1 Trigonometrische Reihen - Fourier-Reihen

Die Trigonometrischen Reihen, insbesondere die Fourier-Reihen, spielen seit langer Zeit eine wichtige Rolle in der Mathematik, vor allem auf dem Gebiet der Partiellen Differentialgleichungen, aber auch in der Reinen Mathematik. Für eine historische Einführung sei hier auf das Buch "Analysis 2" von Walter verwiesen.

Periodische Funktionen

Definition 1.1 *Sei M eine beliebige Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to M$ heißt periodisch mit der Periode $L \in \mathbb{R}$, wenn*

$$f(x+L) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to M$ heißt periodisch zum Periodenvektor $L = (L_1, \dots L_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$g(x + Le_i) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } i = 1, \dots, n\,.$$

Häufig ist die Periode in allen Komponenten gleich, d.h. $L := L_1 = L_2 \dots L_n$. Man spricht dann vom Periodizitätswürfel $[0, L]^n$.

Trigonometrische Reihen

Spezielle periodische Funktionen sind trigonometrische Polynome und Reihen der Form:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sin(jx)\,, \quad m \in \mathbb{N} \text{ oder } m = \infty\,. \tag{1.1}$$

Hierbei ist die Konvergenz der Summen zu prüfen. Obige Funktion s hat die Periode 2π.

Zweckmäßig ist häufig die komplexe Schreibweise für den Ausdruck (1.1)

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx} \\ \text{mit } c_0 &= \frac{a_0}{2},\ c_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j), c_{-j} = \frac{1}{2}(a_j + ib_j), \quad j \in \mathbb{N} \\ \text{bzw. } a_j &= c_j + c_{-j},\ b_j = i(c_j - c_{-j})\,. \end{aligned}$$

Die komplexe Schreibweise ist insbesondere bei mehrdimensionalen trigonometrischen Reihen zur Vereinfachung der Schreibweise nützlich. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $j = (j_1, \dots, j_n)$

$$e^{ijx} = \prod_{l=1}^{n} e^{ij_l x_l}$$

Eine mehrdimensionale trigonometrische Reihe hat die Gestalt

$$s(x) = \sum_j c_j e^{ijx}, \qquad j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$$

Hierbei versteht man die Summation $\sum\limits_j$ über den Multi-Index j als Summation $\sum\limits_{j_1} \sum\limits_{j_2} \dots \sum\limits_{j_n}$ über die Komponenten j_l zu verstehen. Dabei laufen die j_l von $-\infty$ bis $+\infty$.

Orthogonalitätsrelation der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1.1 *Es gilt für $m, j \in \mathbb{Z}$, $m \neq j$:*

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(jx)\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(jx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(jx)\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{\pm imx} e^{ijx}\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(mx)\,dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(mx)\,dx = \pi$$

Für Multi-Indizes $m = (m_1, \dots m_n)$, $j = (j_1, \dots j_n)$, $m \neq j$ gilt

$$\int\limits_{[0,2\pi]^n} e^{\pm imx} e^{ijx}\,dx_1 \dots dx_n = 0, \quad x = (x_1, \dots x_n)$$

Beweis: Die eindimensionalen Fälle aus Lemma 1.1 wurden bereits im ersten Semester behandelt; die mehrdimensionalen Orthogonalitätsrelationen werden auf die entsprechenden eindimensionalen Fälle mit Hilfe des Satzes von Fubini zurückgeführt. □

Fouriersche Reihen

Satz 1.1 *Die trigonometrische Reihe*

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

konvergiere in $L^1[0, 2\pi]$*. Dann gilt*

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) \cos(lx)\, dx, \; b_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) \sin(lx)\, dx \tag{1.2}$$

Erläuterung: Unter Konvergenz der obigen Reihe (L^p-Konvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz) versteht man die Konvergenz der "Partialsummenfunktionen" $s_N \to s$, wobei wie üblich definiert wird:

$$s_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sin(jx)$$

Beweis: Die Formeln für a_l, b_l gelten zunächst für endliche trigonometrische Reihen s_N. Dieses sieht man durch Ersetzen des Ausdruckes $s(x)$ und unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen. Der Grenzübergang bezüglich der Summationsgrenze $N \to \infty$ folgt aus der geforderten L^1-Konvergenz:

$$\|s_N - s\|_{L^1} := \int_0^{2\pi} |s_N(x) - s(x)|\, dx \to 0$$

Es folgt nämlich:

$$\int_0^{2\pi} s_N(x) \cos(mx)\; dx \to \int_0^{2\pi} s(x) \cos(mx)\; dx \quad (N \to \infty)$$

$$\int_0^{2\pi} s_N(x) \sin(mx)\; dx \to \int_0^{2\pi} s(x) \sin(mx)\; dx \quad (N \to \infty)$$

und somit (1.2). □

Anmerkung: Für die Gültigkeit von Satz 1.1 genügt ein erheblich schwächerer Konvergenzbegriff, nämlich die sogenannte schwache Konvergenz in L^1.

Ersetzt man in der Darstellung (1.2) s durch eine beliebige Funktion f, so kann man die Koeffizienten $a_m(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$ und $b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)$ berechnen. Diese heißen <u>Fourier-Koeffizienten</u> der Funktion f. Unter der <u>Fourier-Reihe</u> der Funktion f versteht man den Ausdruck

$$S(x;f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f)\cos(jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(f)\sin(jx)\,.$$

Im Fall der komplexen Darstellung ergibt sich aus den entsprechenden Orthogonalitätsrelationen im eindimensionalen Fall

$$c_j(f) = c_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}\,dx\,,\; j \in \mathbb{Z}$$

und im n-dimensionalen Fall bei Multi-Index-Schreibweise $j = (j_1, \dots j_n), e^{-ijx} = \prod\limits_{l=1}^{n} e^{-ij_l x_l}$

$$c_j(f) = (\frac{1}{2\pi})^n \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}\,dx_1 \dots dx_n$$

Die aus den nach obiger Darstellung gebildeten Größen c_j gebildete trigonometrische Reihe bezeichnen wir wieder mit

$$S(x;f) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_l e^{ijx}$$

Für die Fourier-Koeffizienten gelten simple Rechenregeln (im Fall der Konvergenz), z.B.

$$c_j(f') = ijc_j f \text{ und } c_j(f(\cdot + a)) = e^{ija}c_j(f)$$

Eine wichtige Frage ist nun, ob eine Funktion f durch ihre Fourier-Reihe auch dargestellt wird, d.h., ob gilt:

$$f(x) = S(x;f)$$

Offensichtlich ist dies unter der Voraussetzung an die Funktion f, daß diese wie in Satz 1.1 bereits durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, für fast alle Punkte x mit

Ausnahme einer Menge vom Maß Null richtig. Wer noch nicht mit Lesbesguescher Maßtheorie vertraut ist, nehme als Voraussetzung die gleichmäßige Konvergenz. Satz 1.1 liest sich dann wie folgt.

Satz 1.2 *Die Reihe*

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx)$$

konvergiere gleichmäßig. Dann wird $s(x)$ in jedem Punkt durch die zugehörige Fourier-Reihe dargestellt.

Beispiel zur Berechnung einer Fourier-Reihe:
Sei die Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$A(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$
$$A(t \pm 2\pi) = A(t)$$

Es gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(t)\, dt = \frac{1}{\pi} 2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(t)\, \cos(jt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(jt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \cos(jt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{j} \sin'(jt)\, dt + \frac{1}{\pi}\frac{1}{j} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \sin'(jt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \Big[\frac{t}{j} \sin(jt)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{j} \int_0^{\pi} \sin(jt)\, dt + \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{j}(2\pi - t)\sin(jt)\Big]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{j} \sin(jt)\, dt =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{j^2}\cos(jt)\Big]_0^{\pi} + 0 - \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{j^2}\cos(jt)\Big]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{j^2}[2\cos(j\pi) - \cos(2j\pi) - 1] = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } j \\ \frac{-4}{\pi j^2} & \text{für ungerades } j \end{cases}$$

Die Koeffizienten b_j verschwinden, da $A(t) = A(-t)$, A also eine gerade Funktion ist, während $\sin(jt)$ ungerade ist.

