MB04 Analysis in mehreren Veränderlichen

Prof. Margherita Disertori

Version vom 14. Februar 2018

Zusammenfassung

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung "Analysis mehrerer Veränderlicher" des Lehramtsstudiums der Universität Bonn. Diese Zusammenfassung kann ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Insbesondere enthalten diese Notizen viele, aber nicht alle Definitionen, Aussagen und Beweise. Weitergehende Motivation, Hintergründe und Beispiele werden in der Vorlesung besprochen. Nicht ausgeführte Beweise sind entweder leichte Übungsaufgaben oder in der angegebenen Literatur zu finden.

Folgende Bücher werden u.a. empfohlen:

Hi1 Stefan Hildebrandt, Analysis 1, Springer

Hi2 Stefan Hildebrandt, Analysis 2, Springer

Kö1 Konrad Königsberger, Analysis 1, Springer

Kö2 Konrad Königsberger, Analysis 2, Springer

Fo2 Otto Forster, Analysis 2, Vieweg Studium

Diese Zusammenfassung basiert auf Skripten von Prof. Burstedde, Prof. S. Conti, Prof. S. Müller und Prof. H. Koch und auf weiteren nicht immer explizit genannten Quellen. Sie ist daher nur für Hörer der Vorlesung Analysis mehrerer Veränderlicher an der Universität Bonn im Wintersemester 2017/18 bestimmt und keineswegs als offizielle Publikation zu verstehen.

Hinweise auf Tippfehler und Korrekturen senden Sie bitte per Email an `disertori@iam.uni-bonn.de`.

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$ und seine Eigenschaften

Vorbemerkungen In *Analysis I* lernt man Funktionen in einer Variablen zu studieren, d.h.

$$\begin{aligned} f: \quad I &\to \quad \mathbb{R} \\ x &\mapsto \quad f(x) \end{aligned}$$

wobei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Diese kann als eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden, da der Definitionsbereich und der Wertebereich Untermengen von $\mathbb{R}$ sind. Dieser Raum hat eine algebraische Struktur: Man kann Zahlen summieren und multiplizieren: $x + y \in \mathbb{R}$, $xy \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere gibt es einen Abstandbegriff:

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \quad [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \quad d(x, y) := |x - y| \end{aligned}$$

Einen Abstandbegriff brauchen wir z.B um Intervalle zu definieren

$$(x - r, x + r) = \{y \in \mathbb{R} : \ |y - x| < r\}, \qquad x \in \mathbb{R}, r > 0.$$

Er ist auch notwendig um Stetigkeit zu studieren: Sehr informell ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wenn gilt: Ist $d(x, y) = |x - y|$ 'klein' dann ist auch $d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)|$ 'klein'. Um die korrekte Definition von Stetigkeit zu formulieren, braucht man den Begriff von konvergenten Folgen. Dieser Begriff ist auch notwendig um die Eigenschaften von stetigen Funktionen zu studieren und um Ableitungen zu definieren.

Unser Ziel in dieser Vorlesung ist Funktionen von mehreren Variablen zu studieren, d.h.

$$\begin{aligned} f: \quad U &\to \quad \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \quad f(v) \end{aligned}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. Definitionsbereich und Wertebereich sind jetzt Untermengen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$. Um den Begriff von Stetigkeit und Differenzial einzuführen, müssen wir erst Abstand, offene Mengen und konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$ definieren.

1.1.1 Norm und Skalarprodukt

Definition 1.1. $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-mal) ist die Menge der reellen n-Tupel*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad v_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

Elemente von $\mathbb{R}^n$ heißen Vektoren. Sie lassen sich mit reellen Zahlen multiplizieren, geschrieben nebeneinander ohne ein spezielles Malzeichen, und untereinander addieren. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, v' \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $v + v' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$v + v' = \begin{pmatrix} v_1 + v_1' \\ \vdots \\ v_n + v_n' \end{pmatrix} \qquad \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Das Element $\vec{0}$ hat die Komponenten $\vec{0}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ und wird Nullvektor genannt.

Notation. Wir werden immer v als Spaltenvektor schreiben. Der Zeilenvektor $(v_1, \ldots, v_n)$ wird v^t (v transponiert) notiert. Dann

$$\mathbb{R}^n = \{v = (v_1, \ldots, v_n)^t : v_i \in \mathbb{R} \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Bemerkung. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ es gilt

$$\vec{0} + v = v, \qquad v + (-v) = \vec{0}, \qquad 1v = v, \qquad 0v = \vec{0}.$$

Aufpassen. Man kann reellen Zahlen multiplizieren aber man kann nicht zwei Vektoren multiplizieren! Stattdessen muss man das Skalarprodukt einführen.

Definition 1.2. *Das Skalarprodukt ist eine bilineare Funktion*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \ & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (v, v') \mapsto \langle v, v' \rangle := v^t v' = \textstyle\sum_{i=1}^n v_i v_i'. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn $n = 1$ gilt $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $v = (v_1) = v^t$ und $\langle v, v' \rangle = v_1 v_1'$ ist die Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}. \tag{1.1.3}$$

Das ist die Verallgemeinerung der Eigenschaft in $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$ und $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Man hat auch

$$\left\langle v, \vec{0}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} 0 v_i = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.4}$$

Definition 1.3. *Die euklidische Norm von $v \in \mathbb{R}^n$ ist die reelle Zahl*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}. \tag{1.1.5}$$

Die Abstandfunktion ist

$$\begin{aligned} d(\ ,\ ): \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty) \\ & (v, v') \mapsto d(v, v') := \|v - v'\|. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Norm des Nullvektors ist gleich null: $\|\vec{0}\| = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$.

Aufpassen. Wir haben noch keine Winkel definiert also können wir **nicht** $\langle v, v'\rangle = \|v\|\|v'\| \cos\theta$ schreiben!

Lemma 1.4. *Es gilt*

(i) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** *Für $v, v' \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle v, v'\rangle| \leq \|v\|\,\|v'\|. \tag{1.1.6}$$

(ii) **Dreiecksungleichung** *Für $v, v' \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|. \tag{1.1.7}$$

Beweis. **Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung.** Man hat zwei mögliche Fälle.

Fall (a): $v = \vec{0}$. Dann $\|v\| = \|\vec{0}\| = 0$ und $\langle v, v'\rangle = \left\langle \vec{0}, v'\right\rangle = 0\ \forall v'$. Dann

$$|\langle v, v'\rangle| = \left|\left\langle \vec{0}, v'\right\rangle\right| = 0 = \|v'\|0 = \|v\|\|v'\|,$$

also (1.1.6) gilt.

Fall (b): $v \neq \vec{0}$. Dann $\|v\| > 0$. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := \|v' + tv\|^2$ und rechnen

$$f(t) = \|v' + tv\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v'_i + tv_i)^2 \tag{1.1.8a}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v'^2_i + 2tv_i v'_i + t^2 v_i^2) \tag{1.1.8b}$$

$$= \|v'\|^2 + 2t \langle v, v' \rangle + t^2 \|v\|^2. \tag{1.1.8c}$$

Da $\|v\|^2 > 0$, hat f einen eindeutigen Minimierer, der durch Lösen von $f'(t_*) = 0$ gefunden werden kann. Man erhält $t_* = -\langle v, v' \rangle / \|v\|^2$. Es folgt, dass

$$0 \leq \|v' + t_* v\|^2 = \|v'\|^2 - \frac{\langle v, v' \rangle^2}{\|v\|^2} \tag{1.1.9}$$

und damit

$$|\langle v, v' \rangle|^2 = \langle v, v' \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|v'\|^2 \tag{1.1.10}$$

und (1.1.6). (Aufpassen: Aus $a^2 \leq b^2$ folgt $a \leq b$ nur, wenn man bereits weiß, dass $b \geq 0$). [1: 9.10.2017]

[2: 12.10.2017]

Beweis von Dreiecksungleichung. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\|v + v'\|^2 = f(1) = \|v\|^2 + 2 \langle v, v' \rangle + \|v'\|^2 &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, v' \rangle| + \|v'\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \, \|v'\| + \|v'\|^2 = (\|v\| + \|v'\|)^2,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Cauchy-Schwarz Un. benutzt haben. Dann ziehen wir wieder die Wurzel. □

Lemma 1.5. *$\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Beweis. Siehe Analysis I. □

1.1.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Unser Ziel ist den Begriff von einem offenen und abgeschlossenen Intervall (a, b) und $[a, b]$ auf $\mathbb{R}^n$ zu erweitern. Dafür definieren wir eine offene und abgeschlossene Kugel.

Definition 1.6. *Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Die Menge*

$$B_r(v) := \{v' \in \mathbb{R}^n : \|v' - v\| < r\} \tag{1.1.11}$$

heißt (offener) Ball (oder Kugel) vom Radius r um v. Die Menge

$$\bar{B}_r(v) := \{v' \in \mathbb{R}^n : \|v' - v\| \leq r\} \tag{1.1.12}$$

heißt abgeschlossene Kugel vom Radius r um v.

Bemerkung. Sei $n = 1$ dann $v \in \mathbb{R}$ und $B_r(v) = (v - r, v + r)$ und $\bar{B}_r(v) = [v - r, v + r]$.

Definition 1.7 (Offene und abgeschlossene Menge)**.**

(i) *$A \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn für alle $v \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon(v) \subset A$.*

(ii) *$A \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist, d.h. wenn für alle $v \notin A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon(v) \subset A^c$, d.h. $B_\varepsilon(v) \cap A = \emptyset$ wobei $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$.*

Bemerkung.

(i) Wir verwenden auch die Notation $B(v, r) := B_r(v)$.

(ii) Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

Beispiel. Sei $n = 1$, und $a < b$ zwei reelle Zahlen. Die Intervalle $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \subset \mathbb{R}$ sind offen, die Intervalle $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

Beispiel. Sei $n = 2$ und $a < b$ zwei reelle Zahlen.

Die Menge $\{v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, a < y < b\}$ ist offen.

Die Menge $\{v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ ist abgeschlossen.

Die Menge $\{v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, a \leq y \leq b\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Die Menge $\{v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = 0\}$ ist abgeschlossen.

Lemma 1.8. *Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist die Menge $B_r(v)$ offen.*

Beweis. Für $v' \in B_r(v)$ kann man $\varepsilon := r - |v - v'|$ wählen. Aus $v' \in B_r(v)$ folgt, dass $\varepsilon > 0$. Aus der Dreiecksungleichung, dass für alle $v'' \in B_\varepsilon(v')$ gilt

$$\|v'' - v\| \leq \|v'' - v'\| + \|v' - v\| < \varepsilon + \|v' - v\| = r, \tag{1.1.13}$$

und somit, dass $B_\varepsilon(v') \subset B_r(v)$. $\square$

Lemma 1.9. *Es gilt:*

(i) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

(ii) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

(iii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(iv) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis.

(i): Seien $I = (1, \dots, k)$ eine endlich Indexmenge, $O_1, \dots O_k$ offene Mengen und

$$O = \bigcap_{i=1}^{k} O_i = \{v \in \mathbb{R}^n : v \in O_i \text{ für alle } i \in I\}. \tag{1.1.14}$$

Sei $v \in O$. Für jedes $i \in I$ gilt $v \in O_i$, und da O_i offen ist, folgt, dass es $\varepsilon_i > 0$ gibt, so dass $B_{\varepsilon_i}(v) \subset O_i$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i : i \in I\} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$. Da $\varepsilon_i > 0 \forall i$ und I endlich ist,gilt $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(v) \subset B_{\varepsilon_i}(v) \subset O_i$ für alle i, deshalb ist $B_\varepsilon(v) \subset O$ und O offen.

(ii): Seien I eine endlich oder unendlich Indexmenge und O_α offene Menge $\forall \alpha \in I$, und

$$O = \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha = \{v \in \mathbb{R}^n : \text{es gibt } \alpha \in I \text{ so dass } v \in O_\alpha\}. \tag{1.1.15}$$

Sei $v \in O$. Dann gibt es $\alpha \in I$, so dass $v \in O_\alpha$. Da O_α offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(v) \subset O_\alpha$. Aus der Definition von O folgt, dass $B_\varepsilon(v) \subset O$.

(iii) und (iv) werden entweder analog oder durch Komplementbildung bewiesen (Hausaufgabe). □

Bemerkung. Eine unendliche Indexmenge könnte jede unendliche Menge sein, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Beispiel. Sei $n = 1$ und $I_k := (-\frac{1}{k}, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ eine unendliche Familie von Intervalle. Es gilt

- I_k ist offen für jede k,
- $\cap_{k=1}^{N} I_k = (-\frac{1}{N}, 1)$ (Durchschnitt endlich viele Intervalle) ist offen für jede $N \geq 1$,
- $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = [0, 1)$ (Durchschnitt unendlich viele Intervalle) ist weder offen noch abgeschlossen.

[2: 12.10.2017]

[3: 16.10.2017]

1.1.3 Rand und Abschluss

Vorbemerkungen Sei $n = 1$, $a < b$ zwei reelle Zahlen und $I = (a, b]$ ein Intervall. Die Randpunkten von I sind $x = a$ und $x = b$ und gehören nicht alle zum Intervall. Man schreibt $\partial I = \{a, b\}$. Der Randpunkt a hat folgende Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I \neq \emptyset \text{ und } (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I^c \neq \emptyset.$$

Dasselbe gilt für b. Ein Zahl $x \in I$ ist ein innerer Punkt von I wenn x kein Randpunkt ist, also $a < x < b$. Man schreibt $I^0 = \{x \in I : a < x < b\}$. Dann $I^0 \cap \partial I = \emptyset$. Ein innerer Punkt hat folgende Eigenschaft:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I.$$

Das Intervall $I \cup \partial I = [a, b]$ ist abgeschlossen und wird Abschluss von I genannt. Unser Ziel ist diese Begriffe in $\mathbb{R}^n$ zu definieren.

Definition 1.10. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist*

(i) ein Randpunkt von A, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(v) \cap A^c \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(v) \cap A \neq \emptyset$, wobei $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$;

(ii) ein innerer Punkt von A, wenn es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset A$.

Definition 1.11. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren*

(i) $\partial A := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist ein Randpunkt von } A\}$.

(ii) $A^\circ := \{v \in A : v \text{ ist ein innerer Punkt von } A\}$,

(iii) $\overline{A} := A \cup \partial A$.

∂A heißt Rand von A, $\overline{A}$ heißt Abschluss von A.

Beispiele.

(i) Sei $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Dann $\partial A = \{a, b\}$, $A^\circ = (a, b)$ und $\bar{A} = [a, b]$.

(ii) Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, und $A = B_r(v)$. Dann $A^\circ = A$, $\partial A = \{v' \in \mathbb{R}^n : \|v' - v\| = r\}$ und $\overline{A} = \overline{B}_r(v) =$ abgeschlossene Kugel.

Beweisidee: Sei $v' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v' - v\| = r$. Definiere die Funktion

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^n \\ & t \to & f(t) := v + t(v' - v) \end{array}.$$

Betrachte die Vektoren $f(t)$ um zu zeigen, dass $B_\varepsilon(v') \cap A^c \neq \emptyset$.

(iii) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade (d.h. sei $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, und $G = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$). Dann ist G abgeschlossen, $\partial G = G$, $G^\circ = \emptyset$.

Wir studieren jetzt einige Eigenschaften von Rand und Abschluss.

Lemma 1.12. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(i) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$; $\overline{A} = \partial A \cup A^\circ$; $\partial A \cap A^\circ = \emptyset$; $\partial A = \overline{\partial A}$;

(ii) A° *ist offen,* ∂A *und* $\overline{A}$ *sind abgeschlossen.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Lemma 1.13. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. A ist genau dann*

(i) abgeschlossen wenn $\overline{A} = A$;

(ii) offen wenn $A^\circ = A$.

Beweis.

(i) Wir müssen zwei Implikationen beweisen.
Beweis von $\Leftarrow$. Sei $\bar{A} = A$. Aus Lemma 1.12 *(ii)* folgt: da $\bar{A}$ abgeschlossen ist, ist A abgeschlossen.
Beweis von $\Rightarrow$. Sei A abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $\bar{A} = A$. Da $A \subset \bar{A}$ es ist genug zu zeigen, dass $\bar{A} \subset A$. Durch Widerspruch: falls $\bar{A} \not\subset A$, dann $\exists v \in \bar{A} \backslash A$. Aus Def.1.11*(iii)* wissen wir dass $\bar{A} = A \cup \partial A$, dann $v \in \partial A \backslash A$, d.h. $v \in \partial A$ und $v \in A^c$. A ist abgeschlossen dann A^c ist offen, dann $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(v) \subset A^c$. Aber $v \in \partial A$ dann aus Def.1.11*(i)* v ist ein Randpunkt dann aus Def.1.10 $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(v) \cup A \neq \emptyset$. Aber das ist unmöglich, also $\bar{A} = A$.

(ii) Hausaufgabe. □

1.1.4 Konvergente Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition 1.14. *Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung*

$$a: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n \\ k \mapsto a_k \end{array}, \qquad a_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Für die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ wird auch die Notation $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie die Abkürzung (a_k) oder schlicht a benutzt.

Bemerkung. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist jede Komponente $a_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $(a_i)_k := a_{ki}$ $i = 1, \ldots, n$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Definition 1.15. *Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen den Grenzwert oder Limes $a^* \in \mathbb{R}^n$ falls folgendes gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass*

$$\|a_k - a^*\| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq K_\varepsilon. \tag{1.1.16}$$

Man schreibt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a^*. \tag{1.1.17}$$

Beispiele. Einige Folgen in $\mathbb{R}$:

(i) Sei $a_k = \frac{1}{1+k}$, d.h. $a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir haben

$$a_k = |a_k - 0| = \frac{1}{1+k} < \varepsilon \Leftrightarrow \ k+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ k \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir definieren also $K_\varepsilon := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Dann $|a_k - 0| < \varepsilon \ \forall k \geq K_\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, konvergiert diese Folge gegen 0.

(ii) Sei $a_k := (-1)^k$, d.h. $a = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$. Diese Folge ist nicht konvergent!

Beweis durch Widerspruch: Nehmen wir an die Folge konvergiert gegen a^*. Dann $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \geq 0$ s.d. $|a_k - a^*| < \varepsilon \ \forall k \geq K_\varepsilon$. Dann $|1 - a^*| < \varepsilon$ und $|-1 - a^*| < \varepsilon$, das unmöglich für $\varepsilon < 1$ ist.

Beispiel. Eine Folge in $\mathbb{R}^2$. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ durch $a_k := \left(\frac{1}{k+1}, (-1)^k\right)$. Diese Folge ist nicht konvergent.

Beweis durch Widerspruch: Nehmen wir an die Folge konvergiert gegen $a^* = (x^*, y^*)$. Dann $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \geq 0$ s.d. $\|a_k - a^*\| < \varepsilon \ \forall k \geq K_\varepsilon$. Dann $\|a_k - a^*\|^2 < \varepsilon^2 \ \forall k \geq K_\varepsilon$. Aber $\|a_k - a^*\|^2 = (\frac{1}{k+1} - x^*)^2 + ((-1)^k - y^*)^2$ dann $((-1)^k - y^*)^2 < \varepsilon^2$ d.h $(-1 - y^*)^2 > \varepsilon$ und $(1 - y^*)^2 > \varepsilon$. Das ist unmöglich für $\varepsilon < 1$ ist.

Lemma 1.16.

(i) Die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die Folge $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $b_k := \|a_k - a^*\|$ gegen 0 konvergiert.

(ii) Bedingung (1.1.16) ist zu $a_k \in B_\varepsilon(a^*)$ für alle $k \geq K_\varepsilon$ äquivalent.

Beweis. Konsequenz von Def.1.15. □

Lemma 1.17. *Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ die Folge der i-ten Komponenten $a_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegen a_i^* konvergiert.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Man kann diesselben Operationen für Folgen ausführen wie für Vektoren.

Definition 1.18. *Seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) Die Summe ist die Folge in $\mathbb{R}^n$ $a+b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $(a+b)_k := (a_k + b_k)$.

(ii) Die Multiplikation ist die Folge in $\mathbb{R}^n$ $\lambda a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $(\lambda a)_k := \lambda_k a_k$.

(iii) Das Skalarprodukt ist die Folge in $\mathbb{R}$ $\langle a, b\rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $(\langle a, b\rangle)_k := \langle a_k, b_k\rangle$.

Lemma 1.19. *Seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergente Folgen, mit Grenzwerte $a \to a^* \in \mathbb{R}^n$, $b \to b^* \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \to \lambda^* \in \mathbb{R}$.*

Dann:

(i) $a + b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergiert, und $\lim_{k\to\infty}(a + b)_k = a^* + b^*$.

(ii) $\lambda a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ konvergiert, und $\lim_{k\to\infty}(\lambda a)_k = \lambda^* a^*$.

(iii) $\langle a, b\rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergiert, und $\lim_{k\to\infty} \langle a, b\rangle_k = \langle a^*, b^*\rangle$.

Beweis. Zu (i): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da a und b konvergieren, gibt es $k_a, k_b \in \mathbb{N}$, so dass $\|a_k - a^*\| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_a$ und analog für b. Somit ist für alle $k \geq \max\{k_a, k_b\}$

$$\|(a_k + b_k) - (a^* + b^*)\| \leq \|a_k - a^*\| + \|b_k - b^*\| < 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon. \tag{1.1.18}$$

Die anderen Aussagen folgen ähnlich. Alternativ kann man den Beweis mittels Lemma 1.17 auf die eindimensionalen Resultate der Analysis 1 zurückführen. □

1.1.5 Konvergente Folge und Abgeschlossenheit

Es gibt wichtige Beziehungen zwischen Abgeschlossenheit und Grenzwerten.

Beispiel. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_k := \frac{1}{k+1}$ definiert und sei $I = (0, 2)$ ein offenes Intervall. Dann gilt $a_k \in I$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a^* = 0 \in \bar{I} = [0, 2]$.

Lemma 1.20. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.*

Falls $a_k \in A$ für alle k, dann muss der Grenzwert im Abschluss von A sein: $a^* \in \bar{A}$.

Beweis. Durch Widerspruch. Falls $a^* \notin \bar{A}$, dann $a^* \in (\bar{A})^c$, was eine offene Menge ist, weil $\bar{A}$ immer abgeschlossen ist. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(a^*) \cap \bar{A} = \emptyset$. Aber aus Lemma 1.16 (i) folgt $\exists K_\varepsilon$ s .d. $a_k \in B_\varepsilon(a^*)$ für alle a_k $k \geq K_\varepsilon$. Dann würden alle a_k, $k \geq K_\varepsilon$ nicht in A liegen gegen die Annahme. $\square$

Lemma 1.21. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt $\overline{A} = \{v \in \mathbb{R}^n :$ es gibt eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ so, dass $a_k \in A$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} a_k = v\}$.*

[4: 19.10.2017]

[5: 23.10.2017]

Beweis.

$\subset$ Sei $v \in \bar{A}$, dann entweder $v \in A$ oder $v \in \partial A \backslash A$. Falls $v \in A$ definieren wir die Folge $a_k = a$ $\forall k$. Dann $a_k \in A$ $\forall k$ und a_k konvergiert gegen v.

Falls $v \in \partial A \backslash A$, dann $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(v) \cap A \neq \emptyset$. Um eine Folge zu definieren sei $\varepsilon = \frac{1}{1+k}$ und für $\varepsilon = \frac{1}{1+k}$ nehmen wir einen Vektor $a_k \in B_\varepsilon(v) \cap A$. Dann $a_k \in A$ $\forall k$ und a_k konvergiert gegen v.

andere Richtung Konsequenz aus Lemma 1.20. $\square$

Lemma 1.22. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn folgendes gilt:*

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Falls $a_k \in A$ für alle k, dann $a^* \in A$.

Beweis. Hausaufgabe. $\square$

1.1.6 Cauchy-Folgen und Teilfolgen

Definition 1.23. *Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ist eine Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $K_\varepsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\|a_k - a_h\| < \varepsilon \text{ für alle } k, h \geq K_\varepsilon\,. \tag{1.1.19}$$

Lemma 1.24. *Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Konvergenz impliziert Cauchy-Folge: Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es ein K, so dass für alle $k \geq K$ gilt $|a_k - a^*| < \varepsilon/2$. Daher ist für $k, h \geq K$

$$\|a_k - a_h\| = \|a_k - a^* - (a_h - a^*)\| \leq \|a_k - a^*| + \|a_h - a^*\| < \varepsilon. \quad (1.1.20)$$

Cauchy-Folge impliziert Konvergenz: Dies ist zur Vollständigkeit äquivalent, die für $n = 1$ in Analysis I besprochen wurde. Die n-dimensionale Aussage folgt mit Lemma 1.17. □

Bemerkung. Es ist oft einfacher festzustellen ob a eine Cauchy-Folge ist, als direkt festzustellen ob a gegen a^* konvergiert. So kann man beweisen, dass eine Folge konvergent ist, auch wenn man den Grenzwert a^* nicht kennt.

Definition 1.25. *Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist streng monoton (wachsend), wenn für alle $k, k' \in \mathbb{N}$ gilt:*
$k < k'$ dann $\varphi(k) < \varphi(k')$.

Aufpassen. Da $\varphi(k) \geq 0$, kann die Abbildung nicht streng monoton fallend sein!

Definition 1.26 (Teilfolge)**.** *Eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn eine streng monotone Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass $b_k = a_{\varphi(k)}$.*

Beispiel. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge. Wir definieren a', a'', a''' und b die Folgen $a'_k := a_{10+k}$, $a''_k := a_{2k+1}$, $a'''_k = a_{10^k}$, Dann $a' = a \circ \varphi_1$, $a'' = a \circ \varphi_2$, und $a''' = a \circ \varphi_3$ mit $\varphi_1(k) = 10 + k$, $\varphi_2(k) = 2k + 1$, $\varphi_3(k) = 10^k$, die alle streng monotone Abbildungen sind. Dann sind a', a'' und a''' Teilfolgen von a.

Sei jetzt $b_k := a_{10}\ \forall k$. Dann $b = a \circ \varphi_4$, mit$\varphi_4(k) = 10\ \forall k$ ist eine konstante Abbildung. Dann ist b keine Teilfolge von a.

Lemma 1.27. *Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine konvergente Folge, b eine Teilfolge von a. Dann ist b konvergent, und $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k$.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Lemma 1.28. *Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ zwei konvergenten Teilfolgen von a. Sei $\lim_{k\to\infty} b_k = b^*$, $\lim_{k\to\infty} c_k = c^*$, mit $b^* \neq c^*$. Dann ist die Folge a nicht konvergent.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.27 durch Widerspruch. Sei a konvergent mit $\lim_{k\to\infty} a_k = a^*$. Dann aus Lemma 1.27 folgt dass alle Teilfolgen kovergierent gegen a^* auch. Dann $b^* = c^* = a^*$ gegen die Annahme. □

Beispiel. Man kann dieses Lemma nutzen, um die Konvergenz einer Folge zu widerlegen. Z.B. sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$, mit $a_k = (x_k, y_k)$, $x_k := (-1)^k$ und $y_k = 2^{-k}$. Wir definieren die Teilfolgen $b_k := a_{2k}$ und $c_k := a_{2k+1}$ (wohl definiert, weil $\varphi(k) = 2k$ und $\varphi(k) = 2k+1$ beide streng monotone Abbildungen sind). Dann $b_k = (1, 4^{-k}) \to (1, 0)$ und $c_k = (-1, 2^{-1}4^{-k}) \to (-1, 0) \neq (1, 0)$ Die Folge a ist dann nicht konvergent.

Aufpassen. Es gibt auch Folgen die *keine* konvergente Teilfolge haben. Nehmen z.B. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $a_k := k$.

1.1.7 Kompaktheit

Vorbemerkungen. Wir haben gesehen, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ nur abgeschlossen ist wenn jede konvergente Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $a_k \in A\ \forall k$, ihren Grenzwert in A haben muss $\lim_{k\to\infty} a_k \in A$.

Wenn A abgeschlossen und beschränkt ist, kann man auch einiges über alle Folgen aussagen (konvergente und nicht konvergente) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $a_k \in A\ \forall k$.

Zum Beispiel betrachten wir die zwei Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $a_k = (-1)^k$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $b_k = k$. Dann $a_k \in [-1, 1]\ \forall k$. Die Folge a ist nicht konvergent, hat aber zwei konvergente Teilfolgen $a'_k := a_{2k} = 1$ und $a''_k := a_{2k+1} = -1$. Im Gegensatz gibt es kein $R > 0$ s.d. $b_k \in [-R, R]\ \forall k$. Die Folge b ist nicht konvergent und hat keine konvergente Teilfolge. Wir werden jetzt diese Ideen präzise machen.

[5: 23.10.2017]

[6: 26.10.2017]

Definition 1.29 (Beschränktheit)**.**

(i) *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $A \subset B_R(\vec{0})$.*

Äquivalent dazu ist $\sup\{\|v\| : v \in A\} < \infty$.

(ii) *Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder, $A := \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, beschränkt ist.*

Äquivalent dazu ist $\sup\{\|a_k\| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Beispiel. Die Menge $A = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen aber nicht beschränkt. Die Folge $a_k = (-1)^k$ ist beschränkt, wärend $b_k := k$ nicht beschränkt ist.

Lemma 1.30. *Jede konvergente Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ist beschränkt.*

Beweis. Da $a \to a^*$, $\exists K \in \mathbb{N}$ s.d. $a_{k'} \in B_1(a^*)$ $\forall k \geq K$. Dann $A = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_1, \ldots, a_{K-1}\} \cup B_1(a^*)$, die eine beschränkte Menge ist. □

Wir werden auch folgende Begriffe und Eigenschaften brauchen die nur für Folgen in $\mathbb{R}$ gelten.

