Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 9, Abgabe am 21.12.2017

Aufgabe 1

Sei $K = \{(x, y, z) | \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + z \leq 2, x, y, z \geq 0\}$. Definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als $f(x, y, z) = xe^{2x-y+z}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als $g(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

(i) Skizzieren Sie das Gebiet K.

(ii) Zeigen Sie, dass $\partial K = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, wobei S_j eine kompakte zweidimensionale Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie S_j für $j = 1, 2, 3, 4$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\partial S_j = l_{j,1} \cup l_{j,2} \cup l_{j,3}$, wobei $l_{j,k}$ Kurven in $\mathbb{R}^3$ sind. Bestimmen Sie $l_{j,k}$ für $j = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3$.

(iv) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f auf K.

(v) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f \circ g$ in K°.

1+2+2+2+3 P

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = \frac{e^x}{y} - \frac{1}{2}$ und sei $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

(i) Nutzen Sie den Satz über implizite Funktion um die Existenz zweier Interalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und $(c, d) \subset \mathbb{R}$ sowie einer Funktion $\psi : (a, b) \to (c, d)$ zu zeigen, die erfüllen: $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ und $F(x, \psi(x)) = 0$ für $x \in (a, b)$.

(ii) Nutzen Sie die Formel für die Ableitung aus dem Satz um zu beweisen, dass $\psi' = \psi$.

(iii) Raten Sie die explizite Form von ψ.

3+1+1 P

Aufgabe 3

Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und sei $f(x, y, z) = 8x^2 + 4y + 3z^2$. Bestimmen Sie mithilfe von Lagrangemultiplikatoren die lokalen und globalen Extremstellen von f auf S. 5 P