LINEARE KONTROLLTHEORIE

Skriptum zu einer Vorlesung

von Prof. Dr. J. Frehse

Institut für Angewandte Mathematik der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Zur Einführung betrachten wir das folgende sehr einfache Problem der optimalen Steuerung eines Raketenwagens: Zur Zeit t_0 befinde sich im Ursprung eines geeigneten eindimensionalen Koordinatensystems ein Wagen, an dem vorn und hinten Rückstoßdüsen zum Beschleunigen und Bremsen angebracht sind. Der Wagen habe zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit Null und soll in kürzester Zeit T an eine Stelle $G \in \mathbb{R}$ gebracht werden und dort halten. Die durch das Verbrennen des Kraftstoffes entstehende Rückstoßkraft u soll durch eine Konstante c begrenzt werden, um übermäßige Beschleunigungen zu vermeiden. Wir werden vernachlässigen, daß die Masse m des Wagens infolge der Verbrennung des Kraftstoffes von der Zeit t abhängt. Auch die Reibungskräfte werden vernachlässigt. Die mathematische Formulierung des Problems mit Hilfe des Newtonschen Gesetzes Kraft=Masse·Beschleunigung lautet:

Gesucht ist die minimale Zahl $T > 0$ und Funktionen $u\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$, $x\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$, so daß

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u\,, \qquad -c \le u \le c \text{ in } [t_0, T] \text{ und} \\ x(t_0) &= \dot{x}(t_0) = \dot{x}(T) = 0\,, \qquad x(T) = G\,. \end{aligned}$$

Wir können die Differentialgleichung auch als System erster Ordnung schreiben; dies führt auf das Problem

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2\,,\ \dot{x}_2 = \frac{u}{m}\,, \qquad -c \le u \le c \text{ in } [t_0, T], \\ x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_2(T) = 0\,, \qquad x_1(T) = G\,, \qquad T = \min! \end{gathered}$$

Dies ist ein Beispiel für ein einfaches sogenanntes zeitoptimales Steuerungsproblem (oder Kontrollproblem). Aus physikalischen Gründen ist es klar, daß die optimale Wahl von u darin besteht, den Wagen zunächst so stark wie möglich zu beschleunigen, d.h. $u = c$ zu wählen, und nach der Hälfte der Gesamtzeit T den Wagen so stark wie möglich zu bremsen, d.h. $u = -c$ zu wählen. Die optimale Steuerung u ist daher eine *unstetige* Funktion. Die obige Funktion x_2 muß zwar stetig sein, kann aber im Schaltpunkt, an dem u von c in $-c$ übergeht, nicht im klassischen Sinne differenzierbar sein; sie ist es nur fast überall (d.h. überall mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null – in diesem Fall ein einzelner Punkt). Es ist daher mathematisch wie praktisch angemessen, die Funktionen u in dem obigen Beispiel in der Klasse der *meßbaren*, beschränkten Funktionen zu suchen. Die Maßtheorie lehrt uns dann, daß es Funktionen $\binom{x_1}{x_2}$ gibt, welche die vorgegebene Anfangsbedingung erfüllen, *absolutstetig* sind und das obige Differentialgleichungssystem überall bis auf eine Menge vom Maß Null erfüllen. Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung $x_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{m} u \, dt$ und dem Satz, daß das unbestimmte Integral über eine Lebesgue-integrable Funktion eine absolutstetige Funktion definiert.

Definition 1.1 *Eine Funktion $f\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ heißt* absolutstetig, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $N \in \mathbb{N}$ und alle $t_i, t_i' \in [t_0, T]$, $i = 1, \ldots, N$ mit $\sum_{i=1}^{N} |t_i - t_i'| < \delta$*

die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_i')| < \varepsilon$$

stattfindet.

Jede absolutstetige Funktion ist fast überall differenzierbar.

Die hier im Falle des Raketenwagens dargestellte Situation gilt ganz allgemein, wenn wir beliebige lineare Systeme, sogenannte Kontrollsysteme, bei allgemeinen Anfangs- und Endbedingungen sowie Restriktionen für die Steuerungen zugrunde legen. Dies führt auf folgende Grundaufgabe der linearen Kontrolltheorie:

Es seien $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Vektorfunktion sowie A eine $n \times n$- und B eine $n \times m$-Matrixfunktion mit meßbaren und beschränkten Koeffizienten. Ferner sei Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ sowie $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$.

(0.1.) Gesucht ist die **minimale** Zahl (= Zeit) $T > t_0$ sowie eine meßbare Funktion $u\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ und eine absolutstetige Funktion $x\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, so daß

(0.1.i) $\dot{x} = Ax + Bu + c$ fast überall in $[t_0, T]$,

(0.1.ii) $u(t) \in \Omega$ für fast alle $t \in [t_0, T]$,

(0.1.iii) $x(t_0) = x_0$,

(0.1.iv) $x(T) = x_1$.

Die (abhängigen) Variablen u heißen *Steuerungs-* oder *Kontrollvariable*, die Variablen x *Zustandsvariable*. Die Menge Ω wird häufig durch Systeme von Ungleichungen gegeben sein, z.B. $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u| \leq 1\}$. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ergibt sich, daß jeder zulässigen Steuerung u (d.h. u ist meßbar, und es gilt $u(t) \in \Omega$ fast überall) eine eindeutige sogenannte *Antwort* x_u entspricht, welche absolutstetig ist, das Differentialgleichungssystem fast überall erfüllt und der Anfangsbedingung $x_u(t_0) = x_0$ genügt.

Die Aufgabe (0.1.) kann also so formuliert werden, eine zulässige Steuerung u zu finden, so daß die entsprechende Antwort x_u den Punkt x_1 in minimaler Zeit T erreicht. Man drückt dies auch so aus: Man soll in minimaler Zeit den Punkt x_0 in den Punkt x_1 steuern.

Anstelle der Bedingung (0.1.iv) kann man auch die folgende Bedingung stellen:

(0.1.iv') $x(T) \in G(T)$.

Hierbei ist G eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eventuell von der Zeit abhängt. G wird auch als „Ziel“ bezeichnet. Man stellt sich vor, daß man den Punkt x_0 in minimaler Zeit mit Hilfe einer zulässigen Steuerung in das Ziel $G(T)$ steuern will. Statt (0.1.iii) kann man allgemeiner die Bedingung

(0.1.iii') $x(t_0) \in G_0$

mit einer abgeschlossenen Teilmenge $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ stellen.
Weitere Verallgemeinerungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man zuläßt, daß die Menge Ω von t abhängig ist, oder wenn man zusätzliche Restriktionen für die Zustandsvariablen stellt, etwa

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n .$$

Hierauf werden wir im Folgenden jedoch nicht eingehen.

Es kann passieren, daß es zu jedem $T > t_0$ kein zulässiges Pärchen (x_u, u) gibt, d.h. es gibt keine meßbare Funktion u mit $u(t) \in \Omega$ fast überall, deren Antwort x_u den Punkt x_0 nach x_1 steuert (oder allgemeiner in das Ziel $G(T)$ steuert). In diesem Fall ist die Aufgabe (0.1.) nicht lösbar. Gibt es jedoch für ein $T > t_0$ ein zulässiges Paar (x_u, u), so ist die Aufgabe (0.1.) lösbar, wie wir in Kapitel 2 zeigen werden.
Auch zur Frage, unter welchen Voraussetzungen man den Punkt x_0 nach x_1 steuern kann, gibt es Untersuchungen, auf die wir später eingehen werden.

Die Aufgabe (0.1.) und ihre Verallgemeinerungen bezeichnet man als *zeitoptimale Probleme*. Selbstverständlich spielen in den Anwendungen auch Probleme eine Rolle, bei denen die Endzeit T fest gegeben ist und etwas anderes maximiert oder minimiert werden soll. Dies führt auf die folgende zweite Grundaufgabe der linearen Kontrolltheorie:

(0.2.) Es seien $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0, x_0, A, B, c, \Omega, G$ wie in (0.1.) gegeben, sowie $T \in \mathbb{R},\ T > t_0$ fest gegeben. Gesucht ist eine meßbare Funktion $u\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ und eine absolutstetige Funktion $x\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, so daß

(0.2.i) $\dot{x} = Ax + Bu + c$ fast überall in $[t_0, T]$,

(0.2.ii) $u(t) \in \Omega$ für fast alle $t \in [t_0, T]$,

(0.2.iii) $x(t_0) = x_0$,

(0.2.iv) $x(T) \in G(T)$

und $g(x(T)) = \max!$

Als Beispiel stelle man sich wieder das Problem des Raketenwagens vor, bei dem man bei fester Endzeit T die erste Komponente von $x(T)$ maximieren möchte.
Anstelle der Größe $g(x(T))$ kann man auch lineare Integrale

$$(0.3.)\quad \int\limits_{t_0}^{T} (d(t)x(t) + f(t)u(t))\, dt$$

maximieren; dies kann jedoch durch Einführung einer zusätzlichen Variablen x_{n+1} vermöge der Gleichung

$$\dot{x}_{n+1} = d \cdot x + f \cdot u\,, \qquad\qquad x_{n+1}(t_0) = 0$$

auf den Fall (0.2.) zurückgeführt werden.
Die Aufgabe (0.2.) kann auch mit variabler Endzeit gestellt werden.

Die lineare Kontrolltheorie beschäftigt sich mit dem Studium der Aufgaben (0.1.) und (0.2.), etwa mit der Herleitung von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen, Eigenschaften der optimalen Steuerungen wie dem Bang-Bang-Prinzip (im Fall des Raketenwagens ist dies die von uns bereits beobachtete Eigenschaft, daß die optimale Steuerung im Rand $\{-c\} \cup \{c\}$ der Restriktionsmenge $[-c, c]$ für den Kontrollbereich verläuft und in unstetiger Weise von c nach $-c$ springt). Ferner werden Methoden zur Berechnung optimaler Steuerungen bereitgestellt wie das Pontryaginsche Maximumprinzip. Außerdem beschäftigt sich die lineare Kontrolltheorie damit, wie die Gesamtheit der Zustände aussieht, welche angesteuert werden können.

Von großer Bedeutung für Anwendungen ist der Fall, daß die Differentialgleichungsnebenbedingungen *nichtlinear* sind, d.h. die Form $\dot{x} = f(., x, u)$ haben. Hierauf gehen wir im Folgenden nicht ein, doch dienen die Untersuchungen auch dem Zweck, durch das Studium des linearen Falles eine bessere Grundlage zum Verständnis der nichtlinearen Theorie zu liefern.

2 Die erreichbare Menge eines Kontrollsystems. Existenz optimaler Steuerungen.

Wie in der Einführung betrachten wir *Kontrollsysteme* der Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + Bu + c\,,\ x(t_0) = x_0 \quad &\text{oder allgemeiner } x(t_0) \in G_0\,, \\ u(t) \in \Omega \quad &\text{für fast alle } t \in [t_0, T]\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hierbei ist $x\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolutstetig und $u\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ meßbar und beschränkt. Außerdem soll wieder gelten:

$$\begin{aligned} A \text{ und } B \text{ sind } n \times n\text{- bzw. } n \times m\text{- Matrizen mit Koeffizienten aus } L^\infty[t_0, T]\,. \\ c \text{ ist eine Vektorfunktion mit Komponenten aus } L^\infty[t_0, T]\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m \text{ und } G_0 \subset \mathbb{R}^n \text{ sind kompakt }. \tag{2.3}$$

Definition 2.1 *Die* erreichbare Menge $K_T \subset \mathbb{R}^n$ *des Kontrollsystems (2.1) ist die Menge* $K_T = \{x_u(T) | x_u$ *ist Antwort auf eine zulässige Steuerung* $u\}$.

Soll betont werden, daß die Restriktionsmenge für die Steuerungen durch die Menge Ω gegeben ist, so schreiben wir auch genauer $K_T = K_T(\Omega)$.

Zur Beschreibung der erreichbaren Menge benötigen wir die *Lösungsformel* aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen folgt die Existenz absolutstetiger Funktionen $z^{(j)}$ mit $\dot{z}^{(j)} = Az^{(j)}$in $[t_0, T]\,,\ z^{(j)}(t_0) = e_j\,,\ j = 1, \ldots, n$. Hierbei ist $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ der j-te Einheitsvektor. Die $z^{(j)}$ können zu einer Matrix $\Phi := (z^{(1)}, \ldots, z^{(n)})$ zusammengefaßt werden, welche wir als die *Wronski-Matrix* des Systems $\dot{z} = Az$ bezeichnen. Φ hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Phi(t_0) &= Id\,, \\ \dot{\Phi} &= A\Phi\,. \end{aligned}$$

Außerdem besitzt $\Phi(t)$ für jedes $t \in [t_0, T]$ eine Inverse $\Phi^{-1}(t)$, welche stetig von t abhängt. Damit ergibt sich durch eine einfache Rechnung

Lemma 2.1 *Die Lösung des Differentialgleichungssystems* $\dot{z} = Az + g\,,\ z(t_0) = z_0$ *mit* $g \in [L^\infty]^n$ *hat die Gestalt*

$$z(t) = \Phi(t) \left[z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) g \, ds \right] .$$

Für die erreichbare Menge K_T ergibt sich:

Lemma 2.2 *Die erreichbare Menge K_T des Kontrollsystems (2.1) hat die Gestalt*

$$K_T = Y + M$$

mit

$$Y = \left\{ y = \Phi(T) \left[x_0 + \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s) c \, ds \right] \right\} \qquad \textit{und}$$

$$M = M(\Omega) = \left\{ z = \Phi(T) \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s) B(s) u(s) \, ds | \; u(s) \in \Omega \textit{ fast überall }, \; u \textit{ meßbar} \right\}$$

Hierbei ist die Summe $Y + M$ von Y und M wie üblich erklärt durch

$$Y + M = \{ y + z | \; y \in Y \, , \; z \in M \} \, .$$

Für die erreichbare Menge gelten die folgenden grundlegenden Sätze 2.1 und 2.2, die im Wesentlichen eine Folgerung aus dem Satz 3.4 bzw. seinen Korollaren sind.

Satz 2.1 *Unter den Voraussetzungen (2.1)–(2.3) ist die erreichbare Menge K_T des Kontrollsystems (2.1) kompakt. Besteht G_0 nur aus einem Punkt oder ist G_0 konvex, so ist K_T konvex.*

Bemerkung: Man beachte, daß die Menge Ω nicht notwendig konvex sein muß. Dennoch ist K_T konvex! – Setzt man anstelle der Kompaktheit von G_0 nur die Abgeschlossenheit von G_0 voraus, so ist K_T wenigstens abgeschlossen.

Beweis: Setzt man $F = \Phi^{-1} B$, so erkennt man mit Hilfe von Satz 3.4, Korollar 3.1, daß die Menge $\left\{ \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1} B u \, ds | \; u(s) \in \Omega \, , \; u \text{ meßbar} \right\}$ kompakt und konvex ist. Dasselbe trifft daher auch auf die Menge M zu. Weiterhin unterscheidet sich die Menge Y von der Menge $\Phi(T) G_0$ nur um einen konstanten Vektor. Y ist daher kompakt bzw. konvex, wenn G_0 kompakt bzw. konvex ist. Die Menge K_T ist als Summe von Y und M daher ebenfalls kompakt bzw. konvex. □

Satz 2.2 (Bang-Bang-Prinzip) *Unter den Voraussetzungen (2.1)–(2.3) gilt*

$$K_T(\Omega) = K_T(\mathcal{H}(\Omega)) \, .$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{H}(\Omega)$ die konvexe Hülle von Ω (Definition siehe Kapitel 6).