Definition 1.31 (Monotone Folgen in $\mathbb{R}$)**.** *In $\mathbb{R}^1 \sim \mathbb{R}$ heißt eine Folge (a_k) monoton (wachsend), wenn die Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, wenn also gilt*

$$k < h \quad \Rightarrow \quad a_k \leq a_h. \tag{1.1.21}$$

Sie heißt streng monoton (wachsend), wenn sogar $a_k < a_h$. Entsprechend definiert man monoton fallend.

Aufpassen. Dieser Begriff gilt nicht in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.32.

(i) Eine monoton wachsende und beschränkte Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergiert gegen $\sup_{k\in\mathbb{N}}\{a_k\}$, eine monoton fallende beschränkte gegen $\inf_{k\in\mathbb{N}}\{a_k\}$.

(ii) Jede Folge in $\mathbb{R}^1$ besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis. Siehe Analysis I. □

Der Schwerpunkt dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

Satz 1.33 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis.

(i) $n = 1$: Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beschränkt. Nach Lemma 1.32 (ii) besitzt a eine monotone Teilfolge. Diese Teilfolge ist monoton und beschränkt und deshalb konvergent (Lemma 1.32 (i)).

(ii) $n = 2$. Sei $a_k = (x_k, y_k)$, so dass die Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ den Komponenten der Folge a entsprechen. Da (a_k) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^2$ ist, sind die Komponenten (x_k) und (y_k) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Aus *(i)* $\exists\ \varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, so dass $x_{\varphi_1(k)} \to x^*$. Dann ist die Folge $y \circ \varphi_1$, d.h., $k :\mapsto y_{\varphi_1(k)}$, eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und besitzt deshalb eine konvergente Teilfolge ausgedrückt durch $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton, $y \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = y_{\varphi_1(\varphi_2(k))} \to y^*$. Da jede Teilfolge einer konvergenten Folge zum selben Grenzwert konvergiert (Lemma 1.27), gilt auch $x_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(k)} \to x^*$. Deshalb $a_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(k)} \to a^* = (x^*, y^*)$ in $\mathbb{R}^2$.

Der n-dimensionale Fall wird dann analog mit vollständiger Induktion bewiesen (das ist notationell wesentlich aufwendiger, aber nicht signifikant anders). □

Definition 1.34 (Kompaktheit)**.** *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt falls A abgeschlossen und beschränkt ist.*

Im $\mathbb{R}^n$ existiert eine einfache Charakterisierung von Kompaktheit.

Satz 1.35. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $a_k \in A \;\forall k$ eine konvergente Teilfolge besitzt mit Grenzwert in A.*

Beweis. $\Rightarrow$ Sei A kompakt. Dann ist A beschränkt, dann jede jede Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $a_k \in A \;\forall k$ ist beschränkt und aus Satz 1.33 besitzt eine konvergente Teilfolge $a \circ \varphi$. Da A abgeschlossen ist, aus Lemma 1.22 muss der Grenzwert von $a \circ \varphi$ auch in A liegen.

$\Leftarrow$ Nehmen wir an, jede Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ mit $a_k \in A \;\forall k$ besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A. Durch Widerspruch, wäre A unbeschränkt, so gäbe es eine Folge (a_j) mit $\|a_j\| \geq j$. Die muss eine konvergente Teilfolge besitzen $b_k := a_{\varphi(k)}$. Dann gilt $\|b_k\| = \|a_{\varphi(k)}\| \geq \varphi(k) \geq k$, deshalb ist (b_k) unbeschränkt. Aber konvergente Folgen sind beschränkt aus Lemma 1.30, ein Widerspruch. Deshalb ist A beschränkt.

Sei nun (a_j) eine Folge in A, die gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Dann existiert eine konvergente Teilfolge (b_k) mit Grenzwert b^* in A. Da aber die ganze Folge gegen a^* konvergiert, muß $a^* = b^*$ sein. Deshalb $a^* \in A$, dann ist A abgeschlossen.

□

1.2 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition 1.36. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Die Abbildung f ist in $v^* \in A$ stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\|f(v) - f(v^*)\| < \varepsilon \quad \textit{falls } v \in A \textit{ und } \|v - v^*\| < \delta. \tag{1.2.1}$$

Äquivalent dazu ist

$$f(v) \in B_\varepsilon(f(v^*)) \quad \textit{für alle} \quad v \in A \cap B_\delta(v^*). \tag{1.2.2}$$

Die Funktion f ist stetig, wenn sie in allen $v^* \in A$ stetig ist. Man schreibt $f \in C^0(A; \mathbb{R}^m)$.

Definition 1.37. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Die Abbildung f ist in $v^* \in A$ folgenstetig wenn folgendes gilt:*

Falls $a : \mathbb{N} \to A$ eine Folge ist, die gegen $v^* \in A$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $f \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, $k \mapsto f(a_k)$ gegen $f(v^*)$.

Lemma 1.38. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion f ist genau dann in $v^* \in A$ stetig, wenn sie in v^* folgenstetig ist.*

Bemerkung. Diese Lemma ist sehr hilfreich um Stetigkeit in v^* zu widerlegen. Dafür braucht man nur *eine* Folge $a : \mathbb{N} \to A$ zu finden, s.d. a_k gegen v^* konvergiert, aber $f(a_n)$ nicht gegen $f(v^*)$ konvergiert. Nehmen wir z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto f(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \|v\| \leq 1, \\ 0 & \text{falls } \|v\| > 1, \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig in $v^* = (1,0)^t$. Nehmen $a_k := (1 + \frac{1}{1+k}, 0)^t$.

[6: 26.10.2017]

[7: 30.10.2017]

Beweis von Lemma 1.38. Wir zeigen zunächst: Stetigkeit impliziert Folgenstetigkeit. Sei f stetig, (a_k) eine Folge, die gegen v^* konvergiert und $\varepsilon > 0$. Wir suchen N, so dass

$$\|f(v^*) - f(a_k)\| < \varepsilon \tag{1.2.3}$$

falls $k \geq N$. Da f stetig, ist existiert $\delta > 0$, so dass für $v \in A$

$$\|f(v) - f(v^*)\| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad \|v - v^*\| < \delta. \tag{1.2.4}$$

Da $a_k \to v^*$, existiert N so dass $\|a_k - v^*\| < \delta$ falls $k \geq N$. Dann folgt $\|f(v) - f(a_k)\| < \varepsilon$ für diese Indizes.

Nun zeigen wir: Ist f nicht stetig in v^*, dann ist f auch nicht folgenstetig in v^*. Wir negieren die Aussage der Stetigkeit: Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $v_\delta \in A$ existiert mit $\|v_\delta - v^*\| < \delta$ und $\|f(v_\delta) - f(v^*)\| \geq \varepsilon$. Sei jetzt $\delta_k := \frac{1}{1+k}$, $k \in \mathbb{N}$ und $a_k := v_{\delta_k} \in A$ $\forall k$. Dann definiert a_k eine Folge $a : \mathbb{N} \to A$ die gegen v^* konvergiert. Aber $\|f(a_k) - f(v^*)\| \geq \varepsilon$, d.h. die Folge $f(a_k)$ konvergiert nicht gegen $f(v^*)$. Das widerspricht der Folgenstetigkeit. □

Definition 1.39. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v = (x,y)^t \mapsto f(x,y)$.*
Für alle $y \in \mathbb{R}$ fest definieren wir die Abbildung
$f_{1,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f_{1,y}(x) := f(x,y)$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ fest definieren wir die Abbildung
$f_{2,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f_{2,x}(y) := f(x,y)$.
f heißt komponentenweise stetig in $v^* = (x^*, y^*)^t$ wenn $f_{1,y*}$ stetig in x^* ist und $f_{2,x*}$ stetig in y^* ist.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$. f heißt komponentenweise stetig in $v^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^t$ wenn die Abbbildung $x_j \mapsto f(x_1^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_m^*)$ stetig in x_j^* $\forall j = 1, \ldots, n$.

Lemma 1.40. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $v^* \in \mathbb{R}^2$. Dann ist f auch kompenentenweise stetig in v^*.*

Beweis. Hausaufgabe. □

Aufpassen Kompenentenweise stetig $\not\Rightarrow$ stetig! Als Beispiel nehmen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x, y \text{ nicht beide Null,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Diese Funktion ist komponentenweise stetig (Übung). Sie ist aber ist *nicht stetig* im Punkt $(0,0)$; betrachte dazu die Folge $a_k := (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1})$. **Übung:** Beweisen, dass $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\ \exists\ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ s.d. $a_k \to (0,0)^t$ und $f(a_k) \to t$; betrachte dazu die Folge $a_k := (\frac{1}{k+1}, \frac{\alpha}{k+1})$.

Sei $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$. *Wie kann man Stetigkeit in v^* widerlegen?*
(1) $\exists\ a : \mathbb{N} \to A$ mit $a_k \to v^*$ aber die Folge $(f(a_k))_k$ ist nicht konvergent, oder
(2) $\exists$ zwei Folgen $a : \mathbb{N} \to A$ und $b : \mathbb{N} \to A$ mit $a_k \to v^*$ und $b_k \to v^*$, $f(a_k) \to V_1$, $f(b_k) \to V_2$, aber $V_1 \neq V_2$ (wie im Beispiel oben), oder
(3) $\exists\ V \in \mathbb{R}^m$ s.d. $\forall a : \mathbb{N} \to A$ mit $a_k \to v^*$ und $a_k \neq v^*\ \forall k$ es gilt $f(a_k) \to V$, aber $V \neq f(v^*)$.

Bemerkung. Die Bedingung $a_k \neq v^*\ \forall k$ in *(3)* garantiert, dass man nicht die Folge $a_k = v^*\ \forall k$ nehmen kann. Für diese Folge $f(a_k) = f(v^*) \neq V\ \forall k$.

Definition 1.41. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $v^* \in \mathbb{R}^n$ mit $v^* \in \overline{A \setminus \{v^*\}}$ (d.h., v^* ist ein Häufungspunkt von A). Man sagt, dass*

$$\lim_{v \to v^*} f(v) = V \tag{1.2.6}$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|f(v) - V\| < \varepsilon \text{ für alle } v \in A \text{ mit } 0 < \|v - v^*\| < \delta. \tag{1.2.7}$$

Wir schreiben auch $f(v) \to V$ für $v \to v^*$ oder $f(v) \xrightarrow{v \to v^*} V$.

Das bedeutet, dass alle $v \in B_\delta(v^*) \cap (A \setminus \{v^*\})$ relevant sind. Die Bedingung $v^* \in \overline{A \setminus \{v^*\}}$ besagt, dass diese Menge für alle $\delta > 0$ nicht leer ist, d.h. $\exists$ eine Folge $a : \mathbb{N} \to A$ mit $a_k \neq v^*\ \forall k$ und $a_k \to v^*$.

Bemerkungen. *(i)* Wenn $V = f(v^*)$ dann ist f stetig in v^*.
(ii) Wenn $V \neq f(v^*)$ dann ist die Funktion $g : A \to \mathbb{R}^m$

$$g(v) = \begin{cases} V & \text{falls } v = v^*, \\ f(v) & \text{sonst, also } v \in A,\ v \neq v^*. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

stetig in v^*.

Operationen mit Abbildungen. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $v \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $h : A \to \mathbb{R}$. Damit kann man folgende Abbildungen definieren.

$$\begin{aligned} f+g : A \to \mathbb{R}^m \qquad & v \mapsto (f+g)(v) := f(v) + g(v) \\ \langle f, g \rangle : A \to \mathbb{R} \qquad & v \mapsto \langle f, g \rangle (v) := \langle f(v), g(v) \rangle \\ \|f\| : A \to \mathbb{R} \qquad & v \mapsto \|f\|(v) := \|f(v)\| \\ hg : A \to \mathbb{R}^m \qquad & v \mapsto (hg)(v) := h(v)g(v) \end{aligned}$$

Falls $h(v) \neq 0 \ \forall v$ kann man auch $v \mapsto h(v)^{-1} f(v)$ definieren.

Lemma 1.42. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $v^* \in A$.*

(i) Falls $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ und $h : A \to \mathbb{R}$, alle in v^* stetig sind, dann sind $f+g, \langle f, g \rangle, \|f\|, hg$ auch in v^* stetig. Falls $h(v) \neq 0 \ \forall v \in A$ dann ist auch $h^{-1}g$ in v^* stetig.

(ii) Sei $v^* \in \overline{A \setminus \{v^*\}}$. Falls $\exists V_f, V_g \in \mathbb{R}^m$ s.d. $\lim_{v \to v^*} f(v) = V_f$ und $\lim_{v \to v^*} g(v) = V_g$, dann $\lim_{v \to v^*} (f+g)(v) = V_f + V_g$ und $\lim_{v \to v^*} \langle f, g \rangle (v) = \langle V_f, V_g \rangle$.

(iii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $f(A) \subset B$, $g : B \to \mathbb{R}^p$. Falls f in $v^* \in A$ stetig ist, und g in $w = f(v^*) \in B$ stetig ist, dann ist $h = g \circ f$ in v^* stetig.

Beweis. Hausaufgabe. □

Extremwerten. Wir erhalten eine sehr allgemeine Aussage über die Existenz von Extremwerten in kompakten Mengen.

Satz 1.43. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f das Maximum und das Minimum über A an, d.h. es gibt $v_{min}, v_{max} \in A$, so dass*

$$\forall v \in A \quad f(v_{min}) \leq f(v) \leq f(v_{max}). \tag{1.2.9}$$

Beweis. Wir zeigen, dass v_{max} existiert. Der Beweis für v_{min} ist analog (oder folgt durch Betrachtung der Funktion $g = -f$).

1. Schritt: Die Bildmenge $f(A)$ ist von oben beschränkt.

Falls dies nicht der Fall wäre, gäbe es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $v_k \in A$ mit $f(v_k) \geq k$. Insbesondere enthielte die Folge $f(v_k)$ keine konvergente Teilfolge (da konvergente Folgen beschränkt sind). Da A kompakt ist, gäbe es eine Teilfolge $v_{\varphi(k)}$ die gegen ein v^* aus A konvergiert. Da stetige Funktionen folgenstetig sind, folgte $f(v_{\varphi(k)}) \to f(v^*)$. Widerspruch.

2. Schritt: Es gibt ein $v_{max} \in A$ mit $f(v) \leq f(v_{max})$ für alle $v \in A$.

Sei

$$M := \sup f(A). \tag{1.2.10}$$

Nach Schritt 1 gilt $M < \infty$. Nach Definition des Supremums gilt

$$\forall v \in A \quad f(v) \leq M. \tag{1.2.11}$$

Weiterhin gibt es nach Definition des Supremums eine Folge $(v_k)_k$ in A mit

$$f(v_k) \to M. \tag{1.2.12}$$

Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $v_{\varphi(k)}$ und ein Vektor $v_{max} \in A$ s.d. $v_{\varphi(k)} \to v_{max}$ und mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(v_{max}) = M, \tag{1.2.13}$$

denn der Grenzwert von Folge und Teilfolge ist immer identisch. □

[7: 30.10.2017]

[8: 02.11.2017]

1.3 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Fall $n = 1$

Definition 1.44 (Ableitung Def. A). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein* ***offenes*** *Interval und $x^* \in I$.*

(i) Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in x^* differenzierbar ist, falls ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert s.d.

$$\alpha = \lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}. \tag{1.3.1}$$

Man schreibt $f'(x^*) := \alpha =$ Ableitung von f in x^*.

(ii) Sei $f : I \to \mathbb{R}^m$, mit $m > 1$. Dann $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^t$ mit $f_j : I \to \mathbb{R}$ für alle $j = 1, \ldots, m$. Wir sagen dass f in x^* differenzierbar ist, falls f_j differenzierbar in x^* ist für jede $j = 1, \ldots, m$. Man schreibt $f'(x^*) := (f_1'(x^*), \ldots, f_m'(x^*))^t \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkungen.

(i) (1.3.1) ist äquivalent zu

$$\alpha = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^* + t) - f(x^*)}{t}, \tag{1.3.2}$$

und auch äquivalent zu (siehe auch Def. 1.41)

$$\forall a : \mathbb{N} \to A \text{ mit } a_k \to x^* \text{ und } \ a_k \neq x^* \forall k \text{ gilt } \alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{f(a_k) - f(x^*)}{a_k - x^*}. \tag{1.3.3}$$

(ii) Man muss $a_k \neq x^*$ haben, sonst $\frac{1}{a_k - x^*} = \frac{1}{0}$.
(iii) Da I offen ist, existiert dann für jede $x^* \in I$ eine Folge $a : \mathbb{N} \to I$ mit $a_k \neq x^*$ $\forall k$ und $a_k \to x^*$, d.h. x^* ist ein Häufungspunkt für I.

Alternativ kann man die Ableitung als beste lineare Approximation charakterisieren.

Lemma 1.45. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x^* \in I$ differenzierbar, wenn es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x^* + t) - (f(x^*) + t\alpha)|}{|t|} = 0. \tag{1.3.4}$$

Wenn eine solche Zahl α existiert, dann ist α eindeutig bestimmt und es gilt

$$f'(x^*) = \alpha. \tag{1.3.5}$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$ ist genau dann im Punkt $x^* \in I$ differenzierbar, wenn es ein Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x^* + t) - (f(x^*) + t\alpha)\|}{|t|} = 0. \tag{1.3.6}$$

Wenn eine solche Vektor α existiert, dann ist α eindeutig bestimmt und es gilt $f'(x^*) = \alpha$.

Beweis. (n=1) f differenzierbar in $x^* \in I \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d
$\lim_{t\to 0} \frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{t} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{t} - \alpha \right| = 0 \Leftrightarrow$
$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x^*+t)-f(x^*)-\alpha t|}{|t|} = 0$

□

Dieses Lemma zeigt, dass zwei konzeptuelle Vorstellung der Ableitung einer Funktion auf $\mathbb{R}$ identisch sind.

A. Gleichung (1.3.1) in Definition 1.44 gibt die „physikalische“ Vorstellung der Ableitung als *Änderungsrate* einer Größe zu einem Zeitpunkt x (definiert als Grenzwert von Differenzquotienten über immer kürzere Zeitintervalle).

B. Gleichung (1.3.4) gibt die „geometrische“ Vorstellung der Ableitung als *beste lineare Approximation* $f(x) \simeq f(x^*) + tf'(x^*)$, wobei $t \mapsto f(x^*) + tf'(x^*)$ die Gerade tangential zu f in x^* ist.

Lineare Approximation. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $t \mapsto g_\alpha(t) := t\alpha$. Aus Lemma 1.45 folgt, dass f genau dann in $x^* \in I$ differenzierbar ist, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert so dass

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x^*+t) - f(x^*) - g_\alpha(t))|}{|t|} = 0. \tag{1.3.7}$$

Die Funktion g_α ist linear, d.h.

$$g_\alpha(t_1 + \lambda t_2) = g_\alpha(t_1) + \lambda g_\alpha(t_2) \qquad \forall t_1, t_2, \Lambda \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.46. *Für jede lineare Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert ein Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ (eindeutig bestimmt) s.d. $g(t) = \alpha t$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Für jede $t \in \mathbb{R}$ es gilt $t = t \cdot 1$. Dann

$$g(t) = g(t \cdot 1) = tg(1) = t\alpha,$$

mit $\alpha = g(1)$. □

Diese Bemerkungen motivieren die zweite Definition von Ableitung.

Definition 1.47 (Ableitung Def. B)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein* ***offenes*** *Interval und $x^* \in I$. Wir sagen, dass $f : I \to \mathbb{R}$ in x^* differenzierbar ist, falls eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert s.d.*

- *g lineare und,*
- $\lim_{t\to 0} \frac{|f(x^*+t)-f(x^*)-g(t)|}{|t|} = 0$.

Man schreibt $Df(x^*) := g =$ Ableitung von f in x^*.

Lemma 1.48. *Definition 1.44 und 1.47 sind äquivalent, d.h.*

$$Df(x^*) = g_{f'(x^*)} \tag{1.3.8}$$

wo $g_{f'(x^*)}(t) := f'(x^*)t$.

Beweis. $f'(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{t} \Leftrightarrow$ (aus Lemma 1.45)
$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x^*+t)-(f(x^*)+g_\alpha(t))|}{|t|} = 0$ mit $g_\alpha := \alpha t$ und $\alpha := f'(x^*)$
$\Leftrightarrow Df(x^*) = g_{f'(x^*)}$. □

1.3.2 Fall $n > 1$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, **offen** mit $n > 1$. Wir wollen Differenzierbarkeit von $f : U \to \mathbb{R}^m$ studieren. Wir werden sehen, dass

- die Erweiterung von Def. A 1.44 die Richtungsableitung gibt wahrend
- die Erweiterung von Def. B 1.47 die Ableitung gibt.

Diese Begriffe sind nicht äquivalent für $n > 1$.

Erweiterung von Def. A 1.44

Aufpassen. Man kann nicht $\frac{f(v)-f(v^*)}{v-v^*}$ schreiben, weil $v - v^* \in \mathbb{R}^n$ und man nicht durch Vektoren teilen kann!

Definition 1.49 (Richtungableitung)**.** *Sei $n = 2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $v^* = (x^*, y^*)^t \in U$ fest.*

(i) f heißt partiell differenzierbar in Richtung x im Punkt v^* falls die Abbildung $x \mapsto f(x, y^*)$ differenzierbar in x^* ist. Man schreibt

$$\partial_x f(x^*, y^*) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x^* + t, y^*) - f(x^*, y^*)].$$

f heißt partiell differenzierbar in Richtung y im Punkt v^* falls die Abbildung $y \mapsto f(x^*, y)$ differenzierbar in y^* ist. Man schreibt

$$\partial_y f(x^*, y^*) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x^*, y^* + t) - f(x^*, y^*)].$$

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in v^*, wenn alle partiellen Ableitungen in v^* existieren.

Man schreibt auch $\nabla f(v^*) = (\partial_x f(v^*), \partial_y f(v^*))^t \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Sei $v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$ fest. f heißt differenzierbar in Richtung v im Punkt v^* falls

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(v^* + tv) - f(v^*)] \tag{1.3.9}$$

existiert. Der Grenzwert heißt Richtungsableitung $\partial_v f(v^*)$.

(iii) Für $n > 2$ man kann n partielle Ableitungen definieren.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x, y)^t \mapsto f(x, y) := u(y)$, wobei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $u(y) := e^{-\frac{1}{2}y^2}$ definiert ist. Dann

$$\partial_x f(x^*, y^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x^* + t, y^*) - f(x^*, y^*)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[u(y^*) - u(y^*)] = 0$$

$$\partial_y f(x^*, y^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x^*, y^* + t) - f(x^*, y^*)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[u(y^* + t) - u(y^*)] = u'(y^*) = -y^* e^{-\frac{y^{*2}}{2}}$$

Sei $v = (v_1, v_2)^t$. Dann

$$\partial_v f(v^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(v^*+tv)-f(v^*)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[u(y^*+tv_2)-u(y^*)] = v_2 u'(y^*) = \langle \nabla f(v^*), v\rangle \,.$$

[8: 02.11.2017]

[9: 06.11.2017]

Bemerkung Wir haben oft $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(v^* + tv) - f(v^*)] = \alpha$ geschrieben. Das heißt für jede Folge $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $t_k \neq 0\ \forall k$ und $t_k \to 0$, konvergiert die Folge $\frac{1}{t_k}[f(v^* + t_k v) - f(v^*)] \to \alpha$. Aber $f(v^* + t_k v)$ existiert nicht, wenn $v^* + t_k v \notin U$. Das ist kein Problem, weil U offen ist! Dann $\exists\ r > 0$ s.d. $B_r(v^*) \subset U$ dann $\exists K_r \in \mathbb{N}$ s.d. $v^* + t_k v \in B_r(v^*) \subset U$ für alle $k \geq K_r$. Sei $t'_k := t_{k+K_r}$, dann $t'_k \neq 0\ \forall k$, $t_k \to 0$ und $v^* + t'_k v \in U\ \forall k$.

Wenn U nicht offen ist, kann man Differenzierbarkeit nur für $v^* \in U^\circ$ studieren.

Notation Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar im Punkt $v^* \in U$, dann existieren alle partielle Ableitungen $\partial_{x_j} f(v^*)$, $j = 1, \ldots, n$. Wenn $n = 1$ und $m \geq 1$ man schreibt

$$\nabla f(v^*) = \begin{pmatrix} f'_1(v^*) \\ f'_2(v^*) \\ \vdots \\ f'_m(v^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1} = m \times 1 \text{ Matrix}$$

Wenn $n > 1$ und $m = 1$ man hat n partielle Ableitungen

$$\nabla f(v^*) = \big(\partial_{x_1} f(v^*), \partial_{x_2} f(v^*), \cdots, \partial_{x_n} f(v^*)\big) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Wenn $n > 1$ und $m > 1$ man hat n partielle Ableitungen für jede Komponente f_j von f. Dann ist $\nabla f(v^*)$ ein $m \times n$ Matrix:

$$\nabla f(v^*) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(v^*) & \partial_{x_2} f_1(v^*) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(v^*) \\ \partial_{x_1} f_2(v^*) & \partial_{x_2} f_2(v^*) & \cdots & \partial_{x_n} f_2(v^*) \\ \vdots & & & \\ \partial_{x_1} f_m(v^*) & \partial_{x_2} f_m(v^*) & \cdots & \partial_{x_n} f_m(v^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

d.h.

$$\nabla[f(v^*)]_{ij} = \partial_{x_j} f_i(v^*) \tag{1.3.10}$$

Diese Matrix wird **Jacobimatrix** genannt.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $v = (x,y)^t \mapsto f(v) = f(x,y) = 2v$ definiert. Dann f hat zwei Kompomponenten $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x,y) := 2x, \quad f_2(x,y) := 2y.$$

Dann f ist partiell differenzierbar mit

$$\nabla f(v^*) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(v^*) & \partial_{x_2} f_1(v^*) \\ \partial_{x_1} f_2(v^*) & \partial_{x_2} f_2(v^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \forall v^* \in \mathbb{R}^2.$$

Erweiterung von Def. B 1.47

Definition 1.50. *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. f heißt differenzierbar im Punkt $v^* \in U$ falls, $\exists T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.d.*

- *T lineare Abbildung [d.h. $F(v_1 + \lambda v_2) = F(v_1) + \lambda F(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.]*
- $\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|f(v^*+h)-f(v^*)-T(h)\|}{\|h\|} = 0.$

Man schreibt $Df(x^*) := T =$ Ableitung von f in v^*.

Beispiel. Wie oben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $v = (x,y)^t \mapsto f(v) = f(x,y) = 2v$ definiert. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $h \mapsto T(h) = 2h$ definiert. Dann T ist linear und

$$f(v^* + h) - f(v^*) - T(h) = 2(v^* + h) - 2v^* - 2h = \vec{0}$$

dann

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|f(v^* + h) - f(v^*) - T(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to\vec{0}} \frac{0}{\|h\|} = 0.$$

Dann f differenzierbar in v^* $\forall v^* \in \mathbb{R}^2$ und $Df(v^*) = T$.

Lineare Abbildungen und Matrizen.

Lemma 1.51. *Sei $Lin(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.d. T linear $\}$. Für jede $T \in Lin(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ existiert eine Matrix $M_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eindeutig bestimmt s.d. $T(v) = M_T v\ \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Analysis I □

Die Menge $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein Vektorraum mit folgenden Operationen

- Addition und Skalarmultiplikation: $(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$

  $(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

  [das Nullelement ist die Matrix $\hat{0}$ mit $(\hat{0})_{ij} = 0\ \forall ij$]

- Skalarprodukt: $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t B)$ wobei $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ und für jede quadratische matrix $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ ist die Spur definiert durch

  $$\mathrm{tr} M := \sum_{i=1}^{p} M_{ii}.$$

  Damit kann man explizit schreiben

  $$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t B) = \sum_{i=1}^{n}(A^t B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A^t)_{ij}B_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ji}B_{ji}.$$

  Insbesondere ist $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ji}^2 \geq 0$.

- Norm: $\|A\| := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ji}^2}$.

Bemerkung. Wenn alle Matrixelemente in einen Spaltenvektor mit nm Komponenten eingeordnet werden, dann ist $\|A\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^{nm}$.

Beispiel. Sei $M = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann $\mathrm{tr} M = a + b$ und

$$\|M\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|(a, b, c, d)^t\|_{\mathbb{R}^4}.$$

Lemma 1.52. *Sei $T \in Lin(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Dann es gilt*

$$\|T(v)\| = \|M_T v\| \leq \|M_T\|\|v\| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3.11}$$

Notation Man schreibt

$$\|T\| := \|M_T\|. \tag{1.3.12}$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = m = 2$. Die Beweise für andere Fälle sind ähnlich. Sei $v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ und $M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Dann

$$T(v) = M_T v = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ dx + by \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\|T(v)\| = \sqrt{(ax + cy)^2 + (dx + by)^2}.$$

Aber $|ax + cy| = |\langle (a, c)^t, (x, y)^t\rangle| \leq \|(a, c)^t\|\|v\|$ aus Cauchy-Schwarz Ungleichung. Also

$$\begin{aligned}\|T(v)\| &= \sqrt{(ax + cy)^2 + (dx + by)^2} \leq \sqrt{\|v\|[\|(a, c)^t\|^2 + \|(d, b)^t\|^2]} \\ &= \|v\|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|v\|\|M_T\|.\end{aligned}$$

□

Wir betrachten zunächst einige unmittelbare Folgerungen aus der Differenzierbarkeit.

