Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 7, Abgabe am 07.12.2017

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-x^2-\frac{1}{2}y^2}$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\partial_x f(x,y) = P_1(x,y)e^{-x^2-\frac{1}{2}y^2}, \quad \partial_y f(x,y) = P_2(x,y)e^{-x^2-\frac{1}{2}y^2},$$

mit $P_1(x,y)$ und $P_2(x,y)$ Polynome und berechnen Sie $P_1(x,y)$ und $P_2(x,y)$ explizit.

(ii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(iii) Berechnen Sie $\nabla^2 f$ und bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

2+1+2 P

Aufgabe 2

Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als $f(x,y,z) = x^2 e^x e^{2y} e^{2z}$. Berechnen Sie ∇f und $\nabla^2 f$ und finden Sie alle lokalen und globalen Extrema von f in K.

5 P

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass S^{n-1} eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(v) := \langle Av, v \rangle$ stetig ist.

2+3 P

Aufgabe 4

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $x \in U, y \in V$. Sei $f : U \to V$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) = y$ und $\det \nabla f(x) \neq 0$. Gegeben sei außerdem eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$, die in y ein striktes globales Minimum haabe, also $g(y') > g(y)$ für alle $y' \neq y$.

(i) Nehmen Sie außerdem an, dass die Hessematrix von g in y positiv definit ist. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ einen kritischen Punkt hat und die Hessematrix von $g \circ f$ in x positiv definit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in x ein striktes Minimum hat, also ein Radius $r > 0$ existiert, sodass $(g \circ f)(x') > (g \circ f)(x)$ für alle $x' \in B_r(x)$ Beachten Sie: Die Hessematrix von g ist in dieser Teilaufgabe im Allgemeinen *nicht* positiv definit.

3+2 P