Übungen zu Analysis III

Bonn, den 17.11.2016
Wintersemester 2016/2017
Prof. Dr. Stefan Müller
Buchholz/Hilger

Übungsblatt 5

Abgabe: 24.11.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Messbare Funktionen) Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ist f $\mathcal{S}$-messbar, so ist auch f^2 $\mathcal{S}$-messbar.

(b) Ist f^2 $\mathcal{S}$-messbar, so ist auch f $\mathcal{S}$-messbar.

Sei nun $\mathcal{S} = \sigma(\{[k, \infty) : \ k \in \mathbb{Z}\})$ (d.h. die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, die alle Mengen der Form $[k, \infty)$ für $k \in \mathbb{Z}$ enthält) und $\mathcal{S}' = \sigma(\{[k, \infty) : \ k \in \mathbb{Z}\}, \{(-\infty, k] : \ k \in \mathbb{Z}\})$.

(c) Zeigen Sie $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$.

Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{\mathcal{S}} := \{E \subset \mathbb{R} : \ E$ hat Eigenschaft (P)$\}$. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ hat Eigenschaft (P), falls gilt: $x \in E \Longrightarrow [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \subset E$.

(d) Ist $f(x) = x$ $\mathcal{S}$-messbar oder $\mathcal{S}'$-messbar?

(e) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, die $\mathcal{S}'$-messbar, aber nicht $\mathcal{S}$-messbar ist.

(1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathcal{L}^n(K) > 0$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(0) \subset K - K (:= \{x - y : x, y \in K\})$.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, K geeignet von außen zu approximieren und zu verwenden, dass $K \cap (y + K) = \emptyset$ äquivalent ist zu $y \notin K - K$.

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass $B_\delta(0) \subset A - A$.

(c) Begründen Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), ob man auf die Annahme, dass A messbar ist, verzichten kann.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion, so dass $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = xf(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst Stetigkeit im Ursprung. Betrachten Sie dazu die Mengen $A_\epsilon = f^{-1}((-\epsilon, \epsilon))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(A_\epsilon) > 0$ für jedes $\epsilon > 0$ gilt und verwenden Sie dann den Aufgabenteil **(b)**.

(2+1+1+2 Punkte)

bitte wenden

Aufgabe 3 (Borel-Messbarkeit versus Lebesgue-Messbarkeit für $n > 1$) Sei $A \subset [0,1]$ nicht $\mathcal{L}^{1*}$-messbar. Definiere $E = A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass E $\mathcal{L}^{2*}$-messbar ist.

(b) Gilt $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$?

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4 (Stetige Fortsetzungen) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Es soll nun gezeigt werden, dass eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, die auf K mit f übereinstimmt.

Hinweis: Benutzen Sie zunächst ohne Beweis, dass es eine stetige Funktion $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gibt mit $\omega(0) = 0$ und

$$|f(x) - f(y)| \le \omega(|x-y|) \quad \text{für alle } x, y \in K \tag{1}$$

und dass ω selber gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$|\omega(a) - \omega(b)| \le \eta(|a-b|) \quad \text{mit} \quad \lim_{s \downarrow 0} \eta(s) = 0. \tag{2}$$

(a) Sei $F(x) = \inf_{z \in K} f(z) + \omega(|x-z|)$. Zeigen Sie, dass das Infimum ein Minimum ist und dass $F = f$ auf K gilt.

(b) Zeigen Sie, dass F stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir konstruieren nun den Stetigkeitsmodul ω.

(c)* Für $r \ge 0$ sei

$$\rho(r) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in K, |x-y| \le r\}.$$

Zeigen Sie $\lim_{r \downarrow 0} \rho(r) = 0$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem ρ nicht stetig ist.

(d)* Definiere

$$\omega(t) = \frac{1}{t} \int_t^{2t} \rho(r)\, \mathrm{d}r, \quad \text{für } t > 0, \quad \omega(0) = 0.$$

Weiterhin sei

$$\eta(s) = \sup\{|\omega(a) - \omega(b)| : a, b \in [0,\infty), |a-b| \le s\}.$$

Zeigen Sie, dass ω und η die Eigenschaften (1) und (2) haben.

(2+3+2*+2* Punkte)

$\Sigma = 20 + 4^*$