Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 8, Abgabe am 14.12.2017

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Zylinderkoordinatenabbildung

$$p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad p(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Verkettung, also $\partial_r(u \circ p)$, $\partial_\phi(u \circ p)$ und $\partial_z(u \circ p)$.

(ii) Berechnen Sie die folgenden zweiten partiellen Ableitungen: $(r\partial_r)[(r\partial_r)(u \circ p)]$, $\partial_\phi^2(u \circ p)$ und $\partial_z^2(u \circ p)$.

(iii) Zeigen Sie die folgende Identität für den Laplace Operator $-\Delta$:

$$(-\Delta u) \circ p := (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) \circ p = [\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2](u \circ p).$$

1+2+2 P

Aufgabe 2

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das offene Dreieck mit Eckpunkten $P_1 = (1, 1), P_2 = (-1, 1), P_3 = (1, 0)$. Sei $f(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Maximalstellen von f in D.

(ii) Bestimmen Sie das globale Maximum von f in dem Abschluss $\bar{D}$.

3+3 P

Aufgabe 3

Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $f(v) = \|v\|$,

(i) Bestimmen Sie die Hessematrix $Hf(v)$ für $v \neq \vec{0}$.

(ii) Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von $Hf(v)$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $Hf(v)$ die Eigenwerte 0 und $\|v\|^{-1}$ hat und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

(iv) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Sei $g(v) = \|v - a\| + \|v - b\|$. Sei w nicht auf der Geraden durch a und b. Zeigen Sie: $Hg(w)$ is positiv definit.

Erinnerung: Für zwei positiv-semidefinite Matrizen M_1, M_2 ist auch die Summe $M_1 + M_2$ positiv semidefinit.

1+1+1+2 P

Aufgabe 4

Die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ hat für jedes $(x, y) \subset B(2) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $g(x, y)$.

(i) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(ii) Berechnen Sie $\nabla g(1, 1)$.

(iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von g.

1+2+1 P