Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 1, Abgabe am 26.10.2017

Aufgabe 1

Sei $B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$ der Ball mit Radius r. Ferner sei $A \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $A := B_1 \backslash B_{\frac{1}{2}}$.

(i) Skizzieren Sie die Menge A.

(ii) Entscheiden Sie, ob A offen oder abgeschlossen ist und beweisen Sie Ihre Aussage.

(iii) Bestimmen Sie $\overline{A}$, ∂A und $\mathring{A}$.

1+2+2 P

Aufgabe 2

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Beweisen Sie:

(i) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

(ii) $\overline{A} = \partial A \cup \mathring{A}$

(iii) $\partial A \cap \mathring{A} = \emptyset$

(iv) $\mathring{A}$ ist offen. ∂A und $\overline{A}$ sind abgeschlossen.

(v) A ist genau dann offen, wenn $\mathring{A} = A$.

je 1 P

Aufgabe 3

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Sei $\mathcal{O} = \{O : O \subset A, O \text{ offen}\}$ und $\mathcal{G} = \{G : G \supset A, G \text{ abgeschlossen}\}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \tag{1}$$

$$\overline{A} = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G. \tag{2}$$

3+2 P

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

(i) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

3+2 P