Beweis: Aus Lemma 2.2 ergibt sich, daß man die Gleichheit $M(\Omega) = M(\mathcal{H}(\Omega))$ nachweisen muß. Die folgt jedoch aus Satz 3.4. $\square$

Satz 2.2 ist von großem Interesse für die Kontrolltheorie, denn er besagt, daß man die Punkte aus $K_T(\mathcal{H}(\Omega))$ auch mit Hilfe der unter Umständen sehr viel kleineren Klasse von Steuerungen $u\colon [t_0, T] \to \Omega$ aussteuern kann. Ist Ω konvex, so gilt $K_T(\partial\Omega) = K_T(\Omega)$, und ist die Menge $\mathcal{E}(\Omega)$ der Extremalpunkte von Ω kompakt, so gilt sogar $K_T(\mathcal{E}(\Omega)) = K_T(\Omega)$. In dem Falle, daß $\Omega = \{u \in \mathbb{R}|\ |u| \leq 1\}$ ist, gilt $\partial\Omega = \{-1, 1\}$, d.h. die Punkte von $K_T(\Omega)$ lassen sich durch Kontrollen ansteuern, die nur die Werte -1 und 1 annehmen. Dies erklärt die Bezeichnung „Bang-Bang-Prinzip".

Wir benötigen einen Satz, der besagt, daß die erreichbare Menge stetig von T bezüglich des Hausdorff-Abstandes abhängt. Dies wird für die sich anschließenden Existenzaussagen gebraucht. Der *Hausdorff-Abstand* $d(M_1, M_2)$ zweier Mengen M_1 und $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ ist hierbei durch die folgende Zahl definiert:

$$d(M_1, M_2) := \max\{\sup_{x \in M_2} d(x, M_1)\,,\ \sup_{x \in M_1} d(x, M_2)\}$$

mit

$$d(x, M_i) = \inf\{|x - y|\ |y \in M_i\}\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Wir sagen, daß die Menge K_T stetig von T abhängt, wenn zu jedem $T \geq 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ existiert, so daß

$$d(K_T, K_{T'}) < \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad T, T' \text{ mit } |T - T'| < \varepsilon\,.$$

Satz 2.3 *Unter den Voraussetzungen (2.1)–(2.3) hängt die erreichbare Menge des Kontrollsystems (2.1) stetig von T ab.*

Beweis: Nach Lemma 2.2 gilt die Darstellung $K_T = Y_T + M_T$ mit $Y_T = \Big\{ y = \Phi(T)[x_0 + \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1} c\, ds] \Big\}$ und $M_T = \Big\{ z = \Phi(T) \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1} B u\, ds|\ u(s) \in \Omega \text{ fast überall, } u \text{ meßbar} \Big\}$.
Mit der Definition des Hausdorff-Abstands überlegt man sich leicht, daß K_T stetig von T abhängt, wenn dies für Y_T und M_T zutrifft. Ebenso einfach schließt man unter Benutzung der Stetigkeit von Φ, daß Y_T und M_T stetig von T abhängen, wenn dies für die Mengen $\Phi^{-1}(T) Y_T$ und $\Phi^{-1}(T) M_T$ zutrifft. Für die Menge $\Phi^{-1}(T) Y_T = \Big\{ x_0 + \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1} c\, ds\ |x_0 \in G_0 \Big\}$ ist dies trivial, da die Integration stetig von der oberen Grenze abhängt. Für die Menge

$\Phi^{-1}(T)M_T = \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} \Phi^{-1}Bu\,ds \middle| \ u(s) \in \Omega \right\}$ ergibt sich die stetige Abhängigkeit von T durch die folgende Überlegung: Es sei $t_0 \leq T < T'$ und $T' - T < \delta$. Zu $x \in \Phi^{-1}(T)M_T$ gibt es eine zulässige Steuerung u mit $x = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi^{-1}Bu\,ds$. Man setze u auf das Intervall $[0, T']$ durch einen beliebigen Wert γ aus Ω zu einer Steuerung v fort. Es gilt dann $x_v(T') \in \Phi^{-1}(T')M_{T'}$ mit $x_v(T') = \int\limits_{t_0}^{T'} \Phi^{-1}Bv\,ds$ und

$$|x - x_v(T')| = \left| \int_{T}^{T'} \Phi^{-1}B\gamma\,ds \right| \leq K(T' - T)\,, \tag{2.4}$$

wobei K von $\|\Phi^{-1}\|_\infty$, $\|B\|_\infty$ und Ω abhängt. Daraus folgt

$$d(x, \Phi^{-1}(T')M_{T'}) \leq K(T' - T)$$

für alle $x \in \Phi^{-1}(T)M_T$. Gilt $y \in \Phi^{-1}(T')M_{T'}$, so gibt es eine zulässige Steuerung v mit $y = \int\limits_{t_0}^{T'} \Phi^{-1}Bv\,ds$. Wir restringieren v auf das kleinere Intervall $[t_0, T]$. Es gilt dann

$x_v(T) \in \Phi^{-1}(T)M_T$, $x_v(T) = \int\limits_{t_0}^{T} \Phi^{-1}Bv\,ds$ und

$$|y - x_v(T)| \leq \left| \int_{T}^{T'} \Phi^{-1}Bv\,ds \right| \leq K(T' - T)$$

oder

$$d(y, \Phi^{-1}(T)M_T) \leq K(T' - T)\,. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) folgt

$$d(\Phi^{-1}(T)M_T, \Phi^{-1}(T')M_{T'}) \leq K(T' - T)$$

und damit die stetige Abhängigkeit von $\Phi^{-1}(T)M_T$ bezüglich T. Der Satz ist damit bewiesen. $\square$

Im Folgenden sei $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{array}{l}\text{Für jedes Kompaktum } \tilde{G} \subset \mathbb{R}^n \text{ sei } \tilde{G} \cap G(T) \text{ stetig in } T \\ \text{bezüglich der Hausdorff-Metrik.}\end{array} \tag{2.6}$$

Wir betrachten nun das Steuerungsproblem: Gesucht ist eine Steuerung $u\colon [t_0, T] \to \Omega \subset \mathbb{R}^m$, welche den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vermöge der Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax + Bu + c$ in minimaler Zeit nach x_1 bzw. nach $G(T)$ steuert oder allgemeiner von der Menge $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ in minimaler Zeit nach $G(T)$ steuert. Ist K_T die erreichbare Menge des Kontrollsystems, so läßt sich kürzer schreiben:

$$\begin{array}{l}\text{Gesucht ist die minimale Zahl } T > t_0 \text{ mit} \\ G(T) \cap K_T \neq \emptyset\,, \text{ sowie eine} \\ \text{zulässige Steuerung } u \text{ mit } x_u(T) \in G(T) \cap K_T.\end{array} \tag{2.7}$$

Von Interesse sind auch nicht-zeitoptimale Probleme. Hierzu sei $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und es gelte:

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ist stetig.} \tag{2.8}$$

Es sei nun $T > 0$ fest vorgegeben, und wir suchen nach einer zulässigen Steuerung u, welche x_0 oder G_0 in einen Punkt $x_u(T)$ steuert, so daß g maximiert wird. Dies läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{array}{l}\text{Gesucht ist ein Punkt } z \in K_T \text{ mit} \\ g(z) = \max\{g(y) | y \in K_T \cap G(T)\} \\ \text{sowie eine zulässige Steuerung } u\colon [t_0, T] \to \Omega\,, \\ \text{welche von } x_0 \text{ bzw. } G_0 \text{ nach } z \text{ steuert.}\end{array} \tag{2.9}$$

Es gilt der folgende Existenzsatz:

Satz 2.4 *Unter den Voraussetzungen (2.1)–(2.3), (2.6) und (2.8) sind die Probleme (2.7) und (2.9) lösbar, falls $G(T) \cap K_T \neq \emptyset$ für mindestens ein T im Fall (2.7) bzw. für das gegebene T im Fall (2.9).*

Beweis: Zur Lösbarkeit von Problem (2.7): Es sei T_i eine Minimalfolge, d.h. $T_i > t_0$, $G(T_i) \cap K_{T_i} \neq \emptyset$, $T_i \to T^* := \inf\{T > t_0 | G(T) \cap K_T \neq \emptyset\}$. Sei $x_i \in G(T_i) \cap K_{T_i}$. Wegen Voraussetzung (2.6) und Satz 2.3 ist die Folge (x_i) beschränkt und hat einen Häufungspunkt x^*. Angenommen, es wäre $x^* \notin G(T^*) \cap K_{T^*}$. Dann gäbe es offene Umgebungen $U \ni x^*$ und $V \supset G(T^*) \cap K_{T^*}$ mit $U \cap V = \emptyset$. Aus Satz 2.3 und 2.1 sowie Voraussetzung (2.6) folgt $G(T_i) \cap K_{T_i} \subset V$ für fast alle i und $x_i \in U$ für unendlich viele i. Dies ist ein Widerspruch, da $x_i \in G(T_i) \cap K_{T_i}$; andererseits $U \cap V = \emptyset$. Es gilt daher $x^* \in G(T^*) \cap K_{T^*}$ und $G(T^*) \cap K_{T^*} \neq \emptyset$. Dies bedeutet, daß das

Infimum T^* angenommen wird. Problem (2.7) ist daher lösbar.
Die Lösbarkeit von Problem (2.9) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die stetige Funktion g ihr Maximum auf der nach Satz 2.1 kompakten Menge K_T annimmt. Der Satz ist damit bewiesen. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft der Lösungen zu den Steuerungsproblemen der Gestalt (2.7) gibt der folgende Satz an:

Satz 2.5 *Es sei T^* der optimale Wert für das Problem (2.7). Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 besitzt die Menge $G(T^*) \cap K_{T^*}$ keine inneren Punkte.*

Man kann dies auch so ausdrücken:

Satz 2.6 *Optimale Steuerungen zeitoptimaler Probleme vom Typ (2.7) steuern immer in die Randpunkte der erreichbaren Menge K_{T^*} sowie des Ziels $G(T^*)$.*

Beweis: Besäße $G(T^*) \cap K_{T^*}$ einen inneren Punkt, so wäre wegen der stetigen Abhängigkeit der Mengen $G(T)$ und K_T von T der Schnitt $G(T) \cap K_T$ nicht leer für $T < T^*$, $|T - T^*| < \delta$ bei genügend kleinem δ. Dies ist ein Widerspruch, da T^* die minimale Zahl mit $G(T^*) \cap K_{T^*} \neq \emptyset$ ist. $\square$

Liegt die Anfangsbedingung $x(t_0) \in G_0$ vor, so läßt sich mit einer ähnlichen Argumentation zeigen, daß optimale Zustandsfunktionen x immer vom Rand ∂G_0 aus starten.

Ein ähnlicher Satz gilt für das Problem (2.9):

Satz 2.7 *Die Menge $G(T)$ sei abgeschlossen und konvex, die Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 steuert die optimale Steuerung für das Problem (2.9) in mindestens einen Randpunkt (sogar Extremalpunkt) $x_u(T)$ der konvexen Menge $G(T) \cap K_T$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß reellwertige lineare Funktionen auf kompakten konvexen Mengen ihr Maximum in Randpunkten annehmen. $\square$

Die Tatsache, daß optimale Steuerungen in die Randpunkte der erreichbaren Menge steuern, hat bedeutsame Konsequenzen. Solche Steuerungen heißen *extremal* und genügen dem Pontryaginschen Maximumprinzip (s. Kapitel 4), welches zur Berechnung optimaler Steuerungen dient.

3 Der Satz von Ljapunoff.

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt. Wir setzen

$$M = \left\{ \int_a^b f u\, dt | 0 \le u \le 1\,, \quad u \in L^\infty[a,b] \right\} \qquad \text{und}$$

$$M_0 = \left\{ \int_E f\, dt | E \subset [a,b] \ \text{ meßbar} \right\}.$$

Die Ungleichung $0 \le u \le 1$ für $u \in L^\infty$ soll bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß Null im Intervall $[a,b]$ gelten. Offenbar sind M und M_0 Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und es gilt $M_0 \subseteq M$, da jedes Element $\int_E f\, dt$ von M_0 in der Form $\int_a^b f u\, dt$, $u = \begin{cases} 1 & \text{auf} \quad E \\ 0 & \text{auf} \quad [a,b]-E \end{cases}$ geschrieben werden kann.
Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, treten diese Mengen beim Studium der erreichbaren Mengen von Kontrollsystemen auf, die der Restriktion $u(t) \in [0,1]$ bzw. $u(t) \in \{0,1\} = \partial[0,1]$ im Kontrollbereich entsprechen. Zur Einführung betrachten wir zunächst nur diesen Fall.

Lemma 3.1 *Die Menge M ist eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis:

(i) Konvexität: Die Konvexität von M folgt aus der Konvexität der Menge
$\mathbb{K} = \{u \in L^\infty[a,b]\,,\ 0 \le u \le 1\}$.

(ii) Abgeschlossenheit: Es sei $z_i \in M\,,\ z_i \to z\ (i \to \infty)$ und $z_i = \int_a^b f u_i\, dt\,,\ u_i \in \mathbb{K}$. Da $0 \le u_i \le 1$ auf $[a,b]$ gilt, bilden die u_i eine beschränkte Folge in dem Hilbertraum $L^2[a,b]$. Nach dem Satz über die schwache Folgenkompaktheit beschränkter Mengen in Hilbertschen Räumen gibt es eine Teilfolge, die wir nach Umnumerierung ebenfalls mit (u_i) bezeichnen, welche schwach gegen ein Element $u \in L^2[a,b]$ konvergiert. Da $f \in L^2[a,b]$, folgt aus der Definition der schwachen Konvergenz

$$z_j = \int_a^b f u_j\, dt \to \int_a^b f u\, dt = z \qquad (j \to \infty)\,.$$

Wir zeigen, daß $u \in \mathbb{K}$, d.h. $0 \le u \le 1$ fast überall in $[a,b]$ gilt. Nach dem Satz von Banach-Saks (siehe Kapitel 6) gibt es eine Teilfolge $(u_{i_k})_{k=1}^\infty$, so daß die arithmetischen Mittel $v_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N u_{i_k}$ in $L^2[a,b]$ gegen den schwachen Limes $u \in L^2[a,b]$ konvergieren:

$v_N \to u$ in L^2 $(N \to \infty)$. Da $0 \le u_{i_k} \le 1$ auf $[a,b]$, gilt auch für die arithmetischen Mittel v_N, daß $0 \le v_N \le 1$ fast überall auf $[a,b]$. Das Gleiche trifft für den Limes u zu. Aus der L^2-Konvergenz $v_N \to u$ folgt die Maßkonvergenz $v_N \Rightarrow u$ und nach dem Satz von Riesz die Konvergenz $v_{N_j} \to u$ punktweise fast überall für eine Teilfolge v_{N_j}. Da $0 \le v_{N_j} \le 1$ fast überall auf $[a,b]$, gilt dies auch für den punktweisen Limes, und wir erhalten $u \in \mathbb{K}$ und damit $z \in M$.

$\square$

Satz 3.1 $M = M_0$.