Wie wir später sehen werden, besteht für stückweise glatte Funktionen ($A(\cdot)$ ist eine solche) die Gleichheit:

$$A(t) = S(t; A)\,,$$

d.h. A wird durch seine Fourier-Reihe dargestellt. Daraus folgt:

$$A(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right].$$

Für $t = 0$ folgt

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

2 Konvergenzeigenschaften von Fourier-Reihen

Lemma 2.1 *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π und $f \in C^m(\mathbb{R})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten:*

$$|a_j(f)| \leq \frac{K}{j^m}, \quad |b_j(f)| \leq \frac{K}{j^m}, \text{ wobei } K = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f^{(m)}(t)| .$$

Beweis: Durch partielle Integration ergibt sich

$$b_j(f) = \frac{1}{\pi}|\int_0^{2\pi} f(t)\sin(jt)\,dt| = \frac{1}{\pi}|\int_0^{2\pi} f'(t)\frac{1}{j}\cos(jt)\,dt| =$$

$$= \ldots = \frac{1}{\pi}|\int_0^{2\pi} f^{(m)}(t)\frac{1}{j^m}(\cos(jt) \text{ oder } \sin(jt))\,dt| \leq \frac{K}{j^m} .$$

Die Randterme heben sich wegen $f^{(l)}(0) = f^{(l)}(2\pi)$ fort. Die a_j werden analog behandelt.

□

Folgerung:

(i) Ist f einmal stetig differenzierbar, so konvergieren die Fourier-Koeffizienten gegen Null.

(ii) Ist f zweimal stetig differenzierbar und periodisch, so konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig, da dann $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{K}{m^2}$ eine Majorante ist.

Durch ein Approximationsargument läßt sich diese Aussage verschärfen zu folgendem Satz.

Satz 2.1 *(Satz von Riemann-Lebesgue) Sei $f \in L^1(0, 2\pi)$. Dann gilt $a_j(f), b_j(f) \to 0$ für $j \to \infty$. (Der analoge Satz und die Beweismethode gelten auch in n-Dimensionen).*

Zur Erinnerung: $f \in L^1(0, 2\pi)$ bedeutet, daß f im Sinne von Lebesgue integrabel ist (genauer: $f \in [f] \in L^1(0, 2\pi)$, $[f]$ besteht aus allen Funktionen, die sich von f auf einer Menge von Lebesgue-Maß Null unterscheiden. Wer $L^1(0, 2\pi)$ noch nicht kennt, kann sich an dieser Stelle $f \in C(\mathbb{R}), f$ periodisch zum Periode 2π vorstellen. Satz 2.1 gilt entsprechend. Ist $f \in L^1(0, 2\pi)$, so setzen wir f periodisch nach $\mathbb{R}$ fort. An den Endpunkten des Periodizitätsintervalles können Sprünge entstehen - aber die haben L^1-Funktionen im allgemeinen ohnehin.

Beim Beweis von Satz 2.1 wird benutzt, daß L^1-Funktionen (oder stetige Funktionen) durch C^1-Funktionen in der L^1-Norm approximiert werden können:

Satz 2.2 *Sei $f \in L^1(0,2\pi)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $\varphi \in C^\infty(0,2\pi)$ mit*

$$\|f-\varphi\|_1 := \|f-\varphi\|_{L^1(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} |f-\varphi|\,dx < \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

Daraus folgt $|a_j(f)-a_j(\varphi)| < \varepsilon$, und da $a_j(\varphi) \le \frac{K}{j}$ nach Lemma 2.1, ergibt sich $|a_j(f)| \le \varepsilon + \frac{K}{j}$, woraus die Behauptung von Satz 2.1 folgt. Der Approximationssatz 2.1 läßt sich mit Hilfe des Satzes von Lusin und Faltungsoperatoren beweisen. Zur Übung skizzieren wir hier den Beweis für $f \in L^\infty$:

Lemma 2.2 *Sei $f \in L^\infty(0,2\pi)$. Dann existiert eine Folge von C^∞-Funktionen φ_l mit*

$$\|f-\varphi_l\|_1 \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Wir erinnern an die Faltungsoperation mit „Kernen“ w_h,

$$(w_h * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_h(x-t)g(t)\,dt\,,$$

wobei w_h nicht-negative C^∞-Mittelfunktionen sind, deren Träger für $h \to 0$ verschwindet (siehe Kapitel 10 im Skript zu Infini III).

> **Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen zeigen, daß für einen genügend kleinen Faltungsindex h gilt: $\|f - w_h * f\|_1 < \varepsilon$. Nach dem Satz von Lusin (Lemma 5.1 und Satz 5.3) gibt es zu $\rho > 0$ eine Menge $E_\rho \subset (0,2\pi)$ und eine stetige Funktion $\tilde f : [-\delta, 2\pi+\delta] \to \mathbb{R}$ mit $f \equiv \tilde f$ auf $M - E_\rho$ und $\mu(E_\rho) < \rho$. Wähle hier $\rho = \frac{\varepsilon}{6\cdot\|f\|_\infty}$.
>
> Es gilt, sofern man $f - \tilde f$ außerhalb von $[-\delta, 2\pi+\delta]$ durch Null fortsetzt:
>
> $$\begin{aligned}\|w_h * f - w_h * \tilde f\|_1 &= \int_0^{2\pi} |w_h * (f-\tilde f)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} w_h * |f-\tilde f|\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \dots\, dt\Big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-\tilde f(t)| \Big(\int_{-\infty}^{\infty} w_h(x-t)\,dx\Big)\,dt = \\ &= \int_{-\delta}^{2\pi+\delta} |f(t)-\tilde f(t)| dt \qquad \text{wegen} \int_{-\infty}^{\infty} w_h(x-t)\,dx = 1\,.\end{aligned}$$

Da $f = \tilde{f}$ außerhalb von E_ρ, folgt

$$\int_{-\infty}^{2\pi+\delta} |f(t) - \tilde{f}(t)|\, dx \leq 2\|f\|_\infty \mu(E_\rho) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Somit haben wir gezeigt: $\|w_h * f - w_h * \tilde{f}\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Da $\tilde{f}$ stetig ist, gilt $w_h * \tilde{f} \to \tilde{f}$ gleichmäßig für $h \to 0$ und somit auch $\|\tilde{f} - w_h * \tilde{f}\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ für kleines h. Die Abschätzung $\|f - \tilde{f}\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ ist ebenfalls evident. Wir können also zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \|f - w_h * f\|_1 &= \|f - \tilde{f} + \tilde{f} - w_h * \tilde{f} + w_h * \tilde{f} - w_h * f\|_1 \leq \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_1 + \|\tilde{f} - w_h * \tilde{f}\|_1 + \|w_h * \tilde{f} - w_h * f\|_1 \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Im folgenden wird ein einfaches, klassisches Kriterium hergeleitet, welches die Darstellung einer Funktion durch ihre Fourierreihe unter sehr schwachen Voraussetzungen im eindimensionalen Fall sicherstellt.

Hilfssatz 2.1 *Sei $f \in L^1(0, 2\pi)$ und $g := f/(1 - e^{it}) \in L^1(0, 2\pi)$. Dann ist*

$$S(0; f) = 0\,.$$

(Hierbei sind komplexwertige Funktionen zugelassen.)