Lemma 1.53 (Elementare Eigenschaften der Ableitung). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $v^* \in U$.*

(i) f differenzierbar in v^*, $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ die Richtungsableitung in Richtung v existiert, und es gilt

$$\partial_v f(v^*) = [Df(v^*)](v) = M_{Df(v^*)}v. \tag{1.3.13}$$

Insbesondere ist für eine in v^* differenzierbare Funktion die Abbildung $v \mapsto \partial_v f(v^*)$ linear.

(ii) f differenzierbar in $v^* \Rightarrow f$ partiell differenzierbar in v^* und es gilt

$$\partial_j f(v^*) = M_{Df(v^*)}e_j = \left(M_{Df(v^*)}\right)_{\cdot,j}. \tag{1.3.14}$$

d.h. der $m-$komponentige Vektor $\partial_{x_j} f(v^*)$ ist die $j-$te Spalte in der Matrix $M_{Df(v^*)}$

(iii) Die Ableitung der konstanten Funktion $f(v) = c \in \mathbb{R}^m$ ist $Df(v^*) = 0$.

(iv) f linear (d.h. $f(v) = Bv$ mit Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$) $\Rightarrow f$ ist in $\mathbb{R}^n$ differenzierbar und $M_{Df(v^*)} = B$ unabhängig von v^*.

(v) f *differenzierbar in* v^* $\Rightarrow$ f *ist stetig in* v^*.

(vi) Sei f *differenzierbar in* v^**. Dann existiert* $0 < \varepsilon < 1$ *s.d.*

$$\|f(v+h) - f(v)\| \leq \|h\|(1 + \|Df(v^*)\|) \qquad \forall \|h\| < \varepsilon \tag{1.3.15}$$

(siehe auch (1.3.12)*).*

[9: 06.11.2017]

[10: 09.11.2017]

Beweis.

(i) f differenzierbar in v^* dann $\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|f(v^*+h)-f(v^*)-T(h)\|}{\|h\|} = 0$ wobei $T(h) = M_{Df(v^*)}h$. Dann für alle Folgen $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ mit $h_k \to \vec{0}$ und $h_k \neq \vec{0} \forall k$ gilt $\frac{\|f(v^*+h_k)-f(v^*)-T(h_k)\|}{\|h_k\|} \to 0$. Insbesondere das gilt für $h_k = t_k v$, mit $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, fest und $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $t_k \to 0$, $t_{k\to 0}$. In diesem Fall

$$T(h_k) = t_k\alpha, \qquad \text{mit } \alpha := T(v) \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{und } \|h_k\| = |t_k|\|v\|.$$

Dann für jede Folge $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $t_k \to 0$, $t_{k\to 0}$ gilt

$$\frac{\|f(v^* + t_k v) - f(v^*) - t_k\alpha\|}{|t_k|} \to 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(v^* + tv) - f(v^*)] = \alpha$$

(aus Lemma 1.45). Dann existiert die Richtungsableitung und $\partial_v f(v^*) = \alpha = T(v) = M_{Df(v^*)}v$.

(ii) Folgt aus *(i)* mit $v = e_j$. Insbesondere existiert die Jacobimatrix und

$$(\nabla f(v^*))_{ij} = \partial_{x_j} f_i(v^*) = [M_{Df(v^*)}e_j]_i = [M_{Df(v^*)}]_{ij}.$$

(iii) und *(iv)* Übung

(vi) Sei f differenzierbar in v^*. Nach Definition des Grenzwerts gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $0 < \|h\| < \delta$ gilt

$$\frac{\|f(v^* + h) - f(v^*) - T(h)\|}{\|h\|} < 1. \tag{1.3.16}$$

Daraus folgt

$$\|f(v^* + h) - f(v^*) - T(h)\| < \|h\| \Rightarrow \Big| \|f(v^* + h) - f(v^*)\| - \|T(h)\| \Big| \leq \|h\|$$

$$\Rightarrow \|f(v^* + h) - f(v^*)\| < \|h\| + \|T(h)\| \leq (1 + \|T\|)\|h\|.$$

wobei $\|T\| := \|M_T\|$.

(v) folgt aus *(vi)*.

$$\lim_{h\to\vec{0}} \|f(v^* + h) - f(v^*)\| < (1 + \|T\|) \lim_{h\to\vec{0}} \|h\| = 0.$$

Dann f ist stetig in v^*. $\square$

Aufpassen. Partiell Differenzierbarkeit $\not\Rightarrow$ Differenzierbarkeit. Als Beispiel nehmen wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(v) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y)^t \neq \vec{0} \\ 0 & \text{falls } (x,y)^t = \vec{0}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig und partiell differenzierbar in jedem Punkt $v^* \in \mathbb{R}^2$ (Übung). Insbesondere existieren alle Richtungsableitungen in $\vec{0}$ und für jede $v = (v_x, v_y)^t \in \mathbb{R}^2$ es gilt

$$\partial_v f(\vec{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(tv) - f(\vec{0})] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(tv) \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2\|v\|^2} = \lim_{t\to 0} \frac{v_x v_y^2}{\|v\|^2} = \frac{v_x v_y^2}{\|v\|^2}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $v \mapsto F(v) = \partial_v f(\vec{0})$ Dann ist F nicht linear $F(v_1 + tv_2) \neq F(v_1) + tF(v_2)$ (Übung). Dann aus Lemma 1.53 *(i)*, ist f nicht in $\vec{0}$ differenzierbar.

Der folgende Satz gibt eine sehr nützliche Bedingung für Differenzierbarkeit: es genügt, die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit zu prüfen.

Satz 1.54. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v^* \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt eines Balles $B_r(v^*)$ partiell differenzierbar, d.h. die Abbildung $\partial_{x_j} f : B_r(v^*) \to \mathbb{R}^m$ mit $w \to \partial_{x_j} f(w)$ ist wohldefiniert für alle $j = 1, \ldots, n$. Seien alle diese partielle Ableitungen stetige Funktionen im Punkt v^*.*
Dann ist f in v^* differenzierbar und die entsprechende Matrix ist die Jacobimatrix

$$M_{Df(v^*)} = \nabla f(v^*).$$

Bemerkung. Dieser Satz verbindet zwei Konzepte miteinander:

(i) Die Ableitung $Df(v^*)$ als beste lineare Approximation ist das natürliche geometrische Konzept und erlaubt, starke Sätze (z.B. die Kettenregel) zu beweisen. Die Existenz der Ableitung unmittelbar aus Def.1.50 zu beweisen, ist aber oft umständlich.

(ii) Die partiellen Ableitungen $\partial_{x_j} f_i$ lassen sich einfach mit den Methoden aus Analysis 1 berechnen, weil man jeweils nur Funktionen einer Variablen differenzieren muß. Nur mit den partiellen Ableitungen läßt sich aber keine gute Theorie aufbauen, wie die oben gegebenen Beispiele zeigen.

Beweis von Satz 1.54. Wir betrachten nur den Fall $n = 2$, $m = 1$. Der generell Fall geht ähnlich (Übung).

Sei $f : U \to \mathbb{R}$, mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $v^* = \vec{0} = (0,0)^t$. Unser Ziel ist folgendes zu beweisen

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{|f(h) - f(0,0) - T(h)|}{\|h\|} = 0,$$

mit

$$T(h) := \nabla f(0,0) h = \begin{pmatrix} \partial_x f(\vec{0}) & \partial_y f(\vec{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = h_x \partial_x f(\vec{0}) + h_y \partial_y f(\vec{0}).$$

Wir haben

$$f(h) - f(0,0) = f(h_x, h_y) - f(0,0) = [f(h_x, h_y) - f(h_x, 0)] + [f(h_x, 0) - f(0,0)].$$

Dann

$$|f(h) - f(0,0) - T(h)| \leq |[f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) - h_y \partial_y f(\vec{0})]| \tag{1.3.17}$$
$$+ |[f(h_x, 0) - f(0,0) - h_x \partial_x f(\vec{0})]|. \tag{1.3.18}$$

f ist partiell differenzierbar in $(0,0)^t$ dann

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{|[f(h_x, 0) - f(0,0) - h_x \partial_x f(\vec{0})]|}{\|h\|}$$
$$\leq \lim_{h_x \to 0} \frac{|[f(h_x, 0) - f(0,0) - h_x \partial_x f(0,0)]|}{|h_x|} = 0$$

wo wir $\frac{1}{\|h\|} \leq \frac{1}{|h_x|}$ benutzt haben. Um den letzen Term in (1.3.17) zu schätzen, für jedes $\|h\| < \frac{r}{2}$ fest betrachten wir die Funktion $g : (-2,2) \to \mathbb{R}^m$ mit $t \mapsto g(t) := f(h_x, h_y t)$. Da f in Richtung y partiell differenzierbar ist in $B_r(\vec{0})$ und $(h_x, h_y t)^t \in B_r(\vec{0})$ $\forall |t| \leq 2$, dann ist g differenzierbar in $(-2,2)$ mit

$$g'(t) = h_y \partial_y f(h_x, h_y t).$$

Dann

$$f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = h_y \int_0^1 \partial_y f(h_x, h_y t) dt.$$

Auerdem $1 = \int_0^1 dt$, dann

$$[f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) - h_y \partial_y f(\vec{0})] = h_y \int_0^1 \left[\partial_y f(h_x, h_y t) - \partial_y f(0,0)\right] dt.$$

Aber $h \to \partial_y f(h)$ ist stetig in $h = (0,0)^t$ dann $\forall \varepsilon > 0$ existiert $\delta_\varepsilon > 0$ s.d. $|\partial_y f(h) - \partial_y f(\vec{0})| \leq \varepsilon\ \forall \|h\| < \delta_\varepsilon$. Dann gilt $\forall \|h\| < \delta_\varepsilon$

$$|[f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) - h_y \partial_y f(\vec{0})]| = |h_y| \left| \int_0^1 \big[\partial_y f(h_x, h_y t) - \partial_y f(0,0)\big] dt \right|$$

$$\leq |h_y| \int_0^1 \big|\partial_y f(h_x, h_y t) - \partial_y f(0,0)\big| dt \leq |h_y| \varepsilon \int_0^1 dt = \varepsilon |h_y|.$$

Dann

$$\lim_{h \to \vec{0}} \frac{|[f(h_x, h_y) - f(h_x, 0) - h_y \partial_y f(\vec{0})]|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to \vec{0}} \frac{|h_y| \varepsilon}{\|h\|} = \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein ist folgt der Grenzwerte gleich 0. □

Definition 1.55. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Wir sagen, dass f stetig differenzierbar in U ist, wenn f in jedem Punkt $v^* \in U$ differenzierbar ist, und die Abbildung $v^* \mapsto Df(v^*)$ stetig ist. Dann schreibt man $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$.*

[10: 09.11.2017]

[11: 13.11.2017]

1.3.3 Differenzerbarkeit: Zusammenfassung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Wir haben zwei Begriffe der Differenzierbarkeit eingeführt.

A) Richtungsableitung: Vektor in $\mathbb{R}^m$. Sei die Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ fest und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ $I \subset \mathbb{R}$ die lineare Funktion definiert durch $\gamma(t) := v^* + tv$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} g :\ & I \to \mathbb{R}^m \\ & t \mapsto g(t) := f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\partial_v f(v^*)$ existiert, falls g differenzierbar in $t = 0$ ist. In diesem Fall gilt

$$\partial_v f(v^*) = g'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[g(t) - g(0)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(v^* + tv) - f(v^*)].$$

f heißt **partiell differenzierbar** in v^*, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_{x_j} f(v^*) := \partial_{e_j} f(v^*)$, $j = 1, \ldots, n$ existieren. In diesem Fall exisitiert die **Jacobimatrix** $\nabla[f(v^*)] \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$[\nabla f(v^*)]_{ij} = \partial_{x_j} f_i(v^*).$$

B) Ableitung: lineare Abbildung. Die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Ableitung von f in v^*n falls

$$\lim_{h\to\vec{0}} \frac{\|f(v^*+h) - f(v^*) - T(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

wobei $T(h) = M_T h$ und $M_T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die zu T zugeordnete Matrix ist.

Verbindung zwischen A) und B).

• f differenzierbar in $v^* \Rightarrow f$ partiell differenzierbar in v^* und $M_T = \nabla[f(v^*)]$.

• f partiell differenzierbar in einem Ungebung von v^* **und** $w \mapsto \partial_{x_j} f(w)$ stetig in $w = v^*$, $\forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow f$ differenzierbar in v^*

• f partiell differenzierbar in U **und** $w \mapsto \partial_{x_j} f(w)$ stetig in U $\forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow f$ differenzierbar in U. In diesem Fall heißt f **stetig differenzierbar** $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$.

Ableitungen auswerten.

Falls f differenzierbar in v^* ist, genügt es die partielle Ableitungen zu kennen um $Df(v^*)$ auszuwerten!

$$[Df(v^*)](h) := [\nabla f(v^*)]h, \qquad \text{d.h. } [[Df(v^*)](h)]_i = \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_{x_j} f_i(v^*)$$

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto f(v) := e^{\|v\|^2} \end{aligned}$$

• f ist stetig:

$$|f(v+h) - f(v)| = e^{\|v\|^2} |e^{\|v+h\|^2 - \|v\|^2} - 1| = e^{\|v\|^2} |e^{2\langle v,h\rangle + \|h\|^2} - 1| \to_{h\to\vec{0}} 0$$

weil $|\langle v,h\rangle| \leq \|v\|\|h\| \to 0$ wenn $h \to \vec{0}$, und exp stetig ist.

• f ist partiell differenzierbar mit $\nabla f(v) = (\partial_x f(v), \partial_y f(v)) = \nabla f(x,y) = e^{x^2+y^2}(2x, 2y) = f(v)2v^t$. f und die Identität sind stetig. Also ist ∇f stetig und f differenzierbar und $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} g : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & v \mapsto g(v) := Av \end{aligned}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann $g(x,y) = (-y,x)^t$ ist eine Rotation von 90. Außerdem gilt $\|g(v)\| = \|v\|$.

- g ist stetig:

$$\|g(v+h) - g(v)\| = \|g(h)\| = \|h\| \to_{h\to\vec{0}} 0$$

- g ist partiell differenzierbar mit

$$\nabla g(v) = \nabla g(x,y) = A.$$

Die konstante Abbildung ist stetig dann ist ∇g stetig, also ist g differenzierbar und $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

1.3.4 Operationen mit Ableitungen

Summe und Produkt. Analog zu den Beweisen aus Analysis 1 verallgemeinern wir die Summen- und Produktregel.

Lemma 1.56 (Summe und Produkt)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

(i) Falls $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $v \in U$ differenzierbar sind, so ist auch $f+g$ in v differenzierbar und es gilt

$$D(f+g)(v)[\cdot] = Df(v)[\cdot] + Dg(v)[\cdot], \equiv \nabla(f+g)(v) = \nabla f(v) + \nabla g(v). \tag{1.3.19}$$

(ii) Falls $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $\lambda : U \to \mathbb{R}$ im Punkt $v \in U$ differenzierbar sind, so ist auch λf in v differenzierbar und es gilt

$$D(\lambda f)(v)[\cdot] = D(\lambda)(v)[\cdot]f(v) + \lambda(v)D(f)(v)[\cdot] \equiv$$
$$\nabla(\lambda f)(v) = \lambda(v)\nabla f(v) + f(v)\nabla\lambda(v).$$

wobei im letzen Term f als $m \times 1$ Matrix betrachtet wird. Da $\nabla\lambda$ eine $1 \times n$ Matrix ist, ist $f\nabla\lambda$ eine $m \times n$ Matrix. In Koordinaten

$$\partial_{x_j}(\lambda f)_i = f_i \partial_{x_j}\lambda + \lambda\partial_{x_j} f_i$$

Beweis. Hausaufgabe. □

Beispiel 3. Nehmen wir f und g aus Beispiel 1 und 2 oben. Sei

$$F := fg : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ v \mapsto fg(v) := f(v)Av \end{array}, \qquad \text{d.h. } F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

• Man kann direkt die Funktion F studieren. Die ist stetig differenzierbar mit partielle Ableitungen

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 \end{pmatrix} = f(v)\begin{pmatrix} -2xy & -1-2y^2 \\ 1+2x^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

• Stattdessen könnte man merken, dass f und g stetig differenzierbar sind, dann muss fg auch stetig differenzierbar sein und

$$\nabla fg(v) = f(v)\nabla g(v) + g(v)\nabla f(v) = f(v)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f(v)\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Aufpassen: man kann nicht die Reihenfolge ändern!

[11: 13.11.2017]

[12: 16.11.2017]

Kettenregel. Auch die Kettenregel lässt sich ins Mehrdimensionale übertragen. An die Stelle der Multiplikation von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ tritt jetzt die Verkettung linearer Abbildungen.

Satz 1.57 (Kettenregel)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : V \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to V$, g sei differenzierbar in $v \in U$, f sei differenzierbar in $g(v) \in V$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in v und es gilt*

$$D(f \circ g)(v) = Df(g(v)) \circ Dg(v), \quad \equiv \quad \nabla(f \circ g)(v) = [\nabla f(g(v))]\ [\nabla g(v)] \tag{1.3.20}$$

wobei $[\nabla f] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $[\nabla g] \in \mathbb{R}^{p \times n}$. In Koordinaten

$$\nabla(f \circ g)(v)_{ij} = \partial_{x_j}(f \circ g)_i(v) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(y)_{|y=g(v)}\, \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(v). \tag{1.3.21}$$

Äquivalent lässt sich das schreiben als

$$\partial_j(f \circ g)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} (\partial_k f_i)(y)_{|y=g(v)}\, \partial_j g_k(v). \tag{1.3.22}$$

Beweis. Hausaufgabe. □

Beispiel 4. Nehmen wir nochmal f und g aus Beispiel 1 und 2 oben. Sei

$$\begin{aligned} G := f \circ g : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto f \circ g(v) = f(g(v)) = e^{\|g(v)\|^2} = e^{\|v\|^2} = f(v) \end{aligned}$$

weil $\|g(v)\| = \|v\|$.

• Man kann direkt die Funktion G studieren. Da $G(v) = f(v)$ wissen wir dass G stetig differenzierbar ist mit partielle Ableitungen

$$\nabla G = \begin{pmatrix} \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} = \nabla f = f(v) \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

• Stattdessen könnte man merken, dass f und g stetig differenzierbar sind, dann muss $f \circ g$ auch stetig differenzierbar sein und

$$\begin{aligned} \nabla f \circ g(v) &= \nabla f(g(v)) \nabla g(v) = f(g(v)) \begin{pmatrix} 2g_1(v) & 2g_2(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f(v) \begin{pmatrix} -2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f(v) \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} = \nabla f(v) \end{aligned}$$

Umkehrabbildung.

Lemma 1.58 (Erinnerung aus Analysis I)**.** *Sei $f : I \to J$, $I, J \subset \mathbb{R}$ offen, mit f stetig differenzierbar d.h. $f \in C^1(I; \mathbb{R})$. Sei f invertierbar mit $f^{-1} : J \to I$, auch stetig differenzierbar d.h. $f^{-1} \in C^1(I; \mathbb{R})$. Dann gilt $\forall y \in J$*

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x_y)} \qquad \textit{mit } x_y := f^{-1}(y).$$

Beweis. f und f^{-1} stetig differenzierbar, dann $f \circ f^{-1} : J \to J$ auch stetig differenzierbar und

$$(f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y).$$

Aber $(f \circ f^{-1})(y) = y = Id(y)$ und $Id'(y) = 1$, dann

$$1 = (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

Satz 1.59 (Umkehrabbildung)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen $f : U \to V$ stetig differenzierbar, invertierbar mit $f^{-1} : V \to U$ auch stetig differenzierbar. Dann gilt $\forall w \in V$*

$$\nabla f^{-1}(w) = (\nabla f(v_w))^{-1} \quad \textit{mit } v_w := f^{-1}(w), \tag{1.3.23}$$

wobei der Exponent $^{-1}$ auf der rechten Seite die Inverse der Matrix $\nabla f(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kennzeichnet.

Beweis. f und f^{-1} stetig differenzierbar, dann $f \circ f^{-1} : V \to V$ auch stetig differenzierbar und

$$\nabla(f \circ f^{-1})(w) = \nabla f(f^{-1}(w))\nabla(f^{-1})'(w).$$

Aber $(f \circ f^{-1})(w) = w = Id(w)$ und $\nabla Id(y) = \mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wo $(\mathbf{1}_n)_{ij} = 1$ falls $i = j$ und $(\mathbf{1}_n)_{ij} = 0$ sonst. $\mathbf{1}_m$ ist das neutrale Element für das Matrixprodukt:

$$A\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n A = A \qquad \forall A \in R^{n\times n}.$$

Dann

$$\mathbf{1}_n = \nabla(f \circ f^{-1})(w) = \nabla f(f^{-1}(w))\nabla(f^{-1})'(w) = AB$$

wo $A := \nabla f(f^{-1}(w)) = \nabla f(v_w)$ und $B := \nabla(f^{-1})'(w)$ und $A, B \in R^{n\times n}$. Also muss A invertierbar sein und

$$B = A^{-1}.$$

□

Aufpassen. Man kann die Umkehrabbildung nur im Fall $m = n$ definieren.

Beispiel 5. Nehmen wir

$$\begin{aligned} F :=: \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & v = (x, y)^t \mapsto F(v) := (2x, e^y)^t \end{aligned}, \qquad \text{d.h. } F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ e^y \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist partiell differenzierbar mit Jacobimatrix

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist invertierbar $\forall (x, y)$ mit

$$\nabla F(x, y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $(x, y) \mapsto \nabla F(x, y)$ stetig, also ist F stetig differenzierbar. Da $e^y > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ ist $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. F ist invertierbar mit Umkehrabbildung $F^{-1} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{2} \\ \ln z_2 \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist partiell differenzierbar mit Jacobimatrix

$$\nabla F^{-1}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_2}. \end{pmatrix}$$

Die Funktion $(z_1, z_2) \mapsto \nabla F^{-1}(z_1, z_2)$ ist stetig, also ist F^{-1} stetig differenzierbar. Außerdem gilt

$$\nabla F^{-1}(z_1, z_2) = (\nabla F(x, y))^{-1}, \qquad \text{mit } x = \frac{z_1}{2}, y = \ln z_2.$$

1.3.5 Höhere Ableitungen

Definition 1.60. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$.*
- *Wir sagen, dass $f \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$ wenn*
  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ und
  $\partial_j f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ für alle $j = 1, \ldots, n$.
- *Wir sagen, dass $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$, $k > 2$ wenn*
  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ und
  $\partial_j f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und
  $\partial_{j_1} \partial_{j_2} f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ für alle $j_1, j_2 = 1, \ldots, n$ und
  ...
  $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{k-1}} f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ für alle $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1} = 1, \ldots, n$.

Wenn $f \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ für $1 \leq k \in \mathbb{N}$, sagen wir auch, f ist k-mal stetig differenzierbar.

Bemerkung. $f \in C^2(U; \mathbb{R}^m) \Rightarrow \partial_i \partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ existieren, aber können verschiedene Werten annehmen. Der folgende Satz gibt eine Bedingung die garantiert, dass man partielle Ableitungen tauschen kann: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Dieser ist von fundamentaler Bedeutung für höhere partielle Ableitungen.

Satz 1.61 (Satz von Schwarz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist für alle Indizes $i, j \in 1, \ldots, n$*

$$\partial^2_{ij} f := \partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f) = \partial^2_{ji} f. \tag{1.3.24}$$

Beweis. Hausaugabe. □

Beispiel 6. Nehmen wir f aus Beispiel 1.

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & v = (x, y)^t \mapsto f(v) := e^{\|v\|^2} = e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

• f ist partiell differenzierbar mit $\nabla f(v) = (\partial_x f(v), \partial_y f(v)) = \nabla f(x,y) = e^{x^2+y^2}(2x, 2y) = f(v)2v^t$. $v \mapsto \nabla f(v)$ ist stetig, also ist f differenzierbar und $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

• $\partial_x f$ und $\partial_y f$ sind partiell differenzierbar mit $\partial_x^2 f(x,y) = (4x^2 + 2)f(x,y)$, $\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) = 2xyf(x,y)$, $\partial_y^2 f(x,y) = (4y^2 + 2)f(x,y)$. Alle diese Abbildungen sind stetig, also $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

• Für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $\partial_x^{n_1}\partial_y^{n_2} f(x,y) = p(x,y)f(x,y)$ wo $p(x,y)$ ein Polynome in x, y.

[12: 16.11.2017]

[13: 20.11.2017]

1.4 Lokale Invertierbarkeit

Satz 1.62 (Erinnerung aus Analysis I)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offen, mit f stetig differenzierbar $f \in C^1(I; \mathbb{R})$. Sei $f'(x^*) \neq 0$. Dann existiert $I' \subset I, J \subset \mathbb{R}$ offen s.d. $f(I') = J$ und $f_{|I'} : I' \to J$ bijektiv ist. Dann ist $f_{|I'}$ invertierbar, d.h. existiert $f^{-1} : J \to I'$ s.d. $x^* \in I$, $f^{-1} \circ f_{|I'} = Id_{I'}$ und $f_{|I'} \circ f^{-1} = Id_J$. Außerdem ist f^{-1} differenzierbar in J mit*

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x),} \qquad \textit{mit } x := f^{-1}(y).$$

Beweis. Hausafgabe. Beweisidee: Taylor Entwicklung.

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + R(x), \qquad R(x) = o(|x|) \text{ d.h. } \lim_{x \to x^*} \frac{|R(x)|}{|x - x^*|} = 0.$$

Für $|x - x^*| \ll 1$

$$f(x) \simeq f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

Da $f'(x^*) \neq 0$ kann man diese Gleichung invertieren

$$x = f^{-1}(y) \simeq x^* + \frac{1}{f'(x^*)}(y - f(x^*)).$$

Wir haben also eine Approximation von f^{-1} gebaut. □

In $\mathbb{R}^n$ wird die Bedingung $f'(x^*) \neq 0$ durch Invertierbarkeit der Jacobimatrix $\nabla f(v^*)$ ersetzt.

Satz 1.63 (Satz von der inversen Funktion)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v^* \in U$ und $\nabla f(v^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.*

Dann gibt es $U' \subset U$ offen, $V' \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $v^* \in U'$, $f : U' \to V'$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V' \to U'$ stetig differenzierbar ist, mit

$$\nabla f^{-1}(w) = (\nabla f(v_w))^{-1} \quad \textit{mit } v_w := f^{-1}(w) \quad \textit{für alle } w \in V'. \tag{1.4.1}$$

Falls f zusätzlich k-mal stetig differenzierbar ist ($k \geq 2$), so ist auch die Umkehrabbildung k-mal stetig differenzierbar.

Beweis. Wird später diskutiert. Hier geben wir einige Motivationen. Falls f differenzierbar ist, dann ist f in der Umgebung von v^* gut approximiert durch

$$f(v) \simeq f(v^*) + [\nabla f(v^*)](v - v^*).$$

wobei $f, v - v^* \in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind und $[\nabla f(v^*)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_n(v) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} f_1(v^*) \\ \vdots \\ f_n(v^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(v^*) & \cdots & \partial_n f_1(v^*) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_n(v^*) & & \partial_n f_n(v^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 - v_1^* \\ \vdots \\ v_n - v_n^* \end{pmatrix}$$

Wenn die Matrix $[\nabla f(v^*)]$ invertierbar ist kann man die lineare Abbildung invertieren

$$v \simeq v^* + [\nabla f(v^*)]^{-1}(f(v) - f(v^*)).$$

$\square$

Definition 1.64. *Es seien U und V in $\mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine k mal stetige bijektive Abbildung $\psi : U \to V$ heisst C^k Diffeomorphismus, falls auch die Umkehrabbildung k mal stetig differenzierbar ist.*

Bemerkung Eine Bedeutung des Satzes liegt darin, dass wir die Umkehrfunktion nicht explizit angeben müssen, um die Ableitung zu berechnen.

Invertierbarkeit testen.
Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar wenn $\det M \neq 0$. Die Determinante kann durch folgende Formel bestimmt werden:

$$(a) \quad \det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} M_{ij_0} \det_{ij_0} M \qquad \forall j_0 = 1, \ldots, n \text{ fest} \tag{1.4.2}$$

$$(b) \quad \det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} M_{i_0 j} \det_{i_0 j} M \qquad \forall i_0 = 1, \ldots, n \text{ fest} \tag{1.4.3}$$

wobei $\det_{ij} M := \det M^{ij}$ und M^{ij} ist die $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrix von M, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Das Produkt $(-1)^{i+j} M_{ij} \det_{ij} M$ wird Cofaktor genannt. Im Fall $n = 2$ die Formel ist besonders einfach

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = ab - cd. \tag{1.4.4}$$

Falls M invertierbar ist dann kann man die Inverse Matrix durch folgende Formel bestimmen:

$$M^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det M} \det_{ji} M \tag{1.4.5}$$

Im Fall $n = 2$ es gilt

$$\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab-cd} \begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}. \tag{1.4.6}$$

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung die durch folgende Formel definiert wird.

$$f(v) := Mv, \qquad M := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{1.4.7}$$

Für $v = (x, y, z)^t$ gilt $f(v) = (\varepsilon x, -z, y)$, dann f beschreibt eine Skalierung in Richtung x $(x \mapsto \varepsilon x)$ und eine Rotation in der Ebene (y, z)

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion f ist linear, also gilt: f invertierbar $\Leftrightarrow$ M invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det M \neq 0$. Fall f invertierbar $f^{-1}w = M^{-1}w$. Um die Determinante zu berechnen benutzen wir die Spaltenentwicklung (1.4.2)(a) mit $j_0 = 1$ weil die erste Spalte hat fast alle Elemente gleich Null.

$$\det M = M_{11} \det_{11} M - M_{21} \det_{21} M + M_{31} \det_{31} M = \varepsilon \det_{11} A + 0 + 0 = \varepsilon.$$

Dann ist die Matrix (und die Abbildung) invertierbar für alle $\varepsilon \neq 0$. Für $\varepsilon = 0$ es gilt $f^{-1}(0) = \{v : v = (x, 0, 0)^t, x \in \mathbb{R}\}$, also ist f nicht injektiv.