Da M abgeschlossen und konvex ist, folgt als Korollar der

Satz 3.2 (Satz von Ljapunoff) *Der Wertebereich des Vektormaßes* $I(E) = \int\limits_E f\,dt$, $E \subset [a,b]$ *meßbar, ist abgeschlossen und konvex.*

Unter einem *Vektormaß* versteht man eine σ-additive Funktion eines Maßraumes in den $\mathbb{R}^n$.

Satz 3.2 ist die spezielle Form des folgenden allgemeinen Satzes von Ljapunoff über Werte von nicht-atomaren Vektormaßen in endlichen Maßräumen, der auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie/Statistik und anderen Gebieten (z.B. Theorie der konvexen Körper) eine Rolle spielt. Wir geben kurz eine Erläuterung der Begriffe:
Eine Familie $\sum$ von Teilmengen E einer Menge S heißt eine *Algebra von Teilmengen*, wenn

(i) $S \in \sum$,

(ii) für jedes $E \in \sum$ ist auch das Komplement $S - E \in \sum$,

(iii) sind $E_1, E_2 \in \sum$, so sind auch $E_1 \cap E_2$ und $E_1 \cup E_2 \in \sum$.

Eine Algebra $\sum$ von Teilmengen heißt *σ-Algebra*, wenn für jede abzählbare Familie $\{E_i \in \sum \mid i = 1,2,\dots\}$ die Beziehungen $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \sum$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \sum$ folgen.

Eine Abbildung $\mu : \sum \to \mathbb{R}^n$ heißt *additiv*, wenn für jedes Paar $E_1, E_2 \in \sum$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ die Gleichung

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

gilt.
Eine Abbildung $\mu : \sum \to \mathbb{R}^n$ heißt *σ-additiv*, wenn für jede abzählbare Familie $\{E_i \in \sum \mid i = 1, 2, \dots\}$ mit $E_i \cap E_k = \emptyset\,,\ i \neq k$, die Gleichung

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

gilt. μ wird dann auch „Vektormaß" genannt.
Das Tripel $(\mu, S, \sum)$ nennt man auch einen endlichen „Maßraum".

Ein Vektormaß auf einer σ-Algebra heißt *nicht-atomar*, wenn zu jedem $E \in \sum$ mit $\mu(E) \neq 0$ ein $E' \subset E\,,\ E' \in \sum$, existiert mit $0 \neq |\mu(E')| < |\mu(E)|$.

Mit diesen Bezeichnungen lautet der allgemeine Satz von Ljapunoff:

Satz 3.3 *Der Wertebereich eines nicht-atomaren Vektormaßes auf einem Maßraum ist abgeschlossen und konvex.*

Eine Beweisskizze findet sich in dem Buch von Lee-Markus [LM68]. Wir werden diesen allgemeinen Satz hier nicht benötigen und daher nur die Version 3.2 bzw. 3.1 mit Lebesgue-meßbaren Mengen beweisen.

Beweis von 3.1:
Wir präsentieren einen „einfachen" Beweis, dessen Hauptidee auf J. Lindenstrauß zurückgeht, vgl. Hermes-Lasalle [HL69].
Für jedes $u \in \mathbb{K} = \{v \in L^\infty[a,b]\,,\ 0 \leq v \leq 1 \text{ fast überall }\}$ sei $T\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$Tu = \int_a^b f u\, dt\,.$$

Es sei nun $z \in M$, d.h. es gibt ein $u \in \mathbb{K}$ mit $Tu = z$. Wir müssen zeigen, daß es eine meßbare Menge $E \subset [a,b]$ gibt, so daß $T\chi_E = \int_a^b f\chi_E\, dt = \int_E f\, dt = z$ gilt. Hierbei ist χ_E die sogenannte charakteristische Funktion von E, d.h. $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{auf} \quad E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Es sei $C = \{v \in \mathbb{K} |\ Tv = z\}$. Die Menge C ist nicht leer, da $u \in C$, und konvex wegen der Linearität von T. Fassen wir C als eine Teilmenge von $L^2[a,b]$ auf, so ist die Menge C abgeschlossen in der schwachen Topologie von L^2. Man beweist dies wie in Lemma 3.1 mit Hilfe des Satzes von Banach-Saks, was wir jedoch nicht wiederholen wollen. Da C außerdem beschränkt ist, folgt mit dem Satz über schwache Kompaktheit beschränkter Mengen in Hilbertschen Räumen die Kompaktheit der Menge C. Nach dem Satz von Krein-Milman hat jede konvexe schwachkompakte Menge in einem Hilbertraum einen Extremalpunkt (siehe Kapitel 6). Dies gilt sogar in wesentlich allgemeineren Räumen als in Hilbertschen, was hier jedoch nicht benötigt wird. Daraus

folgt die Existenz einer Funktion $u^* \in C$ mit der Eigenschaft „u^* liegt nicht im Inneren irgendeines ganz in C liegenden Intervalls“, d.h. aus $u^* = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\,,\ 0 < \alpha < 1\,,\ u_1, u_2 \in C$ folgt $u^* = u_1$ oder $u^* = u_2$.

Wir zeigen, daß der obige Extremalpunkt u^* von C die charakteristische Funktion einer Menge E ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine meßbare Menge $G \subset [a,b]$ mit $|G| \neq 0$, so daß $0 < u^* < 1$ auf G gilt. Daraus folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon > 0$ und einer meßbaren Menge G_0 mit $|G_0| \neq 0$, so daß $\varepsilon < u^* < 1-\varepsilon$ auf G_0 gilt. Zum Beweis sei $H_j = \{t \in [a,b] \,|\, \frac{1}{j} < u^*(t) < 1 - \frac{1}{j}\}$. Es gilt dann $\left|\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right| \neq 0$, und damit existiert ein j_0 mit $|H_{j_0}| \neq 0$. Setze $G_0 = H_{j_0}\,,\ \varepsilon = \frac{1}{j_0}$. Da $|G_0| \neq 0$, enthält G_0 $(n+1)$ disjunkte meßbare Teilmengen $G_i\,,\ i = 1, \ldots, n+1$, deren Maß nicht verschwindet. (Hier wird ausgenutzt, daß das Lebesgue-Maß nicht-atomar ist.)

Da $(n+1)$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ stets linear abhängig sind, gibt es Zahlen λ_i mit $\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| \neq 0$ und

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_{G_i} f\,dt = 0\,.$$

Wir dürfen zusätzlich annehmen, daß $|\lambda_i| < \varepsilon\,,\ i = 1, \ldots, n+1$.

Setzt man $\chi_i = \begin{cases} 1 & \text{auf} \quad G_i \\ 0 & \text{auf} \quad [a,b] - G_i \end{cases}$, $i = 1, \ldots, n+1$, so gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T\left(u^* + \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \chi_i\right) = z + \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_a^b f \chi_i\,dt = z$$

und für $\alpha \in [-1,1]$

$$0 \leq u^* + \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \chi_i \leq 1 \qquad \text{auf } [a,b]\,,$$

denn $\left|\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \chi_i\right| \leq \varepsilon$ auf $\bigcup_{i=1}^{n+1} G_i = G_0$, d.h. auf der Menge, wo $\varepsilon < u^* < 1-\varepsilon$ ist.

Damit ist gezeigt, daß $u^* + \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \chi_i \in C$ gilt, d.h. u^* ist innerer Punkt eines in C liegenden Intervalls. u^* kann daher kein Extremalpunkt sein, und die Annahme, daß u^* verschieden von 0 oder 1 auf einer Menge nicht verschwindenden Maßes ist, ist zum Widerspruch geführt. u^* ist daher die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge E, und der Satz ist bewiesen. □

Der Satz 3.1 soll nun in eine für das allgemeine lineare Kontrollproblem brauchbare Fassung gebracht werden. Hierzu sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Funktion von $[a,b]$ in die Menge der $n \times m$-Matrizen mit meßbaren und beschränkten Koeffizienten. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge und $M(\Omega) = \{\int\limits_a^b Fu\,dt \in \mathbb{R}^n \mid u(t) \in \Omega\,,\ u \in [L^\infty[a,b]]^+\}$. Hierbei sei $[L^\infty[a,b]]^+$ der Raum mit Komponenten $u_i \in L^\infty\,,\ i = 1,\ldots,m$, der Vektorfunktionen u. Die Inklusion $u(t) \in \Omega$ ist hier wie im Folgenden für alle $t \in [a,b]$ bis auf eine mögliche Ausnahmemenge vom Maß Null zu verstehen.

Lemma 3.2 *Es sei Ω eine konvexe kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Dann ist $M(\Omega)$ eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Der Beweis geschieht wie in Lemma 3.1 mit Hilfe des Satzes von Banach-Saks, was wir nicht wiederholen wollen.

Für jede Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\Omega)$ die kleinste konvexe abgeschlossene Menge, die Ω enthält. Ist Ω kompakt, so ist auch $\mathcal{H}(\Omega)$ kompakt (siehe Kapitel 6).

Satz 3.4 *Unter den obigen Voraussetzungen an Ω und F gilt*

$$M(\Omega) = M(\mathcal{H}(\Omega))\,.$$

Zum Beweis benötigen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 3.3 *Es sei u eine meßbare Vektorfunktion mit $u(t) \in \mathcal{H}(\Omega)$ für fast alle $t \in [a,b]$. Dann gibt es eine Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(t) u^{(i)}(t)$$

mit Funktionen $u^{(i)} \in [L^\infty[a,b]]^r\,,\ \lambda_i \in L^\infty[a,b]$ und der Eigenschaft $u^{(i)}(t) \in \Omega\,,$ $0 \le \lambda_i(t) \le 1\,,\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i(t) = 1$ für fast alle $t \in [a,b]$.

Beweis: Da $u(t) \in \mathcal{H}(\Omega)$, gibt es nach dem Lemma von Caratheodory $m+1$ Vektoren $\tilde{u}^{(i)}(t) \in \Omega$ und Zahlen $\tilde{\lambda}_i(t) \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{i=1}^{m+1} \tilde{\lambda}_i(t) = 1$, so daß

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \tilde{\lambda}_i(t) \tilde{u}^{(i)}(t)\,.$$

(Beweis siehe Kapitel 6, „Lemma von Caratheodory".)
Die $\tilde{\lambda}_i$ und $\tilde{u}^{(i)}$ sind nicht notwendig meßbar. Die Existenz der entsprechenden meßbaren Funktionen λ_i und $u^{(i)}$ wird mit Hilfe des Lemmas von Filippov (siehe Kapitel 7) bewiesen. Hierzu seien

$$[\Omega]^{m+1} := \{\mu = (\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(m+1)})^T \in \mathbb{R}^{m(m+1)} \mid \mu^{(i)} \in \Omega\,,\ i = 1,\ldots,m+1\}$$

und

$$\tilde{\Omega} := \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m(m+1)} \,\middle|\, \mu \in [\Omega]^{m+1} \, , 0 \le \beta = (\beta_1, \dots , \beta_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \, , \, \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i = 1 \right\}$$

sowie

$$G(\beta, \mu) := \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \mu^{(i)} \, ,$$
$$\beta = (\beta_1, \dots , \beta_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1} \, , \; \mu = (\mu^{(1)}, \dots , \mu^{(m+1)})^T \in \mathbb{R}^{m(m+1)} \, .$$

Die hierduch definierte Funktion

$$G \colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m(m+1)} \to \mathbb{R}^m \qquad \text{ist stetig} \, .$$

Nach Konstruktion gilt

$$G(\tilde{\lambda}(t) \, , \; \tilde{\mu}(t)) = u(t) \, , (\tilde{\lambda}(t) \, , \; \tilde{\mu}(t))^T \in \tilde{\Omega}$$

für fast alle $t \in [a, b]$, wobei $\tilde{\lambda}(t) = (\tilde{\lambda}_1(t), \dots , \tilde{\lambda}_{m+1}(t))^T$ und $\tilde{\mu}(t) = (\tilde{u}^{(1)}(t), \dots , \tilde{u}^{(m+1)}(t))^T$. Da u meßbar und $\tilde{\Omega}$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Filippov *meßbare* Funktionen $\lambda = (\lambda_1, \dots , \lambda_{m+1}) \, , \; \mu = (u^{(1)}, \dots , u^{(m+1)})$ mit

$$G(\lambda(t) \, , \; \mu(t)) = u(t) \, , (\lambda(t) \, , \; \mu(t)) \in \tilde{\Omega} \, .$$

Dies bedeutet jedoch gerade, daß die Forderungen des Lemmas von λ_i und $u^{(i)}$ erfüllt werden. □

Beweis von Satz 3.4: Die Inklusion $M(\Omega) \subset M(\mathcal{H}(\Omega))$ ist trivial, da $\Omega \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Zu zeigen ist daher, daß jedes $x \in M(\mathcal{H}(\Omega))$ auch in $M(\Omega)$ liegt. Zu $x \in M(\mathcal{H}(\Omega))$ gibt es ein $u \in [L^\infty[a, b]]^m$ mit $u(t) \in \mathcal{H}(\Omega)$, so daß

$$x = \int_a^b F(t) u(t) \, dt \, .$$

Nach Lemma 3.3 gibt es meßbare Funktionen λ_i und $u^{(i)}$, $i = 1, \dots , m+1$, mit den Eigenschaften $0 \le \lambda_i(t) \le 1$, $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(t) = 1$, $u^{(i)}(t) \in \Omega$ für fast alle $t \in [a, b]$ und $u(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(t) u^{(i)}(t)$. Daraus folgt

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} \int_a^b \lambda_i(t) F(t) u^{(i)}(t) \, dt \, .$$

Wir setzen

$$h_i(t) = F(t)u^{(i)}(t)$$

und

$$(T\beta)(t) := \sum_{i=1}^{m+1} \int_a^b \beta_i(t)h_i(t)\,dt$$

für $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m+1}) \in [L^\infty[a,b]]^{m+1}$. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\mathbb{K} := \left\{ \beta \in [L^\infty[a,b]]^{m+1} |\ 0 \le \beta_i \le 1\,,\ \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i = 1 \text{ fast überall in } [a,b] \right\}.$$