Beweis: Es gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n(f)$ von f

$$\begin{aligned} c_j(f) = c_j[(1 - e^{it})g] &= \int_0^{2\pi} e^{-ijt}(1 - e^{it})g(t)\, dt \\ &= c_j(g) - c_{j-1}(g)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sum_{j=-N}^{N} c_j(f) = c_N(g) - c_{-N-1}(g)\,.$$

Andererseits ist $\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j(f) = S_N(0; f)$ i.e. die N-te Partialsumme von $S(f)$ an der Stelle Null. Wegen Satz 2.1 konvergiert $c_N(g) - c_{-N-1}(g)$ gegen Null. Daher ist

$$S(0; f) = 0\,.$$

□

Satz 2.3 *Sei f periodisch zur Periode 2π und $f \in L^1(0,2\pi)$, $a \in [0.2\pi]$ und $c \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die durch*

$$\frac{f(t)-c}{t-a}$$

definierte Funktion sei integrabel in $(0,2\pi)$. Dann ist $S(a;f)=c$.

Beweis: Für die durch $f_0(t) = f(a+t)-c$ definierte Funktion gilt $f_0(t)/t \in L^1$ und damit $f_0(t)/(1-e^{it}) \in L^1$. Nach Hilfssatz 2.1 gilt daher $S(0;f_0)=0$. Dies bedeutet

$$0 = S(0; f(a+.)-c) = S(0; f(a+.)) - c \tag{2.2}$$

Wir haben hierbei die Linearität der Fourierkoeffizienten und die Beziehung $S(0;c)=c$ ausgenutzt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} S(0;f(a+.)) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(a+\xi) e^{-ij\xi}\, d\xi = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_a^{2\pi+a} f(\zeta) e^{-ij\zeta} e^{ija}\, d\zeta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} f(\zeta) e^{-ij\zeta}\, d\zeta \Big) e^{ija} \\ &= S(a;f) \end{aligned}$$

Wir haben ausgenutzt, daß für periodische Integranden $\int_a^{2\pi+a} = \int_a^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+a} = \int_a^{2\pi} + \int_0^a = \int_0^{2\pi}$ gilt. Die Konvergenz der obigen Reihe folgt aus dem Hilfssatz. Zusammen mit (2.1) folgt somit $S(a;f)=c$. □

Satz 2.4 *Es sei f periodisch und $f \in L^1(0,2\pi)$. Es gelte an der Stelle a die Hölderbedingung*

$$|f(t)-f(a)| \le K|t-a|^\alpha .$$

Dann gilt

$$f(a) = S(a;f),$$

d.h. f wird an der Stelle a durch seine Fourier-Reihe dargestellt.

Beweis: Wir setzen in Satz 2.3

$$c = f(a).$$

Da $K|t-a|^\alpha/(t-a) \in L^1$, folgt, daß $|f(t)-f(a)|/(t-a) \in L^1$, und nach Satz 2.3 die Behauptung. □

3 Verallgemeinerte Fourier-Reihen und L^2-Konvergenz

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, daß die Fourier-Reihe einer L^2-Funktion f in L^2 gegen f konvergiert. Dies ist ein Spezialfall eines sehr viel allgemeineren Satzes für sogenannte verallgemeinerte Fourier-Reihen in Hilbertschen Räumen.

Hilbert-Räume

Im folgenden wird mit $\bar{a}$ die konjugiert komplexe Zahl zu $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

Definition 3.1 *Ein reeller oder komplexer Hilbert-Raum H ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, in dem eine Abbildung $(.,.)$ von $H \times H$ nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, genannt „Skalarprodunkt“, gegeben ist, welche folgenden Bedingungen genügt:*

(i) Linearität: $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$ für alle $u, v, w \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(ii) Symmetrie: $(u, v) = \overline{(v, u)}$ für alle $u, v \in H$.

(iii) Positive Definitheit: $(u, u) \geq 0$ für alle $u \in H$ und $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$. Aus (i) und (ii) folgt die Antilinearität des Skalarproduktes bezüglich des zweiten Argumentes: $(u, \alpha w + \beta z) = \bar{\alpha}(u, w) + \bar{\beta}(u, z)$.

(iv) Der Raum H ist vollständig bezüglich der durch das Skalarprodunkt definierten Norm $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, d.h. für jede Cauchy-Folge (u_j) in H existiert ein $u \in H$ mit $\|u - u_j\| \to 0$.

Zur Erinnerung: (u_j) ist Cauchy-Folge genau dann, wenn

$$\|u_j - u_h\| < \varepsilon \quad \text{für } j, h > h_0(\varepsilon)\,.$$

Beispiele:
1.) $H = L^2(I)$ oder $L^2(\Omega)$, I Intervall oder Ω beschränkte meßbare Punktmenge in $\mathbb{R}^n$. $L^2(\Omega)$ besteht aus den Klassen $[f]$ von Funktionen, welche sich von der im Sinne von Lebesgue quadratintegrablen Funktion f nur auf einer Menge von Lebesgue-Maß Null unterscheiden. (Der Einfachheit halber sagt man oft, daß $L^2(\Omega)$ aus allen quadratintegrablen Funktionen besteht - dies ist jedoch nicht ganz präzise, da dann die Norm nur semidefinit wäre.) Das Skalarprodukt zweier Elemente $[f], [g] \in L^2$ wird durch $(f, g) = \int\limits_{\Omega} fg\,dx$ definiert. Die Definition ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten $f_0 \in [f], g_0 \in [g]$. Im letzten Semester haben wir die Vollständigkeit des Raumes L^2 bewiesen.

2.) $H = l^2$

l^2 ist die Menge aller Folgen $(a_1, a_2, \dots), a_j \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. Das Skalarprodukt in l^2 ist definiert durch

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \, .$$

Die Vollständigkeit ist beweisbedürftig und eine nette Übungsaufgabe über Doppelfolgen.

Orthonormalsysteme und verallgemeinerte Fouriersche Reihen

Definition 3.2 *Eine Folge $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}, \varphi_n \in H$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertschen Raum H genau dann, wenn*

(i) $\|\varphi_n\| = 1$

(ii) $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$ *Kronecker-Symbol*

(iii) Aus $(f, \varphi_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ *folgt* $f = 0$

Beispiel:
1. $M = L^2(0, 2\pi), \varphi_0 = 1, \varphi_{2j} = e^{ij}, \varphi_{2j+1} = e^{-ij}, j \in \mathbb{N}$.

2. $M = l^2, \varphi_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$; die 1 steht an der $n+1$-Komponente.

Im Beispiel 1 ist Eigenschaft (iii) beweisbedürftig und wird uns etwas Mühe machen. Weitere Beispiele von Orthonormalsystemen erhält man sehr bequem über die Eigenfunktionen regulärer Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Die Existenz eines abzählbaren Orthonormalsystems schränkt die Größe des Hilbert-Raumes ein - er ist dann „separabel“.

Verallgemeinerte Fourier-Reihen und Fourier-Koeffizienten

Es sei H ein Hilbertscher Raum mit einem Orthonormalsystem $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$. Sei $f \in H$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (f, \varphi_j) \varphi_j \tag{3.1}$$

verallgemeinerte Fourier-Reihe von f.

Der folgende Satz sichert, daß die verallgemeinerte Fourier-Reihe von f konvergiert.