Übung: zeigen dass

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) durch direkte Rechnung (d.h. berechnen $M^{-1}M$) oder (2) durch Formel (1.4.5).

[13: 20.11.2017]

[14: 23.11.2017]

Beispiel 2. Polarkoordinaten. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{1.4.8}$$

definiert. Da r, $\cos\theta$ und $\sin\theta$ Funktionen in $C^\infty(\mathbb{R})$ sind, wissen wir auch dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Man rechnet leicht

$$\nabla f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \det \nabla f(r,\theta) = r. \tag{1.4.9}$$

Deshalb für alle $(r_0,\theta_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $r_0 \neq 0$ gibt es offene Mengen $U, V \in \mathbb{R}^2$, mit $(r_0,\theta_0) \in U$, so dass $f|_U : U \to V$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Die Menge U kann aber nicht beliebig groß genommen werden, sonst ist $f_{|U}$ nicht invertierbar. Um U zu finden studieren wir erst Invertierbarkeit alleine.

• Invertierbarkeit: f ist surjektive. Auerdem es gilt

$$\begin{aligned} &(a)\ f(r,\theta) = f(-r,\theta+\pi+2\pi k), \quad \forall r,\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \\ &(b)\ f(0,\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \\ &(c)\ f(r,\theta+2\pi k) = f(r,\theta) \quad \forall r,\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Also ist f nicht injektiv. Sei $f_a : (0,\infty)\times[a,a+2\pi) \to \mathbb{R}^2\backslash\vec{0}$ durch $f_a(r,\theta) := f(r,\theta)$ definiert, wobei $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung f_a is bijektiv $\forall a \in \mathbb{R}$, dann existiert $f_a^{-1} : \mathbb{R}^2\backslash\vec{0} \to (0,\infty)\times[a,a+2\pi)$

• Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung: Sei $U_a := (0,\infty)\times(a,a+2\pi)$. Dann U_a ist offen und $f(U_a) = V_a$, mit

$$V_a := \mathbb{R}^2\backslash G_a, \qquad G_a := \{v \in \mathbb{R}^2 :\ v = tv_a, t \geq 0, v_a = (\cos a, \sin a)^t\}.$$

G_a ist abgeschlossen dann ist V_a offen.

Betrachten wir die Einschränkung $f_a : U_a \to V_a$. Diese Abbildung ist bijektiv, also existiert $f_a^{-1} : V_a \to U_a$. Sei $(x_0,y_0)^t \in V_a$. Dann $(r_0,\theta_0)^t = f_a^{-1}(x_0,y_0) \in U_a$. Aus Lemma 1.63 existieren offene Mengen $U' \subset U_a$, $V' \subset V_a$, s.d. $(r_0,\theta_0)^t \in U'$, $(x_0,y_0)^t \in V'$, $f_{U'} : U' \to V'$ bijektiv ist und $f|_{U'}^{-1} \in C^\infty(V';U')$. Aber $\forall w \in V'$ $f|_{U'}^{-1}(w) = f_a^{-1}(w)$, deshalb ist f_a^{-1} unendlich oft stetig differenzierbar in der offenen Umgebung V' von $(x_0,y_0)^t$. Da $(x_0,y_0)^t$ beliebig ist $f_a^{-1} \in C^\infty(V_a,U_a)$.

1.5 Lokale und globale Extrema

Wir untersuchen nun Extrema von Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, z.B. von x, y und z als Tupel im $\mathbb{R}^3$. In den bisher erarbeiteten Aussagen setzen wir also $m = 1$, $n \geq 1$.

Definition 1.65. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$.*

(i) f besitzt ein (globales) Minimum in $v^* \in A$, wenn

$$f(v) \geq f(v^*) \qquad \text{für alle } v \in A \ .$$

Der Punkt v^* wird (globaler) Minimierer oder (globale) Minimalstelle genannt.

(ii) f besitzt ein lokales Minimum in $v^* \in A$, falls $r > 0$ existiert mit

$$f(v) \geq f(v^*) \qquad \text{für alle } v \in A \text{ mit } \|v - v^*\| < r.$$

Der Punkt v^* wird lokaler Minimierer oder lokale Minimalstelle genannt.

(iii) f besitzt ein striktes (oder: isoliertes) lokales Minimum in $v^* \in A$, falls $r > 0$ existiert mit

$$f(v) > f(v^*) \qquad \text{für alle } v \in A \text{ mit } 0 < \|v - v^*\| < r.$$

Analog für Maximum. Eine Extremum ist ein Maximum oder ein Minimum.

Beispiel. Sei

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ v \mapsto f(v) := \mathbf{1}_{B_r(\vec{0})}(v) \end{array} \qquad \mathbf{1}_{B_1(\vec{0})} := \begin{cases} 1 & \|v\| < 1 \\ 0 & \|v\| \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt $f(v) \leq f(v^*) = 1\ \forall v \in \mathbb{R}^2\ \forall v^* \in B_r(\vec{0})$ also ist jedes $v^* \in B_r(\vec{0})$ eine globale Maximierungstelle.

Es gilt $f(v) \geq f(v^*) = 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2\ \forall v^* \notin B_r(\vec{0})$ also ist jedes $v^* \notin B_r(\vec{0})$ eine globale Minimierungstelle.

f besitzt kein striktes Maximum oder Minimum (Übung).

1.5.1 Extremwerte und erste Ableitung

Lemma 1.66 (Erinnerung aus Analysis I)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offen, und $f \in C^1(I; \mathbb{R})$. Sei $x^* \in I$ eine lokale Extremalstelle für f. Dann $f'(x^*) = 0$.*

Aufpassen. $f'(x^*) = 0 \not\Rightarrow x^*$ lokale Extremalstelle! Nehmen sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto f(x) := x^3$ definiert. Dann $f'(0) = 0$ aber 0 ist weder eine Maximumstelle noch eine Minimumstelle. $f'(x^*) = 0$ ist also eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung um ein Extremalestelle zu haben.

Satz 1.67. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U; \mathbb{R})$, und sei $v^* \in U$ eine lokale Extremalstelle. Dann $Df(v^*) = 0$, d.h. $Df(v^*)(h) = 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wir reduzieren den Beweis auf die Situation in Analysis 1. Sei v^* eine lokale Extremalstelle. Da $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ genügt die Jacobi Matrix $\nabla f(v^*) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ zu studieren. $Df(v^*) = 0$ genau dann wenn $\nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ wobei $\mathbf{0}$ ist die Matrix $1 \times n$ (also ein Zeilenvektor) mit alle Elemente gleich 0:

$$(\partial_{x_1} f(v^*), \ldots, \partial_{x_1} f(v^*)) = (0, \ldots, 0).$$

Sei $j = 1, \ldots, n$ fest und

$$\begin{aligned} g_j : \quad & (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto g_j(t) := f(v^* + te_j) \end{aligned}$$

wobei ε ist klein genug s.d. $v^* + te_j \in U \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann $\partial_{x_j} f(v^*) = g_j'(0)$.

Aber v^* ist eine lokale Extremalstelle also g_j hat eine lokale Extremalstelle in $t = 0$. Da g differenzierbar in $t = 0$ ist gilt $g_j'(0) = 0$ (aus Lemma oben). Dann $\partial_{x_j} f(v^*) = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$.

$\square$

Definition 1.68. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U; \mathbb{R})$. Ein Punkt $v \in U$ heißt kritischer Punkt für f falls $Df(v) = 0$.*

Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & v = (x, y)^t \mapsto f(x, y) := e^{-x^2} \end{aligned}$$

Diese Abbildung liegt in $C^1(U; \mathbb{R})$ weil $\partial_x f(x, y) = -2xe^{-x^2}$ und $\partial_y f(x, y) = 0$ sind beide stetige Abbildungen. Es genügt dann die Jacobi Matrix zu betrachten

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) = (-2xe^{-x^2}, 0).$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \qquad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Dann nur die Punkte mit $v^* = (0, y)^t$ sind Kandidaten für Extremalstellen.

Es gilt $f(x, y) \leq f(0, y) = 1 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ Dann f besitzt unendliche viele globale Maximalstellen. f besitzt aber kein striktes Maximum: sei $v^* = (0, y^*)^t$ fest. Für jede $r > 0$ existiert $v \in \mathbb{R}^2$ s.d. $0 < \|v - v^*\| < r$ und $f(v) \geq f(v^*)$ (nehme $v = (0, y)^t$) mit $|y - y^*| < r$).

Da alle kritischen Punkte Maximalestellen sind, besitzt f kein Minimum.

1.5.2 Extremwerte und zweite Ableitung

Wenn $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ zweimal steig differenzierbar ist, kann man bestimmen ob x^* ein Extremalstelle ist durch die Studium der ersten und zweiten Ableitung.

Satz 1.69 (Erinnerung aus Analysis I). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x^* \in I$.*

(i) x^* lokales Maximum $\Rightarrow f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \leq 0$.

(ii) x^* lokales Minimum $\Rightarrow f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \geq 0$.

(iii) $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ striktes lokales Minimum.

(iv) $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ striktes lokales Maximum.

Aufpassen. x striktes lokales Minimum $\not\Rightarrow f''(x) > 0$. Nehmen $x \mapsto f(x) := x^4$. Dann $x = 0$ ist ein striktes Minimum aber $f''(0) = 0$.

[14: 23.11.2017]

[15: 27.11.2017]

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto (x^2 - 1)^2$ definiert. Es gilt $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$ und $f''(x) = 4(3x^2 - 1)$. Dann ist $f'(x) = 0$ nur in $x = 0$ und $x = \pm 1$. Auerdem $f''(0) = -4 < 0$ und $f''(\pm 1) = 8 > 0$. Also besitzt f ein striktes lokales Maximum in $x = 0$ und zwei strikte lokale Minima in $x = 1$ und $x = -1$. Da $f(x) \geq 0 \ \forall x$, sind diese globale Minima.

Im Fall $n > 1$ wird die zweite Ableitung durch eine Matrix ersetzt.

Definition 1.70. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U; \mathbb{R})$. Die Hessematrix $\nabla^2 f(v) = H_f(v)$ von f in $v \in U$ ist die $n \times n$ Matrix die durch*

$$(\nabla^2 f(v))_{ij} := \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(v), \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

definiert ist. Aus dem Satz von Schwarz folgt $(\nabla^2 f(v))_{ij} = (\nabla^2 f(v))_{ji}$, also ist die Matrix symmetrisch: $H^t = H$.

Um die Bedingungen $f'' > 0$ für $n > 1$ zu erweitern, müssen wir den Begriff der Positivität auf Matrizen verallgemeinern.

Definition 1.71. *Eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix A heißt positiv semidefinit $A \geq 0$ falls*

$$\langle Av, v \rangle \geq 0 \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

und positiv definit $A > 0$ falls zusätzlich

$$\langle Av, v\rangle > 0 \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}.$$

Sie heißt negativ semidefinit $A \leq 0$ falls $-A$ positiv semidefinit (d.h. $\langle Av, v\rangle \leq 0\ \forall v$), und negativ definit $A < 0$ falls $-A$ positiv definit ist (d.h. $\langle Av, v\rangle < 0\ \forall v \neq \vec{0}$).

A heißt indefinit, wenn es weder positiv noch negativ semidefinit ist d.h. es existieren zwei Vektoren v_1, v_2 s.d. $\langle Av_1, v_1\rangle > 0$ und $\langle Av_2, v_2\rangle < 0$.

Beispiel. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $A_\varepsilon := A + \varepsilon \mathbf{1}_2$ wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, d.h.

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Es gilt $\forall v = (x, y)^t$ $\langle A_\varepsilon v, v\rangle = \langle Av, v\rangle + \varepsilon \langle v, v\rangle$, wobei

$$\begin{aligned}\langle Av, v\rangle &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Dann

$$\langle A_\varepsilon v, v\rangle = (x-y)^2 + \varepsilon(x^2+y^2).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\langle A_\varepsilon v, v\rangle \geq \varepsilon \|v\|^2 > 0 \qquad \forall v \neq \vec{0}, \Rightarrow A_\varepsilon > 0 \forall \varepsilon > 0. \tag{1.5.1}$$

Sei $\varepsilon = 0$. Dann

$$\langle A_0 v, v\rangle = (x-y)^2 \geq 0.$$

Insbesondere $\langle Av, v\rangle = 0\ \forall v = (x, x)^t$. Dann A_0 ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit.
Sei $\varepsilon = -1$. Dann

$$\langle A_{-1} v, v\rangle = (x-y)^2 - (x^2+y^2) = -2xy,$$

wobei $-2xy > 0$ falls $xy < 0$ und $-2xy < 0$ falls $xy > 0$. Dann ist A_{-1} indefinit.

Positivität testen. Man kann Positivität mit der quadratischen Form wie oben testen. Manchmal ist es aber einfacher andere Kriterien zu benutzen.

Lemma 1.72 (Erinnerung aus Analysis I)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix $A_{ij} = A_{ji}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$. Dann existieren zwei $n\times n$ reellen Matrizen D_A und U, s.d.*

$$A = UD_AU^t,$$

wobei D_A eine diagonale Matrix und U eine orthogonale Matrix ist

$$D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad U^tU = UU^t = \mathbf{1}_n.$$

Insbesondere sind $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \lambda_n$ die Eigenwerten von A. Auerdem existieren n Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, s.d. $Av_i = \lambda_i v_i$ $\forall i$, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ $\forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1$ $\forall i$. Die v_i heißen Eigenvektoren.

Erinnerung. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert für A, falls ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq \vec{0}$ existiert, s.d. $Av = \lambda v$. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert für A genau dann, wenn $\det(A - \lambda \mathbf{1}_n) = 0$.

Lemma 1.73. *Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Es gilt:*

- *A positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ $\forall i = 1, \dots, n$*
- *A positiv semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_i \ge 0$ $\forall i = 1, \dots, n$*
- *A indedefinit $\Leftrightarrow \exists\ i_1, i_2$ s.d. $\lambda_{i_1} > 0$ und $\lambda_{i_2} < 0$.*

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_n$ die Eigenvektoren von A. $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis für $\mathbb{R}^n$ d.h. für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ s.d. $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Also

$$\langle Av, v\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j\alpha_k \langle Av_j, v_k\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j\alpha_j\alpha_k \langle v_j, v_k\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j^2$$

Sei $A > 0$. Dann $\langle Av, v\rangle > 0$ $\forall v$, dann $\sum_{j=1}^n \lambda_j\alpha_j^2 > 0$ $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dann für jede j gilt $\lambda_j > 0$ (nehme $\alpha_j = 1$ und $\alpha_i = 0$ $\forall i \neq j$.)

Sei $\lambda_j > 0$ $\forall j$. Dann $\langle Av, v\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j\alpha_j^2 \ge 0$ für alle v und $\langle Av, v\rangle$ nur wen $\alpha_j = 0$ $\forall j$, d.h. $v = \vec{0}$.

Der Fall $A \ge 0$ geht ähnlich.

Sei A indefinit. Falls $\lambda_j \geq 0\ \forall j$ dann $\langle Av, v\rangle \geq 0\ \forall v$ dann $A \geq 0$, ein Widerspruch. Falls $\lambda_j \leq 0\ \forall j$ dann $\langle Av, v\rangle \leq 0\ \forall v$ dann $A \leq 0$, ein Widerspruch. Dann $\exists\ i_1 \neq i_2$ s.d. $\lambda_{i_1} > 0$ und $\lambda_{i_2} < 0$.

Sei nun $i_1 \neq i_2$, so dass $\lambda_{i_1} > 0, \lambda_{i_2} < 0$. Dann ist $\langle Av_{i_1}, v_{i_1}\rangle = \lambda_{i_1} > 0$ und $\langle Av_{i_2}, v_{i_2}\rangle = \lambda_{i_2} < 0$, also ist A indefinit. □

Beispiel. Sei A_ε wie oben

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Um die Eigenwerten zu finden muss man $\lambda \in \mathbb{R}$ finden s.d.

$$0 = \det(A_\varepsilon - \lambda \mathbf{1}_2) = \det \begin{pmatrix} 1+\varepsilon-\lambda & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon-\lambda \end{pmatrix} = (1+\varepsilon-\lambda)^2 - 1$$

Dann $\lambda_1 = \varepsilon$ und $\lambda_2 = 2+\varepsilon$ sind die Eigenwerte.
Falls $\varepsilon > 0$ dann $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ dann $A_\varepsilon > 0$.
Falls $\varepsilon = 0$ dann $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2 > 0$ dann $A_0 \geq 0$.
Falls $\varepsilon = -1$ dann $\lambda_1 = -1 < 0$ und $\lambda_2 = 1 > 0$ dann ist A indefinit.

In zwei Dimensionen gibt es ein einfaches Kriterium für positive Definitheit.

Lemma 1.74. *Sei A eine symmetrische 2×2 Matrix. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&(i) A \textit{ positiv definit} \iff A_{11} > 0 \textit{ und } \det A > 0.\\
&(ii) A \textit{ positiv semidefinit} \iff A_{11} \geq 0,\ A_{22} \geq 0 \textit{ und } \det A \geq 0.\\
&(iii) A \textit{ negativ definit} \iff A_{11} < 0 \textit{ und } \det A > 0.\\
&(iv) A \textit{ negativ semidefinit} \iff A_{11} \leq 0 \textit{ und } \det A \geq 0.
\end{aligned}$$

Beweis von (i). Sei A eine symmetrische 2×2 Matrix dann

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

und $A = UD_AU^t$, wobei $U^tU = UU^t = \mathbf{1}_2$ und $D_A = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

• Sei $A > 0$. Dann $\langle Av, v\rangle = x^2A_{11} + 2xyA_{12} + y^2A_{22} > 0 \quad \forall v \neq \vec{0}$. Insbesondere das gilt für $v = e_1$ und $v = e_2$ dann $\langle Ae_1, e_1\rangle = A_{11} > 0$ und $\langle Ae_2, e_2\rangle = A_{22} > 0$. Auerdem sind beide Eigenwerte streng positiv $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$.

$\det A = \det(UD_AU^t) = \det U \det D_A \det U^t = \det(UU^t)\det(D_A) = \lambda_1\lambda_2 > 0,$

• Sei $A_{11} > 0$ und $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$. Dann $A_{22} > 0$ und $|A_{12}| < \sqrt{A_{11}A_{22}}$. Auerdem gilt für alle $v = (x,y)^t$ mit $x \neq 0 \neq y$

$$\begin{aligned}\langle Av, v\rangle &= x^2A_{11} + 2xyA_{12} + y^2A_{22} \geq x^2A_{11} - 2|xy||A_{12}| + y^2A_{22} \\ &> x^2A_{11} - 2|xy|\sqrt{A_{11}A_{22}} + y^2A_{22} = (|x|\sqrt{A_{11}} - |y|\sqrt{A_{22}})^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Für $v = (x,0)$ und $x \neq 0$ gilt $\langle Av, v\rangle = A_{11}x^2 > 0$ bzw. für $v = (0,y)$ und $y \neq 0$ gilt $\langle Av, v\rangle = A_{22}y^2 > 0$. Also $\langle Av, v\rangle > 0 \forall v \neq \vec{0}$. □

Beweis von (ii), (iii) und (iv) . Hausfgabe.

Benutzen $\det(-A) = (-1)^n \det A = \det(A)$ weil $n = 2$. □

Beispiel. Sei A_ε wie oben

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Dann $(A_\varepsilon)_{11} = 1+\varepsilon$ und $\det A_\varepsilon = (1+\varepsilon)^2 - 1$.
Falls $\varepsilon > 0$ dann $(A_\varepsilon)_{11} > 0$ und $\det A_\varepsilon = (1+\varepsilon)^2 - 1 > 0$ dann $A_\varepsilon > 0$.
Falls $\varepsilon = 0$ dann $(A_0)_{11} > 0$ aber $\det A_0 = 1 - 1 = 0$ dann $A_0 \geq 0$.
Falls $\varepsilon = -1$ dann $(A_{-1})_{11} = 0$ aber $\det A_\varepsilon = -1 < 0$ dann ist A indefinit.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Menge der positiv definiten Matrizen offen ist.

Lemma 1.75.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A > 0$. Dann gilt
(i) $\exists \theta > 0$ s.d.

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda\|v\|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5.2}$$

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.d. $\|A - B\| < \theta$. Dann $B > 0$.
Sei $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^{n\times n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A > 0\}$ die Menge der positiv definiten Matrizen. Dann ist diese Menge offen.

Erinnerung. Die Matrixnorm $\|A\| := \sqrt{trA^tA} = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}^2}$.

Beweis. Sei $A > 0$
(i) Für $v = \vec{0}$ $\langle Av, v\rangle = 0 = \theta\|v\|$. Sei jetzt $v \neq \vec{0}$.

$$\langle Av, v\rangle \geq \theta\|v\|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\|v\|^2}\langle Av, v\rangle \geq \theta \Leftrightarrow \langle Aw, w\rangle \geq \theta$$

wobei $w = \frac{1}{\|v\|}v$ und $\|w\| = 1$. Es genügt also

$$\langle Aw, w\rangle \geq \theta \qquad \forall w \in S^{n-1} := \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| = 1\} \tag{1.5.3}$$

zu beweisen. Dafür betrachte die Funktion $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ die durch $w \mapsto \phi(w) := \langle Aw, w\rangle$ definiert wird. Diese Funktion ist stetig (Übung) und ihr Definitionsbereich S^{n-1} ist die Einheitssphäre, die eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist (Übung). Dann folgt aus Satz 1.43, dass es ein $w_{min} \in S^{n-1}$ gibt, so dass

$$\forall w \in S^{n-1} \quad \langle Aw, w\rangle = \phi(w) \geq \phi(w_{min}) = \langle Aw_{min}, w_{min}\rangle\,.$$

Wir definieren $\theta := \langle Aw_{min}, w_{min}\rangle > 0$ weil $A > 0$. Dann $\langle Aw, w\rangle \geq \theta$ $\forall w \in S^{n-1} \Rightarrow$ *(i)*.

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.d. $\|A - B\| < \theta$. Unser Ziel ist $\langle Bv, v\rangle > 0 \; \forall v \neq \vec{0}$ zu beweisen (d.h. $B > 0$ zu beweisen). Aus Cauchy-Schwarz und Lemma 1.52

$$|\,\langle (A - B)v, v\rangle\,| \leq \|v\|\|(A - B)v\| \leq \|(A - B)\|\|v\|^2 < \theta\|v\|^2 \quad \forall v \neq \vec{0}.$$

Dann $\forall v \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned}\langle Bv, v\rangle &= \langle Av, v\rangle - \langle (A - B)v, v\rangle \geq \langle Av, v\rangle - |\,\langle (A - B)v, v\rangle\,| \\ &> \langle Av, v\rangle - \theta\|v\|^2 \geq 0, \quad \Rightarrow B > 0 \Rightarrow (ii).\end{aligned}$$

Schlielich wissen wir aus (ii), dass $\forall A \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^{n\times n})$ existiert ein $\theta > 0$ s.d. $B \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^{n\times n})$ $\forall B$ s.d. $\|A - B\| < \theta$. Also ist $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^{n\times n})$ offen.

□

Jetzt können wir die Erweiterung für $n > 1$ von Satz 1.69 (Extremalwerten und zweite Ableitung) geben.

Satz 1.76. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n > 1$, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, d.h. $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Sei $v^* \in U$ fest.*

(i) v^* lokales Maximum $\Rightarrow \nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f(v^*) \leq 0$.

(ii) v^* lokales Minimum $\Rightarrow \nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f(a) \geq 0$.

(iii) $\nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f(v^*) > 0 \Rightarrow v^*$ striktes lokales Minimum.

(iv) $\nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f(v^*) < 0 \Rightarrow v^*$ striktes lokales Maximum.

(v) $D^2 f(v^*)$ indefinit $\Rightarrow v^*$ kein lokales Extremum.

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ gibt es keine analoge Aussage zu *(v)*. *(i)* und *(ii)* sind notwendige Bedingungen. *(iii)* und *(iv)* sind hinreichende Bedingungen.

[15: 27.11.2017]

[16: 30.11.2017]

Beweis.

• *Beweis von (i).* Sei v^* ein lokales Maximum. Sei $v = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$ fest. Es gibt $\varepsilon > 0$ s.d. $v^* + tv \in U$ für alle $|t| < \varepsilon$. Sei $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch $t \mapsto g(t) := f(v^* + tv)$ definiert. $f \in C^2(U; \mathbb{R})$ dann $g \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R})$.

Für $|t^*| < \varepsilon$ sei $w := v^* + t^* v$. Es gilt

$$g'(t^*) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t^* + t) - g(t^*)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(w + tv) - f(w)}{t} = \partial_v f(w) = \nabla f(w) v$$

aus Lemma 1.53*(i)*. Dann $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$g'(t) = [\nabla f(v^* + tv)]v = \sum_{i=1}^n [\partial_i f(v^* + tv)] \cdot [y_i].$$

Die Abbildung $w \mapsto F(w) := \nabla f(w)v = \sum_{i=1}^n \partial_i f(w) y_i$ ist stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} g''(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g'(t) - g'(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(v^* + tv) - F(v^*)}{t} \\ &= \partial_v F(v^*) = [\nabla F(w)]v = \sum_{i=1}^n \partial_i F(v^*) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i \partial_j f(v^*) y_i y_j = \langle Mv, v\rangle \qquad \text{wobei } M := \nabla^2 f(v^*). \end{aligned}$$

Außerdem, besitzt f ein lokales Maximum in v^* dann g besitzt ein lokales Maximum in $t = 0$. Aus Satz 1.69 gilt $g'(0) = 0$ und $g''(0) \le 0$, dann $\langle Mv, v\rangle \le 0$. Da v beliebig war gilt $M \le 0$. $\Rightarrow$ (i).

• *Beweis von (ii)*: Analog zu *Beweis von (i)*.

• *Beweis von (iii)* Sei $\nabla f(v^*) = \mathbf{0}$ und $M := \nabla^2 f(v^*) > 0$. Aus Lemma 1.75*(ii)* existiert $\theta > 0$ s.d. $B > 0$ $\forall \|B - M\| < \theta$. Die Abbildung $w \mapsto \nabla^2 f(w)$ ist stetig dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass $\|\nabla^2 f(v^* + w) - \nabla^2 f(v^*)\| < \theta$ $\forall \|w\| < \delta$. Dann

$$\|w\| < \delta \quad \Longrightarrow \nabla^2 f(v^* + w) > 0.$$

Sei $g(t) := f(v^*+tv)$ wie zuvor und sei $v \neq \vec{0}$ und $\|v\| < \delta$. Dann g ist zweimal stetig differenzierbar und außerdem $g'(0) = \nabla f(v^*)v = 0$. Außerdem es gilt $\forall t \in [-1, 1]$

$$g''(t) = \langle M_t v, v\rangle > 0 \qquad \text{wobei } M_t := \nabla^2 f(v^* + tv).$$

Dann folgt aus Lemma 1.69, dass g ein striktes lokales Minimum in v^* hat.

Da v beliebig war, haben wir damit gezeigt

$$f(v^* + h) > f(v^*) \qquad \forall \|h\| < \delta.$$

• *Beweis von (iv)* Analog zu *(iii)*.

• *Beweis von (v)* Durch Widerspruch. Falls f eine lokales Minimum hat dann folgt aus (i) $\nabla^2 f \geq 0$, ein Widerspruch. Falls f eine lokales Maximum hat dann folgt aus (ii) $\nabla^2 f \leq 0$, ein Widerspruch. $\square$

Beispiel. Sei

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto f(v) := (\|v\|^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Diese Abbildung liegt in $C^2(U; \mathbb{R})$ (Übung) mit

$$\nabla f(v) = (\partial_x f(v), \partial_y f(v)) = 4(\|v\|^2 - 1)v^t,$$

und für $v = (x, y)^t$

$$\nabla^2 f(v) = 4 \begin{pmatrix} \|v\|^2 - 1 + 2x^2 & 2xy \\ 2xy & \|v\|^2 - 1 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

• Erste Ableitung: Extremalstellen müssen kritische Punkte sein. $\nabla f(v) = \mathbf{0}$ nur wenn $v = \vec{0}$ oder $\|v\| = 1$.

• Zweite Ableitung: Für $v = \vec{0}$ ist

$$A := \nabla^2 f(\vec{0}) = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $A_{11} < 1$ und $\det A > 0$, dann $A < 0$. Dann f besitzt ein *striktes* lokales Maximum in $\vec{0}$. Sei jetz $\|v_0\| = 1$. Es gilt

$$B := \nabla^2 f(v_0) = 8 \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

$B_{11} \geq 0$ und $\det B = 0$ dann $B \geq 0$. f besitzt unendliche viele lokale Minimalstellen, eine in jedem Punkt v^* mit $\|v^*\| = 1$. Da $f(v) \geq 0 = f(v_0)$ $\forall \|v_0\| = 1$ die sind alle globale Minimalstellen. Aber keine davon kann ein striktes Minimum sein.

