Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 11, Abgabe am 18.01.2018

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = e^x(\sin(y)z + xy^2)$. Betrachten Sie die Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(x,y,z) = -(xy, yz, zx)^t, \quad G(v) := [\nabla f(v)]^t. \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{rot} F = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)^t$. Hat F eine Stammfunktion?

(ii) Rechnen Sie explizit nach, dass $\operatorname{rot} G = 0$.

3+2 P

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale und zeichnen Sie die Kurven:

(i) Für $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (\cos(t), 1)^t$ und $f(x,y) = xy$.

(ii) Für $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (t, 1)^t$ und $f(x,y) = xy$.

(iii) Für $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (\cos(t), 1)^t$ und $f(x,y) = (x,y)^t$.

(iv) Für $K \in \mathbb{N}$, $\gamma : [0,K] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) = (\sin(t), t, \cos(t))^t$ und $f(x,y,z) = e^{-y}$.

(v) Für $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) = (\sin(t), t, \cos(t))^t$ und $f(x,y,z) = (x, \frac{1}{3}y^2, z)^t$.

je 1 P

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Linearität und Homogenität:

(i) $u(t) + t^2 - e^{-t}u'(t) - 5tu''(t) = 0$.

(ii) $u(t)u'(t) - 2t + 4u''(t) = 0$.

(iii) $u(t) - 3u'(t) + 2u'''(t) = 0$.

(iv) Zusatzaufgabe: $(u(t))^2 + 2u(t)u'(t) + (u'(t))^2 = 0$.

2+2+1+1* P