Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 13, Wiederholung

Aufgabe 1

Sei $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ und $B = \overline{B_1(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Definiere $A = R/B$.

(i) Liegt der Punkt $(1, 0)$ im Rand von A? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Geben Sie ohne Begründung den Rand von A an.

(iii) Beweisen oder widerlegen Sie: Jede stetige Funktion nimmt auf A ihr Minimum an.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = \vec{0}, \\ \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie, in welchen Punkten f stetig ist.

(ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f, sofern diese existieren.

(iii) Entscheiden Sie, in welchen Punkten f differnzierbar ist und beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4, |y| \leq 2\}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x, y) = y(1 + 2xy - x)$$

(i) Beweisen Sie, dass f auf M sein Maximum und Minimum annimmt.

(ii) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von M.

(iii) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\nabla^2 f$ und überprüfen Sie sie an den kritischen Punkten auf Definitheit und Semidefinitheit.

(iv) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf M.

Aufgabe 4

(i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Finden sie eine Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} u' + u''' &= 0, \\ u(0) &= a, \\ u'(0) &= b, \\ u''(0) &= c. \end{aligned}$$

(ii) Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Finden sie eine Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} u' + u''' &= 2t, \\ u(0) &= \tilde{a}, \\ u'(0) &= \tilde{b}, \\ u''(0) &= \tilde{c}. \end{aligned}$$

Für welche $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ löst die Funktion $u(t) = t^2$ diese Differentialgleichung?

(iii) Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Finden sie eine Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} u' + u''' &= 2t, \\ u(0) &= 1, \\ u'(0) &= 0, \\ u''(0) &= 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden sie i) und ii).

Aufgabe 5

Seien $G(x, y, z) = 2x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 + 2z^2 - 1$, $M = \{(x, y, z) | G(x, y, z) = 0\}$ und

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Bestimmen sie die globalen Extreme von f auf M.

Aufgabe 6

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma_1(t) = (1, t), \quad \gamma_2(t) = (\sin(t^{\frac{3}{2}}), \cos(t^{\frac{3}{2}})).$$

(i) Berechnen Sie die Länge von γ_1.

(ii) Berechnen Sie die Länge von γ_2.