Satz 3.1 *Die Reihe (3.1) konvergiert in H.*

Beweis: Wir müssen zeigen, daß die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden, d.h.

$$\| \sum_{j=0}^{M} (f, \varphi_j)\varphi_j - \sum_{j=0}^{N} (f, \varphi_j)\varphi_j \| = \| \sum_{j=N}^{M} (f, \varphi_j)\varphi_j \| < \varepsilon \,, \quad N, M > h_0(\varepsilon) \,. \tag{3.2}$$

Die Beziehung (3.2) folgt nunmehr aus der im folgenden zu beweisenden Parsevalschen Ungleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(f, \varphi_j)|^2 \leq \|f\|^2 \tag{3.3}$$

(Für vollständige Orthonormalsysteme besteht in (3.3) die Gleichheit.) In der Tat, (3.3) sichert die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |(f, \varphi_j)|^2$ und damit (3.2), wenn man die Norm als Wurzel des Skalarproduktes schreibt und beim Multiplizieren $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$ beachtet. □

Satz 3.2 *Es sei $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann gilt die Parsevalsche Ungleichung*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(f, \varphi_j)|^2 \leq \|f\|^2 \,.$$

Ist (φ_j) vollständig, so gilt sogar die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(f, \varphi_j)|^2 = \|f\|^2$$

und f wird durch die verallgemeinerte Fourier-Reihe dargestellt.

Beweis: Wir behandeln nur den reellen Fall. Wegen der Definitheit des Skalarproduktes gilt

$$0 \leq \|f - \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j\|^2 = \|f\|^2 - 2\Big| \sum_{j=0}^{N} \alpha_j (f, \varphi_j) \Big| + \sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 \,.$$

Mit $\alpha_j = (f, \varphi_j)$ folgt

$$\sum_{j=0}^{N} |(f, \varphi_j)|^2 \leq \|f\|^2 \,,$$

und durch Grenzübergang $N \to 0$ die behauptete Ungleichung. Wir wissen somit, daß die verallgemeinerte Fourier-Reihe $f^* = \sum_{j=0}^{\infty}(f,\varphi_j)\varphi_j$ in H konvergiert. Es gilt

$$(f - f^*, \varphi_j) = (f,\varphi_j) - (f^*,\varphi_j) = 0 \quad \forall j = 0\,.$$

(Die Stetigkeit des Skalarproduktes bezüglich der Konvergenz in H wurde ausgenutzt.)

Aus der Vollständigkeitsdefinition folgt damit

$$f = f^*\,.$$

Aus $\|f\|^2 = \|f^*\|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} |(f,\varphi_j)|^2$ folgt dann die Parsevalsche Gleichung. □

Wenn wir Satz 3.2 auf den Fall $H = L^2(0,2\pi)$ und das Orthonormalsystem $\{e^{\pm ij}, 1\}$ anwenden wollen, müssen wir die Vollständigkeitsbedingung

$$\int_0^{2\pi} f\varphi_l\,dx = 0\ \forall l \in \mathbb{N}\ \Rightarrow f = 0$$

nachweisen. Dies folgt durch ein Approximationsargument, welches sich ebenfalls im abstrakten Hilbert-Raum durchführen läßt. Hierzu benötigen wir folgende Definition:

Definition 3.3 *Man nennt eine Teilmenge $M \subset H$ dicht in H genau dann, wenn zu jedem Element $f \in H$ eine Folge $(f_l)_{l=0}^{\infty} \in M$ mit $\|f - f_l\| \to 0$ existiert.*

Satz 3.3 *Es sei M eine dichte Teilmenge von H und $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in H. Jedes Element von M werde durch seine verallgemeinerte Fourier-Reihe dargestellt. Dann ist $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ ein <u>vollständiges</u> Orthonormalsystem.*

Beweis: Sei $f \in H$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $g \in M$ mit $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|g - \sum_{j=0}^{N}(g,\varphi_j)\varphi_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt

$$\|f - \sum_{j=0}^{N}(g,\varphi_j)\varphi_j\| < \varepsilon\,,$$

Wegen der Minimalitätseigenschaft der Fourier-Koeffizienten (Übungsaufgabe) gilt:

$$\|f - \sum_{j=0}^{N}(f,\varphi_j)\varphi_j\|^2 \leq \|f - \sum_{j=0}^{N}(g,\varphi_j)\varphi_j\|^2 < \varepsilon^2\,,$$

Daraus folgt

$$0 \leq \|f - \sum_{j=0}^{N}(f,\varphi_j)\varphi_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{N}|(f,\varphi_j)|^2 \text{ und } \sum_{j=0}^{N}|(f,\varphi_j)|^2 \leq \|f\|^2\,.$$

Die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{N}|(f,\varphi_j)|^2$ muß also konvergieren, und daraus folgt $(f,\varphi_j) \to 0\,, (j \to \infty)$. $\square$

Folgerung: Ist $f \in L^2(0,2\pi)$, so wird f im Sinne der L^2-Konvergenz durch seine Fourier-Reihe dargestellt. Dies folgt aus Satz 3.3, da die C^2-Funktionen dicht sind in L^2 (Faltungsargument!) und die C^2-Funktionen durch ihre Fourier-Reihe dargestellt werden.

4 L^p-Theorie von Fourier-Reihen

Mit $L^p(0,2\pi)$ bezeichnen wir den üblichen Lebesgueschen Funktionenraum

$$L^p(0,2\pi) = \{[u] | u : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \text{ ist meßbare Funktion und } \int_0^{2\pi} |u|^p \, dx < \infty\}.$$

Mit $[u]$ wird die Klasse aller Funktionen bezeichnet, die sich von u auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Mit „Maß“ etc. meinen wir immer das Lebesgue-Maß. Statt $[u]$ schreiben wir auch - unpräziserweise - u.
Mit l^p bezeichnen wir den sogenannten Folgenraum:

$$l^p = \{c = (\dots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots) | c_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^p < \infty\}.$$

(Bem.: Normalerweise definiert man l^p als Menge der Folgen $(c_1, c_2, \dots)$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^p < \infty$.)

L^p und l^p sind normierte Räume bezüglich der Normen

$$\|u\|_p = (\int_0^{2\pi} |u|^p \, dx)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

bzw.

$$\|c\|_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^p)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Für $p = \infty$ ist $\|u\|_\infty = \text{ess-sup}\,|u|$ und $\|c\|_\infty = \sup\{|c_j| \; j \in \mathbb{N}\}$.

Sei nun $f \in L^1$ und $T : L^1 \to l^\infty$ die Abbildung, die der Funktion f ihre Fourier-Koeffizienten zuordnet:

$$Tf = c, \; c = (c_1, c_2, \dots), \; c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-imt} \, dt.$$

Es ist klar, daß

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1, \tag{4.1}$$

und wir wissen aus der Vollständigkeitsrelation, daß

$$\|Tf\|_2 = \|f\|_2 \quad . \tag{4.2}$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich im L^p-Fall eine ähnliche Ungleichung ergibt:

$$\|Tf\|_p \overset{??}{\leq} K\|f\|_q \quad \text{oder} \quad \|f\|_p \overset{??}{\leq} K\|Tf\|_q$$

Qualitativ gesehen ergibt sich die Frage, ob die Fourier-Koeffizienten einer L^p-Funktion für gewisse q in l^q sind.

Zur Motivation der Fragestellung: Die L^p-Räume benötigt man für feinere Unterscheidung des Regularitätsgrades einer Funktion. Mit Fourier-Reihen lassen sich viele Beweise „stricken“; die o.a. Ungleichung wäre für viele Beweise sehr nützlich.

Leider ist vieles in der L^p-Theorie von Fourier-Reihen nicht so, wie man es erwartet.

Satz 4.1 (Satz von Hausdorff-Young) *Sei* $1 < p \leq 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

(i) Sei $f \in L^p(0, 2\pi)$. *Dann gilt*

$$\|Tf\|_{p'} \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \|f\|_p \,.$$

(ii) Sei $c \in l^p$ *und* $c = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1 \dots)$

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j e^{-ijt}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/p'}} \|f\|_{p'} \leq \|c\|_p \,.$$

Insbesondere gilt also, daß die Fourier-Koeffizienten in $l^{p'}$ konvergieren, wenn $f \in L^p$ und $1 < p \leq 2$.

Die analogen Resultate für $p > 2$ sind <u>falsch</u>.

