Prof. Dr. J. J. L. Velázquez
Dr. M. Zaal
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

# Einführung in die partiellen Differentialgleichungen
Aufgabenblatt

## Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

(a) $y'(x) + xy(x) = 0$ mit $y(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) $y'(x)x^3 = 2y(x)$ mit $y(1) = e^{-1}$.

(c) $y'(x) + y(x) = e^{-2x}$ mit $y(0) = 1$.

(d) $y'(x) = 1 + \frac{y(x)}{x}$ mit $x > 0$ und $y(1) = 0$.

(e) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{y(x)^2}{x^2}$, $y(x_0) = y_0$ mit $x_0 > 0$

(f) $y'(x) = y(x)(1 - y(x))$ mit $y(0) = 1/2$.

(g) $y''(x) - 2y'(x) + 5y = 0$ mit $y(0) = y'(0) = -2$.

Hinweise: Trennung der Veränderlichen (a, b, f), Variation der Konstanten (c), Substitution (d, e), charakteristische Gleichung (g).

## Aufgabe 2

(a) Ein Teilchen $y$ mit Masse 1 in einem Kraftfeld $U$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y'' = -U'(y), \qquad y(0) = y_0 > 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = v_0. \tag{1}$$

Zeigen Sie: Eine Lösung von (1) erhält die Energie $E$, d.h. $E(y(t)) \equiv \text{const}$, wobei $E$ gegeben ist durch

$$E(y(t)) = \underbrace{\frac{1}{2}\left|y'(t)\right|^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{U(y(t))}_{\text{potentielle Energie}} . \tag{2}$$

(b) Ein Gravitationsfeld ist gegeben durch $U(y) = -\frac{\gamma M}{y}$, wobei $M > 0$ die Masse des Zentralkörpers und $\gamma > 0$ die Gravitationskonstante. Die Fluchtgeschwindigkeit $v_F > 0$ ist der kleinste Anfangswert $v_0 > 0$, sodass für eine Lösung von (1) gilt $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe des Energiesatzes (2)

$$y(t) \to \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad E_0 = \frac{1}{2}\left|v_0\right|^2 - \frac{\gamma M}{y_0} \geq 0 \tag{3}$$

und berechnen Sie daraus $v_F$.

(c) Berechnen Sie die Fluchttrajektorie, d.h. eine Lösung von (1) mit $v_0 = v_F$. Leiten Sie dazu die folgende Differentialgleichung mit Hilfe des Energiesatzes (2) und (3) her und lösen diese:

$$y' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{y}}, \qquad y(0) = y_0.$$

## Aufgabe 3

Beweisen Sie die beiden Greenschen Formeln mit Hilfe des Gausschen Integralssatzes.

Für $\varphi, \psi \in C^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glatten Rand gilt

$$\int_\Omega (\psi \Delta\varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi \nabla\varphi \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma$$

und

$$\int_\Omega (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla\varphi \cdot \nu - \varphi \nabla\psi \cdot \nu)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Hierbei bezeichnet $\nu$ den Normalenvektor und $\sigma$ das Oberflächenelement auf $\partial\Omega$.

## Aufgabe 4

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \gamma(t) = (r(t), z(t))$ eine geschlossene $C^1$ kurve, d.h. eine stetig differentierbare Abbildung, sodass $\gamma$ injektiv auf $[a,b)$ ist und $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ferner gelte $r(t) \geq 0$ für $t \in [a,b]$. Die Rotationsfläche $\Gamma$ bei Rotation um die $z$-Achse ist gegeben durch

$$\Gamma = \{(x(t,u), y(t,u), z(t)) : x(t,u) = r(t)\cos(u), y(t,u) = r(t)\sin(u), u \in [0, 2\pi)\}.$$

$V$ bezeichne das eingeschlossene Volumen.

(a) Leiten Sie mit Hilfe des Gausschen Integralsatzes die Formel für das Volumen des Rotationskörpers $\Gamma$ her

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi \int_a^b r^2(t) z'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Suchen Sie ein einfaches Vektorfeld mit Divergenz 1 unter Beachtung der Symmetrie des Problems und wenden Sie den Gausschen Integralsatz auf dieses Vektorfeld an.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers gegeben durch

$$r(t) = \cos(t) \quad \text{und} \quad z(t) = \sin(2t) \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$