1.6 Globale Minima stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Nicht jede stetige und nichtnegative Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum an.
Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $v \mapsto f(v) := \frac{1}{1+\|v\|^2}$ definiert. Es gilt $\inf\{f(v) : v \in \mathbb{R}^n\} = 0$ aber es gibt kein $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{v}) = 0$. Für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die für große $\|v\|$ groß werden, läßt sich aber leicht die Existenz eines Minimums zeigen.

Definition 1.77.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Wir sagen, dass* $\lim_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$ *falls* $\forall M > 0\ \exists R > 0$ *s.d.*

$$\|v\| > R \quad \Longrightarrow \quad f(v) \geq M.$$

Allgemeiner, sei $A \subset \mathbb{R}^n$ *unbeschränkt und* $f : A \to \mathbb{R}$. *Wir sagen, dass* $\lim_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$ *falls* $\forall M > 0\ \exists R > 0$ *s.d.*

$$v \in A \setminus B_R(\vec{0}) \quad \Longrightarrow \quad f(v) \geq M.$$

Lemma 1.78.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig und* $\lim_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$. *Dann nimmt* f *sein Minimum auf* $\mathbb{R}^n$ *an, d.h. es gibt* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, *so dass* $\forall v \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $f(v) \geq f(\bar{v})$.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen und unbeschränkt,* f *stetig und* $\lim_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$. *Dann nimmt* f *sein Minimum auf* A *an, d.h. es gibt* $\bar{v} \in A$, *so dass* $\forall v \in A$ *gilt* $f(v) \geq f(\bar{v})$.

Beweis. Es reicht, die zweite Variante zu beweisen. Aus Definition 1.77 mit $M = 1$ folgt, dass es ein $R_1 > 0$ gibt, sodass $f(v) \geq 1 > 0$ für alle $v \in A \setminus B_{R_1}(0)$. Es gibt also ein $v \in A$ mit $f(v) > 0$. Wähle ein solches $v \in A$ fest.

Wende Definition 1.77 mit $M_v := f(v)$ an. Daraus folgt, dass es gibt ein $R > 0$ gibt, so dass

$$f(w) \geq f(v) \forall w \in A \text{ mit } \|w\| > R. \tag{1.6.1}$$

Dann gilt für jedes $R' > R$ ebenfalls $f(w) \geq f(v)$, falls $w \in A$ und $\|w\| > R' > R$. Insbesondere man kann R wählen s.d. $R > \|v\|$.

Die Menge $K = A \cap \overline{B_R(0)} = \{w \in A : \|w\| \leq R_v\}$ ist abgeschlossen und beschränkt deshalb kompakt. Da f stetig ist, gibt es ein $\bar{v} \in K$, so dass

$$f(w) \geq f(\bar{v}) \quad \text{für alle } w \in K. \tag{1.6.2}$$

Insbesondere gilt $f(v) \geq f(\bar{v})$. Dann gilt für alle $w \in A$ mit $\|w\| > R$, dass $f(w) \geq f(v) \geq f(\bar{v})$. Damit folgt die Behauptung. ∎

Beispiel. Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto f(v) := (\|v\|^2 - 1)^2$$

f ist stetig und $\lim_{\|v\|\to\infty} f(v) = \infty$ (Übung). Dann nimmt f sein Minimum auf $\mathbb{R}^n$ an. Wir haben schon gesehen dass jedes v mit $\|v\| = 1$ eine globale Minimalstelle für f ist.

1.7 Höhenlinien und Satz von der impliziten Funktion

Höhenlinien (oder Niveaulinien) bezeichnen auf topografischen Landkarten benachbarte Punkte gleicher Höhe.

Definition 1.79. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge*

$$\mathcal{N}_f(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{v \in A : f(v) = c\} \subseteq A$$

die Niveaumenge der Funktion f zum Niveau (bzw. Level) c.

Lemma 1.80. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann*

$$\mathcal{N}_f(c) = \{v \in A : F(v) = 0\}, \qquad \text{wobei } F(v) := f(v) - c. \tag{1.7.1}$$

Beweis. Übung. □

Beispiel 1. Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{1}_{B_1(\vec{0})} := \begin{cases} 1 & \|v\| < 1 \\ 0 & \|v\| \geq 1 \end{cases}$$
$$v \mapsto f(v) := \mathbf{1}_{B_r(\vec{0})}(v)$$

Dann $\mathcal{N}_f(1) = B_r(\vec{0})$, $\mathcal{N}_f(0) = \mathbb{R}^2 \backslash B_r(\vec{0})$ und $\mathcal{N}_f(c) = \emptyset \ \forall c \notin \{0, 1\}$.

Beispiel 2. Sei $\bar{v} := (a, b, c)^t \neq (0, 0, 0)^t$ fest und

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z)^t = v \mapsto f(v) := \langle v, \bar{v}\rangle = (ax + by + cz)$$

Aus Lemma 1.80 $\mathcal{N}_f(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ wobei

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - 1 = ax + by + cz - 1.$$

Wir wollen $\mathcal{N}_f(1) \subset \mathbb{R}^3$ parametrisieren. ObdA $a \neq 0$. Also gilt

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x(y, z) = \frac{-by - cz - 1}{a}, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

Also $\mathcal{N}_f(1) = \{(x(y,z), y, z)^t : (y,z)^t \in \mathbb{R}^2\}$. Die Funktion $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist implizit durch $F(x,y,z) = 0$ gegeben.

[16: 30.11.2017]

[17: 04.12.2017]

Im nicht lineare Fall möchten wir die Gleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

lösen. Da wir n Variabeln und nur eine Gleichung haben, erwarten wir nur eine Variabel (z.B. x_n) bestimmen zu können: $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$. Generell können wir diese implizite Funktion ψ nicht explizit berechnen, aber wir erhalten (lokale) Existenz mit folgendem Satz.

Satz 1.81 (Satz von der impliziten Funktion)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $v = (w,y)^t \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nehme an es existiert $v_0 = (w_0, y_0)^t \in U$ s.d.*

$$F(w_0, y_0) = 0, \qquad \partial_y F(w_0, y_0) \neq 0.$$

Dann existieren

(i) Eine offene Menge $V \subset U$ und eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $(w_0, y_0)^t \in V$, $w_0 \in W$, sowie

(ii) eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : W \to \mathbb{R}$,

so dass

- *$F(w, \psi(w)) = 0 \ \forall w \in W$,*
- *Falls $(w,y) \in V$ und $F(w,y) = 0$ dann $y = \psi(w)$.*

Außerdem gilt

$$\nabla\psi(w) = (\partial_1\psi(w), \ldots, \partial_{n-1}\psi(w)) = -\frac{1}{\partial_y F(w, \psi(w))}\,(\nabla_w F)(w, \psi(w)),$$

wobei $\nabla_w F(v)$ ist die $1 \times (n-1)$ Matrix mit Elementen $[\nabla_w F(v)]_i := \partial_{x_i} F(v)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Falls F k-mal stetig differenzierbar ist mit $k \geq 1$, dann gilt das auch für ψ.

Bemerkung. Dieser Satz ist wichtig, weil er nicht nur die Existenz von Niveaumenge garantiert, sondern auch eine Parametrisierung dieser Menge (d.h. die Abbildung ψ) gibt. Die Funktion ψ wird *implizit definiert* um w_0 durch die Gleichung

$$F(w, \psi(w)) = 0.$$

Beweisidee. Nehme an $U = \mathbb{R}^n$. Sei $v_0 = (w_0, y_0)^t \in U$ mit $F(v_0) = F(w_0, y_0) = 0$ und $\partial_y F(v_0) \neq 0$.

Wir wollen den Satz der inversen Funktion (Satz 1.63) anwenden: Konstruiere $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$G(w, y) := \begin{pmatrix} w \\ F(w, y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist G stetig differenzierbar und in Blockschreibweise

$$\nabla G(v) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & 0 \\ \nabla_w F(v) & \partial_y F(v) \end{pmatrix},$$

Also

$$\det \nabla G(v) = \partial_y F(v) \det \mathbf{1}_{n-1} = \partial_y F(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere gilt $\partial_y F(v_0) \neq 0$ also ist $\nabla G(v_0)$ invertierbar.

Aus dem Satz der inversen Funktion existiert $V, V' \subset \mathbb{R}^n$ offen s.d. $v_0 \in V$, $G(v_0) \in V'$, $G : V \to V'$ ist invertierbar und $G^{-1} : V' \to V$ ist auch stetig differenzierbar.

Außerdem gilt

$$G^{-1}(w', y') = \begin{pmatrix} w' \\ g(w', y') \end{pmatrix} \qquad \forall (w', y')^t \in V',$$

wobei $g : V' \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt $\forall (w, y)^t \in V$

$$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = G^{-1} \circ G(w, y) = G^{-1}(w, F(w, y)) = \begin{pmatrix} w \\ g(w, F(w, y)) \end{pmatrix}.$$

Für jedes $v = (w, y)^t \in V$ s.d. $F(v) = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ g(w, 0) \end{pmatrix} \equiv \; y = g(w, 0).$$

Aber $v_0 = (w_0, y_0) \in V$ und $(w_0, 0)^t = G(v_0) \in V'$ und V' offen. Dann $(w, y) \in V$ und $(w, 0) \in V'$ in eine Umgebung von $v_0, G(v_0)$. Definiere $\psi(w) = g_2(w, 0)$. Dann gilt $F(w, \psi(w)) = 0$. Die Formel für $\nabla \psi$ folgt aus der Kettenregel. $\square$

Bemerkung. Falls c ein Extremwert für f ist, dann ist $\nabla f(v) = \nabla F(v) = 0$ für alle v, s.d. $f(v) = c$ d.h. $F(v) = 0$. In diesem Fall kann man den Satz nicht anwenden.

Aufpassen. Generell kann man nicht dieselbe Abbildung $\psi : U \to I$ benutzen um die ganze Niveaumenge darzustellen. Siehe folgendes Beispiel.

Beispiel. Sei

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ & v & \mapsto f(v) := \|v\|^2 \\ & (x_1, \ldots, x_n)^t & \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^n x_j^2 \end{array}$$

Sei $c > 0$, fest. Wir suchen die Niveaumenge $\mathcal{N}_f(c)$. Es gilt

$$f(v) = c \;\Leftrightarrow\; F(v) := f(v) - c = 0 \;\Leftrightarrow \|v\|^2 = c \Leftrightarrow \|v\| = \sqrt{c}.$$

Sei $\mathcal{S}_r^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \; \|v\| = r\}$ die Oberfläche der Kugel um $\vec{0}$ von Radius r. Dann $\mathcal{N}_f(c) = \mathcal{S}_{\sqrt{c}}^{n-1}$.

Die Funktion $F = f - c$ ist stetig differenzierbar mit

$$\nabla F(v) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F(v) & \cdots & \partial_{x_n} F(v) \end{pmatrix} = 2v^t = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}.$$

Sei $w = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $y = x_n$. Dann $\partial_y F(v) = 2x_n \neq 0$ für alle $x_n \neq 0$. Dann existieren nach dem Satz für jede $v_0 = (w_0, y_0) \in \mathcal{S}_{\sqrt{c}}^{n-1}$ mit $y_0 \neq 0$ $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen mit $v_0 = (w_0, y_0) \in V$, $w_0 \in W$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : W \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(w, \psi(w)) = 0 \;\forall w \in W.$$

Um die Abbildung ψ explizit zu bauen schreiben wir

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} w_j^2 + y^2 = \|w\|^2 + y^2$$

Es gilt

$$f(w, y) - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|w\|^2 + y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{c - \|w\|^2}$$

wobei $\|w\|^2 \leq c$ sein muss. Wir brauchen also zwei Funktionen
$\psi_1, \psi_2 : \bar{B}_r(\vec{0}_{n-1}) \to \mathbb{R}$

$$\psi_1(w) := \sqrt{c - \|w\|^2}, \quad \psi_2(w) := -\sqrt{c - \|w\|^2}.$$

Beide Funktionen sind in $B_r(\vec{0}_{n-1})$ (aber **nicht** in $\bar{B}_r(\vec{0}_{n-1})$!) unendlich stetig differenzierbar.

Für $n = 2$ $\psi_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $\psi_1(x) = \sqrt{c - x^2}$ beschreibt das oben Halbkreis, whärend ψ_2 beschreibt das untere Halbkreis.

Für $n = 3$ $y = \psi_1(x, z) = \sqrt{c - x^2 - z^2}$ beschreibt die rechte Halbsphäre, whärend ψ_2 beschreibt die linke Halbsphäre.

[17: 04.12.2017]

[18: 07.12.2017]

1.8 Extremwerte über Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

Wir haben gesehen, dass man für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen Extremwerten von $f \in C^2(U; \mathbb{R})$ durch die Eigenschaften von Df und $D^2 f$ analysieren kann.

Außerdem wissen wir, dass für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt eine Funktion $f \in C(K; \mathbb{R})$ ihr Maximum und Minimum in K erreichen muss. Wenn zusätzlich $f \in C^2(K^o; \mathbb{R})$ gilt, kann man Extremwerten in K^o durch Df und $D^2 f$ studieren. Aber wie bestimmt man die Extremwerten am Rand ∂K? Die Teilmenge ∂K ist abgeschlossen aber $(\partial K)^0 = \emptyset$, dadurch haben wir keinen Begriff der Differenzierbarkeit. Generell wie kann man eine Abbildung auf eine beliebige Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$ bestimmen? Wir werden diese Frage für Mengen der Form $E = \{v : F(v) = 0\}$ beantworten.

Beispiel. Sei $n = 2$. Betrachte das Einheitskreis $\mathcal{S}^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1\}$. Sei $v_0 = (\frac{1}{2}, 0)^t$. Wir suchen nach den Abstand zwischen v_0 und $\mathcal{S}^1$

$$d[v_0, \mathcal{S}^1] = \inf_{v \in \mathcal{S}^1} \|v - v_0\|.$$

Wir vermuten, dass der Punkt in $\mathcal{S}^1$, der am nächsten zu v_0 liegt, $v = (1, 0)^t$ ist, also erwarten wir $d = \frac{1}{2}$. Um das zu beweisen, seien $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(v) = \|v\|^2 - 1$ und $f(v) = \|v - v_0\|^2$. Dann

$$\mathcal{S}^1 = \mathcal{N}_F(0) = \{v \in \mathbb{R}^2 : F(v) = 0\}, \qquad d[v_0, \mathcal{S}^1] = \inf_{v \in \mathcal{S}^1} f(v).$$

Die Abbildung f is stetig und $\mathcal{S}^1$ ist kompakt, also erreicht f sein Minimum in $\mathcal{S}^1$ und

$$d[v_0, \mathcal{S}^1]^2 = \min_{v \in \mathcal{S}^1} f(v).$$

Durch den Satz von Impliziten Funktionen kann man $\mathcal{S}^1$ durch die zwei Abbildungen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ beschreiben. Aber man kann auch eine einzelne

Abbildung benutzen: Sei

$$\begin{aligned}\gamma: \quad & [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig und es gilt $\gamma([0,2\pi)) = \mathcal{S}^1$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ und $\gamma \in C^\infty((0,2\pi);\mathbb{R}^2)$. Die Einschränkung von f auf $\mathcal{S}^1$ kann dann durch die Abbildung $f\circ\gamma$ beschrieben werden. Beide Abbildungen f und γ sind stetig und $[0,2\pi]$ ist kompakt, also gilt

$$d[v_0,\mathcal{S}^1]^2 = \min_{t\in[0,2\pi]} (f\circ\gamma)(t).$$

Da $f\circ\gamma \in C^\infty((0,2\pi);\mathbb{R})$ können wir die Extremwerte in $(0,2\pi)$ durch Ableitungen analysieren. Es gilt $f(x,y) = (x-\frac{1}{2})^2 + y^2$. Dann

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)'(t) &= [(\nabla f)(\gamma(t))]\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \partial_x f(\gamma(t)) & \partial_y f(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} x(t)-\frac{1}{2} & y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 2x'(t)[x(t)-\tfrac{1}{2}] + 2y'(t)y(t) \\ &= \sin(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \pi.\end{aligned}$$

Außerdem

$$(f\circ\gamma)''(t) = [(f\circ\gamma)']'(t) = \cos(t).$$

Dann $(f\circ\gamma)''(\pi) = -1 < 0$ und $t=\pi$ ist eine strikte Maximalstelle. Aber $(f\circ\gamma)$ muss sein Minimum in $[0,2\pi]$ erreichen, dann muss die Minimumstelle $t=0$ sein. Dann $d[v_0,\mathcal{S}^1]^2 = (f\circ\gamma)(0) = (f\circ\gamma)(2\pi) = \frac{1}{4}$.

Wir haben also bewiesen, dass

$$f(v) \geq f(v_m) \qquad \forall v \in \mathcal{S}^1, \quad \text{wo } v_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{S}^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : F(v) = 0\}$. Da $F, f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, kann man ihre Ableitungen vergleichen. Es gilt

$$\nabla F(x,y) = 2\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(v) = 2\begin{pmatrix} x-\frac{1}{2} & y \end{pmatrix}$$

Dann ist $\nabla f(v_m)$ zu $\nabla F(v_m)$ proportional:

$$\nabla f(v_m) = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\nabla F(v_m).$$

Wir werden sehen dass diese Eigenschaft <u>kein Zufall</u> ist.

Satz 1.82 (Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen, Lagrange Multiplikator)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und*

$$E := \{x \in U : F(x) = 0\}.$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Einschränkung der Funktion f auf E habe ein lokales Minimum im Punkt $a \in E$, d.h. es gebe ein $r > 0$, so dass

$$f(v) \geq f(a) \qquad \text{für alle } v \in B(a,r) \cap E.$$

Außerdem gelte

$$\nabla F(a) \neq 0.$$

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla F(a). \tag{1.8.1}$$

Die Zahl λ nennt man Lagrangemultiplikator.

Bemerkung.

1. Falls $DF(a) \neq 0$, ist eine notwendige Bedingung für eine lokale Minimalstelle a in E also

$$\begin{cases} \nabla f(a) = \lambda \nabla F(a) & \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{und}} \\ F(a) = 0 \end{cases}$$

Die Kombination beider Gleichungen erlaubt häufig, a und λ zu bestimmen. Man hat insgesamt $n+1$ Unbekannte: die n Komponenten von a und λ. Diese Unbekannten müssen $n+1$ Gleichungen erfüllen, die n Gleichungen für die Komponenten von $\nabla f(a)$ und die Gleichung $F(a) = 0$.

2. Der große Vorteil dieses Satzes besteht darin, dass man eine notwendige Bedingung für Minimalstellen (und analog Maximalstellen) erhält, in der nur f und F vorkommen. Man muß also nicht erst eine Funktion ψ explizit angeben, so dass E in der Nähe von E der Graph von ψ ist. Im Beweis wird zwar benutzt, dass eine solche Funktion existiert, aber die konkrete Form von ψ geht in die entscheidende Bedingung (1.8.1) nicht ein.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir einige Definitionen und Eigenschaften.

1.8.1 Differenzierbare Wege

Definition 1.83. *Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Man sagt, $f \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ falls*

(i) f auf $[a,b]$ stetig ist

(ii) f in (a,b) differenzierbar ist und

(iii) es gibt eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf (a,b) mit f' übereinstimmt.

Falls (iii) gilt, so ist die stetig Fortsetzung eindeutig (da (a,b) dicht in $[a,b]$ ist). Wir bezeichnen mit $f'(a)$ und $f'(b)$ die Werte der stetigen Fortsetzung. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt mit dieser Notation, dass $f'(a)$ mit der rechtseitigen Ableitung bei a und $f'(b)$ mit der linksseitigen Ableitung bei b übereinstimmt.

Beispiele

(i) Die Funktion
$$f_1 : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \frac{1}{t}$$
hat keine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$, da sie unbeschränkt ist also $f_1 \in C^\infty(0,1)$ aber $f_1 \notin C([0,1])$.

(ii) Die Funktion
$$f_2 : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \sqrt{t}$$
hat eine stetige Fortsetzung $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(0) = 0$ und $f_2(1) = 1$. Die Ableitung $f_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ hat aber keine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$, da sie unbeschränkt ist d.h. $f_2 \in C([0,1])$ aber $f_2 \notin C^1([0,1])$.

(iii) Die Funktion
$$f_3 : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto t^{\frac{3}{2}}$$
hat eine stetige Fortsetzung $f_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_3(0) = 0$ und $f_3(1) = 1$. Die Ableitung $f_3'(t) = \frac{3\sqrt{t}}{2}$ hat auch eine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$ dann $f_2 \in C^1([0,1])$.

Definition 1.84.
Eine Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt ein C^1-Weg (auch: differenzierbarer Weg) wenn $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Eine Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stückweise C^1-Weg (oder: stückweise stetig differenzierbarer Weg), wenn es eine Partition gibt, für die diese Funktion auf jedem Teilintervall differenzierbar ist. Das bedeutet, dass $N \in \mathbb{N}$ und $s_1, ..., s_N \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $a = s_0 < \ldots < s_N = b$ und $\gamma \in C^1([s_{j-1}, s_j])$ für $j = 1, 2, \ldots, N$.

Beispiel Die Funktion $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} te_1 & t \in [0,1] \\ e_1 + te_2 & t \in (1,2] \end{cases}$$

wobei $e_1 = (1,0)^t$ und $e_2 = (0,1)^t$ ist stückweise stetig differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar.

Informell, jede Menge der Form $E = \{v \in U : F(v) = 0\}$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen kann lokal durch einen differenzierbare Weg beschreibt werden. Das ist der Inhalt folgenden Lemmas.

Lemma 1.85. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $E := \{v \in U : F(v) = 0\}$. Sei $a \in E$ s.d. $\nabla F(a) \neq 0$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = a$.*

[18: 07.12.2017]

[19: 11.12.2017]

Beweis. Hausaufgabe □

Bemerkung 1. Der Weg ist nicht eindeutig bestimmt. Als Bespiel betrachte $E = \mathcal{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $a = (1,0,0)^t$. Dann für jede $w \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\gamma_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2\|w\|}$ definiert durch $\gamma(t) := (\sqrt{1 - t^2\|w\|^2}, tw)^t$ erfüllt $\gamma(0) = a$ und $\gamma \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], E)$.

Bemerkung 1. Die Bedingung $\nabla F(a) \neq 0$ ist hinreichend aber nicht notwendig. Siehe folgendes Beispiel. Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto (\|v\| - 1)^2.$$

F ist stetig differenzierbar $F(v) \geq 0 \; \forall v$ und

$$E = \{v : F(v) = 0\} = \mathcal{S}^1.$$

Also kann man die Menge E durch einen differenzierbaren Weg beschreiben, aber $\nabla F(a) = 0 \; \forall a \in E$ (weil 0 ein globales Minimum für F ist).

Bemerkung 2. Falls $F(a) = 0$ und $\nabla F(a) \neq 0$, kann a nicht ein isolierter Nullpunkt sein. *Beweis.* Sei $E = \{v : F(v) = 0\}$. Aus Lemma 1.85 $\exists \varepsilon > 0 \; \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$ s.d. γ stetig differentierbar und $\gamma(0) = a$. Dann $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = a$ und $F(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t$. Dann ist a kein isolierter Nullpunkt.
Erinnerung: a ist ein isolierter Nullpunkt, wenn ein $r > 0$ existiert, s.d. $F(v) \neq 0 \; \forall 0 < \|v - a\| < r$.

1.8.2 Tangentialraum

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $E = \{v : F(v) = 0\}$. Sei γ ein differenzierbarer Weg in der Niveaumenge E. Dann

$$F(\gamma(t)) = 0 \ \forall t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = 0 \ \forall t.$$

Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t) = [(\nabla F)(\gamma(t))]\, \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F(\gamma(t)) & \cdots & \partial_{x_n} F(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix},$$

wobei $[(\nabla F)(\gamma(t))]$ eine $1 \times n$ Matrix (Zeilevektor), und $\gamma'(t)$ eine $n \times 1$ Matrix (Spaltevektor) ist. Wir können diese Gleichung lesen als

$$\langle [\nabla F(\gamma(t))]^t, \gamma'(t) \rangle = 0 \tag{1.8.2}$$

für alle t im Definitionsbereich von γ. Die zwei Vektoren

$$[\nabla F(\gamma(t))]^t = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F \\ \vdots \\ \partial_{x_n} F \end{pmatrix} (\gamma(t)), \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$

sind also orthogonal.

Beispiel. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $v \mapsto F(v) = \|v\|^2 - 1$. Dann $E = \{v : F(v) = 0\} = \mathcal{S}^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1\}$. Sei die Abbildung $\gamma : (0, 2\pi) \to E$ durch $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))^t$ definiert. Dann $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))^t$ und $\nabla F(\gamma(t))^t = 2\gamma(t)$. Dann

$$\left\langle \nabla F(\gamma(t))^t, \gamma'(t) \right\rangle = 0.$$

Außerdem ist der Vektor $\gamma'(t)$ tangential zum Kreis am Punkt $\gamma(t)$.

Definition 1.86 (Tangentialraum einer Menge)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $a \in E$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an E im Punkte a wenn es ein $\varepsilon > 0$ und einen Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$ gibt, so dass*

$$\gamma(0) = a \quad \textit{und} \quad \gamma'(0) = v.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an E in a wird mit $T_a(E)$ bezeichnet.

Der Normalraum $N_a(E)$ ist die Menge der Vektoren, die zu allen Tangentialvektoren senkrecht stehen:

$$N_a(E) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \textit{ für alle } v \in T_a(E)\}. \tag{1.8.3}$$

In der Notation aus der linearen Algebra, $N_a(E) = (T_a(E))^\perp$.

Beispiel Sei $E = \mathcal{S}^1$, $a = (1,0)^t$. Ein Vektor $v \in T_a(E) \Leftrightarrow \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$ s.d. $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$.

Für jeden differenzierbaren Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$ mit $\gamma(0) = a$ gilt $\gamma(t) = (x(t), y(t))^t$, mit $x(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$ wenn $|y(t)| < 1$ und $x(t) > 0$. Dann

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - y(t)^2} \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \gamma'(t) = y'(t) \begin{pmatrix} -\frac{y(t)}{\sqrt{1-y(t)^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere $\gamma'(0) = y'(0)(0,1)^t$. Dann $v \in T_a(E)$ genau dann wenn $v \propto (1,0)^t$ und $T_a(E) = vect\{(1,0)^t\}$. Der Normalraum ist dann $N_a(T) = vect\{(0,1)^t\}$.

Wenn E die Nullmenge von einer Funktion ist, gibt es eine einfache Beschreibung vom Tangentialraum und Normalraum.

Lemma 1.87. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und*

$$E := \{v \in U : F(v) = 0.\}.$$

Sei $a \in E$ mit

$$\nabla F(a) \neq 0.$$

Dann ist $T_a E$ ein $n-1$ dimensionaler Vektorraum und $N_a(E)$ ein 1 dimensionaler Vektorraum. Außerdem gilt

$$T_a E := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla F(a)^t, w \rangle = 0\}, \qquad N_a(E) = vect\{\nabla F(a)^t\}, \quad (1.8.4)$$

wobei

$$vect\{\nabla F(a)^t\} := \{v \in \mathbb{R}^n : v = t \nabla F(a)^t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

In der Notation aus der linearen Algebra, $T_a(E) = (vect\{\nabla F(a)^t\})^\perp$.

[19: 11.12.2017]

[20: 14.12.2017]

Beispiel 1. $n = 2$ Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $v \mapsto F(v) = \|v\|^2 - 1$. Dann $E = \{v : F(v) = 0\} = \mathcal{S}^1$, $\nabla F(a)^t = 2a \neq 0\ \forall a \in E$ und

$$T_a(E) = \{w \in \mathbb{R}^2 : \langle a, w \rangle = 0\}.$$

Sei $a = (a_1, a_2)^t$ mit $a_1 \neq 0$. Dann $w = (x,y)^t$ liegt in $T_a(E)$, falls

$$0 = \langle a, w \rangle = a_1 x + a_2 y \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{a_2}{a_1} y.$$

Dann

$$T_a(E) = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = t(-\tfrac{a_2}{a_1}, 1)^t,\ t \in \mathbb{R}\}$$

ist ein ein-dimensionaler Vektorraum und

$$N_a(E) = vect\{a\}.$$

Beispiel 2. $n = 3$ Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $v \mapsto F(v) = \|v\|^2 - 1$. Dann $E = \{v : F(v) = 0\} = \mathcal{S}^2$, $\nabla F(a)^t = 2a \neq 0\ \forall a \in E$ und

$$T_a(E) = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle a, w\rangle = 0\}.$$

Sei $a = (a_1, a_2, a_3)^t$ mit $a_1 \neq 0$. Dann $w = (x, y, z)^t$ liegt in $T_a(E)$, falls

$$0 = \langle a, w\rangle = a_1x + a_2y + a_3z \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{a_2}{a_1}y - \tfrac{a_3}{a_1}z.$$

Dann

$$T_a(E) = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = tv_1 + sv_2, t, s \in \mathbb{R}\}, \quad v_1 = (-\tfrac{a_2}{a_1}, 1, 0)^t, v_2 = (-\tfrac{a_3}{a_1}, 0, 1)^t$$

ist ein 2-dimensionaler Vektorraum und $N_a(E) = vect\{a\}$.

1.8.3 Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

Beweis von Satz 1.82.