Es sei

$$C := \{\beta \in \mathbb{K} | T\beta = x\}\,.$$

Offensichtlich ist $C \neq \emptyset$, da die obige Funktion $\lambda \in C$. Die Menge C wird als Teilmenge von $[L^2[a,b]]^{m+1}$ aufgefaßt und ist dann abgeschlossen (und konvex) in $[L^2[a,b]]^{m+1}$. Wie zuvor kann man dies mit Hilfe des Satzes von Banach-Saks beweisen. Nach dem Satz von Krein-Milman (siehe Kapitel 6) besitzt die Menge C daher einen Extremalpunkt $\lambda^* \in C$. Wir wollen zeigen, daß die Komponenten λ_i^* von λ^* charakteristische Funktionen meßbarer Mengen sind, d.h. $\lambda_i^*\colon [a,b] \to \{0\} \cup \{1\}$. Angenommen, dies wäre falsch für einen Index i_0, o.B.d.A. $i_0 = 1$. Es gibt dann eine meßbare Menge $E' \subset [a,b]$ mit $|E'| \neq 0$ und ein $\varepsilon' > 0$, so daß $\varepsilon' < \lambda_1 < 1 - \varepsilon'$ auf E'. Da $\sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ und $0 \le \lambda_i$ auf $[a,b]$, gibt es eine meßbare Teilmenge $E \subset E'$ mit $|E| \neq 0$ und ein $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon'$, so daß (ggf. nach Umnumerierung) die Ungleichung $\varepsilon < \lambda_2 < 1 - \varepsilon$ auf E gilt. Wie beim Beweis von Satz 3.1 wählen wir paarweise disjunkte meßbare Mengen $E_i \subset E$, $i = 1, \dots, n+1$, mit $|E_i| \neq 0$. Hierbei wird wieder ausgenutzt, daß das Lebesgue-Maß nicht-atomar ist.
Wir setzen $z_i = \int\limits_{E_i} (h_1 - h_2)\,dt$ $(\in \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n+1$. Da $n+1$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, gibt es Zahlen $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n+1$, mit $\sum\limits_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \neq 0$ und $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i z_i = 0$.
Wir dürfen annehmen, daß $|\alpha_i| < \varepsilon$ ist. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{m+1}$ definiert durch $\gamma = \left(\sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_j \chi(E_j)\,,\ -\sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_j \chi(E_j)\,,\ 0, \dots, 0 \right)$. Hierbei ist $\chi(E_j)$ die charakteristische Funktion von E_j. Offensichtlich gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda^* + \alpha\gamma) = x + \alpha T\gamma = x + \alpha \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_{E_j} (h_1 - h_2)\,dt = x$$

und

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_i^* + \alpha\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^* = 1\,,$$

sowie $0 \le \lambda_i^* + \alpha\gamma_i \le 1$, falls $\alpha \in [-1,1]$. Letzteres folgt, da $\gamma_i = 0\,,\ i \ge 3$ sowie $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ außerhalb $\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j$ und $|\gamma_k| < \varepsilon$ auf der Menge $\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j \subset E$, wo λ_1 und λ_2 strikt zwischen ε und $1-\varepsilon$ liegen. Dies alles bedeutet jedoch, daß $\lambda^* + \alpha\gamma \in C\,,\ \alpha \in [-1,1]$, d.h. λ^* kann kein Extremalpunkt sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme; die Komponenten λ_i^* von λ^* müssen daher charakteristische Funktionen $\chi(G_i)$ geeigneter meßbarer Mengen G_i sein. Wir setzen $u^* = \sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i^* u^{(i)}$. Es gilt dann $x = T\lambda^* = \int\limits_a^b F(t)\sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i^*(t)u^{(i)}(t)\,dt$. Da $\sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i^* = 1$ und $\lambda_i^* = \chi(G_i)$ gilt, müssen die Mengen G_i bis auf eine Menge vom Maß Null paarweise disjunkt sein, und ihre Vereinigung ist $[a,b]$. Dies bedeutet, daß $u^* = \sum\limits_{i=1}^{m+1}\lambda_i^* u^{(i)} = u^{(j)}$ auf G_j gilt. Da $u^{(j)}(t) \in \Omega$ für fast alle t gilt, folgt $u^*(t) \in \Omega$, und wegen der Identität

$$x = T\lambda^* = \int\limits_a^b F(t)u^*(t)\,dt$$

ist der Satz damit bewiesen. □

Satz 3.4 hat zwei Folgerungen:

Korollar 3.1 („Satz von Ljapunoff“) *Die Menge $M(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ist für jede komkpakte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex.*

Beweis: Es gilt nach Satz 3.4, daß $M(\Omega) = M(\mathcal{H}(\Omega))$, andererseits ist $M(\mathcal{H}(\Omega))$ nach Lemma 3.3 kompakt und konvex. □

Korollar 3.2 („Bang-Bang-Prinzip“) *Es sei Ω eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ mit Rand $\partial\Omega$. Dann gilt $M(\Omega) = M(\partial\Omega)$. Ist die Menge $\mathcal{E}(\mathcal{H}(\Omega))$ der Extremalpunkte von Ω kompakt, so gilt $M(\Omega) = M(\mathcal{E}(\mathcal{H}(\Omega)))$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.4 und der Gleichheit $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(\partial\Omega)$ bzw. $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(\mathcal{E}(\mathcal{H}(\Omega)))$. Letzteres ist eine Folgerung aus dem Satz von Minkowski: „Eine konvexe kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.“ Ist etwa T ein Simplex des $\mathbb{R}^m$ und $\varepsilon(T)$ die Menge der Ecken von T, so gilt $M(T) = M(\mathcal{E}(\mathcal{T}))$. Der Name „Bang-Bang-Prinzip“ oder „Schwarz-Weiß-Prinzip“ ist hier besonders anschaulich, da jedes Element von $M(T)$ durch eine Steuerung u dargestellt werden kann, deren Werte in unstetiger Weise in den Ecken von T „hin- und herspringen". $\square$

Wegen Satz 2.6 sind diejenigen Steuerungen von besonderem Interesse, die in Randpunkte der erreichbaren Menge steuern. In Spezialfällen läßt sich zeigen, daß diese Randpunkte durch stückweise konstante Steuerungen mit nur endlich vielen Schaltpunkten (=Unstetigkeitsstellen) erreicht werden (bzw. nur durch diese). Wir geben ein Beispiel im Fall der Steuerungsbeschränkung $\Omega = \{\mu \in \mathbb{R} |\ |\mu| \leq 1\}$.

Satz 3.5 *Es sei $f\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ reell analytisch (über den Rand analytisch fortsetzbar) und $z = \int_{t_0}^{T} f u^* \, dt \in \partial M$, $u^*(t) \in \Omega$ fast überall, $M = \left\{ \int_{t_0}^{T} f u \, dt |\ u\colon [t_0, T] \to \Omega \text{ meßbar} \right\}$. Dann stimmt u^* fast überall mit einer Funktion überein, welche stückweise konstant auf $[t_0, T]$ ist, nur die Werte -1 und $+1$ annimmt und nur endlich viele Sprungstellen besitzt.*

Beweis: Da M nach dem Satz von Ljapunoff konvex ist, gibt es nach Kapitel 6 eine Stützhyperebene zu M im Punkt z, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ mit

$$a(z - y) \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in M\,,$$

und es gilt

$$\int_{t_0}^{T} a f (u^* - v) \, dt \geq 0 \qquad \text{für alle meßbaren } v\colon [t_0, T] \to \Omega\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$u^* = \operatorname{sign}(af) \qquad \text{fast überall in } [t_0, T]\,.$$

Andernfalls existierte (o.B.d.A.!) eine meßbare Menge $E \subset [t_0, T]$ mit $|E| \neq 0$, so daß $u^* < \operatorname{sign}(af)$ auf E und $\operatorname{sign}(af) = 1$ auf E gilt. Beachte, daß af nur endlich viele Nullstellen haben kann (Identitätssatz für analytische Funktionen). Daraus folgt

$$a f u^* - |af| < 0 \qquad \text{auf } E$$

und

$$\int_E a f (u^* - \operatorname{sign}(af)) \, dt < 0\,.$$

Man setze nun

$$v = \begin{cases} u^* & \text{auf} \quad [t_0, T] \setminus E, \\ \operatorname{sign}(af) & \text{auf} \quad E \end{cases}$$

und erhält den Widerspruch

$$\int_{t_0}^{T} af(u^* - v)\,dt < 0\,.$$

Es gilt also $u^* = \operatorname{sign}(af)$ fast überall in $[t_0, T]$, und da af, wie oben bemerkt, nur endlich viele Nullstellen hat, folgt die Aussage des Satzes. □

Literatur: Hermes-Lasalle [HL69] Lee-Markus [LM68]

4 Das Pontryaginsche Maximumprinzip

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, steuern die optimalen Steuerungen der dort betrachteten Probleme den Anfangspunkt in *Randpunkte* der erreichbaren Menge K_T. Steuerungen mit dieser Eigenschaft heißen *extremal*, und es ist eine außerordentlich wichtige Eigenschaft der extremalen Steuerungen, daß sie sich durch das sogenannte *Pontryaginsche Maximumprinzip* charakterisieren lassen, welches zur expliziten Berechnung optimaler Steuerungen dienen kann. Wir präzisieren daher die

Definition 4.1 *Es sei $u\colon [t_0, T] \to \Omega \subset \mathbb{R}^m$ meßbar und x_u die Antwort auf u bzgl. des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax + Bu + c$ mit meßbaren und beschränkten Koeffizientenfunktionen und der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt u* extremal, *wenn $x_u(T) \in \partial K_T$.*

Wie ersichtlich, hängt die Definition der Extremalität einer Steuerung von A, B und Ω sowie von x_0, t_0, T ab. Es zeigt sich jedoch anschließend, daß die Definition weitgehend von x_0, t_0 und T unabhängig ist. Es gilt der folgende grundlegende Satz:

Satz 4.1 („Pontryaginsches Maximumprinzip“) *Man betrachte das Anfangswertproblem $(\mathcal{L})\dot{x} = Ax + Bu + c\,,\; u(t) \in \Omega$ fast überall in $[t_0, T]$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ und einer kompakten Restriktionsmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Eine meßbare Steuerung $u\colon [t_0, T] \to \Omega$ ist genau dann extremal, wenn $u(t)$ für fast alle $t \in [t_0, T]$ die Optimierungsaufgabe*

$$\eta(t)B(t)\mu = \max!\,, \qquad\qquad \mu \in \Omega$$

löst, wobei η nichttriviale Lösung der adjungierten Gleichung

$$\dot{\eta} = -\eta A$$

und $\eta(T)$ eine nach außen gerichtete Normale der erreichbaren Menge K_T an der Stelle $x_u(T) \in \partial K_T$ ist.

Zum Beweis benötigen wir zunächst

Lemma 4.1 *Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit meßbaren und beschränkten Koeffizienten, sowie Φ die zum System $\dot{x} = Ax$ gehörige Wronski-Matrix. Dann hat die Lösung der adjungierten Gleichung $\dot{\eta} = -\eta A\,,\; \eta(t)$ Zeilenvektor, die Gestalt*

$$b\Phi^{-1}(t)\,, \qquad\qquad b = \eta(T)\Phi(T)\,. \tag{4.1}$$

Beweis: Es gilt $\Phi\Phi^{-1} = Id$. Daraus folgt $\frac{d}{dt}(\Phi)\Phi^{-1} + \Phi\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = 0$. Wegen $\frac{d}{dt}\Phi = A\Phi$ ergibt sich $A + \Phi\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = 0$ oder $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}A$ und $\frac{d}{dt}(b\Phi^{-1}) = (-b\Phi^{-1})A$, was zu (4.1) äquivalent ist. □

Lemma 4.2 *Es sei x_u eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + Bu + c$, $x(t_0) = x_0$, mit meßbaren und beschränkten Koeffizienten sowie η eine Lösung des adjungierten Systems $\dot{\eta} = -\eta A$ in $[t_0, T]$. Dann gilt die Darstellung*

$$\eta(T)x_u(T) = bx_0 + \int_{t_0}^{T} \eta[Bu + c]\, ds$$

und $b = \eta(T)\Phi(T)$.

Beweis: x_u hat die Darstellung

$$x_u(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}[Bu + c]\, ds \right] .$$

Mit Lemma 4.1 folgt daraus

$$\eta(t)x_u(t) = bx_0 + b\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}[Bu + c]\, ds = bx_0 + \int_{t_0}^{t} \eta[Bu + c]\, ds \,.$$

□

Beweis von Satz 4.1: „$\Rightarrow$" Die Steuerung u sei extremal und daher $x_u(T) \in \partial K_T$. Da K_T konvex ist, gibt es nach Lemma 6.1 (siehe Kapitel 6) eine Stützhyperebene von K_T durch $x_u(T)$. Dies bedeutet analytisch, daß ein von Null verschiedener Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ existiert, so daß

$$a \cdot (x_u(T) - z) \geq 0 \qquad\qquad \text{für alle } z \in K_T \,. \tag{4.2}$$

(Der Vektor $x_u(T) - z$ schließt mit dem äußeren Normalenvektor a, welcher Stellungsvektor zu der Stützhyperebene durch $x_u(T)$ ist, einen spitzen Winkel ein. Daher fällt das Skalarprodukt von $x_u(T) - z$ mit a ≥ 0 aus. Beachte, daß a nicht eindeutig ist, falls K_T eine „Spitze" bei $x_u(T)$ hat.)

Jedes $z \in K_T$ hat die Darstellung $z = x_v(T)$ mit einer zulässigen Steuerung v: Aus (4.2) folgt mit $a = \eta(T)$ unter Berücksichtigung von Lemma 4.2

$$0 \leq a \cdot (x_u(T) - x_v(T)) = \int_{t_0}^{T} \eta B(u - v)\, ds \tag{4.3}$$

oder

$$\int_{t_0}^{T} \eta Bu\, ds = \max!\,, \qquad u(t) \in \Omega \text{ fast überall, } u \text{ meßbar} \;.$$

Wir wollen zeigen, daß hieraus folgt, daß $u(t)$ für fast alle $t \in [t_0, T]$ eine Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\eta(t)B(t)\mu = \max!\,,\, \mu \in \Omega\,, \tag{4.4}$$

ist. Da Ω kompakt ist, gibt es für jedes $t \in [t_0, T]$ eine Lösung $\tilde{\mu}(t)$ von (4.4). Wir setzen

$$M(t) = \eta(t)B(t)\tilde{\mu}(t)\,. \tag{4.5}$$

Wie im Anschluß in Lemma 4.3 bewiesen wird, ist die Funktion $M\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ meßbar. Nach dem Satz von Filippov (siehe Kapitel 7) gibt es daher auch eine meßbare Funktion $\mu\colon [t_0, T] \to \Omega$ mit

$$M(t) = \eta(t)B(t)\mu(t) \left(= \max_{\nu \in \Omega} \eta(t)B(t)\nu \right) \tag{4.6}$$

fast überall in Ω.

Wir nehmen nun an, die extremale Steuerung u würde die Aussage des Pontryaginschen Maximumprinzips nicht erfüllen, d.h. es existierte eine meßbare Menge $E \subset [t_0, T]$ mit nicht verschwindendem Maß, so daß

$$\eta(t)B(t)u(t) < M(t) \text{ für } t \in E\,. \tag{4.7}$$

Wir definieren dann die Steuerung $v\colon [t_0, T] \to \Omega$ durch

$$v(t) := \begin{cases} u(t) & \text{auf} \quad [t_0, T] \setminus E\,, \\ \mu(t) & \text{auf} \quad E\,. \end{cases}$$

Es gilt dann vermöge Lemma 4.2 und Ungleichung (4.7)

$$\eta(T)(x_u(T) - x_v(T)) = \int\limits_{t_0}^{T} \eta B(u - v)\, ds = \int\limits_{E} \eta B(u - \mu)\, ds < 0\,.$$

Dies steht im Widerspruch zu Ungleichung (4.3), und die erste Beweisrichtung ist erledigt.