(a) In dem zweibändigen Werk von Zygmund, Trigonometric Series, ist eine stetige Funktion f angegeben, also $f \in L^q$ für alle $q \leq \infty$, mit $\|c\|_p' = \infty$ für alle $p < 2$.

(b) Es gibt eine Folge $c \in l^q$, $q > 2$, so daß $\sum c_j e^{+jt}$ nicht in L^1 liegt (eine Distribution ist es in jedem Fall).

Der Satz von Hausdorff-Young ist eine Folge des Satzes von Riesz-Thorin. Dieser besagt, daß eine lineare stetige Abbildung A mit

$$\begin{aligned} A &: L^{p_1}(\mu) \to L^{q_1}(\tilde{\mu}) \qquad \text{und} \\ A &: L^{p_2}(\mu) \to L^{q_2}(\tilde{\mu}) \end{aligned}$$

auch eine stetige Abbildung von

$$L^p(\mu) \to L^q(\tilde{\mu})$$

ist. Hierbei gilt

$$(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}) \in \Big\{ \big((1-t)\tfrac{1}{p_1} + t\tfrac{1}{p_2},\ (1-t)\tfrac{1}{q_1} + t\tfrac{1}{q_2}\big) \,|\, t \in (0,1) \Big\}$$

$L^p(\mu)$ bzw. $L^q(\tilde{\mu})$ bedeutet den L^p-Raum bezüglich eines Maßes. In unserem Fall ist μ bzw. $\tilde{\mu}$ das Lebesgue-Maß, bzw. das diskrete Maß, welches auf den Punkten aus $\mathbb{Z}$ den Wert 1 hat und sonst verschwindet.

Der Satz von Riesz-Thorin liefert außerdem die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Af\|_q &\le M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_p \,, \qquad \text{wenn} \\ \|Af\|_{q_j} &\le M_j \|f\|_{p_j} \,, \quad j = 1, 2 \,. \end{aligned}$$

Wie ersichtlich, steht im Satz von Hausdorff-Young jeweils auf der linken Seite der Ungleichung der größere Index, da $p' = p/(p-1) \ge 2$ für $p \le 2$. Für $p > 2$ sind die entsprechenden Ungleichungen im Allgemeinen nicht richtig. In der Form des Satzes von Paley gibt es aber einen Ersatz. Hierzu definieren wir:

$$|||c|||_r = \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^r |k|^{r-2} \Big)^{1/r} .$$

Satz 4.2 (Satz von Paley) *(i) Sei $f \in L^p(0, 2\pi)$, $1 < p \le 2$ und $c = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$ der Vektor der Fourier-Koeffizienten von f. Dann gilt*

$$|||c|||_p \le K_p \|f\|_p$$

mit einer Konstanten K_p.

(ii) Sei $c = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$, $q \ge 2$, und

$$|||c|||_q < \infty \,.$$

Dann ist $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \in L^q$ und es gilt

$$\|f\|_q \le K_q |||c|||_q$$

mit einer Konstanten K_q.

Die Beweise der in diesem Kapitel vorgestellten Resultate findet man in Zygmund, Trigonometric Series II.

5 Das Fourierintegral einer L^1-Funktion

Wir erinnern zunächst an die Definition des Raumes $L^1(M)$ über einer beschränkten und meßbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Elemente von $L^1(M)$ sind Klassen $[f]$ von reell oder komplexwertigen Funktionen $g \in [f]$, die über M Lebesgue-integrabel sind und sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Die Norm eines Elementes $[f] \in L^1(M)$ wird definiert durch

$$\|[f]\|_{L^1(M)} = \int_M |g(x)|\, dx\,, \qquad \text{für } g \in [f]$$

Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Auswahl des Repräsentanten $g \in [f]$ keine Rolle spielt. Wegen $\int_M |h| = \int_M |g|$ für $h \in [f]$ ist dies aber gegeben. Ist $f \in [f]$ eine Lebesgue-integrable Funktion und $[f]$ die zugehörige Klasse von Funktionen, die sich von f nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, so schreibt man auch $\|f\|_{L^1} = \|[f]\|_{L^1}$. Man spricht oder schreibt oder denkt oder murmelt häufig $f \in L^1$ und meint damit präziser $[f] \in L^1$.

Die Addition von $[f], [g] \in L^1$ wird naheliegenderweise durch $[f+g]$ definiert, ebenso die Multiplikation mit Skalaren.

Wir fassen zusammen: $L^1(M)$ ist der lineare normierte Raum aller Äquivalenzklassen $[f] = \{g : M \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} | \int_M |g|\, dx < \infty\, g_1, g_2 \in [f] \Rightarrow g_1 - g_2 = 0 \text{ f.ü.}\}$
(f.ü.= fast überall = a.e. = almost everywhere = q.o. = quasi ovunque) mit der Norm

$$\|[g]\|_{L^1} = \int_M |g(x)|\, dx \qquad \text{für } g \in [g]\,.$$

Die Maßtheorie lehrt uns, daß $L^1(M)$ bezüglich der L^1-Norm vollständig ist, d.h. Cauchy-Folgen bezüglich der L^1-Norm besitzen einen Limes in der L^1-Norm. Für die Fouriertransformation benötigen wir den Raum $L^1(\mathbb{R})$ bzw. $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hierzu erinnern wir an die Definition des Lebesgue-Integrals für unbeschränkte Mengen S.

Definition 5.1 *Es sei S eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$), so daß $B_R \cap S$ meßbar für jedes $R > 0 (B_R = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \le R\}$. Die Funktion f sei integrabel auf jeder der Mengen $B_R \cap S$. Sei*

$$f_+(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \textit{falls} & f(x) \ge 0 \\ 0 & \textit{falls} & f(x) < 0 \end{array} \right\}, \quad f_-(x) = \left\{ \begin{array}{lll} |f(x)| & \textit{falls} & f(x) \le 0 \\ 0 & \textit{falls} & f(x) > 0 \end{array} \right\}$$

Die reelle Funktion f heißt Lebesgue-integrabel über S falls gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R \cap S} f_+\, dx =: \mathcal{F}_+ \textit{ existiert und } \lim_{R\to\infty} \int_{B_R\cap S} f_-\, dx =: \mathcal{F}_- \textit{ existiert}\,.$$

Man schreibt $\int_S f\,dx = \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-$. *Im komplexwertigen Fall behandelt man Real- und Imaginärteil getrennt.*

Der Raum $L^1(S)$ wird in Analogie zu $L^1(M), M$ meßbar und beschränkt definiert. $L^1(S)$ ist ebenfalls vollständig bezüglich der L^1-Norm.

Man nennt $\{B_R\}_{R\in\mathbb{R}}$ eine „Ausschöpfung" von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Eine Übungsaufgabe zeigt, daß die Definition des Lebesgue-Integrals über S weitgehend von der Ausschöpfung unabhängig ist.

Nun geht es los mit den Fourier-Integralen. Wir betrachten zunächst eindimensionale Fourier-Integrale. Für $\int_{\mathbb{R}}$ schreiben wir auch $\int_{-\infty}^{\infty}$.