Behauptung: $F(a) = 0$, $\nabla F(a) \neq 0$ und $f|_E$ hat ein lokales Minimum in a dann

$$\nabla f(a) \in (T_aE)^\perp.$$

Aus der Behauptung folgt $\nabla f(a)^t \in N_a(E)$, weil $N_a(E) := (T_aE)^\perp$. Aber aus Lemma 1.87 $N_a(E) = vect\{\nabla F(a)^t\}$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.d. $\nabla f(a) = \lambda \nabla F(a)$. □

Beweis der Behauptung. Aus Def. 1.86 existiert $\forall v \in T_aE$ ein $\varepsilon > 0$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E$, s.d. γ stetig differenzierbar ist, $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Die Funktion $f|_E$ hat ein lokales Minimum in a also $f \circ \gamma$ hat ein lokales Minumum in $t = 0$. Dann

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(a)\gamma'(0) = \left\langle \nabla f(a)^t, \gamma'(0)\right\rangle = \left\langle \nabla f(a)^t, v\right\rangle.$$

Dann $\nabla f(a)^t \in (T_aE)^\perp$. □

Beispiel: Anwendung. Betrachten wir noch einmal das Beispiel am Anfang von Abschnitt 1.8. Wir suchen also nach dem Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(v) = \|v - v_0\|^2$, wo $v_0 := (\frac{1}{2}, 0)^t$ eingeschränkt auf die Menge $E = \mathcal{S}^1$.

Wir haben gesehen, dass diese Menge als Nullmenge für die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(v) = \|v\|^2 - 1$ dargestellet werden kann. Es gilt

$$\nabla F(v)^t = 2v, \quad \nabla f(v)^t = 2(v - v_0), \quad \nabla F(a) \neq 0\ \forall a \in E.$$

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ kann nur ein Kandidat für die Minimalstelle von $f|_E$ sein, wenn

$$\begin{cases} \nabla f(a) = \lambda \nabla F(a) & \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{und}} \\ F(a) = 0 \end{cases}$$

Einer Vektor $v = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ löst die erste Gleichung wenn

$$(v - v_0) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x = \frac{1}{2} \\ (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda \neq 1 \quad y = 0 \\ x = \frac{1}{2(1-\lambda)} \end{cases}$$

Außerdem muss v auch $F(v) = 0$ lösen. Also bleiben nur zwei Kandidaten:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda = \tfrac{1}{2}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda = \tfrac{3}{2}.$$

Da $f(1, 0) < f(-1, 0)$ bleibt nur ein Kandidat $v = (1, 0)^t$. E ist kompakt und f stetig also muss f sein Minimum über E erreichen. Dann muss $v = (1, 0)^t$ die Minimalstelle sein.

2 Wegintegrale in $\mathbb{R}^n$

2.1 Weglänge

Ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, mit $a < b \in \mathbb{R}$, kann als eine Reiseroute beschrieben werden, wo $\gamma(t)$ die Position des Reisenden zur Zeit t und $\|\gamma'(t)\|$ der Betrag der Momentangeschwindigkeit sind. Die Weglänge, notiert $L(\gamma)$, ist die zurückgelegte Strecke.

Beispiel 1. Falls die Geschwindigkeit konstant ist $\gamma'(t) = v \in \mathbb{R}^n$ $\forall t$ dann $\gamma(t) = tv + v_0$ und $L(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\| = (b - a)\|v\|$.

Beispiel 2. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix},$$

wobei $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$. Dann ist γ ein differenzierbarer Weg und $\gamma'(t) = (1, f'(t))^t$.

- Falls $f(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dann ist die Geschwindigkeit konstant $\gamma'(t) = v = (1, \alpha)^t$ $\forall t$. Die Länge der Kurve γ ist dann

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \\ &= \sqrt{(b-a)^2 + (f(a) - f(b))^2} = |b - a| \sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= |b - a| \sqrt{1 + (f'(t))^2} = |b - a| \, \|v\|. \end{aligned}$$

- Falls $a < s < b$ existiert und

$$f(t) = \begin{cases} \alpha_1 t + \beta_1 & t \in [a, s_1) \\ \alpha_2 t + \beta_2 & t \in [s_1, b] \end{cases} \quad (\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$$

dann γ ist ein stückweise differenzierbarer Weg und $\gamma'(t) = v_1 = (1, \alpha_1)^t$ $\forall t \in (a, s_1)$, $\gamma'(t) = v_2 = (1, \alpha_2)^t$ $\forall t \in (s_1, b)$. Seine Länge ist

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \|\gamma(s_1) - \gamma(a)\| + \|\gamma(b) - \gamma(s_1)\| \\ &= |s_1 - a| \sqrt{1 + \alpha_1^2} + |b - s_1| \sqrt{1 + \alpha_2^2} \\ &= |s_1 - a| \, \|v_1\| + |b - s_1| \, \|v_2\|. \end{aligned}$$

Jede Funktion $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ kann <u>lokal</u> durch eine Gerade approximiert werden

$$f(t) = \alpha t + \beta + o(|t - t_0|) \qquad \beta = f'(t_0), \ \alpha = f(t_0) - t_0 f'(t_0),$$

also generell ist die Weglänge durch ein Integral definiert.

Definition 2.1. *Die Weglänge eines stetig differenzierbaren Weges* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *ist*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma_i'(t))^2} \, dt. \tag{2.1.1}$$

Falls ein Weg bezüglich der Partition $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ *stückweise stetig differenzierbar ist, so gilt*

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt. \tag{2.1.2}$$

[20: 14.12.2017]

[21: 18.12.2017]

Beispiel 3 [Der Einheitskreis] Die Kurve

$$\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

liegt auf dem Einheitskreis (da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ für alle t) und beschreibt den Kreisbogen zwischen den Punkten

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(b) = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(t)\| = 1. \tag{2.1.5}$$

Damit ist die Länge des Bogens gerade b. Insebsondere, wenn $b = 4\pi$, reisen wir <u>zweimal</u> über $\mathcal{S}^1$.

Beispiel 4 [Diagonale] Sei

$$\gamma : [0, 10] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}. \tag{2.1.6}$$

Dann $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}\ \forall t$ und $L(\gamma) = 10\sqrt{2}$.

Beispiel 4 [Schraubenkurve] Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

Dann

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

2.1.1 Wegelänge und affine Funtionen

Erinnerung Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt affin, wenn $v \mapsto F(v) - F(\vec{0})$ linear ist.

(i) Sei $n = m = 1$. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin, wenn $F(t) = \alpha + t\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann $F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ und $F'(t) = \beta\ \forall t$.

(ii) Sei $m = 1$. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ affin, wenn $F(t) = w_0 + tw_1$, $w_0, w_1 \in \mathbb{R}^n$. Dann $F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ und $F'(t) = w_1\ \forall t$.

(iii) Sei $n = m > 1$. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin, wenn $F(v) = w_0 + Mv$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}, w_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $\nabla F(v) = M\ \forall v$.

Bemerkung Falls $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ affin ist, existieren $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ s.d. $\gamma(t) = w_0 + tw_1$, dann

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|w_1\| dt = (b - a)\|w_1\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|. \tag{2.1.8}$$

Lemma 2.2. *Die Verbindungsstrecke (gerade Linie) ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^n$.*

Genauer gesagt: Sei $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|. \tag{2.1.9}$$

Beweis. Definiere $v = \gamma(b) - \gamma(a)$. Falls $v = 0$, dann folgt aus (2.1.9) $L(\gamma) \geq 0$, was immer wahr ist. Sei jetzt $v \neq 0$. Für jede Komponent γ_i, $i = 1, \dots, n$:

$$\int_a^b \gamma_i'(t)dt = \gamma_i(b) - \gamma_i(a) = v_i, \tag{2.1.10}$$

wobei wir den Hauptsatz der Integralrechnung verwenden.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v\|^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2 &= \int_a^b \langle v, \gamma'(t)\rangle \, dt = |\int_a^b \langle v, \gamma'(t)\rangle \, dt| \\ &\leq \int_a^b |\langle v, \gamma'(t)\rangle| dt \leq \|v\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \|v\| L(\gamma). \end{aligned}$$

Also gilt $\|v\|(L(\gamma) - \|v\|) \geq 0$. Aber $\|v\| > 0$ dann
$L(\gamma) \geq \|v\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$. □

Definition 2.3. *Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt längenerhaltend, wenn $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

Beispiel. Sei $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T_1(x,y) = (-y,x)^t$, $T_2(x,y) = (2x,2y)^t$, Dann ist T_1 längererhaltend $\|T_1(v) - T_1(w)\| = \|v - w\|$, wärend T_2 nicht längenerhaltend ist $\|T_2(v) - T_2(w)\| = 2\|v - w\| \neq \|v - w\|$.

Lemma 2.4. *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung.*

(i) T ist längenerhaltend genau dann, wenn $\nabla T(v) \in O(n)$, wobei

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = \mathbf{1}_n\}. \tag{2.1.11}$$

(ii) Sei T längenerhaltend. Dann für alle Wege $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ gilt

$$L(T \circ \gamma) = L(\gamma). \tag{2.1.12}$$

Beweis. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung. Dann $T(v) = w_0 + Mv$, wobei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis von (i) $\Leftarrow$ Sei $M \in O(n)$. Es gilt für jede $v \in \mathbb{R}^n$ $\|Mv\|^2 = \langle Mv, Mv\rangle = \langle v, M^t M v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$. Dann $\|T(v) - T(w)\| = \|M(v - w)\| = \|v - w\|$ daher ist T längenerhaltend.

Beweis von (i) $\Rightarrow$ Sei T längenerhaltend dann für jede $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|T(v)-T(w)\| = \|M(v-w)\| = \|v-w\|$. Dann $\forall v \in \mathbb{R}^n$ es gilt $\|Mv\|^2 = \|v\|^2$ und $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = \|Mv\|^2 = \langle v, M^t M v\rangle$. Mit $v = e_i$ folgt $(M^T M)_{ii} = 1\ \forall i$. Mit $v = e_i + e_j$ folgt

$$\begin{aligned} 2 =&\|e_i + e_j\|^2 = (M^t M)_{ii} + (M^t M)_{jj} + (M^T M)_{ij} + (M^T M)_{ji} \\ &= 2 + (M^t M)_{jj} + (M^T M)_{ij} + (M^T M)_{ji}. \end{aligned}$$

Außerdem $(M^t M)^t = (M^t M)$ dann $0 = (M^T M)_{ij} + (M^T M)_{ji} = 2(M^t M)_{ij}$. Dann $M^t M = \mathbf{1}_n$.

[21: 18.12.2017]

[22: 21.12.2017]

Beweis von (ii) Sei γ ein Weg, $M \in O(n)$. Dann ist $\hat{\gamma}(t) = (T \circ \gamma)(t))$ auch ein Weg. Aus der Kettenregel $\hat{\gamma}'(t) = \nabla T(\gamma(t))\gamma'(t) = M\gamma'(t)$, dann

$$L(\hat{\gamma}) = \int_a^b \|\hat{\gamma}'(t)\|dt = \int_a^b \|M\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = L(\gamma). \tag{2.1.13}$$

□

Bemerkung 2.5. *(nicht in der Vorlesung dirkutiert) Für $n = 2$ kann man zeigen, dass*

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.1.14}$$

Die erste Menge enthält nur Matrizen mit Determinante +1, wird mit $SO(2)$ bezeichnet und beschreibt alle mögliche Rotationen im Ebene.

Die zweite Menge enthält nur Matrizen mit Determinante −1 und beschreibt alle mögliche Rotationen in der Ebene die von eine Reflexion gefolgt sind. Betrachte z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

die eine Reflexion bezüglich die $x-$Achse beschreibt.

$O(n)$ und $SO(n)$ sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation mit neutralem Element Id.

2.2 Wegintegrale

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei verschiedene Wegintegrale.

2.2.1 Skalarfunktionen

Definition 2.6. *Sei $f \in C(U;\mathbb{R})$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ ein Weg mit und $\gamma([a,b]) \subset U$. Das Wegintegral von f über γ ist definiert durch*

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|dt. \tag{2.2.1}$$

Bemerkungen
(i) Für $f = 1$ erhalten wir die Weglänge.
(ii) Falls die Bahn von γ ein Draht ist, und ρ die Masse pro Längeneinheit, dann ist

$$m = \int_\gamma \rho\,ds\ = \int_a^b \rho(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|dt \tag{2.2.2}$$

die Gesamtmasse des Drahtes.

Der Punkt $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ mit den Koordinaten

$$X_j = \frac{1}{m}\int x_j \rho\,ds = \frac{1}{m}\int_a^b \gamma_j(t)\rho(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|dt \tag{2.2.3}$$

ist der Schwerpunkt. Der Schwerpunkt hat eine große Bedeutung in der Physik, aber nicht nur dort.

Beispiel Betrachte einen Draht der durch $\gamma : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^t$ definiert wird (der Einheitskreis in der xy Ebene). Dann $\gamma \in C^1([-\pi,\pi];\mathbb{R}^3)$ und $\|\gamma'(t)\| = 1\ \forall t$.

- Falls die Masse pro Längeneinheit $\rho(\gamma(t)) = \rho_0$ konstante ist dann

$$m = \int_\gamma \rho\,ds\ = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\ dt = \rho_0 \int_{-\pi}^{\pi}\ dt = 2\pi\rho_0.$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind durch

$$X_j = \frac{1}{m}\int x_j\rho\,ds = \frac{\rho_0}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_j(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_j(t)dt$$

gegeben. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}0dt = 0.$$

Dann $X_1 = X_2 = X_3 = 0$.

• Falls die Masse pro Längeneinheit $\rho(\gamma(t)) = (1 + \cos t)$ ist, gilt $0 \leq \rho(t) \leq 2 \; \forall t$, $\rho(\pi) = \rho(-\pi) = 0$, $\rho(0) = 2$. Die Masse ist maximal in $(1, 0, 0)^t$ und minimal in $(-1, 0, 0)^t$. Die Gesamtmasse ist dann

$$m = \int_\gamma \rho \, ds \; = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \; dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) \; dt = 2\pi.$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind durch

$$X_j = \frac{1}{m} \int x_j \rho \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) \; \gamma_j(t) dt$$

gegeben. Dann

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) \cos(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \\ X_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) 0 \; dt = 0. \end{aligned}$$

Die Koordinate X_2 ist durch

$$X_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) \sin(t) dt = 0$$

gegeben, wobei $f(t) := (1 + \cos t) \sin(t)$ ist ungerade $f(-t) = -f(t)$. Es gilt

$$\int_{-L}^{L} f(t) dt = 0$$

für alle $L > 0$ und $f \in C^0([-L, L]; \mathbb{R})$ s.d. $f(-t) = -f(t)$. Dann $X_2 = 0$.

2.2.2 Vektorfelder

Definition 2.7. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld.*

Das zweite Wegintegral das wir definieren werden integriert ein stetiges Vektorfeld F mit $n = m$, d.h. $F \in C(U; \mathbb{R}^n)$. Sei $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ein Weg s.d. $\gamma([a, b]) \subset U$. Man kann (wenigstens) zwei Wegintegralen mit F definieren.

(i) Man kann jede Komponent $F_j \in C(U;\mathbb{R})$ $j = 1, \dots, n$ integrieren

$$\int_\gamma F_j ds = \int_a^b F_j(\gamma(t)) \; \|\gamma'(t)\| dt.$$

Das gilt auch wenn $n \neq m$.

(ii) Im Fall $n = m$ man kann auch die Komponent von F die parallel zu γ ist integrieren.

Um die zweite Variante zu definieren brauchen wir einige Vorbemerkungen. Sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$, mit $\|v_0\| = 1$ fest. Dann gilt für jeden Vektor $V \in \mathbb{R}^n$ folgende Zerlegung

$$V = \alpha_V v_0 + \tilde{V},$$

wobei $\left\langle v_0, \tilde{V} \right\rangle = 0$ und $\alpha_V = \langle V, v_0 \rangle$. Sei $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ ein Weg. Für jedes $t \in (a,b)$ mit $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ und jedes $V \in \mathbb{R}^n$ kann man die obige Zerlegung mit $v_0 := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)$ betrachten:

$$V = \alpha_V(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t) + \tilde{V}(t),$$

wobei $\left\langle \tilde{V}(t), \gamma'(t) \right\rangle = 0$, und

$$\alpha_V(t) := \frac{\langle V, \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Dann ist $\alpha_V(t)$ die Komponente von V, die parallel zu γ am Punkt $\gamma(t)$ ist.

Für ein stetiges Vektorfeld $F \in C(U;\mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma([a,b]) \subset U$ kann man die Abbildung $v \mapsto \alpha_{F(v)}(t)$ integrieren:

$$\int_\gamma \alpha_F ds := \int_a^b \frac{\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Definition 2.8. *Sei $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ ein Weg und $F \in C(U;\mathbb{R}^n)$, mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma([a,b]) \subset U$. Dann schreiben wir*

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \tag{2.2.4}$$

Bemerkung Wenn F ein Kraftfeld ist, dann gibt $-\int_\gamma F \mathrm{d}\vec{x}$ die Arbeit an, die man aufbringen muss, um einen Punkt im Kraftfeld F entlang der Kurve $\gamma : [a,b| \to \mathbb{R}^m$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen (dies ist die präzise Formulierung der Aussage „Arbeit = Kraft × Weg“).

Beispiel. Das Graviationskraftfeld auf der Erde auf einen Körper der Masse m ist in der Nähe der Erdoberfläche ein Konstant $F(x,y,z) = (0,0,-gm)^t$, $\forall x,y,z$, wobei $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung ist. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) := (0,0,th)^t$. Dann γ parametrisiert eine Reise von Meereshöhe zur Höhe h. Die zu leistende Arbeit ist

$$-\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}\vec{x} := -\int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = -\int_0^1 \left\langle (0,0,-gm)^t, (0,0,h)^t \right\rangle dt = mgh.$$

Die Arbeit die man aufbringen muss, um einen Punkt mit Masse m im Graviationskraftfeld entlang der Kurve $\gamma : [a,b| \to \mathbb{R}^m$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen ist nur von Anfangs- und Endpunkt anhängig. Präzise $\forall \gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^3)$ s.d. $\gamma(a) = 0$ $\gamma(b) = h$ gilt

$$-\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = mg\int_a^b z'(t)dt = mg(z(b)-z(a)) = mgh$$

[22: 21.12.2017]

[23: 08.01.2018]

2.2.3 Eigenschaften

Das Wegintegral ist parametrisierungsunabhängig.

Lemma 2.9. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma \in C^1([a,b];U)$, $\phi \in C^1([c,d],[a,b])$ bijektiv mit $\phi^{-1} \in C^1([a,b],[c,d])$ (insbesondere $\phi'(t) > 0$ $\forall t$ oder $\phi'(t) < 0$ $\forall t$).*
Sei $\hat{\gamma} := \gamma \circ \phi$.

(i) Für jedes $f \in C(U;\mathbb{R})$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_{\hat{\gamma}} f ds. \tag{2.2.5}$$

(ii) Falls $\phi' > 0$, dann gilt für jedes $F \in C(U;\mathbb{R}^n)$

$$\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\hat{\gamma}} F\cdot \mathrm{d}\vec{x}. \tag{2.2.6}$$

Falls $\phi' < 0$, dann gilt für jedes $F \in C(U;\mathbb{R}^n)$

$$\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\int_{\hat{\gamma}} F\cdot \mathrm{d}\vec{x}. \tag{2.2.7}$$

Bemerkung Eine Konsequenz ist, dass die Wegelänge unabhängig davon ist, wie schnell der Reisende die Reiseroute zurücklegt: $L(\hat{\gamma}) = L(\gamma)$. Dieses folgt aus Lemma 2.9 *(i)* mit $f(v) = 1\ \forall v$.

Beweis. (nicht in der Vorlesung diskutiert)

(i) Da $\hat{\gamma}'(t) = \phi'(t)\gamma'(\phi(t))$

$$\int_{\hat{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\hat{\gamma}(t))\|\hat{\gamma}'(t)\|dt = \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\|\gamma'(\phi(t))\|\,|\phi'(t)|dt$$
$$= \int_a^b f(\gamma(\tau))\|\gamma'(\tau)\|d\tau = \int_\gamma f ds, \quad (2.2.8)$$

wo die Substitution $\tau = \phi(t)$ angewendet wurde.

(ii) Wie für *(i)*

$$\int_{\hat{\gamma}} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_c^d \langle F(\hat{\gamma}(t)), \hat{\gamma}'(t)\rangle\, dt = \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\rangle\, \phi'(t)dt$$
$$= \int_a^b \langle F(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle\, d\tau = \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

(iii) $\phi'(t) < 0$ dann $\phi(c) = b$ und $\phi(d) = a$. Wir rechnen noch mal mit der Substitution $\tau = \phi(t)$. Dann

$$\int_{\hat{\gamma}} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\rangle\, \phi'(t)dt$$
$$= \int_b^a \langle F(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle\, d\tau = -\int_a^b \langle F(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle\, d\tau = -\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

□

2.2.4 Stammfunktionen und Gradientenvektorfelder

Eine interessante Frage ist, unter welchen Bedingungen das Wegintegral $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ nur von Anfangs- und Endpunkt $\gamma(a)$ bzw. $\gamma(b)$ abhängt und nicht von dem Weg zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ (siehe Beispiel am Ende des Abschnitts 2.2.2). Besser gesagt, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ein stetiges Vektorfeld, d.h. $F \in C(U; \mathbb{R}^n)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Sei $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, mit $a < b$ s.d. $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ (d.h. die Anfangspunkte von γ_1 und γ_2 übereinstimmen) und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, (d.h. die

Endpunkte von γ_1 und γ_2 übereinstimmen). Dann

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\gamma_2} F \cdot \mathrm{d}\vec{x},$$

d.h. das Wegintegral $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

(ii) Sei $\gamma \in C^1([a,b],U)$ ein geschlossener Weg, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0.$$

Im Fall $n = 1$ es gilt

$$\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)dt = f(\gamma(b))-f(\gamma(a)),$$

wobei f eine Stammfunktion für F ist, d.h. $f'(x) = F(x)$ und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ angewendet haben. Folgender Satz ist eine Variante in mehreren Dimensionen dieses Hauptsatzes.

Satz 2.10. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg, d.h. $\gamma \in C^1([a,b];U)$. Wir definieren den Gradienten $\vec{\nabla} f(v) = \nabla f(v)^t \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_\gamma \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{x} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{2.2.9}$$

Wie üblich gilt eine analoge Aussage für stückweise stetig differenzierbare Wege, indem man die linke Seite über die Teilintervalle summiert, auf denen γ stetig differenzierbar ist.

Beweis. Nach der Kettenregel gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle. \tag{2.2.10}$$

Der Hauptsatz ergibt

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t \\ = \int_a^b \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t &= \int_\gamma \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{x}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

□

Definition 2.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld. Ein stetiges Vektorfeld heißt Gradientenvektorfeld, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $F = \vec{\nabla} f$ in U (d.h. $F(v) = [\nabla f(v)]^t\ \forall v \in U$). In diesem Fall heißt f eine Stammfunktion (oder Potential) von F.*

Eigeschaften von Gradientenvektorfelder

Eigenschaft 1. Das Wegintegral über einem Gradientenvektorfeld hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab, nicht jedoch vom Weg. Es gilt also

$$F \text{ Gradientenvektorfeld} \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0 \quad \forall \gamma \in C^1([a,b];U)$$

s.d. $\gamma(a) = \gamma(b)$. *Beweis:* folgt aus Satz 2.10.

Also wenn ein $\gamma \in C^1([a,b];U)$ existiert, s.d. $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} \neq 0$, dann F ist <u>kein Gradientenvektorfeld</u>.

Beispiel 1 Sei $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} F: \quad & U \to \mathbb{R}^2 \\ & v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto F(v) := \tfrac{1}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

F ist also ein stetiges Vektorfeld. Es ist aber kein Gradientenvektorfeld. Um das zu sehen, sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $t \mapsto \gamma(t) := (\cos t, \sin t)^t$. Dann $\gamma \in C^1([a,b];U)$ und $\gamma(a) = \gamma(b)$. Aber

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle \gamma'(t), \gamma'(t)) \rangle \, dt = 2\pi \neq 0.$$

Eigenschaft 2. Ein Vektorfeld $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, das eine Stammfunktion f besitzt, genügt der Bedingung

$$\partial_j F_i = \partial_i F_j \quad \text{für alle } i, j. \tag{2.2.12}$$

Beweis: folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\partial_j F_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i F_j.$$

Also wenn $v \in U$ und $i \neq j$ existieren, s.d. $\partial_j F_i(v) \neq \partial_i F_j(v)$, dann F ist <u>kein Gradientenvektorfeld</u>.

Diese Eigeschaften erlauben auch Gradientenvektorfelder zu beweisen, wie folgt.

Zwei Kriteria für Gradientenvektorfelder

Kriterium 1.

Man kann die Umkehrung von Eigenschaft **1.** beweisen: Wenn $F : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) <u>stetig</u> ist und

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0 \quad \forall \gamma \in C^1([a,b];U) \text{ s.d.} \quad \gamma(a) = \gamma(b),$$

dann ist F ein Gradientenvektorfeld.

Kriterium 2.

Die Umkehrung von Eigenschaft **2.** gilt nur für offene Menge U mit zusätzliche Eigenschaften. Wir geben hier zwei Fälle, ohne Beweis.

Satz 2.12. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck. Sei $F \in C^1(U;\mathbb{R}^2)$ mit*

$$\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1 \quad \text{in } D. \tag{2.2.13}$$

Dann hat F eine Stammfunktion f.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader, $U = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, und $F \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_j F_i = \partial_i F_j$ für alle i, j. Dann hat F eine Stammfunktion f.

Beispiel 2. Sei $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $F : U \to \mathbb{R}^2$ wie in Beispiel **1** oben. Dann

$$\partial_1 F_2 = \partial_{x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_{x_2} \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \partial_2 F_1$$

aber F ist kein Gradientenvektorfeld. Das Problem ist, dass die Menge U ein "Loch" hat. Genauer gesagt, gibt es geschlossene Wege in U (z.B. die obigen Kurve γ), die sich nicht zu einem Punkt zusammenziehen lassen. Das Studium solcher globaler Eigenschaften ist ein Gegenstand der Topologie.

[23: 08.01.2018]

[24: 11.01.2018]

3 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der eine Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Beispiele:

(a) $u'(t) = \alpha u(t)$ [Wachstumprozess]

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest ist und $u : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offen die unbekannte Funktion ist. $u \in C^1(I;\mathbb{R})$ heißt eine Lösung wenn $u'(t) = \alpha u(t)$ gilt $\forall t \in I$.

(b) $u''(t) = 1$ [Newtonsches Gesetz in Dimension 1] wobei $u : I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ offen die unbekannte Funktion ist.

(b') $u''(t) = -u(t)^2$ [Newtonsches Gesetz in Dimension 1]
wobei $u : I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ offen die unbekannte Funktion ist.

(b'') $\vec{u}''(t) = (1,0)^t$ [Newtonsches Gesetz in Dimension 2]
wobei $\vec{u} : I \to \mathbb{R}^2$ $I \subset \mathbb{R}$ offen die unbekannte Funktion ist. Da $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^t$ und

$$\vec{u}''(t) = (1,0)^t \quad \equiv \quad \begin{cases} u_1''(t) = 1 \\ u_2''(t) = 0 \end{cases}$$

(c) $\partial_t u(t,x) = \alpha \partial_x \partial_x u(t,x)$ [Wärmeleitung]
wobei $\alpha > 0$ fest ist und $u : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offen die unbekannte Funktion st.

Ordnung, Linearität, Homogenität

Bei Funktionen von einer (eindimensionalen) Variablen spricht man von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen, bei Funktionen, die auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind, von partiellen Differentialgleichungen (weil in diesem Fall partielle Ableitungen auftreten). (a) und (b) sind also Differentialgleichungen, (c) ist eine partiell Differentialgleichung. Wir werden im folgenden nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten und sprechen einfach von Differentialgleichungen.

Ordnung Eine Differentialgleichung (oder partiell Differentialgleichung) hat Ordnung k, wenn Ableitungen bis zur Ordnung k auftreten.

(a) hat Ordnung 1, (b) dagegen hat Ordnung 2.
Jede Differentialgleichung der Ordnung k kann wie folgend umgeschrieben werden.

$$\mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = f(t)$$

wobei $\mathcal{F} : I \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$, und $f : I \to \mathbb{R}$ feste Abbildungen sind, s.d. $\mathcal{F}(t, 0, 0, \ldots., 0) = 0$

$$\begin{aligned}
(a) &\equiv \mathcal{F}(t, u(t), u'(t)) = f(t) \text{ mit} \qquad \mathcal{F}(t, s_0, s_1) = s_1 - \alpha s_0,\ f(t) = 0 \\
(b) &\equiv \mathcal{F}(t, u(t), u'(t), u'') = f(t) \text{ mit} \qquad \mathcal{F}(t, s_0, s_1, s_2) = s_2,\ f(t) = 1 \\
(b') &\equiv \mathcal{F}(t, u(t), u'(t), u'') = f(t) \text{ mit} \qquad \mathcal{F}(t, s_0, s_1, s_2) = s_2 + s_0^2,\ f(t) = 0
\end{aligned}$$

Homogeneität Eine Differentialgleichung heißt homogen, fall die Abbildung $u \equiv 0$ (d.h. $u(t) = 0\ \forall t$) eine Lösung ist.