„$\Leftarrow$“ Es existiere eine nichttriviale Lösung von $\dot{\eta} = -\eta A$ mit

$$\eta(t)B(t)u(t) = M(t) := \max_{\mu \in \Omega} \eta(t)B(t)\mu\,. \tag{4.8}$$

Wir müssen zeigen, daß $x_u(t) \in \partial K_T$ gilt. Aus (4.8) folgt für alle zulässigen Steuerungen $v\colon [t_0, T] \to \Omega$

$$\int\limits_{t_0}^{T} \eta(s)B(s)(u(s) - v(s))\, ds \geq 0\,,$$

und aus Lemma 4.2

$$\eta(T)(x_u(T) - x_v(T)) \geq 0 \tag{4.9}$$

oder

$$\eta(T)(x_u(T) - z) \geq 0 \qquad \text{für alle } z \in K_T\,.$$

Wäre $x_u(T)$ *innerer* Punkt von K_T, so wäre der Punkt $x_u(T) + \varepsilon\eta(T)$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ebenfalls in K_T enthalten, und es ergibt sich der Widerspruch $-\varepsilon|\eta(T)|^2 < 0$. (Beachte: $\eta(T) \neq 0$, da η nicht-trivial!) Es gilt daher $x_u(T) \in \partial K_T$, und u ist extremal. Ungleichung (4.9) besagt schließlich noch, daß $\eta(T)$ äußerer Normalenvektor zu ∂K_T im Punkt $x_u(T)$ ist. Der Satz ist damit bewiesen. □

Es bleibt zu zeigen:

Lemma 4.3 *Die in (4.5) definierte Funktion $M\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ ist meßbar.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge E_ε mit $|E_\varepsilon| < \varepsilon$ existiert, so daß M auf $[t_0, T] - E_\varepsilon$ oberhalbstetig und damit meßbar auf $[t_0, T] - E_\varepsilon$ ist (vgl. den Beweis des Satzes von Filippov, Kapitel 7). Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Satz von Lusin gibt es eine meßbare Menge E_ε mit $|E_\varepsilon| < \varepsilon$, so daß B auf $\mathcal{I}_\varepsilon := [t_0, T] - E_\varepsilon$ stetig ist. Wir dürfen annehmen, daß $\mathcal{I}_\varepsilon$ abgeschlossen ist, da meßbare Mengen von innen „approximiert“ werden können. Zum Nachweis, daß M oberhalbstetig auf $\mathcal{I}_\varepsilon$ ist, sei $t_i \in \mathcal{I}_\varepsilon$ und $t_i \to t \in \mathcal{I}_\varepsilon$. $\tilde{\mu}(t_i) \in \Omega$ seien Lösungen der Optimierungsaufgabe (4.4). Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt

$$M(t_i) \to \limsup_{j\to\infty} M(t_j) \text{ und } \tilde{\mu}(t_i) \to \mu^* \in \Omega \ (i \to \infty)\,.$$

Daraus folgt wegen der Stetigkeit von η und B auf $\mathcal{I}_\varepsilon$

$$M(t_i) = \eta(t_i)B(t_i)\tilde{\mu}(t_i) \to \eta(t)B(t)\mu^* \leq M(t)$$

und

$$\limsup_{j\to\infty} M(t_j) \leq M(t)\,,$$

also die behauptete Oberhalbstetigkeit. □

Da das Pontryaginsche Maximumprinzip zur Berechnung der optimalen Steuerungen dient, wäre es wichtig, die Lösung der adjungierten Gleichung genau zu kennen, was wiederum möglich wäre, wenn man die Endbedingung $\eta(T)$ kennen würde. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, da $\eta(T)$ äußere Normale zu K_T im Punkt $x_u(T)$, u optimal, ist, den man ja erst berechnen will. In besonderen Fällen kann man jedoch eine Aussage über $\eta(T)$ machen:

(i) Das Problem, eine konvexe Menge $G(T)$ in minimaler Zeit zu erreichen. Da sich für die minimale Zeit T^* die Mengen $G(T^*)$ und K_{T^*} im Punkt $x_u(T^*)$ berühren und beide konvex sind, gibt es im Punkt $x_u(T^*)$ eine gemeinsame trennende Hyperebene H, und der Vektor $\eta(T)$ kann so gewählt werden, daß er zusätzlich innere Normale zu $G(T)$ in $x_u(T^*)$ ist, wenn $G(T)$ nichtleeres Inneres hat bzw. senkrecht auf H ist.

(ii) Das Problem, die lineare Funktion $a \cdot z$ auf K_T, T fest, zu minimieren. Die Lösung z^* liegt dann in ∂K_T, und es gilt

$$a \cdot (z - y) \leq 0 \qquad \text{für alle } y \in K_T\,,$$

d.h. $-a$ ist äußerer Normalenvektor zu K_T, und man kann $\eta(T) = -a$ wählen. In diesem Fall ist $\eta(T)$ also vollständig bekannt.

Die Bedingungen unter (i) und (ii) nennt man *Transversalitätsbedingungen.*

Eine ähnliche Überlegung kann man machen, wenn man eine konvexe Menge G_0 als Anfangsbedingung anstelle eines einzelnen Punktes hat.

Von den vielen Feinheiten, die beim Studium des Pontryaginschen Maximumprinzips vorkommen können, erwähnen wir noch, daß der Fall eintreten kann, daß die Größe $\eta(t)B(t)\mu$ für alle $\mu \in \Omega$ und alle t aus einer Menge E mit $|E| \neq 0$ *verschwinden* kann (z.B. in dem trivialen Fall, daß $B = 0$ auf E ist. Das Maximumprinzip gibt daher keine Aussge über die optimale Steuerung. Man spricht dann auch von einer *singulären Steuerung.*

Schließlich erwähnen wir noch den nützlichen Satz, daß im Fall, daß A, B und c nicht von der Zeit abhängen, die Funktion

$$M(t) = \eta(t)[Ax(t) - Bu(t) + c]$$

konstant ist (nach Korrektur auf einer Menge vom Maß Null), sofern u eine extremale Steuerng und x die Antwort auf u ist (siehe Lee-Markus, pp. 131 [LM68]).

5 Eindeutigkeitsfragen und Steuerbarkeit

Im Folgenden betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + c \qquad \text{fast überall in } [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit der Steuerbeschränkung

$$u(t) \in \Omega \qquad \text{für fast alle } t \in [t_0, T]\,.$$

Wie bisher seien $A\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $B\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sowie $c\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt. Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei kompakt. Die zugehörige erreichbare Menge wird wieder mit K_T bezeichnet.

Definition 5.1 *Das Problem, welches durch die Daten ((5.1),Ω, x_0, t_0, T) gegeben ist, heißt* normal*, wenn jeder Randpunkt der erreichbaren Menge durch eine bis auf eine Menge vom Maß Null* eindeutige *zulässige Steuerung angesteuert wird.*

Die Bedeutung des Begriffs der Normalität liegt auf der Hand, da die *optimalen* Steuerungen der in Kapitel 2 behandelten Probleme in Randpunkte der erreichbaren Menge steuern. Ist das Problem normal, so besitzt die Aufgabe, eine optimale Steuerung zu suchen, höchstens eine Lösung. Aus diesem Grunde ist das folgende, leichter zu handhabende Kriterium für Normalität von Interesse.

Satz 5.1 *Unter den obigen Voraussetzungen ist das Problem ((5.1), Ω, x_0, t_0, T) genau dann normal, wenn die folgende Eindeutigkeitsaussage richtig ist: Für jede nichttriviale Lösung η der adjungierten Gleichung $\dot{\eta} = -\eta A$ besitzt die Optimierungsaufgabe*

$$\eta(t)B(t)\mu = \max!\,, \mu \in \Omega\,,$$

für fast alle $t \in [t_0, T]$ höchstens eine Lösung. Überdies gilt: Ist das Problem ((5.1), Ω, x_0, t_0, T) normal und enthält Ω mehr als einen Punkt, so ist die erreichbare Menge strikt konvex.

Die Normalität ist also im Wesentlichen äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit der bei Pontryaginschen Maximumprinzip auftretenden endlichdimensionalen Optimierungsaufgabe, welche zumeist einfacher festzustellen ist. Weiterhin sehen wir, daß die Definition der Normalität von x_0, t_0, T weitgehend unabhängig ist.

Beweis: Wie man sich leicht überlegt, ist der Satz trivial, wenn Ω nur aus einem Element besteht. Wir nehmen daher an, Ω bestehe aus mindestens zwei Elementen.

„$\Rightarrow$“ Das Problem $((5.1), \Omega, x_0, t_0, T)$ sei normal. Wir zeigen zunächst die strikte Konvexität der erreichbaren Menge K_T. Angenommen, dies wäre falsch. Dann existierte eine Hyperebene H mit $H \cap (K_T - \partial K_T) = \emptyset$, welche mit ∂K_T zwei verschiedene Punkte und damit (wegen der Konvexität von K_T) ein ganzes Segment $[P_a, P_b]$ gemein hat. Wir werden einen Widerspruch erzeugen, indem wir die Mitte $\frac{P_a+P_b}{2}$ des Segments durch zwei *verschiedene* zulässige Steuerungen ansteuern.
Es sei u_a (bzw. u_b) die zulässige Steuerung, welche P_a (bzw. P_b) ansteuert. Für jede meßbare Menge $E \subset [t_0, T]$ definieren wir:

$$w(E) = \begin{pmatrix} \int\limits_E & \Phi^{-1} & Bu_a & ds \\ \int\limits_E & \Phi^{-1} & Bu_b & ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Φ ist hierbei die Wronski-Matrix des Systems (5.1). Nach dem Satz von Ljapunoff ist die Menge

$$\{w(E) \in \mathbb{R}^{2n} \mid E \subset [t_0, T] \;\text{ meßbar }\}$$

konvex, und es gibt daher eine meßbare Menge $D \subset \mathcal{I} := [t_0, T]$ mit

$$w(D) = \frac{1}{2}(w(\emptyset) + w(\mathcal{I})) = \frac{1}{2} w(\mathcal{I}) .$$

Da w additiv ist, gilt auch

$$w(\mathcal{I} - D) = \frac{1}{2} w(\mathcal{I}) .$$

Da $P_a \neq P_b$, gilt auch $\int\limits_{\mathcal{I}} \Phi^{-1} Bu_a \, ds \neq \int\limits_{\mathcal{I}} \Phi^{-1} Bu_b \, ds$, und $w(\mathcal{I})$ ist nicht der Nullvektor des $\mathbb{R}^n$. Daher müssen D und $\mathcal{I} - D$ ungleich der leeren Menge sein. Wir setzen nun

$$u_1 = \begin{cases} u_a & \text{auf} \quad D , \\ u_b & \text{auf} \quad \mathcal{I} - D , \end{cases}$$

und

$$u_2 = \begin{cases} u_a & \text{auf} \quad \mathcal{I} - D , \\ u_b & \text{auf} \quad D . \end{cases}$$

Für die Antwort x_1 auf u_1 gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi(T) x_0 + \Phi(T) \int\limits_D \Phi^{-1} [Bu_a + c] \, ds + \Phi(T) \int\limits_{\mathcal{I} - D} \Phi^{-1} [Bu_b + c] \, ds \\ &= \Phi(T) x_0 + \Phi(T) \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{I}} \Phi^{-1} Bu_a \, ds + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{I}} \Phi^{-1} Bu_b \, ds \right\} + \Phi(T) \int\limits_{\mathcal{I}} \Phi^{-1} c \, ds \\ &= \frac{1}{2} P_a + \frac{1}{2} P_b . \end{aligned}$$

Dasselbe ergibt sich für die Antwort x_2 auf u_2. Der Punkt $\frac{1}{2}(P_a + P_b) \in \partial K_T$ wird also von den zwei zulässigen Steuerungen u_1 und u_2 angesteuert. Wegen der Normalität folgt daraus $u_1 = u_2$ fast überall in $[t_0, T]$ und damit $u_a = u_b$ fast überall in $[t_0, T]$. Daraus folgt $P_a = P_b$, was der Annahme widerspricht. Damit ist die strikte Konvexität der Menge K_T bewiesen.
Es sei nun η eine nichttriviale Lösung der adjungierten Gleichung. Dann ist $\eta(T) \neq 0$, und wegen der strikten Konvexität von K_T gibt es genau eine Stützhyperebene H zu K_T, welche $\eta(T)$ als ins Äußere von K_T gerichteten Stellungsvektor hat. Analytisch bedeutet dies: Es gibt genau einen Punkt $x^* \in \partial K_T$, so daß $\eta(T)(x^* - z) \geq 0$ für alle $z \in K_T$.

Wir nehmen nun an, daß die Optimierungsaufgabe

$$\eta(t)B(t)\mu = \max = M(t)\,,\ \mu \in \Omega \tag{5.2}$$

auf einer Menge $E \subset \mathcal{I}$ mit $|E| \neq 0$ mehrdeutig lösbar sei. Es gibt dann zwei meßbare Funktionen $u_1, u_2 \colon [t_0, T] \to \Omega$, welche nicht fast überall gleich sind, so daß ebenfalls gilt:

$$\eta(t)B(t)u_1(t) = \eta(t)B(t)u_2(t) = M(t)\,.$$

Dies folgt aus dem Satz und der Beweismethode von Filippov, indem wir $u_1(t)$ als das lexikographische Minimum der Menge $\{\mu \in \Omega | \eta(t)B(t)\mu = M(t)\}$ und $u_2(t)$ als das lexikographische Maximum dieser Menge definieren. Nach Kapitel 7 sind dann u_1, u_2 meßbar, es muß jedoch $u_1 \neq u_2$ fast überall gelten, da (5.2) nach unserer Annahme auf einer Menge nicht verschwindenden Maßes mehrdeutig lösbar ist. Aus dem Pontryaginschen Maximumprinzip (Satz 4.1) folgt, daß u_1 und u_2 in einen Randpunkt z_1 bzw. $z_2 \in \partial K_T$ steuern, wobei $\eta(T)$ äußerer Normalenvektor zur Stützhyperebene durch z_1 bzw. z_2 ist. Aus der strikten Konvexität folgt jedoch $z_1 = z_2 = x^*$, d.h. u_1 und u_2 steuern in denselben Punkt. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß u_1 und u_2 nicht fast überall gleich sind, wie eben hergeleitet wurde. Die Annahme, (5.2) wäre auf $E \subset \mathcal{I}$ mit $|E| \neq 0$ nicht eindeutig lösbar, führt daher zum Widerspruch, und die erste Richtung des Beweises ist erledigt.

„$\Leftarrow$" Wir nehmen an, daß (5.2) eindeutig lösbar ist. Es seien $u_1, u_2 \colon [t_0, T] \to \Omega$ Steuerungen, die in den Punkt $P \in \partial K_T$ steuern. Zu zeigen ist $u_1 = u_2$ fast überall. Sei a äußere Normale zu K_T im Punkt P, d.h. es gilt $a \cdot (P - z) \geq 0$ für alle $z \in K_T$. Man löse $\dot\eta = -\eta A\,,\ \eta(T) = a$. Nach dem Pontryaginschen Maximumprinzip gilt

$$\eta(t)B(t)u_1(t) = \eta(t)B(t)u_2(t) = \max_{\mu \in \Omega} \eta(t)B(t)\mu$$

für fast alle $t \in [t_0, T]$.
Da (5.2) eindeutig lösbar ist, folgt $u_1 = u_2$ fast überall, d.h. das Problem $((5.1), \Omega, x_0, t_0, T)$ ist normal. □

Im Fall, daß die Daten A, B, c nicht von t abhängen, läßt sich das folgende explizite Kriterium beweisen:

Satz 5.2 *Es sei Ω ein kompaktes, konvexes Polyeder $\subset \mathbb{R}^m$ und $x_0, c \in \mathbb{R}^n$. A und B seien $n \times n$- bzw. $n \times m$-Matrizen, welche die sogenannte Normalitätsbedingung erfüllen mögen: Für jeden Kantenvektor w von Ω sind die Vektoren $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ linear unabhängig. Mit $(\mathcal{L})$ bezeichnen wir die Differentialgleichung*

$$\dot{x} = Ax + Bu + c\,.$$

Dann ist das Problem $(\mathcal{L}, \Omega, x_0, t_0, T)$ normal für alle $T > t_0$.