Definition 5.2 *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *(genauer:* $f \in [f] \in L^1(\mathbb{R})$*). Die durch*

$$\hat{f}(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\,dx\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

definierte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *wird als die Fourier-Transformierte von* f *definiert.*

Anmerkung: $\hat{f}(\alpha)$ existiert, weil $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \le \|e^{i\alpha x}\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \le \|f\|_1$. Ist f etwa reellwertig, so existiert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} (f(x)\sin x)_\pm \quad \text{und } \lim \int_{-R}^{R} (f(x)\cos x)_\pm\,,$$

da das Cauchy-Kriterium gilt, setze $I_R = [-R, R], I_r = [-r, r]$

$$\Big| \int_{I_R - I_r} (f(x)\sin x)_\pm\,dx \Big| \le \Big| \int_{I_R - I_r} f_\pm(x)\,dx \Big| < \varepsilon\,, \qquad r, R \ge R(\varepsilon)\,.$$

Wir werden später die Bezeichnung

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$$

verwenden, da sich herausstellen wird, daß - bei geeigneter Ausdehnung der Fourier-Transformation auf L^2-Funktionen - die Abbildung $\mathcal{F}$ eine unitäre Abbildung von L^2 auf sich ist. Die Bedeutung der Fourier-Transformation liegt vor allem darin, daß sich Differentationen im

Fourier-Bild in Multiplikationen verwandeln und die Fourier-Transformation wichtige Abbildungseigenschaften hat.

Beispiele:

$$\text{Sei } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \int_{-1}^{1} e^{i\alpha x}\, dx = 2\int_{0}^{1} \cos \alpha x\, dx = [\frac{-2\sin \alpha x}{\alpha}]_0^1 = -2\frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Beachte, daß $\hat{f} \notin L^1$.

$$f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow$$

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{-x+i\alpha x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x+i\alpha x}\, dx = \frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} = \frac{2}{1+\alpha^2}$$

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2/4} \text{ ohne Beweis}$$

Erste einfache Eigenschaften der Fourier-Transformierten einer L^1-Funktion

Die Linearität ist klar und wird nicht als „Satz“ aufgeführt.

Satz 5.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$.*

Anmerkung: Ist $g : M \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ meßbar, so heißt g wesentlich beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt mit $|g(x)| \le C$ für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null. C heißt dann „wesentliche Schranke“ von g, und man sagt $g \in L^\infty(M)$. Die L^∞-Norm $\|g\|_\infty$ von g definiert man als Infimum der wesentlichen Schranken von g. Im vorliegenden Fall zeigt sich noch, daß $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ und $\hat{f}(\pm\infty) = 0$. In diesem Fall ist daher $\|\hat{f}\|_{L^\infty} = \max_{\alpha\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\alpha)|$.

Satz 5.2 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.$Dann folgt \hat{f} \in C(\mathbb{R})$.*

Beweis: Es gilt: $\hat{f}(\alpha+h) - \hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\big(e^{i(\alpha+h)x} - e^{i\alpha x}\big)\, dx$ mit

$$f(x)\big(e^{i(\alpha+h)x} - e^{i\alpha x}\big) \longrightarrow 0 \text{ f.ü.}$$
$$|f(x)\big(e^{i(\alpha+h)x} - e^{i\alpha x}\big)| \le 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

und somit nach dem Satz von Lebesgue $\hat{f}(\alpha+h) - \hat{f}(\alpha) \longrightarrow 0$ für $h \to 0$ □

Die folgenden drei Sätze sagen aus, wie Faltungs-, Verschiebungs- und Differentialoperatoren im Fourier-Bild aussehen.

Lemma 5.1 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $(f * g) \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.*

Beweisidee:

$$\|f * g\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt \Big|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dx\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\, |g(t)|\, dy\, dt = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f|\, dy \Big) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |g|\, dt \Big)$$

Anmerkung: Hierbei wurde der Satz von Fubini benutzt. Das sorglose Umgehen mit den unendlichen Integrationsgrenzen ist natürlich nicht präzise genug. Arbeitet man sorgfältiger mit $\int_{-R}^{R}$, $R \to \infty$, so muß man ausnutzen, daß $\int_{I_R - I_r} (|f| \text{ oder } |g|)\, dx < \varepsilon$ falls $R, r \geq R(\varepsilon)$. Die Ungleichungskette muß rückwärts gelesen werden, um zu begründen, daß $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt$ für fast alle x integrabel ist.

Durch einfache Substitution erhält man

Lemma 5.2 *Die Faltung in L^1 ist assoziativ und kommutativ.*

Satz 5.3 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}), h := f * g$. Dann gilt $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. (Der Punkt bedeutet punktweise Multiplikation.)*

Beweis:

$$\hat{h}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy \Big) e^{i\alpha x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{i\alpha x}\, dx \Big)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(u+y)}\, du \Big)\, dy =$$

$$= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} g(y)\, dy \Big) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u}\, du \Big) = \hat{g} \cdot \hat{f}$$

Hierbei wurden wieder der Satz von Fubini und die Substitution $x - y = u$ benutzt. □

Der Translationsoperator E^h ist definiert durch $E^h f(x) = f(x+h)$, im Fall von n-Dimensionen $E_i^h f(x) = f(x+he_i)$, $e_i = i$-ter Einheitsvektor, $h \in \mathbb{R}$.

Satz 5.4 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}), g = E^h f$. Dann gilt $\hat{g} := e^{-ih}\hat{f}$ sowie $(\widehat{f(\cdot)e^{ih(\cdot)}})(\alpha) = \hat{f}(\alpha+h)$.*

Beweis:

$$\hat{g}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}e^{-i\alpha h}\,du = e^{-i\alpha h}\hat{f}(\alpha)\,.$$

Die zweite Aussage folgt ebenfalls unmittelbar aus der Definition. □

Satz 5.5 *(i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $x \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Dann existiert $\frac{d}{d\alpha}\hat{f}(\alpha)$ und*

$$(\hat{f})'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [ix \cdot f(x)]e^{i\alpha x}\,dx$$

(ii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\widehat{(f')}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x}\,dx = -i\alpha\hat{f}(\alpha)\,.$$

Beweis: Sei $f_h(x) = f(x)\frac{e^{ihx}-1}{h}$, $\qquad h \neq 0\,,\ h \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\hat{f}_h(\alpha) = \frac{\hat{f}(\alpha+h) - \hat{f}(\alpha)}{h}\,.$$

Es gilt $f_h(x) \to ixf(x)$ punktweise und nach dem Mittelwertsatz

$$|f_h(x)| \leq |f(x)|\,|\frac{e^{ihx}-1}{h}| \leq |x|\,|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz, der sich auch auf den Fall unbeschränkter Grundgebiete übertragen läßt, folgert man

$$\hat{f}_h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{ihx}-1}{h}e^{i\alpha x}\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)e^{i\alpha x}\,dx \quad (h \to 0 =,$$

d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert der Limes der Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{\hat{f}(\alpha+h)-\hat{f}(\alpha)}{h}\,.$$

Teil (i) ist damit bewiesen.

Beweis von (ii): Es gilt mit partieller Integration

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha} f(x)\Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha} f'(x)\,dx\,.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, daß der Randterm gegen Null geht für $R \to \infty$. Es gilt

$$f(R) = f(0) + \int_0^R f'(s)\,ds \to f(0) + \int_0^\infty f'(s)\,ds \quad (R\to\infty)\,.$$

Der Limes existiert, da $f' \in L^1$. Andererseits muß $\lim\limits_{R\to\infty} f(R) = 0$ gelten, da sonst $\int\limits_0^\infty f_+\,dx = \infty$ oder $\int\limits_0^\infty f_-\,dx = \infty$ wäre. Analog schließt man für $-R$. □

Satz 5.6 *(i) Sei f und $x^m f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ für ein $m \in \mathbb{N}$ sowie $\hat{f}(\alpha) \in C^m$. Dann ist*

$$(\hat{f})^{(m)}|\alpha| = \int_{-\infty}^{\infty} \{(ix)^m\, f(x)\} e^{i\alpha x}\,dx\,.$$

(ii) Sei $f \in C^m$, $f^{(r)} \in L^1(\mathbb{R})$, $0 \le r \le m$. Dann ist

$$(f^{(m)})\hat{}(\alpha) = (-i\alpha)^m \hat{f}(\alpha)\,.$$

Der Beweis läuft analog zum Beweis von Satz 5.5. Grob gesprochen beinhaltet Satz 5.6, daß $\hat{f}(\alpha)$ um so stärker im Unendlichen fällt (nämlich wie $(1/\alpha)^m$), je mehr Ableitungen f in L^1 hat.