(a) und (b') sind also homogene, (b) und (b'') sind nicht homogen, außer wenn $f \equiv 0$.

f heißt der inhomogen Teil der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung $\mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = f(t)$ ist also genau dann homogen, wenn $f \equiv 0$.

Linearität Die homogen Differentialgleichung $\mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$ heißt linear falls die Menge der Lösungen ein Vektorraum ist: Wir können Lösungen untereinander addieren oder mit einer Zahl multiplizieren, d.h. wenn u_1, u_2 zwei Lösungen sind, dann ist $u := u_1 + \lambda u_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auch eine Lösung.

Die Differentialgleichung $\mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = f(t)$ heißt linear wenn die homogen Differentialgleichung $\mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$ linear ist. Äquivalent kann man den Operator

$$L : u \mapsto L(u)(t) := \mathcal{F}(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t))$$

betrachten. Linearität der Differen ist äquivalent zu L linear: $L(u_1 + \lambda u_2) = L(u_1) + \lambda L(u_2)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und Funktionen u_1, u_2.

(a) und (b) sind also linear, wärend (b') nicht linear ist.

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sind von fundamentaler Bedeutung in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und vielen technischen Anwendungen. So lassen sich fast alle grundlegenden Gesetze der Physik und anderer Naturwissenschaften als Differentialgleichungen formulieren. Differentialgleichungen sind aber auch ein zentraler mathematischer Begriff und spielen oft in mathematischen Gebieten eine Rolle, in denen man es zunächst gar nicht erwarten würde.

Im Jahre 2000 wurden vom Clay Institut sieben sogenannte Milleniumprobleme der Mathematik definiert. Für die Lösung jedes dieser Probleme wurde ein Preis von einer Million Dollar ausgesetzt[1]. Eines diese Probleme bezieht sich direkt auf eine partielle Differentialgleichung, die Navier-Stokes-Gleichung, welche die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit innerer Reibung beschreibt. Bisher wurde erst ein Milleniumproblem gelöst: Gregory Perelman bewies 2002 die Poincaré-Vermutung. Diese Vermutung besagt, dass jede kompakte dreidimensionale Menge (genauer: dreidimensionale Mannigfaltigkeit), in der sich jede geschlossene Kurve stetig zu einem Punkt zusammenziehen läßt, bijektiv und stetig auf die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

[1] `http://www.claymath.org/millennium-problems`

abgebildet werden kann. Die Lösung dieses Problems benutzt eine partielle Differentialgleichung, um die gegebene Menge durch einen Krümmungsfluß systematisch in die Sphäre zu deformieren.

Wir betrachten zunächst einige Beispiele und spezielle Lösungen.

3.1 Wachstumsprozesse und Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $I = (a, b)$, $a < b$. Wir suchen alle Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$, s.d. $u \in C^1(I; \mathbb{R})$ und

$$u'(t) = \alpha u(t) \quad \forall t \in I, \tag{3.1.1}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest ist. Diese Gleichung beschreibt einen Wachtumsprozess (für $\alpha > 0$) oder einen Schrumpfungsprozess (für $\alpha < 0$): die Änderungsrate einer Größe u (d.h. die Ableitung) ist proportional der Größe selber. Beispiele sind:

(i) Zerfall radioaktiver Substanzen. In diesem Fall ist $u(t)$ die zum Zeitpunkt t noch vorhandene Menge der Substanz und $\alpha < 0$. Die Größe $-\alpha$ ist die Zerfallsrate.

(ii) Wachstum von Populationen, solange es keine begrenzenden Faktoren gibt.

(iii) Wachstum von Geld (mit kontinuierlicher Verzinsung).

Wie kann man Lösungen dieser Gleichung finden?

• Die Lösung raten. Aus der Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion folgt, dass $u(t) = e^{\alpha t}$ eine Lösung ist. Allgemeiner ist für jede Konstante $K \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(t) := Ke^{\alpha t} \tag{3.1.2}$$

eine Lösung. Wenn man eine explizite Formel hat, kann man leicht prüfen, dass sie eine Lösung ist.

• Ein etwas systematischerer Ansatz ist die sogenannter Methode der Trennung der Variablen. Wir bringen alle Terme, die u oder u' enthalten, auf die linke Seite.

Nehmen wir an $u(t) > 0$ $\forall t \in I$. Dann

$$u'(t) = \alpha u(t) \quad \forall t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{u'(t)}{u(t)} = \alpha \quad \forall t. \tag{3.1.3}$$

Die linke Seite läßt sich in der Form $(f \circ u)'(t)$ schreiben: $(\ln \circ u)'(t) = \frac{1}{u(t)} u'(t)$. Dann

$$(\ln \circ u)'(t) = \frac{1}{u(t)} u'(t) = \alpha = (\alpha t)'. \tag{3.1.4}$$

Nach dem Hauptsatz ist dies äquivalent zu

$$\ln u(t) - \ln u(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\alpha t)' \mathrm{d}s = (t - t_0)\alpha \quad \forall t_0 < t \in I. \tag{3.1.5}$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$u(t) = u_0 e^{(t-t_0)\alpha} = u_0 e^{-\alpha t_0} e^{\alpha t} = K e^{\alpha t}, \qquad K := u_0 e^{-\alpha t_0}, \tag{3.1.6}$$

genau wie in (3.1.2).

Aus (3.1.2) sieht man, dass (3.1.1) unendliche viele Lösungen hat, eine für jede Konstant K. Um eine eindeutige Lösung zu haben und so voraussehen zu können wie genau unser Wachstumprozess sich entwickeln wird, brauchen wir mehr Informationen. Nehmen wir an, wir wissen dass $u(t_0) = u_0 > 0$, wobei $t_0 \in I$ und u_0 fest sind. Wir suchen alle Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$ s.d. $u \in C^1(I; \mathbb{R})$ und

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 & \\ u(t) > 0 & \forall t \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Aus (3.1.6) dieses Problem hat nur die Lösung $u(t) = u_0 e^{\alpha(t-t_0)}$.

[24: 11.01.2018]

[25: 15.01.2018]

Man kann die Methode der Trennung der Variablen auch so anwenden. Sei $u(t) > 0$ $\forall t$. Dann gilt $\forall t$

$$\begin{aligned} &(\ln \circ u)'(t) = (\alpha t)' \quad \forall t \;\Leftrightarrow\; \quad (\ln \circ u(t) - \alpha t)' = 0 \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow \exists\, K \in \mathbb{R} \quad \text{s.d.} \quad \ln u(t) - \alpha t = K \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow \quad u(t) = e^K e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Um die Bedingung $u(t_0) = u_0 > 0$ zu erfüllen, brauchen wir

$$u_0 = u(t_0) = e^{K + \alpha t_0} \quad \Leftrightarrow \quad \ln u_0 = K + \alpha t_0 \quad \Leftrightarrow \quad K = \ln u_0 - \alpha t_0$$

Dann ist die einzige Lösung, die $u(t_0) = u_0$ und $u(t) > 0$ erfüllt

$$u(t) = u_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

wie erwartet.

Nichtkonstante Koeffizienten Mit der gleichen Methode kann man auch die Lösung der Differentialgleichung $u'(t) = \alpha(t)u(t)$ finden, wobei jetzt α eine vorgegebene stetige Funktion ist $\alpha \in C([a,b],\mathbb{R})$. Wir suchen alle Funktionen $u \in C^1(I;\mathbb{R})$ s.d.

$$(*)\begin{cases} u'(t) = \alpha(t)u(t) & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 & \\ u(t) > 0 & \forall t \in I \end{cases}$$

wobei $t_0 \in I$ und $u_0 > 0$ fest sind. Dieses System ist äquivalent zu

$$\begin{cases} (\ln \circ u)'(t) = \alpha(t) & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 & \\ u(t) > 0 & \forall t \in I \end{cases}$$

Sei $A \in C^1(I;\mathbb{R})$ eine Stammfunktion für a: $A'(t) = \alpha(t)\ \forall t \in I$. Dann ist $(*)$ äquivalent zu

$$\begin{cases} (\ln \circ u - A)'(t) = 0 & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 & \\ u(t) > 0 & \forall t \in I \end{cases}$$

Es gilt $(\ln \circ u - A)'(t) = 0\ \forall t$ nur wenn eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert s.d. $(\ln \circ u - A)(t) = K\ \forall t \in I$, d.h. $u(t) = e^K e^{A(t)}$. Dann ist $(*)$ äquivalent zu

$$\begin{cases} u(t) = e^K e^{A(t)} & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 & \end{cases}$$

Um die Bedingung $u(t_0) = u_0 > 0$ zu erfüllen, brauchen wir

$$u_0 = u(t_0) = e^{K+A(t_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln u_0 = K + A(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad K = \ln u_0 - A(t_0)$$

Dann ist die einzige Lösung für $(*)$

$$u(t) = u_0 e^{A(t)-A(t_0)}.$$

Wie kann man die Stammfunktion A bestimmen? Wenn a besonders einfach ist, kann man raten, z.B. wenn $\alpha(t) = t^3$, ist $A(t) = \frac{1}{4}t^4$ eine Stammfunktion. Ein etwas systematischerer Ansatz kommt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung.

Lemma 3.1. *Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ und $t_0 \in [a,b]$ fest. Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Dann F ist stetig differenzierbar in (a,b) mit $F'(t) = f(t)$.

Erinnerung Das Integral $\int_{t_0}^t f(s)ds$ ist definiert, auch wenn $t < t_0$ ist. In diesem Fall $\int_{t_0}^t f(s)ds = -\int_t^{t_0} f(s)ds$

Beweis. (nicht in der Vorlesung diskutiert) F ist in t differenzierbar, wenn $\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$ existiert. Sei $h > 0$. Dann

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} [f(s)-f(t)]ds.$$

Aber

$$\frac{1}{h}\left|\int_t^{t+h} [f(s)-f(t)]ds\right| \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |[f(s)-f(t)]|ds, \le \sup_{s\in[t,t+h]} |[f(s)-f(t)]| \to_{h\to 0} 0$$

weil f stetig ist. Ähnichen Argumenten gelten für $h < 0$. Dann ist F differenzierbar und $F'(t) = f(t)$. $\square$

Aus dem Lemma folgt, dass die Funktion $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds$, wobei $t_0 \in I$ beliebig ist, eine Stammfunktion für α mit $A(t_0) = 0$ ist. Dann ist

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)\mathrm{d}s}$$

die einzige Lösung, die $u(t_0) = u_0$ und $u(t) > 0$ erfüllt.

Inhomogene Gleichung Wir betrachten die inhomogene lineare Gleichung

$$(ih) \qquad u'(t) = \alpha(t)u(t) + \beta(t),$$

wobei α, β vorgegebene stetige Funktionen sind $\alpha, \beta \in C([a,b],\mathbb{R})$. Die zugehörige homogene Gleighung ist

$$(h) \qquad u'(t) = \alpha(t)u(t).$$

Lemma 3.2. *Sei $\tilde{u} \in C^1(I;\mathbb{R})$ eine Lösung von (ih) fest. Die Abbildung $u \in C^1(I;\mathbb{R})$ ist genau dann eine Lösung von (ih) wenn $w := u - \tilde{u}$ eine Lösung von (h) ist.*

Bemerkung Es ist oft einfacher homogene Gleichungen als inhomogene Gleichungen zu lsen. Die Vorteile dieses Lemmas sind, dass man nur eine Lösung der inhomogene Gleichung finden muss.

Beweis. Beweis von $\Rightarrow$ Da u und $\tilde{u}$ Lösungen von (ih) sind es gilt $u'(t) = \alpha(t)u(t) + \beta(t)$ und $\tilde{u}'(t) = \alpha(t)\tilde{u}(t) + \beta(t)$. Dann

$$w'(t) = (u - \tilde{u})'(t) = u'(t) - \tilde{u}'(t) = \alpha(t)(u(t) - \tilde{u}(t)) = \alpha(t)w(t).$$

Beweis von $\Leftarrow$ Sei w eine Lösung von (h). Es gilt $w'(t) = \alpha(t)w(t)$ und $\tilde{u}'(t) = \alpha(t)\tilde{u}(t) + \beta(t)$. Dann $u = \tilde{u} + w$ genügt

$$u'(t) = (\tilde{u} + w)'(t) = \alpha(t)\tilde{u}(t) + \beta(t) + \alpha(t)w(t) = \alpha u(t) + \beta(t.)$$

$\square$

Wie kann man eine Lösung der inhomogene Gleichung (ih) finden?

• Die Lösung raten: Betrachten wir z.B. $u'(t) = tu(t) - t$. Man kann leicht prüfen, dass $u(t) \equiv 1$ eine Lösung ist.

• Ein etwas systematischerer Ansatz ist die sogenannter Methode der Variation der Konstante. Sei $A(t)$ eine Stammfunktion von α. Dann ist $w(t) := Ke^{A(t)}$ eine Lösung von (h) für jede Konstante $K \in \mathbb{R}$. Wir ersetzen jetzt K mit einer (unbekannte) Funktion $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ und suchen eine Lösung der inhomogene Gleichung (ih) der Form

$$u(t) := f(t)e^{A(t)}.$$

Es gilt $u'(t) = f'(t)e^{A(t)} + f(t)\alpha(t)e^{A(t)}$. Dann u ist eine Lösung von (ih), wenn

$$f'(t)e^{A(t)} + f(t)\alpha(t)e^{A(t)} = f(t)\alpha(t)e^{A(t)} + \beta(t) \qquad \forall t \equiv \quad f'(t) = \beta(t)e^{-A(t)}.$$

Sei F eine Stammfunktion für $\beta(t)e^{-A(t)}$ d.h. $F'(t) = \beta(t)e^{-A(t)}$. Dann $u(t) := F(t)e^{A(t)}$ ist eine Lösung von (ih). Sei z.B. $\alpha(t) = t, \beta(t) = -t$. Dann man kann $A(t) = t^2/2$ nehmen s.d. $F'(t) = -te^{-t^2/2}$. Dann $F = e^{-t^2/2}$ ist also eine Stammfunktion. Also $u(t) = 1$, wie wir schon ober geraten haben.

Nichtlineares Wachstum Die Differentialgleichung (3.1.1) ist linear. Die Wachstumsrate ist immer proportional zur vorhandenen Menge. Wir betrachten eine Variante, bei der für große Werte von u das Wachstum beschleunigt ist:

$$u'(t) = u(t)^2. \tag{3.1.8}$$

Wir versuchen wieder, eine Lösung mit der Trennung der Variablen zu finden. Wir suchen nach Lösungen mit $u(t) > 0$ und schreiben die Gleichung als

$$\frac{1}{u^2(t)}u'(t) = 1. \tag{3.1.9}$$

Dies ist äquivalent zu
$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{1}{u(t)}\right] = 1. \tag{3.1.10}$$
Sei $u(0) = u_0 > 0$. Dann liefert die Integration von 0 bis $t > 0$ mit dem Hauptsatz
$$-\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{u(0)} = t. \tag{3.1.11}$$
Damit ist für $t \in (0, 1/u_0)$ die Lösung gegeben durch
$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t} = \frac{u_0}{1 - tu_0}. \tag{3.1.12}$$
Wenn t von unten gegen $\frac{1}{u_0}$ konvergiert, dann divergiert $u(t)$ gegen ∞. Die Lösung der Differentialgleichung existiert nicht für alle Zeiten t, sondern nur für $t < T := \frac{1}{u_0}$. Man sagt, dass es zum Zeitpunkt T zu einer Explosion der Lösung (auf englisch: „blow-up“) kommt.

[25: 15.01.2018]

[26: 18.01.2018]

3.2 Schwingungsvorgänge und Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sei $I = (a, b)$ mit $a < b$. Jede Differentialgleichung zweiter Ordnung, die zusätzlich linear ist, kann wie folgendes dargestellt werden
$$\alpha(t)u''(t) + \beta(t)u'(t) + \gamma(t)u(t) = f(t)$$
wobei, $\alpha, \beta, \gamma, f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ gegebene Abbildungen sind und $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ die unbekannte Funktion ist. Wenn $f \equiv 0$ ist, ist die Gleichung auch homogen. Wenn $\alpha \equiv 0$ haben wir eine Gleichung erster Ordnung. Wir werden annehmen, dass $\alpha(t) \neq 0$ $\forall t$.

Beispiel Betrachten wir ein Teilchen der Masse m, die sich nur in vertikale Richtung bewegen darf, z.B ein Gewicht an einer Schraubenfeder, die an der Decke befestigt ist. In diesem Fall ist $u(t) \in \mathbb{R}$ die vertikale Komponente der Position des Gewichts (genauer: seines Schwerpunkts). Die Geschwindigkeit des Teilchens ist $u'(t)$ und seine Beschleunigung ist $u''(t)$. Wenn auf das Teilchen die Kraft F wirkt, gilt nach dem Newtonschen Gesetz („Kraft = Masse × Beschleunigung“)
$$mu'' = F, \tag{3.2.1}$$

wobei die Kraft von der Position des Teilchens (oder von der Position und der Geschwindigkeit des Teilchens) abhängt $F = F(u(t), u'(t), t)$. Sei die Decke auf Höhe 0, s.d. $u(t) < 0$. Es gilt $F = F_s + F_r + F_g$, wobei

$$F_s = -ku(t), \qquad F_r = -ru'(t), \qquad F_g = -mg$$

und $k > 0, r > 0$ Konstante sind. Die Funktion F_s beschreibt die Federkraft. Die Funktion F_r beschreibt die Reibung und F_g ist die Gravitationskraft. Also bekommt man die lineare inhomogene Gleichung zweiter Ordnung

$$mu''(t) = -ku(t) - ru'(t) - mg.$$

Wenn das Teilchen in horizontaler statt vertikaler Richtung luft, verschwindet das Term F_g man bekommt die homogene Gleichung

$$mu''(t) = -ku(t) - ru'(t) \tag{3.2.2}$$

3.2.1 Konstante Koeffizienten

Wir suchen alle Lösungen $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ für die Gleichung

$$u''(t) + \beta u'(t) + \gamma u(t) = 0, \tag{3.2.3}$$

wo $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ Konstante sind. Für $u'(t) = \alpha u(t)$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$ Konstante haben wir gesehen, dass $u(t) = Ke^{\alpha t}$ eine Lösung ist $\forall K \in \mathbb{R}$. Wenn man in Analogie zur linearen Gleichung erster Ordnung den Ansatz

$$u(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.2.4}$$

macht, sieht man, dass diese Funktion genau dann eine Lösung ist, wenn

$$\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0, \qquad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}. \tag{3.2.5}$$

Man muss drei Fälle betrachten.

Fall 1. Wenn $\beta^2 - 4\gamma > 0$, hat diese quadratische Gleichung genau zwei reelle Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind $u_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ und $u_2(t) := e^{\lambda_2 t}$ beide Lösungen. Da die Gleichung linear und homogen ist, ist die Menge der Lösungen ein Vektorraum. Dann

$$u(t) := C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ist eine Lösung $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Konstante.

Fall 2. Wenn $\beta^2 - 4\gamma > 0$, hat diese quadratische Gleichung eine Lösung $\lambda_1 = -\beta/2$, also ist $u_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Man kann noch eine Lösung finden mit folgende Ansatz

$$u(t) = t^n e^{\lambda_1 t}, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \tag{3.2.6}$$

Es gilt

$$u'(t) = e^{\lambda_1 t}[t^n \lambda_1 + nt^{n-1}], \qquad u''(t) = e^{\lambda_1 t}[t^n \lambda_1^2 + 2n\lambda_1 t^{n-1} + n(n-1)t^{n-2}]$$

Diese Funktion ist genau dann eine Lösung, wenn

$$\begin{aligned} &t^n[\lambda_1^2 + \beta\lambda_1 + \gamma] + t^{n-1}n(2\lambda_1 + \beta) + t^{n-2}n(n-1) = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad t^{n-2}n(n-1) = 0 \ \forall t, \Leftrightarrow \quad n = 1. \end{aligned}$$

Also $u_2(t) := t^{\lambda_1 t}$ ist auch eine Lösung und

$$u(t) := (C_1 + tC_2)e^{\lambda_1 t}$$

ist eine Lösung $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Konstante.

Fall 3. Wenn $\beta^2 - 4\gamma < 0$, hat diese quadratische Gleichung zwei komplexe Lösungen $\lambda_1 = z$, $\lambda_2 = \bar{z}$, wobei $z = a + ib$, $a = -\beta/2$, $b = \sqrt{\frac{\gamma - \beta^2}{4}}$, und $u(t) = e^{zt}$ ist komplexwertig. Wir erinnern, dass $u \in C^2(I;\mathbb{C})$, wenn $u = u_1 + iu_2$ mit $u_1, u_2 \in C^2(I;\mathbb{R})$. Man sagt dass u_1 der reelle Teil und u_2 der imaginäre Teil von u sind. Die Abbildung $u = u_1 + iu_2 \in C^2(I;\mathbb{C})$ ist eine komplexwertigen Lösung von (3.2.3), wenn

$$\begin{aligned} u''(t) + \beta u(t) + \gamma u(t) = 0 \ \forall t \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}[u''(t) + \beta u'(t) + \gamma u(t)] &= 0 \\ \mathrm{Im}[u''(t) + \beta u'(t) + \gamma u(t)] &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1''(t) + \beta u_1'(t) + \gamma u_1(t) &= 0 \\ u_2''(t) + \beta u_2'(t) + \gamma u_2(t) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile gilt, weil $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Da $u(t) := e^{zt}$, $z = a + ib$, eine komplexwertigen Lösung von (3.2.3) ist, sind

$$u_1(t) := \mathrm{Re} u(t) = e^{at}\cos(bt), \qquad u_1(t) := \mathrm{Im} u(t) = e^{at}\sin(bt)$$

reellwertigen Lösung und

$$u(t) := e^{at}\left(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)\right)$$

ist eine Lösung $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Konstante.

Beispiel Wir betrachten jetzt die Gleichung (3.2.2) mit $m = 1$

$$u''(t) + ru'(t) + ku(t) = 0,$$

mit $k > 0$ und $r \geq 0$. Vernachlässigt man die Reibung $r = 0$, bekommt man die Gleichung $u''(t) + ku(t) = 0$. Die Funktion $u(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lösung wenn

$$\lambda^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{k}.$$

Dann

$$u(t) = C_1 \cos(t\sqrt{k}) + C_2 \sin(t\sqrt{k})$$

ist eine Lösung $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wenn $0 < r < 2\sqrt{k}$ (schwache Reibung)

$$\lambda^2 + r\lambda + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a + ib,\ a = -\frac{r}{2}, b = \sqrt{k - \frac{r^2}{4}}.$$

Dann

$$u(t) = e^{-\frac{r}{2}t}[C_1 \cos(tb) + C_2 \sin(tb)], \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

und $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Wenn $2\sqrt{k} < r$ (starke Reibung)

$$\lambda^2 + r\lambda + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a \pm b,\ a = -\frac{r}{2}, b = \sqrt{\frac{r^2}{4} - k}.$$

Dann

$$u(t) = C_1 e^{(a+b)t} + C_2 e^{(a-b)t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Man kann leicht prüfen, dass $(a+b) < 0$ und $(a-b) < 0$ also $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

[26: 18.01.2018]

[27: 25.01.2018]

Eindeutigkeit Die Wahl der zwei Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $u'(t_0) = v_0$ bestimmt genau eine Linearkombination der beiden Einzellösungen. Mit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ ist auch $u(t) \in \mathbb{R}$.

3.3 Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \tag{3.3.1}$$

lässt sich immer in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben. Setze dazu

$$y_1(t) := u(t), \quad y_2(t) := u'(t). \tag{3.3.2}$$

Falls u eine Lösung von (3.3.1) ist, so gilt

$$y_1'(t) = u'(t) = y_2(t), \tag{3.3.3a}$$
$$y_2'(t) = u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) = f(t, y_1(t), y_2(t)). \tag{3.3.3b}$$

Sei $y : I \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $y(t) := (y_1(t), y_2(t))^t$. Dann $u \in C^2(I;\mathbb{R}) \Leftrightarrow y \in C^1(I;\mathbb{R}^2)$. In Vektorschreibweise kürzen wir die Gleichung ab zu

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad F(t,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{pmatrix}, \tag{3.3.4}$$

und $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sei umgekehrt y eine Lösung von (3.3.4). Setze $u(t) = y_1(t)$. Aus (3.3.4) folgt $u' = y_1' = y_2$ und $u''(t) = y_2'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)) = f(t, u(t), u'(t))$. Somit ist u eine Lösung von (3.3.1). Analog kann man zeigen, dass eine Differentialgleichung n-ter Ordnung $u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))$ äquivalent ist zu einem System erster Ordnung $y'(t) = F(t, y)$, mit $y(t) \in \mathbb{R}^n$, indem man die Funktionen $y_1(t) = u(t), y_2(t) = u'(t), \ldots, y_n(t) = u^{(n-1)}(t)$ betrachtet und $F(t,y) := (y_1, \ldots, y_{n-1}, f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n))^t$.

Beispiel Wir betrachten die Gleichung (3.2.3)

$$u''(t) + \beta u'(t) + \gamma u(t) = 0.$$

Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ mit $y_1 = u$, $y_2 = u'$. u ist genau dann eine Lösung von (3.2.3) wenn y eine Lösung von

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta \end{pmatrix}$$

ist.

Generell ist die lineare Differentialgleichung von Ordnung n

$$u^{(n)} + \alpha_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 u' + \alpha_0 u = f$$

mit $\alpha_j \in C(I;\mathbb{R})$ $\forall j = 1, \ldots, n-1$ und $f \in C(I;\mathbb{R})$ ist äquivalent zu

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$$

wo $y : I \to \mathbb{R}^n$, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : I \to \mathbb{R}^n$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

Daher betrachten wir im folgenden nur Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

3.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

3.4.1 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \tag{3.4.1}$$

wobei $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$, $A \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C(I,\mathbb{R}^n)$. Dies ist ein System n linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} y_1'(t) & = B_1(t) + \sum_{j=1}^n A_{1j}(t)y_j(t) \\ \vdots & \\ y_n'(t) & = B_n(t) + \sum_{j=1}^n A_{nj}(t)y_j(t) \end{cases}$$

Aufpassen: A und B sind nicht generell der Form (3.3.5).

Satz 3.3 (Homogene Gleichungen)**.** *Sei $I = (a,b)$, $a < b$ und $A \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ gegeben. Sei $S_I(A)$ die Menge aller Lösungen $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ der Differentialgleichung*

$$y'(t) = A(t)y(t). \tag{3.4.2}$$

Dann ist $S_I(A)$ ein Vektorraum und hat Dimension n.

Beweis. Hausaufgabe. Folgt aus Satz 3.9. □

Dieser Satz garantiert, dass es genau n Lösungen $\varphi_1, \dots \varphi_n \in S_I(A)$ von (3.4.3) existieren, so dass jede andere Lösung $y \in S_I(A)$ geschrieben werden kann als

$$y(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t),$$

wobei die Konstante $C_j \in \mathbb{R}\ \forall j = 1, \dots, n$ von y abhängen. Die Familie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ist eine Basis des Vektorraums $S_I(A)$. Der Vorteil ist, dass man nur diese n Lösungen bestimmen muss, um <u>alle</u> Lösungen zu finden.

Erinnerung (nicht in der Vorlesung diskutiert). Sei V ein reeller Vektorraum von Dimension n. Die Familie $\{v_1, \dots, v_n\}$, $v_j \in V\ \forall j$ ist eine Basis für V, wenn

$$\sum_{j=1}^n C_j v_j = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad C_j = 0\ \forall j = 1, \dots, n.$$

In unserem Fall ist die Familie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von $S_I(A)$, wenn

$$\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t) = \vec{0}\ \forall t \in I \quad \Leftrightarrow \quad C_j = 0\ \forall j = 1, \dots, n,$$

wobei $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^t$.