Beweis: Angenommen, das Problem wäre nicht normal. Dann gäbe es eine meßbare Menge $S \subset [t_0, T]$ mit $|S| \neq 0$, so daß die lineare Optimierungsaufgabe

$$\eta(t) B\mu = \max!\,, \qquad \mu \in \Omega$$

für $t \in S$ nicht eindeutig lösbar wäre. Hierbei ist η eine nichttriviale Lösung der adjungierten Gleichung $\dot{\eta} = -\eta A$ und hat daher die Darstellung $\eta(t) = -\eta_0 e^{-At}$, $\eta_0 \neq 0$, da $A = \text{const.}$ Nimmt eine lineare Funktion l auf einem konvexen Polyeder ihr Maximum in mehr als einem Punkt an, so gibt es auch zwei benachbarte Ecken P_1, P_2, in denen sie ihr Maximum annimmt. Dies impliziert die Existenz einer Kante $w = P_1 - P_2$ des Polyeders mit $l(w) = 0$. Auf die obige Aufgabe angewandt ergibt dies die Existenz von Kanten w_t von Ω mit $\eta(t) B w_t = 0$, $t \in S$. Da Ω nur endlich viele Kanten besitzt, gibt es eine meßbare Teilmenge $S_1 \subset S$ mit $|S_1| \neq 0$, so daß alle w_t für $t \in S_1$ gleich einer festen Kante w sind. Dies bedeutet

$$\eta(t) Bw = \eta_0 e^{-At} Bw = 0\,,\ t \in S_1\,.$$

Da $|S_1| \neq 0$ ist, folgt aus einem bekannten Satz aus der Maßtheorie, daß dann auch die Ableitungen von $\eta_0 e^{-At} Bw$ fast überall auf S_1 verschwinden müssen. Dies ergibt

$$\eta_0 e^{-At} ABw = \eta_0 e^{-At} A^2 Bw \ldots = \eta_0 e^{-At} A^{n-1} Bw = 0$$

fast überall auf S_1. Daraus folgt, daß die Vektoren $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ alle orthogonal zu dem Vektor $\eta_0 e^{-At} \neq 0$ sind, d.h. sie müssen linear abhängig sein. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes, und der Satz ist bewiesen. □

Aus diesen Überlegungen ergibt sich noch der

Satz 5.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2 hat jede extremale Steuerung nur endlich viele Sprungstellen.*

Beweis: Siehe Lee-Markus, Foundations of Optimal Control, S. 133 [LM68]. □

Aus unseren vorherigen Überlegungen wissen wir, daß unter der Voraussetzung der Normalität die erreichbare Menge strikt konvex ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2 besitzt die erreichbare Menge daher ein nichtleeres Inneres. Wie durch eine lineare Transformation der Zeitvariablen (Übergang von t zu $\alpha t'$, $\alpha \in \mathbb{R}$) wird die erreichbare Menge mit wachsender Zeit stetig „aufgeblasen“, d.h. insbesondere: Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Zeit T und eine Steuerung u, welche x_0 in der Zeit T nach x_1 steuert. Wenn eine solche Eigenschaft erfüllt ist, nennt man das lineare Differentialgleichungssystem *vollständig kontrollierbar*. Diese Eigenschaft ist von großer Wichtigkeit, da damit bei zeitoptimalen Problemen überhaupt erst einmal sichergestellt wird, daß die zulässige Menge nicht leer ist.

Aus Satz 5.2 folgt insbesondere, daß *autonome* normale Systeme vollständig kontrollierbar sind. (Autonom bedeutet, daß die Daten nicht von der Zeit abhängig sind.)

Von den vielen Kontrollierbarkeitskriterien geben wir noch das bekannteste an:

Satz 5.4 *Das autonome System $\dot{x} = Ax + Bu$ ist genau dann vollständig kontrollierbar, wenn die sogenannte Kontrollierbarkeitsmatrix (eine $n \times nm$-Matrix)*

$$[B\,,\ AB\,,\ A^2B\,, \dots\,, A^{n-1}B]$$

den maximalen Rang n hat.

Beweis:

(i) Das System sei kontrollierbar. Angenommen, $rg[B\,,\ AB\,, \dots\,, A^{n-1}B] < n$. Dann existiert ein nichttrivialer Zeilenvektor v mit

$$v[B\,,\ AB\,, \dots\,, A^{n-1}B] = 0\,,$$

oder

$$vB = vAB = \dots = vA^{n-1}B = 0\,.$$

Nach dem Satz von Hamilton-Cayley erfüllt A ihre charakteristische Gleichung, d.h.

$$A^n = c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \dots + c_nI\,.$$

Daraus ergibt sich

$$vA^nB = 0\,,$$

und durch Induktion:

$$vA^mB = 0 \qquad\qquad \text{für alle } m \geq 0\,.$$

Daraus folgt $ve^{At}B = v(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots)B = 0$ und

$$vx_u(T) = 0 \qquad \text{für}$$

$$x_u(T) = e^{AT}\int\limits_0^T e^{-As}Bu(s)\,ds\,,\ u \in L^\infty[0,T]\,.$$

Dies bedeutet, daß v senkrecht auf der erreichbaren Menge des Systems mit der Anfangsbedingung $x_0 = 0$ steht. Sie kann daher nicht n-dimensional sein im Widerspruch zur Kontrollierbarkeit.

(ii) Die Kontrollierbarkeitsmatrix habe den Rang n. Es sei K_0 die erreichbare Menge des Systems bzgl. der Anfangsbedingung $x_0 = 0$ und der Steuerungsrestriktion $\|u\|_\infty \leq 1$. K_0 ist abgeschlossen und konvex.
Angenommen, K_0 wäre nicht n-dimensional. Dann gäbe es einen Vektor $v \neq 0$ mit $v \perp K_0$, und daher:

$$ve^{AT}\int\limits_0^T e^{-As}Bu\,ds = 0 \;\; \text{für alle } u \text{ mit } \|u\|_\infty \leq 1\,.$$

Daraus folgt $\int\limits_0^T ve^{A(T-s)}Bu\,ds = 0$ und

$$ve^{A(T-s)}B = 0 \;\; \text{für alle } s \in [0,T]\,.$$

Durch m-malige Differentiation ergibt sich

$$ve^{A(T-s)}A^mB = 0\,,$$

und mit $s = T$

$$vA^mB = 0\,, \qquad m = 0,1,2,\dots,n-1\,.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, daß die Kontrollierbarkeitsmatrix den Rang n hat.

□

6 Funktionalanalytische Grundlagen

Der Satz von Banach-Saks und die schwache Kompaktheit beschränkter Mengen in Hilbertschen Räumen

Definition 6.1 *Ein* Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$ *auf einem reellen Vektorraum* H *ist eine Abbildung von* $H \times H$ *nach* $\mathbb{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

Linearität: $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$ *für* $u, v, w \in H\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$
Symmetrie: $(u, v) = (v, u)$ *für* $u, v \in H$,
Definitheit: $(u, u) \geq 0$ *für* $u \in H$ *und* $(u, u) = 0$ *genau dann, wenn* $u = 0$.

Mit Hilfe des Skalarproduktes läßt sich eine *Norm* $\|.\|$ definieren:

$$\|u\| = +\sqrt{(u, u)}\,,\ u \in H\,.$$

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Norm den folgenden Ungleichungen genügt:

Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung:	$\lvert(u, v)\rvert \leq \|u\|\,\|v\|$
Dreiecksungleichung:	$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Definition 6.2 *Es sei* $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ *eine Folge von Elementen* u_i *aus einem Vektorraum* H *mit Skalarprodukt und* $u \in H$*. Wir sagen, daß die Folge* u_i gegen u in H konvergiert*, wenn* $\|u_i - u\| \to 0$ $(i \to \infty)$ *gilt. In Zeichen:* $u_i \to u$ *in* H $(i \to \infty)$*. Das Element* u *heißt dann der* „Limes *der Folge* $(u_i)_{i=1}^{\infty}$(*in* H)*“.*
Die Folge $(u_i)_{i=1}^{\infty}$ *heißt* Cauchy-Folge *in* H*, wenn zu jeden* $\varepsilon > 0$ *ein* i_0 *existiert, so daß für alle* $i, j \geq i_0$ *die Ungleichung* $\|u_i - u_j\| < \varepsilon$ *gilt.*

Ein Element $u \in H$ *heißt* Häufungspunkt *einer Menge* $M \subset H$*, wenn eine Folge* (u_i) *von Elementen aus* M *existiert, welche gegen* u *konvergiert.*
M *heißt* abgeschlossen*, wenn* M *alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Definition 6.3 *Ein Vektorraum* H *mit Skalarprodukt heißt* Hilbertraum *oder* Hilbertscher Raum*, wenn jede Cauchyfolge in* H *einen Limes besitzt. Diese Eigenschaft von* H *bezeichnet man auch als* Vollständigkeit*.*

Satz 6.1 („Existenz von Lotpunkten“) *Es sei* M *eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraumes* H*. Sei* $u \in H$, $u \neq M$*. Dann gibt es ein* $v \in M$ *mit*

$$\|u - v\| = \inf\{\|u - w\| \mid w \in M\}\,.$$

Beweis: Es sei $d = \inf\{\|u - w\| \mid w \in M\}$. Dann gibt es eine Folge (w_m) von Elementen aus M, so daß $\|u - w_m\| \to d$ $(m \to \infty)$. ((w_m) ist eine „Minimalfolge".) Wir benutzen nun die (leicht nachzurechnende) Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

mit $x = u - w_m\,,\ y = u - w_n$ und erhalten

$$4\|u - \frac{1}{2}(w_m + w_n)\|^2 + \|w_m - w_n\|^2 = 2(\|u - w_m\|^2 + \|u - w_n\|^2) \to 4d^2\,. \qquad (6.1)$$

Da M konvex ist, gilt $\frac{1}{2}(w_m + w_n) \in M$, und aus der Definition von d folgt

$$4\|u - \frac{1}{2}(w_m + w_n)\|^2 \geq 4d^2\,.$$

Aus (6.1) folgt damit $\|w_m - w_n\| \to 0$, und wegen der Vollständigkeit von H gibt es ein $v \in H$ mit $w_m \to v$ $(m \to \infty)$. Da M abgeschlossen ist, gilt $v \in M$, und wir schließen aus der Dreiecksungleichung

$$\|u - w_m\| \to \|u - v\| \ (m \to \infty) \text{ und somit } d = \|u - v\|\,.$$

□

Definition 6.4 *Es sei M eine Teilmenge eines Hilbertschen Raumes H. Das* Orthogonalkomplement *$M^\perp$ von M ist die Menge $M^\perp = \{x \in H | (x, y) = 0\ \forall y \in M\}$.*

Satz 6.2 („Projektionssatz") *Es sei M ein linearer abgeschlossener Teilraum des Hilbertschen Raumes H. Dann besitzt jedes $u \in H$ eine Zerlegung $u = v + w$ mit $v \in M\,,\ w \in M^\perp$.*

Beweis: Gilt $u \in M$, so setzt man $v = u\,,\ w = 0$.
Sei daher $u \notin M$. Nach Satz 6.1 gibt es ein $v \in M$ mit $\|u - v\| = d = \inf\{\|u - w\|\ | w \in M\}$. Für jedes $z \in M\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, gilt dann mit $w = v + \lambda z \in M$

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - v - \lambda z\|^2 = \|u - v\|^2 - 2\lambda(u - v, z) + \lambda^2\|z\|^2$$

oder

$$2\lambda(u - v, z) \leq \lambda^2\|z\|^2\,.$$

Damit ergibt sich

$$(u - v, z) \leq \frac{1}{2}\lambda\|z\| \text{ für } \lambda > 0 \quad \text{bzw. } (u - v, z) \geq \frac{1}{2}\lambda\|z\|^2 \text{ für } \lambda < 0\,.$$

Grenzübergang für $\lambda \to 0$ ergibt

$$(u - v, z) = 0 \text{ für } z \in M \text{ und somit } u - v \in M^\perp .$$

Die Zerlegung $u = v + w$ mit $w = u - v$ leistet das Gewünschte. □

Definition 6.5 *Ein* beschränktes lineares Funktional *auf einem Hilbertschen Raum H ist eine lineare Abbildung $\varphi \colon H \to \mathbb{R}$, die der Ungleichung*

$$|\varphi(u)| \leq K \, \|u\| \textit{ für } u \in H$$

mit einer von u unabhängigen Konstante K genügt.

Man kann zeigen, daß die Beschränktheit eines linearen Funktionals φ auf einem Hilbertschen Raum äquivalent zur Stetigkeit von φ ist.

Definition 6.6 *Die* Norm *eines beschränkten linearen Funktionals φ auf einem Hilbertschen Raum ist die Zahl*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(u)| \; |u \in H \, , \; \|u\| = 1\} \, .$$

Satz 6.3 („Rieszscher Darstellungssatz für beschränkte lineare Funktionale auf Hilbertschen Räumen") *Zu jedem beschränkten linearen Funktional φ auf einem Hilbertschen Raum H gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $f \in M$, so daß*

$$\varphi(u) = (f, u) \textit{ für } u \in H \qquad \textit{und} \quad \|\varphi\| = \|f\| \, .$$

Man drückt dies auch so aus: Der duale Raum H^* eines Hilbertschen Raumes H kann mit diesem identifiziert werden.

Beweis: Es sei $N = \{v \in H | \varphi(v) = 0\}$. Offensichtlich ist N ein linearer Teilraum von H. Außerdem ist N abgeschlossen, denn aus $v_i \in N \, , \; v_i \to v \; (i \to \infty)$ folgt $|\varphi(v)| = |\varphi(v - v_i)| \leq K\|v - v_i\| \to 0 \; (i \to \infty)$, also $v \in N$.
Gilt nun $N = H$, so gilt die Behauptung mit $f = 0$.
Sei daher $N \neq H$. Dann gibt es ein $z \in H \, , \; z \notin N$, welches nach Satz 6.2 eine Zerlegung $z = v + w \, , \; v \in N \, , \; w \in N^\perp \, , \; w \neq 0$, besitzt. Wir behaupten, daß das Element

$$f = \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2} \, w$$

die gewünschte Darstellung $\varphi(u) = (f, u)$ leistet.
Es gilt $\varphi(u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w)} w) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w)} \varphi(w) = 0$. (Beachte, daß $w \in N^\perp$, $w \neq 0$, und damit $\varphi(w) \neq 0$.) Somit besteht die Beziehung $u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w)} w \in N$, und, da $w \in N^\perp$, die Gleichung

$$\left(u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w)} w, w \right) = 0 \,.$$

Daraus ergibt sich wegen der Linearität des Skalarproduktes

$$(u, w) = \varphi(u) \frac{\|w\|^2}{\varphi(w)}$$

und somit

$$\varphi(u) = \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2} (u, w) = (f, u) \,,$$

was wir zeigen wollten.