6 Die Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R})$

Mit $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir wie üblich die Menge aller Funktionenklassen $[f]$ von meßbaren, über $\mathbb{R}$ im Sinne von Lebesgue quadratintegrablen Funktionen. Zwei Funktionen aus derselben Klasse unterscheiden sich nur auf einer Menge vom Maß Null. Statt $f \in [f] \in L^2(\mathbb{R})$ schreibt man auch schlampigerweise $f \in L^2(\mathbb{R})$. Das Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \bar{g}\, dx \,.$$

Ist $f \in L^2(\mathbb{R})$, so ist $e^{i\alpha x} f(x)$ nicht notwendig Lebesgue-integrabel, da das Integrationsgebiet unbeschränkt ist. Es zeigt sich, daß sich $\hat{f}$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$ dennoch in sinnvoller Weise definieren läßt und die so definierte Fourier-Transformation, welche für $f \in L^1(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$ definiert ist, eine unitäre Abbildung von $L^2(R)$ auf sich ist, d.h. es gilt

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = id \,, \tag{6.1}$$

wobei $\mathcal{F}^*$ diejenige Abbildung ist, für die gilt:

$$(\mathcal{F}u, v) = (u, \mathcal{F}^* v) \qquad \forall u, v \in L^2 \,.$$

Hiermit wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen. Zur Vorbereitung beweisen wir einige Lemmata. Mit χ_c bezeichnen wir die durch

$$\chi_c(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |\xi| \le |c| \text{ und } \xi c > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion. Offensichtlich gilt $(\chi_b, \chi_{-c}) = 0$ für $b, c > 0$, wobei $(.,.)$ das L^2-Skalarprodukt bedeutet. Interessanterweise bleibt diese Orthogonalitätsrelation im Fourierbild erhalten:

Lemma 6.1 *Seien $b, c > 0$. Dann gilt $(\hat{\chi}_b, \hat{\chi}_{-c}) = 0$.*

Beweis:

$$\hat{\chi}_b = \int_0^b e^{i\alpha x}\, dx = \frac{e^{ib\alpha} - 1}{i\alpha}, \quad \hat{\chi}_{-c} = \frac{e^{-ic\alpha} - 1}{i\alpha}, \ (\hat{\chi}_b, \hat{\chi}_{-c}) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(e^{ib\alpha} - 1)(e^{ic\alpha} - 1)\, d\alpha$$

Der Integrand ist eine holomorphe Funktion von α, und es gilt

$$\Big(\int_R^{\infty} + \int_{-\infty}^{-R}\Big) \frac{1}{\alpha^2}(e^{ib\alpha} - 1)(e^{ic\alpha} - 1)\, d\alpha \le \varepsilon \ \text{ für großes } R \,,$$

da der Integrand für reelles α wie $\frac{1}{\alpha^2}$ fällt, $\alpha \to \infty$. Deformiert man den Integrationsweg $[-R, R]$ in den oberen Halbkreis $C_R = \{\zeta \in \mathbb{C} | \, |s| = R, \, \mathcal{I}m\zeta \geq 0\}$ der komplexen Ebene, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{\alpha^2}(e^{ib\alpha} - 1)(e^{ic\alpha} - 1)\, d\alpha = -\int_{C_R} \frac{1}{\alpha^2}(e^{ib\alpha} - 1)(e^{ic\alpha} - 1)\, d\alpha\,.$$

Das letzte Integral geht gegen Null für $R \to \infty$ wegen des Faktors $\frac{1}{\alpha^2}$ und der Tatsache, daß $e^{i\alpha b}, e^{i\alpha c}$ beschränkt bleiben, da wir uns in der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ befinden und $b, c > 0$. Es gilt daher wegen $\mathcal{I}m\alpha = \beta > 0$

$$e^{i\alpha b} = e^{iRe\alpha} e^{-b}\,, \text{ analog für } c\,.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(e^{ib\alpha} - 1)(e^{ic\alpha} - 1)\, d\alpha = 0\,.$$

□

Lemma 6.2 *Es seien $I_1 =]a_1, a_2], I_2 =]b_1, b_2]$ disjunkte Intervalle und χ_1, χ_2 die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann gilt*

$$(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = 0\,.$$

Beweis: Sei zunächst $a_2 \leq b_1 = 0$. Nach Verabredung gilt $a_1 < a_2, b_1 < b_2$. Es gilt (bis auf endlich viele Punkte)

$$\chi_1 = \chi_{a_2} - \chi_{a_1}\,, \quad \chi_2 = \chi_{b_2} - \chi_{b_1}\,,$$

und es folgt

$$(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = 0 \quad \text{da } (\hat{\chi}_{a_j}, \hat{\chi}_{b_h}) = 0$$

nach Lemma 6.1.

Sind nun allgemeiner a_2 und b_1 nicht durch den Nullpunkt getrennt, so führen wir eine Translation mit einer Verschiebung c durch, so daß $a_2 + c < b_1 + c$. Es gilt dann nach dem soeben Bewiesenen

$$((E_c\chi_1)\hat{}\,(E_c\chi_2)) = 0\,,$$

und wegen $(E_c\chi_j)(\alpha) = e^{-ic\alpha}\hat{\chi}_j(\alpha)$, $j = 1, 2$ (s. vorheriges Kapitel) folgt

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ic\alpha}\hat{\chi}_1(\alpha) e^{ic\alpha}\overline{\hat{\chi}_2(\alpha)}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_1 \overline{\hat{\chi}_2}\, d\alpha\,.$$

□

Jetzt wollen wir die L^2-Norm der charakteristischen Funktion χ_b von $[0, b]$ berechnen.

Lemma 6.3

$$\|\hat{\chi}_b\|_{L^2}^2 = 2b\pi$$

Beweis: Es gilt

$$\hat{\chi}_b(\alpha) = \int_0^b e^{i\alpha x}\,dx = \frac{e^{i\alpha b} - 1}{i\alpha}$$

und

$$\|\hat{\chi}_b\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(e^{i\alpha b} - 1)(e^{-i\alpha b} - 1)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(2 - e^{i\alpha b} - e^{-i\alpha b})\,d\alpha$$

Der Integrand des letzten Integrales ist holomorph. Es gilt daher

$$\|\hat{\chi}_b\|_{L^2}^2 = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\alpha^2}(2 - e^{i\alpha b} - e^{-i\alpha b})\,d\alpha \pm \varepsilon\,,$$

wenn Γ_ε eine Kurve in $\mathbb{C}$ ist, die in $\mathbb{R} - [-\delta, \delta]$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, mit der reellen Achse übereinstimmt, und oberhalb des Intervalles $[-\delta, \delta]$ mit dem oberen Halbkreis $\{\zeta \in \mathbb{C}|\,|\zeta| = \delta, \mathcal{I}m\zeta > 0\}$ übereinstimmt. Das Integral $\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\alpha^2}(2-e^{i\alpha b})\,d\zeta$ verschwindet wegen des Cauchyschen Integralsatzes, siehe die ähnliche Argumentation wie beim Beweis von Lemma 6.1, da $\Gamma_\varepsilon \cap B_R$ in den oberen Halbkreis C_R deformiert werden kann und bei der Deformation das Überschreiten von Sigularitäten vermieden wird. Es bleibt die Berechnung von

$$-\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{-i\alpha b}}{\alpha^2}\,d\zeta\,.$$

