Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 12, Abgabe am 25.01.2018

Aufgabe 1

Sei $u_0 \in (0,1)$ beliebig. Gesucht ist eine Lösung $u \in C^1(I;\mathbb{R})$ für $I = (a,b)$, $a < 0 < b$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = (1-u(t))u(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass für jede Lösung u ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $u(t) \in (0,1)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ die Funktion $v(t) = (u(t))^{-1}$ die Gleichung $v'(t) = 1 - v(t)$ erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass dann für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ die Funktion $w(t) = v(t) - 1$ die Gleichung $w'(t) = -w(t)$ erfüllt.

(iv) Bestimmen Sie mit Hilfe von *(iii)* eine Lösung $u(t)$ von (1) auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

(v) Zeigen Sie, dass diese Lösung für alle $\varepsilon > 0$ wohldefiniert ist.

je 1 P

Aufgabe 2

Betrachten Sie eine Regentonne, die unten an der Seite angestochen wurde. Die Höhe des Wasserpegels $h \in C^0([0,T);\mathbb{R}) \cap C^1((0,T);\mathbb{R})$, $T > 0$ kann durch eine Lösung der Differentialgleichung

$$h'(t) = -c\sqrt{|h(t)|}$$

mit $c > 0$ beschrieben werden.

(i) Lösen Sie die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

(ii) Das Wasser steht am Anfang 1m hoch. Berechnen Sie den Zeitpunkt $\bar{t}$, zu dem die Tonne komplett leer gelaufen ist.

(iii) Sei jetzt $T > \bar{t}$. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung die zusätzlich die zwei Bedingungen $h(0) = 1$ und $h(\bar{t}) = 0$ erfüllen. Welche der beiden Lösungen ist die physikalisch Relevante?

2+1+2 P

Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C^1((-T,T);\mathbb{R})$, $T > 0$ der folgenden Differentialgleichung:

$$(i) \begin{cases} u'(t) = -e^t u(t) \\ u(0) = e^2 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} u'(t) = 2u(t) - t^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Hinweis für (ii): Lösen Sie erst die homogene Gleichung. Betrachten Sie dann Polynome für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung oder nutzen Sie die Methode der Variation der Konstante. 2+3 P

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Lösung $u \in C^1((-T,T);\mathbb{R})$, $T > 0$ der Differentialgleichung

$$u'''(t) + 2u'(t) = 0$$

mit den Anfangswerten

$$(i) \begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ u''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ ähnlich zu dem Ansatz zur Lösung von Gleichungen 2. Ordnung in der Vorlesung. 3+2 P