Die Eindeutigkeit von f ergibt sich durch die folgende Überlegung:
Es sei $\varphi(u) = (f, u) = (f', u)$. Dann gilt $\|f - f'\|^2 = (f - f', f - f') = (f - f', f) - (f - f', f') = \varphi(f - f') - \varphi(f - f') = 0$, also $f - f'$.

Es verbleibt der Nachweis der Gleichung $\|\varphi\| = \|f\|$.
Es gilt $\|f\|^2 = (f, f) = |\varphi(f)| = \|f\| \, |\varphi\left(\frac{f}{\|f\|}\right)| \leq \|f\| \, \|\varphi\|$, $f \neq 0$, nach Definition von $\|\varphi\|$ und somit $\|f\| \leq \|\varphi\|$.

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung $\|\varphi\| \leq \|f\|$ sei $w_i \in H$, $\|w_i\| = 1$ und $\varphi(w_i) \to \|\varphi\|$. Dann gilt $\varphi(w_i) = (f, w_i) \leq \|f\| \, \|w_i\| = \|f\|$, und nach Grenzübergang $i \to \infty$ schließlich $\|\varphi\| \leq \|f\|$. Der Satz ist damit bewiesen. □

Definition 6.7 *Eine Folge (u_i) von Elementen eines Hilbertschen Raumes H heißt* schwach konvergent *gegen ein $u \in H$, in Zeichen $u_i \rightharpoonup u$ $(i \to \infty)$, wenn für alle $v \in H$*

$$(u_i, v) \to (u, v) \qquad\qquad (i \to \infty) \,.$$

Man überlegt sich leicht, daß die „starke" Konvergenz $u_i \to u$ in H die schwache Konvergenz $u_i \rightharpoonup u$ impliziert, aber nicht umgekehrt.

Die große Bedeutung des Begriffes „schwach konvergent" liegt darin, daß in unendlich dimensionalen Hilberträumen das Analogon des Satzes von Bolzano-Weierstraß bzgl. der starken Konvergenz falsch, bzgl. der schwachen Konvergenz jedoch richtig ist. Letzteres wird durch den folgenden Satz präzisiert:

Satz 6.4 (Schwache Kompaktheit beschränkter Mengen in Hilberträumen) *Es sei* (u_i) *eine Folge von Elementen eines Hilbertschen Raumes* H*, so daß* $\|u_i\| \leq K$, $i = 1, 2, \dots$, *mit einer Konstante* K*. Dann gibt es eine Teilfolge* (u_{i_j}) *und ein* $u \in H$*, so daß*

$$u_{i_j} \rightharpoonup u \qquad \textit{schwach in } H \qquad (j \to \infty)\,.$$

Man drückt dies auch folgendermaßen aus: „Beschränkte Mengen in Hilbertschen Räumen sind schwach folgenkompakt.“

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz einer schwachen Cauchyfolge, d.h. es gibt eine Teilfolge u_{i_j}, so daß $(u_{i_j} - u_{i_k}, g) \to 0$ für $j, k \to \infty$ und alle $g \in H$.
Nach Voraussetzung ist die Zahlenmenge $\{(u_i, u_k) | i, k = 1, 2, \dots\}$ gleichmäßig beschränkt. Nach dem Cantorschen Diagonalverfahren, welches im Anschluß an den Beweis erläutert wird, gibt es eine Teilfolge (u_{i_j}), so daß für jedes feste $m = 1, 2, \dots$, die Folge $((u_{i_j}, u_m))_{j=1}^{\infty}$ konvergiert. Daraus folgt die Konvergenz der Folge $((u_{i_j}, g))_{j=1}^{\infty}$ für jedes $g \in S := \langle u_1, u_2, \dots \rangle$, d.h. S besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der u_i. Für jedes $g \in S$ gilt daher

$$(u_{i_j} - u_{i_k}, g) \to 0 \qquad (j, k \to \infty)\,.$$

Dies gilt aber auch für alle $g \in \bar{S}$, wenn $\bar{S}$ die Abschließung von S bedeutet. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es zu $g \in \bar{S}$ ein $g_0 \in S$ mit $\|g - g_0\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ und ein j_0, so daß $(u_{i_j} - u_{i_k}, g_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $j, k \geq j_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |(u_{i_j} - u_{i_k}, g)| &\leq (u_{i_j} - u_{i_k}, g_0)| + |(u_{i_j} - u_{i_k}, g - g_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2K\|g - g_0\| < \varepsilon\,, \qquad j, k \geq j_0\,. \end{aligned}$$

Ist nun $v \in H$ beliebig vorgegeben, so gibt es nach dem Projektionssatz (Satz 6.2) eine Zerlegung $v = g_1 + g_2$, $g_1 \in \bar{S}, g_2 \in \bar{S}^{\perp}$. Es gilt dann $(u_m, g_2) = 0$, $m = 1, 2, \dots$, und daher

$$(u_{i_j} - u_{i_k}, v) = (u_{i_j} - u_{i_k}, g_1) \to 0 \qquad (j, k \to \infty)\,, \text{ da } g_1 \in \bar{S}\,.$$

Damit ist bewiesen, daß für jedes $v \in H$ der Limes

$$\varphi(v) := \lim_{j \to \infty} (u_{i_j}, v)$$

existiert. Offensichtlich ist $\varphi : H \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Aus der Ungleichung $|(u_{i_j}, v)| \leq \|u_{i_j}\|\,\|v\| \leq K\|v\|$ folgt $|\varphi(v)| \leq K\|v\|$, d.h. φ ist ein beschränktes lineares Funktional. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 6.3) gibt es dann ein $u \in H$ mit $\varphi(v) = (u, v)$ für alle $v \in H$, und es gilt $u_{i_j} \rightharpoonup u$ schwach in H. □

Der Name Diagonalverfahren erscheint einleuchtend, wenn man sich die Folge (a_{ik}) als rechteckiges Schema vorstellt und die Auswahl der Folgen Λ_i durch sukzessives Wegstreichen der Spalten $(a_{ik})_{i \in N}$ darstellt, welche zu den Indizes $k \notin \Lambda_i$ gehören. Die Diagonalfolge in dem Restschema ergibt dann die Folge Λ.

Satz 6.5 (Satz von Banach-Saks) *Es sei H ein Hilbertscher Raum sowie $u, u_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$ und $u_i \rightharpoonup u$ schwach in H $(i \to \infty)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(u_{i_j})_{j=1}^{\infty}$, so daß die arithmetischen Mittel*

$$w_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} u_{i_j}$$

stark gegen u konvergieren: $w_N \to u$ in H $(N \to \infty)$.

Beweis: Es sei $v_j := u_j - u$. Es gilt dann $v_j \rightharpoonup 0$ schwach in H $(j \to \infty)$. Wir konstruieren mit Hilfe vollständiger Induktion eine Teilfolge (v_{i_j}), so daß

$$|(v_{i_1}, v_{i_{t+1}})| \le \frac{1}{t}, \ldots, |(v_{i_t}, v_{i_{t+1}})| \le \frac{1}{t}\,. \tag{6.2}$$

Zu diesem Zweck setze man $v_{i_1} = v_1$. Ist $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}$ bereits konstruiert, so wähle man den Index i_{t+1} derart, daß $|(v_{i_1}, v_{i_{t+1}})| \le \frac{1}{t}, \ldots |(v_{i_t}, v_{i_{t+1}})| \le \frac{1}{t}$ ausfällt. Eine solche Wahl von i_{t+1} ist möglich, da $(v_{i_1}, v_m) \to 0, \ldots, (v_{i_t}, v_m) \to 0$ $(m \to \infty)$, da $v_m \rightharpoonup 0$ $(m \to \infty)$. Die Konstruktion (6.2) ist damit durchgeführt. Wir zeigen, daß die arithmetischen Mittel $\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} v_{i_t}$ stark in H gegen 0 konvergieren $(N \to \infty)$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} v_{i_t} \right\|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^{N} \|v_{i_t}\|^2 + 2\frac{1}{N^2} \sum_{\substack{s<t \\ s=1,\ldots,N-1 \\ t=2,\ldots,N-1}}^{N} |(v_{i_s}, v_{i_t})| \le \\
&\le \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} K^2 + 2\frac{1}{N^2} \sum_{\substack{s<t \\ s=1,\ldots,N-1 \\ t=2,\ldots,N-1}}^{N} \frac{1}{t-1} = \frac{K^2}{N} + 2\frac{1}{N^2} \sum_{t=2}^{N} (t-1) \cdot \frac{1}{t-1} = \\
&= \frac{K^2}{N} + 2\frac{N-1}{N^2} \to 0 \qquad (N \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} u_{i_t} \to u$ stark in H $(N \to \infty)$, und der Satz ist bewiesen. $\square$

Eine Folgerung aus dem Satz von Banach-Saks ist: Eine konvexe Menge in einem Hilbertschen Raum ist genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist.

Quelle: Die Darstellung in diesem Kapitel folgt im Wesentlichen dem Appendix I, Kap. 3, part II, des Buches von Bers, John, Schechter, „Partial Differential Equations“, Interscience publishers, New York-London-Sydney, 1964.

Konvexe Mengen und der Satz von Krein-Milman

Eine Teilmenge C eines Hilbertschen Raumes H heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in C$ auch $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Ist M eine Teilmenge von H, so heißt die kleinste konvexe Menge, welche M enthält, die *konvexe Hülle* $\mathcal{H}(M)$.
Es gilt $\mathcal{H}(M) = \bigcap\{M_1 \supset M | M_1 \text{ ist konvex }\}$, und man kann zeigen, daß $\mathcal{H}(M)$ aus allen konvexen Linearkombinationen von Elementen aus M mit endlich vielen Summanden besteht:

$$\mathcal{H}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i | \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \,,\ \alpha_i \geq 0 \,,\ u_i \in M \,,\ i = 1, \ldots, N \,,\ N = 1, 2, \ldots \right\} .$$

Ist $H = \mathbb{R}^n$, so läßt sich zeigen, daß es in der obigen Darstellung für $\mathcal{H}(M)$ genügt, $N = n+1$ zu wählen:

Lemma 6.1 (Caratheodory) *Es sei* $u_i \in \mathbb{R}^n$ *und* $u = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i u_i \,,\ \alpha_i \geq 0 \,,\ \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$. *Dann existieren Zahlen* $\beta_i \,,\ i = 1, \ldots, n+1$, *mit* $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1 \,,\ \beta_i \geq 0$ *und* $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i u_i = u$.

Beweis: Es sei m die kleinste natürliche Zahl, für die eine Darstellung $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i u_i$ mit Zahlen $\gamma_i > 0 \,,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$, gilt. Angenommen, es wäre $m \geq n+2$. Da $n+1$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, gibt es Zahlen λ_i mit $\sum\limits_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| \neq 0$ und $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i (u_i - u) = 0$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i + \varepsilon \lambda_i)(u_i - u) = 0 \,,$$

wobei wir $\lambda_i = 0$ für $i \geq n+2$ gesetzt haben. Da $\gamma_i > 0$, ist für betragsmäßig kleine ε auch $\gamma_i + \varepsilon \lambda_i > 0$. Läßt man ε stetig wachsen oder fallen, so erkennt man die Existenz einer Zahl $\varepsilon_0 \neq 0$, so daß $\gamma_{i_0} + \varepsilon_0 \lambda_{i_0} = 0$ für ein $i_0 \in \{1, \ldots, n+1\}$ und $\gamma_i + \varepsilon_0 \lambda_i \geq 0$ für die restlichen Indizes. Da $\lambda_i = 0$ für $i \geq n+2 \,,\ \gamma_i > 0 \,,\ i = 1, \ldots, m$, sind nicht alle Zahlen $\gamma_i + \varepsilon_o \lambda_i$ gleich Null. Es ergibt sich somit

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} (\gamma_i + \varepsilon_0 \lambda_i) u = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} (\gamma_i + \varepsilon_0 \lambda_i) u_i \,,$$

d.h. u läßt sich als konvexe Linearkombination der $u_i \,,\ i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ mit den Koeffizienten $(\gamma_i + \varepsilon_0 \lambda_i) / \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} (\gamma_i + \varepsilon_0 \lambda_i)$ darstellen. Dies bedeutet, daß u nicht minimal war, und wir erhalten einen Widerspruch zur Behauptung, daß sich u nicht als konvexe Linearkombination von $n+1$ Vektoren unter den u_i darstellen läßt. $\square$

Häufig in der Analysis benötigt werden Aussagen über die Stützhyperebene einer konvexen Menge.

Definition 6.8 *Es sei M eine konvexe Menge in einem Hilbertschen Raum H und $x \in M$. Es existiere ein $\varphi \in H$ mit der Eigenschaft*

$$(\varphi, x-y) \geq 0 \qquad \textit{für alle } y \in M\,.$$

Dann bezeichnet man die Menge

$$L = \{z \in H \mid (\varphi, z) = (\varphi, x)\}$$

als Stützhyperebene *von M im Punkt x.*
Das Element φ wird als Stellungsvektor *von L und als* äußere Normale von M im Punkt x *bezeichnet.*

Satz 6.6 *Es sei M eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $x \in \partial M$. Dann gibt es eine Stützhyperebene von M in x.*

Beweis: Es sei $a_i \notin M$ und $a_i \to x$ $(i \to \infty)$. Es gibt dann Vektoren $x_i \in M$ mit der Eigenschaft

$$|a_i - x_i| = \inf\{|a_i - z| \,|z \in M\}\,.$$

(Dies folgt in einfacher Weise mit Hilfe eines Minimalfolgenarguments.) Mit $|.|$ haben wir die euklidische Norm bezeichnet. Da M konvex ist, gilt

$$|a_i - x_i|^2 \leq |a_i - (1-t)x_i - tz_i|^2\,, \qquad\qquad 0 \leq t \leq 1\,,$$

und aufgrund dieser Minimaleigenschaft

$$\frac{d}{dt}|a_i - (1-t)x_i - tz_i|^2\Big|_{t=0} \geq 0\,.$$

Führt man die Differentiation aus und setzt $t=0$, so ergibt sich

$$2a_ix_i - 2x_i^2 - 2a_iz_i + 2x_iz_i \geq 0 \qquad\qquad \text{oder}$$

$$(a_i - x_i\,,\, x_i - z_i) \geq 0\,.$$

Es gilt $x_i \to x$ $(i \to \infty)$ und für eine Teilfolge $\frac{a_i - x_i}{|a_i - x_i|} \to \varphi$ $(i \to \infty)$. Aus der letzten Ungleichung schließen wir durch Grenzübergang

$$\lim_{i \to \infty} \left(\frac{a_i - x_i}{|a_i - x_i|} \, , \; x_i - z_i \right) - (\varphi, x - z) \geq 0 \, ,$$

d.h. die Existenz einer Stützhyperebene. □

Man kann Satz 6.6 auch mit Hilfe des Trennungssatzes von Hahn-Banach beweisen.

Definition 6.9 *Es sei K eine Teilmenge eines Hilbertschen Raumes H. Ein Punkt $x \in K$ heißt* Extremalpunkt *von K, wenn aus der Darstellung $x = \alpha y + (1 - \alpha) z \, , \; y, z \in K \, , \; 0 < \alpha < 1$, die Gleichheit $x = y = z$ folgt.*
Mit anderen Worten: Ist x Extremalpunkt, so kann x nicht echte konvexe Linearkombination verschiedener Elemente aus K sein.