Lemma 3.4 (Inhomogene Gleichungen)**.** *Sei* $I = (a, b)$, $a < b$ *und* $A \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n}), B \in C(I; \mathbb{R}^n)$ *gegeben. Sei* $S_I(A, B)$ *die Menge aller Lösungen* $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ *der Differentialgleichung*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t). \tag{3.4.3}$$

Sei $\tilde{y}$ *eine Lösung. Dann ist*

$$S_I(A, B) = \tilde{y} + S_I(A) = \{Y = \tilde{y} + y \mid y \in S_I(A)\}.$$

Beweis. Korollar von Satz 3.3. □

Satz 3.5. *[Eindeutigkeit] Sei* $I = (a, b)$, $a < b$ *und* $A \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n}), B \in C(I; \mathbb{R}^n)$ *gegeben. Sei* $t_0 \in I$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}^n$*. Es gibt genau eine Lösung für* $y' = Ay + B$*, so dass*

$$y(t_0) = y_0.$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.9. □

Beispiel 1 (nicht in der Vorlesung besprochen). Für $n = 1$ betracthen wir $u'(t) = \alpha(t)u(t) + \beta(t)$, wobei $\alpha, \beta \in C(I; \mathbb{R})$. Aus Satz 3.3 folgt, dass die Menge aller Lösungen für $u' = \alpha u$ ein eindimensionaler Vektorraum ist. Sei $t_0 \in I$. Es ist leicht zu prüfen, dass $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds}$ eine Lösung ist. Dann sind alle Lösungen durch

$$u(t) = K\varphi(t) = Ke^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

gegeben. Weiter ist

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds}$$

eine Lösung für $u' = \alpha u$ die zusätzlich die Anfangsbedindung $u(t_0) = u_0$ erfüllt. Aus Satz 3.8 ist sie die einzige solche Lösung. Sei $\tilde{u}$ eine spezielle Lösung für $u' = \alpha u + \beta$. Dann sind alle Lösungen durch

$$u(t) = \tilde{u}(t) + K\varphi(t) = \tilde{u}(t) + Ke^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Beispiel 2. Sei $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = (0, 0)^t$. Die Gleichung $y' = Ay$ ist äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1'(t) & = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) & = -y_1(t) \end{array} \right. \qquad \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1''(t) - 2y_1'(t) + y_1(t) = 0 \\ y_2(t) = y_1'(t) - 2y_1(t) \end{array} \right.$$

Die erste Gleichung ist eine skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die linear und homogen ist mit konstante Koeffizienten (siehe Abschnitt 3.2.1). Die Funktion $y_1(t) = e^{\lambda t}$ ist eine Lösung für $y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0$ wenn $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Aus Abschnitt 3.2.1, Fall **2** sind e^t und te^t zwei Lösungen. Dann sind

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen für $y' = Ay$. Mit Satz 3.3 ist die Menge aller Lösungen ein zweidimensionaler Vektorraum. Um zu bestimmen, ob $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ eine Basis ist, betrachten wir die Gleichung

$$C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = \vec{0}\ \forall t \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + tC_2 & = 0 \\ -C_1 + (1-t)C_2 & = 0 \end{cases} \forall t$$
$$\Leftrightarrow C_1 = 0 = C_2$$

Dann ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ eine Basis und <u>alle</u> Lösungen sind durch

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} C_1 + tC_2 \\ -C_1 + C_2(1-t) \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

3.4.2 Skalare lineare Differentialgleichungen Ordnung n

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung von Ordnung n

$$u^{(n)} + \alpha_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 u' + \alpha_0 u = f$$

mit $\alpha_j \in C(I;\mathbb{R})$ $\forall j = 0, \ldots, n-1$, $f \in C(I;\mathbb{R})$ gegeben und $u \in C^n(I;\mathbb{R})$ die unbekannte Funktion.

Satz 3.6 (Homogene Gleichungen). *Sei $I = (a,b)$, $a < b$ und $\alpha_j \in C(I;\mathbb{R})$ $\forall j = 1, \ldots, n-1$ gegeben. Sei $S_I(\alpha)$ die Menge aller Lösungen $u \in C^n(I;\mathbb{R})$ der Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)u'(t) + \alpha_0(t)u(t) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (3.4.4)$$

Dann ist $S_I(\alpha)$ ein Vektorraum und hat Dimension n.

Beweis. (3.4.5) ist äquivalent zu $y' = Ay$, mit $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ und A eine Matrix der Form (3.3.5). Dann kann man Satz 3.3 anwenden. □

Lemma 3.7 (Inhomogene Gleichungen). *Sei $I = (a, b)$, $a < b$ und $\alpha_j \in C(I; \mathbb{R})$ $\forall j = 0, \ldots, n-1$, $f \in C(I; \mathbb{R})$ gegeben. Sei $S_I(\alpha, f)$ die Menge aller Lösungen $u \in C^n(I; \mathbb{R})$ der Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t)+\cdots+\alpha_1(t)u'(t)+\alpha_0(t)u(t) = f(t) \quad \forall t \in I. \tag{3.4.5}$$

Sei $\tilde{u}$ eine Lösung. Dann ist

$$S_I(\alpha, f) = \tilde{u} + S_I(\alpha) = \{U = \tilde{u} + u \mid u \in S_I(\alpha)\}.$$

Beweis. Korollar von Satz 3.3. □

Satz 3.8. *[Eindeutigkeit] Sei $I = (a, b)$, $a < b$ und $\alpha_j \in C(I; \mathbb{R})$ $\forall j = 1, \ldots, n-1$, $f \in C(I; \mathbb{R})$ gegeben. Sei $t_0 \in I$ und $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}$. Es gibt genau eine Lösung für $u^{(n)} + \alpha_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 u' + \alpha_0 u = f$, sodass*

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t_0) = v_1, \quad u''(t_0) = v_2, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}.$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.9, bzw. 3.8. □

3.4.3 Nicht lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten

$$y'(t) = F(t, y(t)), \tag{3.4.6}$$

wobei $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n), F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dies ist ein System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} y_1'(t) &= F_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \\ \vdots & \\ y_n'(t) &= F_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \end{cases}$$

Aufpassen: F hat nicht generell die Form (3.3.4).

Wenn die nichtlineare Funktion F genug Regularität hat, kann man Existenz und Eindeutigkeit beweisen.

Satz 3.9 (Satz von Picard-Lindelöf, lokale Version (ohne Beweis)). *Sei $I = (a, b)$ $a < b$ $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(I \times U; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ und $y_0 \in U$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ (das von F, y_0 und t_0 abhängt), so dass*

$$y'(t) = F(t, y(t)) \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \tag{3.4.7a}$$
$$y(t_0) = y_0 \tag{3.4.7b}$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta); \mathbb{R}^n)$ hat.

Satz 3.10 (Satz von Picard-Lindelöf, globale Version (ohne Beweis)). *Sei $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, für die eine Konstante L existiert, so dass*

$$\|F(t, v_2) - F(t, v_1)\| \leq L\|v_2 - v_1\| \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R},\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.8}$$

[In diesem Fall sagt man daß F Lipschitzstetig ist] Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine stetig differenzierbare Abbildung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die die Differentialgleichung

$$y'(t) = F(t, y(t)) \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.4.9a}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{3.4.9b}$$

erfüllt.

[27: 25.01.2018]

[28: 29.01.2018]

Beispiel 1 *(nicht in der Vorlesung diskutiert)* Sei $n = 1$, $t_0 = 0$ und $u_0 > 0$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = u^2(t), \tag{3.4.10a}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.4.10b}$$

Die nichtlineare Funktion F ist hier $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(t, x) \to F(t, x) = x^2$. Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ und aus Satz 3.9 folgt, dass es $\delta > 0$ gibt, so dass eine Lösung $u \in C^1((-\delta, \delta); \mathbb{R})$ existiert. Außerderm gilt $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2|\ |x_1 - x_2|.$$

Dann gibt es $\forall L > 0$ Punkte x_1, x_2, sodass $|x_1 + x_2| > L$. Diese Funktion erfüllt also nicht die Lipschitzbedingung (3.4.8) und man kann Satz 3.10 nicht anwenden.

In der Tat hatten wir im Abschnitt 3.1 gesehen, dass $u(t) := (\frac{1}{u_0} - t)^{-1}$ eine Lösung im Intervall $I = (-\infty, +\frac{1}{u_0})$ ist, dass es aber keine Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt (weil $\lim_{t \uparrow \frac{1}{y_0}} u(t) = +\infty$).

Beispiel 2 *(nicht in der Vorlesung diskutiert)* Sei $n = 1$, $t_0 = 0$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. definiert durch $F(x) = 4|x|^{3/4}$ Dann hat die Differentialgleichung

$$u'(t) = F(u(t)), \tag{3.4.11a}$$

$$u(0) = 0 \tag{3.4.11b}$$

mehr als eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R})$, zum Beispiel $u_1(t) = 0$ und

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0, \\ t^4 & \text{falls } t > 0. \end{cases} \tag{3.4.12}$$

Dies ist kein Widerspruch zu Satz 3.9, denn die Funktion F ist in 0 nicht differenzierbar.

4 Volumen und Integral im $\mathbb{R}^n$

4.1 Elementare Definition des Integrals

4.1.1 Dimension 1

Sei $a < b$, $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ mit $f(x) \geq 0$. Dann

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{Fläche}[A_{ab}(f)],$$

wobei

$$A_{ab}(f) = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x_1 \leq b, \quad 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\},$$

und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ das übliche Riemannintegral ist. Das Integral kann auch für nicht stetige Funktionen definiert werden.

Bespiel 1 Sei $I = [a,b]$, und $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\chi_I(x) = 1$ falls $x \in I$ und $\chi_I(x) = 0$ sonst. Diese Funktion ist nicht stetig aber integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_I(x)dx = \int_a^b dx = (b-a) = \text{Fläche}[R]$$

wobei $R = [a,b] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiel 2 Sei

$$A := \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 |\ \ 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, falls $|x| < R$ und $f(x) = 0$ sonst. Diese Funktion ist stetig und das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = R^2 \frac{\pi}{2} = \text{Fläche}[A]$$

ergibt die Fläche der Halbkugel in $d = 2$.

4.1.2 Dimension 2

Sei jetzt $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f \geq 0$. Wir suchen eine Definition des Integrals, sodass

$$\int_Q f(x_1, x_2)\mathrm{d}x = \mathrm{Volume}[A_Q(f)]$$

wobei

$$A_Q(f) = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 \in [a_1, b_1],\ x_2 \in [a_2, b_2],\ 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}.$$

Für stetige Funktionen auf einem Rechteck können wir das Integral durch zweimalige Bildung eines eindimensionalen Riemannintegrals definieren, wie folgt.

$$\int_Q f\mathrm{d}x := \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\right] \mathrm{d}x_2. \tag{4.1.1}$$

Da Q kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf Q. Daraus folgt, dass die durch

$$g(x_2) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \tag{4.1.2}$$

definierte Funktion $g : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Daher existiert das Integral bezüglich x_2 in (4.1.1) als Riemannintegral.

Lemma 4.1 ((ohne Beweis))**.** *Sei $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\right] \mathrm{d}x_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\right] \mathrm{d}x_1. \tag{4.1.3}$$

Wir können also die eckigen Klammern weglassen und die Integrale und die $\mathrm{d}x_i$ umordnen.

Beispiel. Sei

$$A := \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 |\ \ 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\},$$

wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $f(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$, falls $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R$ und $f(x_1, x_2) = 0$ sonst. Dann ist $\mathrm{Vol}(A) =$ Volume der Halbkugel in $d = 3$.

Die Funktion f ist stetig und $f(x) = 0$ für $x \notin [-R, R] \times [-R, R]$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{-R}^{R} \left[\int_{-r(x_1)}^{r(x_1)} \sqrt{r(x_1)^2 - x_2^2}\ \mathrm{d}x_2\right] \mathrm{d}x_1,$$

wobei für jede x_1 mit $|x_1| < R$ $r(x_1) := \sqrt{R^2 - x_1^2}$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2} r(x_1)^2 \mathrm{d}x_1 = \frac{\pi}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - x_1^2)\mathrm{d}x_1 = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

4.1.3 Dimension $n \geq 1$

Der Satz lässt sich mit etwas mehr Notation auf drei und mehr Dimensionen verallgemeinern.

Definition 4.2. *Sei $Q := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$ und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definieren wir*

$$\int_Q f \mathrm{d}x := \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n. \tag{4.1.4}$$

Definition 4.3. *$C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass ein $L > 0$ existiert, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus [-L, L]^n$.*

Für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ definieren wir weiter

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x := \int_{[-L,L]^n} f \mathrm{d}x, \tag{4.1.5}$$

wobei L so gewählt wird, dass $f = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus [-L, L]^n$.

Bemerkung Das Integral hängt weder von der Reihenfolge der Integration über die Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_n$ noch von der genauen Wahl von L ab.

4.2 Lebesgue Integral in $\mathbb{R}^n$

Um das Integral für nicht stetig Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu definieren, muss man das sogenannte Lebesgue Intregral definieren. Dieser Begriff verallgemeinert das Riemannintegral auf $\mathbb{R}$ und kann auch auf $\mathbb{R}^n$ definiert werden. Alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind auch Lebesgue-integrierbar und die zwei Integrale stimmen berein. Es existieren aber Funktionen die Lebesgue-integrierbar sind, aber nicht Riemann-integrierbar (z.B. die die charakteristische Funktion der Menge aller rationale Zahlen $\mathbb{Q}$).

4.2.1 Lebesgue-integrierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Definition 4.4. *Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Würfel $q_j = x_j + (0, \ell_j)^n$ existieren, $j \in \mathbb{N}$, so dass $N \subset \cup_j q_j$ und $\sum_j \ell_j^n < \varepsilon$.*

Beispiel Ein isolierte Punkt $N = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.5. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ist integrierbar, wenn eine Nullmenge N und eine Folge stetiger Funktionen $f_j \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ existieren, so dass*

(i) $0 \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ *für alle x und alle j;*

(ii) $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ *für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$;*

(iii) $\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f_j \mathrm{d}x\right\} < \infty$ *(die Menge über alle j hat eine obere Schranke).*

Wir setzen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x := \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \mathrm{d}x. \tag{4.2.1}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, wenn $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$ und $f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ integrierbar sind. Man definiert dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_+ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f_- \mathrm{d}x. \tag{4.2.2}$$

[28: 29.01.2018]

[29: 01.02.2018]

Bemerkung Diese Definition ist kompatibel mit Def. 4.2 und 4.3: Jede $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x = \int_{[-L,L]^n} f \mathrm{d}x,$$

wobei $L > 0$, sodass $f(x) = 0\ \forall \|x\| > L$ (siehe Def. 4.3). Wenn $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ und $f \in C^0(Q; \mathbb{R})$, definieren wir $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x)$ falls $x \in Q$ und $g(x) = 0\ \forall x \notin Q$. Dann kann man zeigen, dass g Lebesgue integrierbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \mathrm{d}x = \int_Q f \mathrm{d}x = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

(siehe Def. 4.2).

Beispiel 1 Sei $R > 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \|x\| < R, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

ist nicht stetig aber integrierbar. Um das zu beweisen, wählen wir für $j \in \mathbb{N}$

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \|x\| \leq R - 1/j, \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq R, \\ j(R - \|x\|) & \text{falls } R - 1/j < \|x\| < R. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Dann ist $f_j \in C_c^0(\mathbb{R}^2)$, $f_j(x) \to 1$ für alle $\|x\| < R$, und deshalb $f_j \to f$ punktweise für alle $x \in \mathbb{R}^2$, und wir setzen $N = \emptyset$. Wir rechnen

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_j \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} dx_2 \int_{-R}^{R} dx_1 f_j(x) \leq \pi R^2, \tag{4.2.5}$$

weil $f_j(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}^2$, deshalb ist f integrierbar. Man kann auch zeigen (Hausaufgabe), dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x := \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_j \mathrm{d}x = \pi R^2.$$

4.2.2 Lebesgue Integralen auswerten: Satz von Fubini

Es ist nicht praktisch das Integral durch einen Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_j \mathrm{d}x$ auszuwerten.

Satz 4.6 (Satz von Fubini für $n = 2$). *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ eine Lebesgue-integrierbar Funktion. Dann existieren zwei Nullmengen $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}$ s.d.*

(i) Die Funktion $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ ist Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}$ $\forall x_1 \notin N_1$.

Die Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ ist Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}$ $\forall x_2 \notin N_2$.

(ii) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2 & \text{falls } x_1 \notin N_1 \\ 0 & \text{falls } x_1 \in N_1 \end{cases},$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_1 & \text{falls } x_2 \notin N_2 \\ 0 & \text{falls } x_2 \in N_2 \end{cases}$$

sind auch Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} f_2(x_2) dx_2.$$

Mit etwa 'abuse of notation' schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1. \qquad (4.2.6)$$

Bemerkung Der Vorteil dieses Satzes ist, dass man nur eindimensionale Lebesgueintegrale auswerten muss. Diese sind in viele Fälle normale Riemannintegrale.

Beispiel Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion in (4.2.3). Wir haben schon gesehen dass f Lebesgue-integrierbar ist. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1$$

Für $x_1 \in \mathbb{R}$ sei $g_{x_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_{x_1} := f(x_1, x_2)$. Dann $g_{x_1} \equiv 0$ $\forall |x_1| \geq R$. Wenn $|x_1| < R$ gilt $g_{x_1}(x_2) = 1$ $\forall |x_2| < r(x_1) := \sqrt{R^2 - x_1^2}$ und $g_{x_1}(x_2) = 0$ sonst. Die Funktion g_{x_1} ist also Riemann-integrierbar $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}} g_{x_1}(x_2) \mathrm{d}x_2 = \begin{cases} 2r(x_1) & \text{falls } |x_1| < R \\ 0 & \text{falls } |x_1| \geq R \end{cases}.$$

Dann $f_1 : x_1 \to \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1$ ist auch Riemann-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) \mathrm{d}x_1 = \int_{-R}^{R} 2r(x_1) \mathrm{d}x_1 = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x_1^2} \mathrm{d}x_1 = R^2 \pi.$$

Satz 4.7 (Satz von Fubini für $n > 2$)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine Lebesgue-integrierbar Funktion. Dann existieren zwei Nullmengen $N_1 \subset \mathbb{R}, N_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, sodass*

(i) Die Funktion $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}^{n-1}$ $\forall x_1 \notin N_1$.
Die Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}$ $\forall x_2 \notin N_2$.

(ii) Die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2) dx_2 & \textit{falls } x_1 \notin N_1 \\ 0 & \textit{falls } x_1 \in N_1 \end{cases},$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_1 & \textit{falls } x_2 \notin N_2 \\ 0 & \textit{falls } x_2 \in N_2 \end{cases}$$

sind auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_2(x_2) dx_2.$$

Mit etwa 'abuse of notation' schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right] \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\right] \mathrm{d}x_1. \tag{4.2.7}$$

4.2.3 Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$: Volumen auswerten

Definition 4.8. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren ihr Lebesguemaß $\mathcal{L}^n(A)$, das anschaulich ihrem Volumen in n Dimensionen entspricht.*

(i) Wir definieren die charakteristische Funktion der Menge $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\chi_A(x) = 1$, falls $x \in A$, und $\chi_A(x) = 0$ sonst.

(ii) Falls χ_A integrierbar ist, definieren wir das n-dimensionale Lebesguemaß von A durch $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \mathrm{d}x$. Man sagt dann, A ist messbar.

Bemerkung 4.9.

(i) Falls $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist K messbar.

(ii) Falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, dann ist U messbar.

(iii) Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann ist N messbar mit $\mathcal{L}^n(N) = 0$.

(iv) Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Falls $A \subset B$ dann $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B)$.

(v) Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann $A \cup B$ ist messbar und $\mathcal{L}^n(A \cup B) \leq \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B)$.
Falls $A \cap B = \emptyset$ dann $\mathcal{L}^n(A \cup B) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B)$.

Beispiel 1: Quader Sei $A = Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion χ_Q ist integrierbar (siehe Bemerkung nach Def.4.5). Dann Q ist messbar mit Volumen

$$\mathcal{L}^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q \mathrm{d}x = \int_Q \mathrm{d}x = \prod_{i=1,\dots,n} (b_i - a_i).$$

Beispiel 2: Kugel in zwei Dimensionen Sei $n = 2$ und $A_R := B_R^{(2)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^2$ mit Radius R. Aus Beispiel 1 in Abschnitt 4.2.1, χ_{A_R} ist integrierbar. Dann ist $B_R(\vec{0})$ messbar mit Fläche

$$\mathcal{L}^2(B_R^{(2)}(\vec{0})) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_R} \mathrm{d}x = \pi R^2.$$

Beispiel 3: Kugel in drei Dimensionen Sei $n = 3$ und $A'_R := B_R^{(3)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R. A'_R ist offen und beschränkt also messbar. Aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^3(B_R^{(3)}(\vec{0})) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{A'_R} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \chi_U(x_1, x_2, x_3) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x_1 \\ = \int_{-R}^{R} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_{r(x_1)}} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x_1,\end{aligned}$$

wobei $r(x_1) = \sqrt{R^2 - x_1^2}$. Aus Beispiel 2

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_{r(x_1)}} \mathrm{d}x = \mathcal{L}^2(B_{r(x_1)}^{(2)}(\vec{0})) = \pi r(x_1)^2 = \pi(R^2 - x_1^2).$$

Dann

$$\mathcal{L}^3(B_R^{(3)}(\vec{0})) = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x_1^2) \mathrm{d}x_1 = \pi(2R^3 - \frac{1}{3} 2R^3) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

4.2.4 Lebesgue-Integralen über Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

Definition 4.10. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbar Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die Erweiterung von f auf $\mathbb{R}^n$ durch*

$$f_{ex} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f_{ex}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sagt, dass f Lebesgue-integrierbar ist, wenn f_{ex} Lebesgue-integrierbar ist, und

$$\int_A f \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f_{ex} \mathrm{d}x.$$

Bemerkung 4.11.

(i) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in C^0(K)$. Dann ist f integrierbar.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(U)$ beschränkt. Dann ist f integrierbar.

(iii) Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, $f : N \to \mathbb{R}$. Dann ist f integrierbar mit $\int_N f \mathrm{d}x = 0$.

(iv) Falls $A \cap B = \emptyset$ und $\int_A f \mathrm{d}x$, $\int_B f \mathrm{d}x$ existieren, dann existiert auch $\int_{A \cup B} f \mathrm{d}x$ und

$$\int_{A \cup B} f \mathrm{d}x = \int_A f \mathrm{d}x + \int_B f \mathrm{d}x. \qquad (4.2.8)$$

4.2.5 Koordinatentransformation

Satz 4.12 (Transformationsformel, ohne Beweis)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^1(U;V)$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in C^1(V;U)$. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ auch integrierbar und*

$$\int_V f \mathrm{d}y = \int_U |\det \nabla\varphi| \, (f \circ \varphi) \, \mathrm{d}x. \tag{4.2.9}$$

Dieser Satz ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel. In der Praxis ist er äußerst nützlich.

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ Sei $N := \mathbb{R}_+ \times \{\vec{0}\} = \{(x,0)^t | \, x \geq 0\}$, $V := \mathbb{R}^2 \backslash N$, $U := (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ und $\varphi : U \to V$ durch

$$\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.2.10}$$

definiert. Dann $\varphi \in C^1(U;V)$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in C^1(V;U)$ und

$$\nabla\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \det \nabla\varphi(r,\theta) = r. \tag{4.2.11}$$

Es gilt $\mathbb{R}^2 = V \cup N$ und $V \cap N = \emptyset$. Außerdem ist N eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$, also $\mathcal{L}^2(N) = 0$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar. Aus (4.2.8)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x = \int_V f \mathrm{d}x + \int_N f \mathrm{d}x = \int_V f \mathrm{d}x = \int_U r f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr d\theta \\ = \int_0^\infty \left[\int_a^{a+2\pi} r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \right] dr \end{aligned}$$

Beispiel Man kann das Volume der Kugel in zwei Dimensionen durch Polarkoordinaten auswerten. $A_R := B_R^{(2)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^2$ mit Radius R. Dann

$$(\chi_{A_R} \circ \varphi)(r, \theta) = \chi_{A_R}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{falls } r \geq R \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(B_R^{(2)}(\vec{0})) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_R} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left[\int_a^{a+2\pi} r\, \chi_{A_R}(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \right] dr \\ = \int_0^R r \left[\int_a^{a+2\pi} d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2. \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ Sei $N := \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} = \{(x,0,z)^t |\, x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$, $V := \mathbb{R}^3 \backslash N$, $U := (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und $\varphi : U \to V$ durch

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.2.12}$$

definiert. Dann $\varphi \in C^1(U;V)$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in C^1(V;U)$,

$$\nabla\varphi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

und $\det\nabla\varphi(r,\theta,\phi) = r^2\sin\theta$. N ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ (Hausaufgabe) dann für jede $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrierbar

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f\mathrm{d}x = \int_V f\mathrm{d}x = \int_U r^2\sin\theta\,(f\circ\varphi)(r,\theta,\phi)drd\theta d\phi \\ = \int_0^\infty r^2\left[\int_0^\pi \sin\theta\left[\int_0^{2\pi}(f\circ\varphi)(r,\theta,\phi)d\phi\right]d\theta\right]dr\end{aligned}$$

Beispiel Man kann das Volume der Kugel in drei Dimensionen durch Kugelkoordinaten auswerten. $A'_R := B_R^{(3)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R. Dann

$$(\chi_{A'_R}\circ\varphi)(r,\theta,\phi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r < R \\ 0 & \text{falls } r \geq R \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^3(B_R^{(2)}(\vec{0})) = \int_{\mathbb{R}^3}\chi_{A'_R}\mathrm{d}x = \int_0^\infty r^2\left[\int_0^\pi\sin\theta\left[\int_0^{2\pi}(\chi_{A'_R}\circ\varphi)(r,\theta,\phi)d\phi\right]d\theta\right]dr \\ = \int_0^R r^2\left[\int_0^\pi\sin\theta\left[\int_0^{2\pi}d\phi\right]d\theta\right]dr = 2\pi\int_0^R r^2\left[\int_0^\pi\sin\theta d\theta\right]dr \\ = 4\pi\int_0^R r^2dr = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

4.3 Oberfläche auswerten

Beispiel 1 Sei $Q = (0,l)\times(0,l) \subset \mathbb{R}^2$. Dann $Vol(Q) = \mathcal{L}^2(Q) = l^2$ und ∂Q hat Länge $L(\partial Q) = 4l$. Man kann diese Länge mit zwei Methoden auswerten:

- einen Weg definieren $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ s.d. $\gamma([0,1]) = \partial Q$ und γ injektive. Dann $L(\partial Q) = L(\gamma)$.

- Volumen benutzen: sei $Q_\varepsilon := (\varepsilon, l-\varepsilon) \times (\varepsilon, l-\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Dann es gilt $\forall \varepsilon > 0$ $Q_\varepsilon \subset Q$ und

  $$d[x, \partial Q] = \varepsilon \qquad \forall x \in \partial Q_\varepsilon$$

  wobei für $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ $d[x, A] := \inf_{y \in A} \|x - y\|$. Man kann zeigen, dass eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $\varphi(Q \backslash \bar{Q}_\varepsilon) = (0, L_\varepsilon) \times (0, \varepsilon)$ mit $L_\varepsilon > 0$ und $\mathcal{L}^2(Q \backslash \bar{Q}_\varepsilon) = \varepsilon L_\varepsilon$. Da $Q_\varepsilon \subset Q$, gilt

  $$\mathcal{L}^2(Q \backslash \bar{Q}_\varepsilon) = \mathcal{L}^2(Q) - \mathcal{L}^2(Q_\varepsilon) = l^2 - (l - 2\varepsilon)^2 = 4l\varepsilon - 4\varepsilon^2 = \varepsilon[4l - 4l\varepsilon] = \varepsilon L_\varepsilon$$

  Dann $L(\partial Q) = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon = 4l$.

Beispiel 2 $A_R := B_R^{(2)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^2$ mit Radius R. Dann ist ihr Volume gleich $\mathcal{L}^2(A_R) = \pi R^2$. Wir möchten die Länge $L(\partial A_R)$ auswerten. Wir im Beipiel 1, kann man zwei Methoden benutzen

- Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (R\cos t, R\sin t)^t$. Dann $\gamma([0, 2\pi]) = \partial A_R$ und γ injektive. Dann

  $$L(\partial A_R) = L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi R.$$

- Volumen benutzen: sei $A_{R-\varepsilon} := B_{R-\varepsilon}^{(2)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^2$ mit Radius $R - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < R$. Dann gilt $\forall R > \varepsilon > 0$ $A_{R-\varepsilon} \subset A_R$ und

  $$d[x, \partial A_R] = \varepsilon \qquad \forall x \in \partial A_{R-\varepsilon}$$

  Man kann zeigen, dass eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $\varphi(A_R \backslash \bar{A}_{R-\varepsilon}) = (0, L_\varepsilon) \times (0, \varepsilon)$ mit $L_\varepsilon > 0$ und $\mathcal{L}^2(A_R \backslash \bar{A}_{R-\varepsilon}) = \varepsilon L_\varepsilon$. Es gilt

  $$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(A_R \backslash \bar{A}_{R-\varepsilon}) = \mathcal{L}^2(A_R) - \mathcal{L}^2(A_{R-\varepsilon}) &= \pi R^2 - \pi(R - \varepsilon)^2 \\ &= 2\pi R\varepsilon - \pi\varepsilon^2 = \varepsilon[2\pi R - \pi\varepsilon] = \varepsilon L_\varepsilon\end{aligned}$$

  Dann $L(\partial A_R) = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon = 2\pi R$.

Die zweite Methode kann für mehrere Dimensionen erweitert werden.

Beispiel 3 Sei $A'_R := B_R^{(3)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R. Dann ist ihr Volumen gleich $\mathcal{L}^3(A'_R) = \pi R^2$. Wir möchten die Fläche $F(\partial A'_R)$ auswerten.

Sei $A'_{R-\varepsilon} := B_{R-\varepsilon}^{(3)}(\vec{0})$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R-\varepsilon$, $0 < \varepsilon < R$. Dann gilt $\forall R > \varepsilon > 0$ $A'_{R-\varepsilon} \subset A'_R$ und

$$d[x, \partial A'_R] = \varepsilon \qquad \forall x \in \partial A'_{R-\varepsilon}$$

Man kann zeigen, dass eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert, sodass

$\varphi(A'_R \backslash \bar{A}'_{R-\varepsilon}) = (0, L_\varepsilon)^2 \times (0, \varepsilon)$ mit $L_\varepsilon > 0$ und $\mathcal{L}^3(A'_R \backslash \bar{A}'_{R-\varepsilon}) = \varepsilon L_\varepsilon^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^3(A'_R \backslash \bar{A}'_{R-\varepsilon}) = \mathcal{L}^3(A'_R) - \mathcal{L}^3(A'_{R-\varepsilon}) &= \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi(R-\varepsilon)^3}{3} \\ &= \frac{4\pi}{3}(3R^2\varepsilon - 3R\varepsilon^3 + \varepsilon^3) = \varepsilon[4\pi R^2 - 4\pi R\varepsilon^2 - \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3] = \varepsilon L_\varepsilon^2\end{aligned}$$

Dann $F(\partial A'_R) = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon^2 = 4\pi R^2$.