Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 10, Abgabe am 11.01.2018

Aufgabe 1

Sei $K = [0,1] \times [0, \frac{5}{4}\pi]$. Sei $f : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = -x^2 e^y \cos(y)$.

(i) Sei $g : [0, \frac{5}{4}\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = f(1,y)$. Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen von g.

(ii) Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen von f.

(iii) Fertigen Sie eine Skizze von f an.

2+2+1 P

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die Wege $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ und berechnen Sie ihre Länge.

(i) Sei $n = 2, v_0 \in \mathbb{R}^2, r > 0$ und ϕ_1, ϕ_2 fest. Definiere $\gamma_1(t) = v_0 + r \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + t(\phi_2 - \phi_1)) \\ \sin(\phi_1 + t(\phi_2 - \phi_1)) \end{pmatrix}$.

(ii) Sei $n = 2$. Definiere

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} (-2,0)^t + (4t, 2t)^t & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ (e^t - 1, e^t)^t & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(iii) Sei $n = 2$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $\gamma_3(t) = (\cos(\frac{1}{t+\varepsilon}), \sin(\frac{1}{t+\varepsilon}))$.

(iv) Sei $n = 3$. Definiere $\gamma_4(t) = (\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sin(t))$.

1+2+1+1 P

Aufgabe 3

Sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y = 9\}$ und sei $f(x,y) = 8x + \sqrt{3}y^2$.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe von Lagrangemultiplikatoren kritische Punkte von f auf S.

Hinweis: Um die Nullstellen von $y^3 - 3y^2 + 4$ zu finden, rät man eine Nullstellen und führt anschließend Polynomdivision durch.

(ii) Betrachten Sie nun die Funktion $\hat{f} : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}$, die gegeben ist als $\hat{f}(y) = 8\sqrt{9-3y} + \sqrt{3}y^2$. Berechnen Sie die kritischen Punkte von $\hat{f}$.

(iii) Beide Methoden bestimmen die kritischen Punkte von f auf S. Diskutieren Sie anhand dieses Beispiels die Unterschiede, Vor- und Nachteile der jeweiligen Methode.

2+2+1 P

Aufgabe 4

Sei S die zwei dimensionale Einheitssphäre, also

$$S := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 + xz - yz + y^2.$$

(i) Begründen Sie, warum f eingeschränkt auf S sein Minimum annimmt.

(ii) Bestimmen Sie dieses Minimum.

Hinweis: Lagrangemultiplikatoren.

1+4 P