Es gibt noch den Begriff des exponierten Punktes:

Definition 6.10 *Ein Punkt $x \in K$ heißt* exponiert, *wenn x auf einer Stützhyperebene S zu K liegt und wenn x der einzige Punkt von K auf S ist.*

Jeder Extremalpunkt ist exponierter Punkt, aber nicht umgekehrt.

Satz 6.7 (Satz von Krein-Milman in Hilbertschen Räumen) *Jede konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge M eines Hilbertschen Raumes H besitzt mindestens einen Extremalpunkt.*

Beweis: Wir nennen eine nichtleere Teilmenge A von M eine *extremale Teilmenge* von M, wenn die Inklusion

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in A \, , \; x, y \in M \, , \; \alpha \in]0, 1[\quad \text{fest} \; ,$$

die Inklusion $x, y \in A$ impliziert.
Extremale Teilmengen werden auch als „Wände“ bezeichnet.

M selbst ist extremale Teilmenge von M, einpunktige extemale Teilmengen von M sind *Extremalpunkte.*

Es sei $\mathcal{F}$ die (nichtleere!) Familie aller abgeschlossenen nichtleeren extremalen Teilmengen von M, die durch die mengentheoretische Inklusion mit einer Halbordnung versehen ist.
Wir werden zeigen, daß $\mathcal{F}$ bzgl. dieser Halbordnung mindestens ein minimales Element M_0

besitzt, welches aus genau einem Punkt, einem Extremalpunkt, besteht. Hierzu benutzen wir das Lemma von Zorn, welches die Existenz eines minimalen Elementes bzgl. einer Halbordnung sicherstellt, sofern man weiß, daß jede maximale total geordnete Unterfamilie der zugrundeliegenden Familie (in unserem Fall $\mathcal{F}$) ein minimales Element hat. Eine Unterfamilie $\mathcal{U}$ von $\mathcal{F}$ heißt *linear* oder *total geordnet*, wenn für $M_1, M_2 \in \mathcal{U}$ entweder $M_1 \subseteq M_2$ oder $M_2 \subseteq M_1$ gilt. Sie heißt *maximal*, wenn es keine linear geordnete, $\mathcal{U}$ echt enthaltende Unterfamilie $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{F}$ gibt.

Daß total geordnete Unterfamilien von $\mathcal{F}$ in unserem Fall ein minimales Element haben, folgt aus der schwachen Kompaktheit der Menge M: Ist $\mathcal{U}$ eine linear geordnete Unterfamilie von $\mathcal{F}$, und gilt

$$\bigcap\{M_i | M_i \in \mathcal{U}\} = \emptyset\,,$$

so gilt dies wegen der schwachen Kompaktheit von M auch für endlich viele M_i, d.h.

$$\bigcap\{M_i | i \in \Lambda\} = \emptyset\,, \qquad\qquad |\Lambda| < \infty\,.$$

Dies ist ein Widerspruch, da die M_i linear geordnet und nichtleer sind. (Im ersten Teil dieses Kapitels haben wir bewiesen, daß beschränkte, abgeschlossene konvexe Mengen in Hilbertschen Räumen schwach folgenkompakt sind. Man kann noch folgern (s. etwa Köthe, Topologische Lineare Räume), daß sie auch überdeckungskompakt sind, und wir haben soeben eine hierzu äquivalente Formulierung benutzt.)

Es gilt also $N_i = \bigcap\{M_i | M_i \in U\} \neq \emptyset$, und man überlegt sich sofort, daß N_0 selbst abgeschlossene, nichtleere, extremale Teilmenge von M ist. Wegen der Maximalität von $\mathcal{U}$ ist $N_0 \in U$, und N_0 ist das minimale Element von $\mathcal{U}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es daher mindestens ein minimales Element A_0 in $\mathcal{F}$. Angenommen, A_0 enthielte zwei verschiedene Punkte x_1, x_2. Dann gibt es ein $u \in H$ mit $(u, x_1) = 0\,,\ (u, x_2) \neq 0$. Setze $\beta = \inf\{(u,x) | x \in A_0\}$. Dann ist die Menge $A_1 = \{x \in A_0 | (u,x) = \beta\}$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe eigentliche Teilmenge von A_0. Wir zeigen, daß A_1 extremale Teilmenge von M ist. Es seien $x, y \in M\,,\ 0 < \alpha < 1$, so daß $\alpha x + (1-\alpha)y \in A_1$. Da $A_1 \subset A_0$ und A_0 extremale Teilmenge von M ist, folgt zunächst $x, y \in A_0$. Nach Definition von β gilt $(u,x) \geq \beta\,,\ (u,y) \geq \beta$. Angenommen, für mindestens eines der Elemente x, y gälte $(u,x) > \beta$ bzw. $(u,y) > \beta$, so folgte

$$(u, \alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha(u,x) + (1-\alpha)(u,y) > \beta\,,$$

d.h. $\alpha x + (1-\alpha)y$ wäre nicht in A_1 enthalten. Dies ist ein Widerspruch, und es muß gelten: $(u,x) = \beta\,,\ (u,y) = \beta$, d.h. $x, y \in A_1$, und A_1 muß extremal sein. Dies widerspricht der Minimalität von A_0, und die Annahme, A_0 bestehe aus mehr als einem Punkt, ist damit zum Widerspruch geführt. □

7 Maßtheorie

Der Satz von Filippov

Es sei U eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $I \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte meßbare Menge. Es sei eine Funktion $F\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\text{Für jedes } \mu \in U \text{ ist } F(t,\mu) \text{ meßbar bzgl. } t\,. \tag{7.1}$$

$$\begin{gathered}\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine meßbare Menge } N_\varepsilon \subset I \\ \text{mit } |N_\varepsilon| < \varepsilon\,, \text{ so daß } F \text{ auf } (I - N_\varepsilon) \times U \text{ stetig ist.}\end{gathered} \tag{7.2}$$

(Die Bedingung (7.2), welche im Wesentlichen die Stetigkeit von $F(t,\mu)$ bzgl. μ ausdrücken soll, ist nicht sonderlich elegant, reicht jedoch für alle Anwendungen aus, und wir vermeiden dadurch, eine nichttriviale Verallgemeinerung der Satzes von Lusin beweisen zu müssen.)

Schließlich sei noch $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine meßbare Funktion.

Satz 7.1 (Satz von Filippov) *Es sei $\bar{u}\colon I \to \Omega$ eine nicht notwendig meßbare Funktion, die die Gleichung*

$$F(t,\bar{u}(t)) = g(t)$$

für fast alle $t \in I$ erfülle. Unter den obigen Annahmen gibt es dann eine meßbare Funktion $u : I \to \Omega$, die ebenfalls die Gleichung $F(t,u(t)) = g(t)$ für fast alle $t \in I$ erfüllt.
Insbesondere hat die Filippov-Funktion u, die definiert ist durch

$$u(t) = \operatorname{lex\,min}\{\mu \in \Omega | F(t,\mu) = g(t)\}\,,$$

diese Eigenschaft.

Das lexikographische Minimum einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ ist derjenige Vektor $a \in \mathbb{R}^m$, dessen Komponenten a_i folgendermaßen durch Induktion erklärt sind:

$$a_1 = \min\{\mu_1 \in \mathbb{R} | \exists \mu_2, \dots, \mu_m, \text{ mit } (\mu_1, \dots, \mu_m) \in M\}\,.$$

$a_1, \dots, a_{i-1}$ seien bereits erklärt. Dann sei

$$a_i = \min\{\mu_i \in \mathbb{R} | \exists \mu_{i+1}, \dots, \mu_m \text{ mit } (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \mu_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m) \in M\}\,.$$

Wegen der Kompaktheit von Ω und der Stetigkeit von $F(t,\mu)$ bzgl. μ werden die Minima bei der Bildung des lexikographischen Minimums von $\{\mu \in \Omega | F(t,\mu) = g(t))$ für fast alle t angenommen, so daß die Definition von $u(t)$ sinnvoll ist.

Zum Beweis von Satz 7.1 benötigen wir zunächst

Lemma 7.1 *Es sei $v\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere eine meßbare Menge $M_\varepsilon \subset I$ mit $|I - M_\varepsilon| < \varepsilon$, so daß die Restriktion von v auf M_ε meßbar ist. Dann ist $v\colon I \to \mathbb{R}$ meßbar.*

Beweis: Es sei $N = 1, 2, \dots$, und $M_{\frac{1}{N}}$ die obige Menge M_ε mit $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$M = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{x \in M_{\frac{1}{N}} | v(x) > a\}$$

meßbar, d.h. die Restriktion von v auf M ist meßbar. Andererseits unterscheidet sich M von I höchstens um eine Menge vom Maß Null. Daher ist $v\colon I \to \mathbb{R}$ meßbar. $\square$

Lemma 7.2 *Es sei $I_0 \subset \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt sowie $v\colon I_0 \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion. Dann ist v meßbar.*

($v : I_0 \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig*, wenn für jede Folge (x_i), $x_i \in I_0$, mit $x_i \to x_0 \in I_0$ $(i \to \infty)$, die Ungleichung

$$v(x) \le \liminf_{i\to\infty} v(x_i)$$

gilt.)

Beweis: Da I_0 meßbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $A_\varepsilon \subset I_0$ mit $|I_0 - A_\varepsilon| < \varepsilon$. Wegen der Unterhalbstetigkeit von v ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in A_\varepsilon | v(x) \le a\}$ abgeschlossen und daher meßbar; das Komplement $\{x \in A_\varepsilon | v(x) > a\}$ ist dann ebenfalls meßbar. Daraus folgt die Meßbarkeit der Restriktion $v\colon A_\varepsilon \to \mathbb{R}$ und mit Lemma 7.1 die Meßbarkeit von $v\colon I_0 \to \mathbb{R}$. $\square$

Beweis von Satz 7.1: Wegen Lemma 7.1 genügt es zu zeigen, daß die im Anschluß von Satz 7.1 definierte Filippov-Funktion u bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ meßbar auf der Menge $I - N_\varepsilon$, s. Bedingung (7.2), ist.
Wegen des Satzes von Lusin gibt es eine meßbare Teilmenge $I_\varepsilon \subset I - N_\varepsilon$ mit $|(I - N_\varepsilon) - I_\varepsilon| < \varepsilon$, so daß g auf I_ε stetig ist. Wegen Lemma 7.1 genügt es sogar, zu zeigen, daß die Filippov-Funktion u meßbar auf I_ε ist. Dies geschieht durch vollständige Induktion über die Komponenten von u:

Induktionsverankerung:

Die erste Komponente u_1 der Filippov-Funktion ist unterhalbstetig und damit meßbar auf I_ε! Dies ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Es seien $t, t_\varepsilon \in I_\varepsilon$ und $\mu_1^* = \liminf_{i\to\infty} u_1(t_i)$. Es sei Λ eine Teilfolge, so daß $u_1(t_i) \to \mu_1^*$ und $u(t_i) \to \mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_m^*) \in U$, $(i \to \infty\,,\ i \in \Lambda)$. Hierbei wurden die Kompaktheit von U und der Satz von Bolzano-Weierstraß verwendet. Wegen der Stetigkeit von F und g auf I_ε dürfen wir in der Gleichung

$$F(t_i, u(t_i)) = g(t_i)$$

zum Limes $i \to \infty\,,\ i \in \Lambda$, übergehen und erhalten

$$F(t, \mu^*) = g(t)\,,\ \mu^* \in U\,,\ \text{oder}$$
$$\mu^* \in \{\mu \in U | F(t, \mu) = g(t)\}\,.$$

Daraus folgt aus der Minimaleigenschaft der Filippov-Funktion, s. Definition,

$$u_1(t) \le \mu_1^* = \liminf_{i \to \infty} u_1(t_i)\,,$$

also die behauptete Unterhalbstetigkeit bzw. Meßbarkeit von u_1 nach Lemma 7.2.

Die Meßbarkeit von $u_1, u_2, \dots, u_k\,,\ k \in \{1, \dots, m-1\}$ auf I_ε sei bereits bewiesen, und wir wollen die Meßbarkeit von u_{k+1} beweisen. Nach dem Satz von Lusin gibt es zu jedem δ eine meßbare Menge $I'_\delta \subset I_\varepsilon$ mit $|I_\varepsilon - I'_\delta| < \delta$, so daß $u_1, \dots, u_k$ auf I'_δ meßbar sind. Wir zeigen, daß u_{k+1} auf I'_δ unterhalbstetig ist. Hierzu seien $t, t_i \in I'_\delta$ und $t_i \to t$ $(i \to \infty)$. Ferner sei $\mu_{k+1}^* = \liminf_{i \to \infty} u_{k+1}(t_i)$. Wegen der Stetigkeit von $u_j\,,\ 1 \le j \le k$ auf I_δ gilt $u_j(t_i) \to u_j(t)\,,\ 1 \le j \le k\,,\ (i \to \infty)$. Es sei nun Λ eine Teilfolge, so daß $u_{k+1}(t_i) \to \mu_{k+1}^*$ und $u(t_i) \to (u_1(t), \dots, u_k(t), \mu_{k+1}^*, \dots, \mu_m^*) \in U\,,\ (i \to \infty\,,\ i \in \Lambda)$. Hierbei wurde wiederum der Satz von Bolzano-Weierstraß verwendet. Wegen der Stetigkeit von F und g auf $I'_\delta \subset I_\varepsilon$ darf wiederum in der Gleichung

$$F(t_i, u(t_i)) = g(t_i)$$

zum Limes $i \to \infty\,,\ i \in \Lambda$ übergegangen werden, und wir erhalten

$$F(t, u_1(t), \dots, u_k(t), \mu_{k+1}^*, \dots, \mu_m^*) = g(t)\,.$$

Daraus folgern wir wie im Fall $k = 0$ die Ungleichung

$$u_{k+1}(t) \le \mu_{k+1}^* = \liminf_{i \to \infty} u_{k+1}(t_i)\,.$$

Damit ist u_{k+1} unterhalbstetig auf I'_δ, und die Meßbarkeit auf I_ε folgt mit Hilfe von Lemma 7.1 und 7.2.
Der Satz ist damit bewiesen. □

Literatur

[Bar75] Barnett. *Introduction to Mathematical Control Theory, Clarendon Press.* Clarendon Press, 1975.

[BEZ74] Biess-Erfurth-Zeidler. *Optimale Prozesse und Systeme.* Teubner, 1974.

[BH75] Bryson-Ho. *Applied Optimal Control.* Wiley, 1975.

[DM70] Dyer-McReynolds. *The Computation and Theory of Optimal Control.* Academic Press, 1970.

[Hes66] Hestenes. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* Wiley, 1966.

[HL69] Hermes-Lasalle. *Functional Analysis and Time Optimal Control.* Academic Press, 1969.

[HL75] Hofer-Lunderstädt. *Numerische Methoden der Optimierung.* Oldenburg, 1975.

[KK74] Knobloch-Kappel. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 1974.

[Lei74] Leitmann. *Einführung in die Theorie optimaler Steuerung und der Differentialspiele.* Oldenburg, 1974.

[LM68] Lee-Markus. *Foundations of Optimal Control Theory.* Wiley, 1968.

[Pon62] Pontryagin. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Wiley, 1962.

[Tol75] Tolle. *Optimization Methods.* Springer, 1975.