Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 6, Abgabe am 30.11.2017

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig partiell differenzierbare Funktion, also:

1. $\partial_i f$ existiert und ist stetig für alle $i = 1, 2, 3$
2. $\partial_i \partial_j f$ existiert und ist stetig für alle $i, j = 1, 2, 3$
3. $\partial_i \partial_j \partial_\ell f$ existiert und ist stetig für alle $i, j, \ell = 1, 2, 3$.

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\partial_i \partial_j \partial_\ell f = \partial_\ell \partial_j \partial_i f, \quad \text{für alle } i, j, \ell = 1, 2, 3.$$

5 P

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Polarkoordinatenabbildung

$$p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad p(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_2) \\ x_1 \sin(x_2) \end{pmatrix}$$

und eine differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Verkettung, also $\partial_1(u \circ p)$ und $\partial_2(u \circ p)$. 5 P

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Dreieck $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$ gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass D kompakt ist und folgern Sie, dass f eingeschränkt auf D Maximum und Minimum annimmt.
2. Bestimmen Sie das Maximum von f auf D.

1+4 P

Aufgabe 4

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $M_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1+\alpha & -1 \\ -1 & -1 & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie die Determinante $\det M_\alpha$.

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist M_α invertierbar?

(iii) Berechnen Sie für diese α die Inverse M_α^{-1}.

2+1+2 P