorie 2: Extensive Spiele, Teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte, Wiederholte Spiele
Referenz: [1, Kapitel 5], [9, Kapitel 6.2]
Beweise: Satz 15, Bemerkung 65 in [1]
- 11 maschinelles Lernen 1: neuronale Netzwerke, universeller Approximationssatz, deep learning
Referenz: [10, Kapitel 38, 39, 44 - 44.2], [11, Satz 2]
Beweise: Die logistische Kurve als bedingte Wahrscheinlichkeit, *Motivations for the linear logistic function* in [10], und Übung 39.2 in [10]

- 12 maschinelles Lernen 2: unbeaufsichtigtes Lernen, k-means clustering, Vorhersagemodelle
Referenz: [12]
Beweise: Gegenbeispiel mit sechs Punkten in Kapitel 2.4, Satz 2.1 (auch für LLoyd's), Satz 2.2 in [12]
- 13 Ökologie und dynamische Systeme: Räuber-Beute-Modell, Statisches und dynamisches Gleichgewicht, stabile und nichtstabile Systeme
Referenz: [13, Kapitel 2.2, 6.5, 7.1]
Beweise: Satz 6.10, Satz 7.1, Satz 7.3, Satz 7.5

References

- [1] Bernhard Nebel. Spieltheorie. *Universität Freiburg*, 2009.
- [2] Michael Gallagher. Proportionality, disproportionality and electoral system. *Electoral studies*, 10(1):33–51, 1991.
- [3] Arend Lijphart and Robert W Gibberd. Thresholds and payoffs in list systems of proportional representation. *European Journal of Political Research*, 5(3):219–244, 1977.
- [4] Guillermo Owen and Bernard Grofman. Optimal partisan gerrymandering. *Political Geography Quarterly*, 7(1):5–22, 1988.
- [5] Boris Alexeev and Dustin G Mixon. An impossibility theorem for gerrymandering. *The American Mathematical Monthly*, 125(10):878–884, 2018.
- [6] Bernhard H Korte and Jens Vygen. *Combinatorial optimization*, volume 1. Springer, 2011.
- [7] George Bernard Dantzig. *Linear programming and extensions*, volume 48. Princeton university press, 1998.
- [8] Stephen Boyd, Stephen P Boyd, and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [9] Kevin Leyton-Brown and Yoav Shoham. Essentials of game theory: A concise multidisciplinary introduction. *Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning*, 2(1):1–88, 2008.
- [10] David JC MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge university press, 2003.
- [11] George Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control, signals and systems*, 2(4):303–314, 1989.
- [12] Matus Telgarsky and Andrea Vattani. Hartigan's method: k-means clustering without voronoi. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pages 820–827. JMLR Workshop and Conference Proceedings, 2010.
- [13] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012.