Hier können wir nicht in Richtung der positiven Imaginärachse deformieren, da dort $e^{-i\alpha b}$ unbeschränkt ist. Also müssen wir in Richtung der negativen Imaginärachse deformieren und überstreichen dabei die Singularität bei Null. Daraus ergibt sich

$$-\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{-i\alpha b}}{\alpha^2}\,ds = -\int_{\partial B_r} \frac{e^{-i\alpha b}}{\alpha^2}\,ds\,,$$

wobei ∂B_r die Kurve ist, die den Kreis $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ berandet und negativ orientiert ist. Nach dem Residuensatz ist

$$-\int_{\partial B_r} \frac{e^{-i\alpha b}}{\alpha^2}\,ds = -\int_{\partial B_r} \frac{i\alpha b}{\alpha^2}\,ds = ib\int_{\partial B_r} \frac{1}{\alpha}\,ds = -ib\cdot 2i\pi = 2b\pi\,.$$

□

Folgerung: Mit der Bezeichnung $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\hat{f}$ folgt

$$\|\mathcal{F}(\chi_b)\|_{L^2} = \sqrt{b} = \|\chi_b\|_{L^2} \tag{6.2}$$

Hilfssatz 6.1 *Es sei $f = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\chi_j$ eine Treppenfunktion. Die χ_j seien charakteristische Funktionen von disjunkten Intervallen I_j. Dann gilt*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\,.$$

Beweis: Da $(\chi_j,\chi_h) = 0$, gilt nach Lemma 6.2 $(\mathcal{F}(\chi_j),\mathcal{F}(\chi_h)) = 0$, $i \neq h$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(f)) &= (\mathcal{F}(\sum_{j=1}^{N} c_j\chi_j),\mathcal{F}(\sum_{j=1}^{N} c_j\chi_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^{N}(c_j\mathcal{F}(\chi_j),c_j\mathcal{F}(\chi_j)) = \sum_{j=1}^{N}|c_j|^2\|\chi_j\|_2^2 = \|\sum c_j\chi_j\|_2^2 = \|f\|_{L^2}^2\,.\end{aligned}$$

□

Damit haben wir die angekündigte Isometrie der Fourier-Transformation für Treppenfunktionen bewiesen. Durch ein typisches Approximationsargument wird die Aussage auf allgemeinere Funktionen ausgedehnt:

Satz 6.1 (Satz von Plancherel) *Sei $f \in L^1\cap L^2(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ und $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*

Beweis: Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $f_k = \sum_{j=1}^{N_k} c_{jk}\chi_{jk}$ mit

$$\|f_k - f\|_{L^1} \to 0 \text{ und } \|f_k - f\|_{L^2} \to 0$$

(Typische Argumentation aus der Maßtheorie: Für stetige Funktion mit kompaktem Träger folgt die gleichmäßige Approximation elementar. Beliebige meßbare Funktionen mit kompaktem Träger werden mit Hilfe des Satzes von Lusin approximiert, Funktionen mit unbeschränktem Träger werden durch „Abschneiden“ durch solche mit beschränktem Träger approximiert.)

Aus der L^1-Konvergenz folgt

$$\hat{f}_k(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) e^{i\alpha x}\, dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f e^{i\alpha x}\, dx\,,$$

also die punktweise Konvergenz

$$\hat{f}_k(\alpha) \to \hat{f}(\alpha) \qquad (h \to \infty)$$

und

$$\mathcal{F}(f_k) \to \mathcal{F}(f)\,.$$

Weiter gilt wegen Lemma 6.3:

$$\|\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f_n)\|_{L^2}^2 = \|f_k - f_m\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \qquad h, m \geq h(\varepsilon)\,, \tag{6.3}$$

da die f_k eine Cauchy-Folge in L^2 sind. Wir wenden den Satz von Fatou auf die Funktionenfolge $|\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f_m)|^2$ mit m als Index an. Es gilt $|\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f_m)|^2 \to |\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f)|^2$ punktweise. Daraus folgt (nach Fatou)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f)|^2 \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f_m)|^2 \leq \varepsilon^2\,,$$

und insbesondere, als Teilaussage des Satzes von Fatou, daß $|\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f)|^2 \in L^1$, woraus $\mathcal{F}(f) \in L^2$ folgt. Es ergibt sich somit

$$\|\mathcal{F}(f_k) - \mathcal{F}(f)\|_{L^2} < \varepsilon \qquad h \geq h(\varepsilon)\,,\ \text{d.h. } \mathcal{F}(f_k) \to \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2\,.$$

Andererseits ist

$$\|f_k\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f_k)\|$$

und da die L^2-Norm bezüglich der L^2-Konvergenz stetig ist, folgt

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|\,.$$

$\square$

Die Definition der Fourier-Transformation durch Abschließung wird manchem mit Recht zu abstrakt vorkommen. Der folgende Satz gibt eine konkretere Formel.

Satz 6.2 *Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt $\hat{f}(\alpha) = \lim\limits_{h\to\infty} \int_{-R_h}^{R_h} e^{i\alpha x} f(x)\, dx$ für fast alle alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $h \to \infty$, $\{R_h\}_h \subset \mathbb{N}$ mit $R_h \to \infty$.*

Beweis: Sei $f_R(x) = f(x)$ für $|x| \leq R$ und Null sonst. Es gilt, da $f_R \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\tilde{f}_R(\alpha) = \int_R^R e^{i\alpha x} f(x)\, dx$$

und andereseits $f_R \to f$ in L^2; $(R \to \infty)$ und damit $\|\mathcal{F}(f(_R) - \mathcal{F}(f)\| \to 0$. Daraus folgt $\mathcal{F}(f_{R_k})(\alpha) \to \mathcal{F}(f)(\alpha)$ für eine Teilfolge $\Lambda = (R_1, R_2, \dots)$ und fast alle $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

7 Die inverse Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation, die ja eine lineare Abbildung ist, besitzt eine Inverse der Gestalt

$$(\mathcal{F}^*(h))(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} h(\alpha) d\alpha \,, \qquad h \in L^1(\mathbb{R}) \tag{7.1}$$

mit dem entsprechenden n-dimensionalen Analogon

$$(\mathcal{F}^*(h))(x) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\alpha\cdot x} h(\alpha)\, d\alpha \,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,,\ x = x_1, \ldots, x_n)$$

Durch die Substitution $\alpha \to -\alpha$ übertragen sich die in Kapitel 5 und 6 bewiesenen Abbildungseigenschaften von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{F}^*$. Diese werden jetzt nicht gesondert aufgeführt. Die Umkehreigenschaft $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = id$ wird in folgendem Satz festgehalten.

Satz 7.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \,. \tag{7.2}$$

Beweis: Mit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt nach Kapitel 6 (beachte $(u,v) = \int u\bar{v}\, dy$)

$$\begin{aligned}(f,g) = (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g(x)\, dx \Big)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{-i\alpha x} g(x)\, dx\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \Big) g(x)\, dx\end{aligned}$$

Hier wurde der Satz von Fubini benutzt. Daraus folgt

$$\Big(\Big[f - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(\cdot)} \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \Big], g \Big) = 0 \qquad \forall g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\,. \tag{7.3}$$

Aus (7.3) folgt die Gleichung (7.2) für fast alle $x \in \mathbb{R}$. (Dies ist eine typische „funktionalanalytische“ Beweismethode. Aus $(u,v) = 0$ für alle v aus einer dichten Teilmenge $M \subset L^2(\mathbb{R})$ folgt $u = 0$. Beweis: Wähle $v_m \in M$ mit $v_m \to u \Rightarrow (u,u) = \lim_{m\to\infty} (u, v_m) = 0 \Rightarrow u = 0$). □

Aus der Darstellung (7.2) folgt wie in Kapitel 5 die Stetigkeit von f. Daher gilt (7.2) nicht nur für fast alle x, sondern für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anwendungen

(i) Das Cauchy-Problem zur Wärmeleitungsgleichung

Gesucht ist eine Funktion $u : [0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u, u_t, u_{xx} \in C(]0, \infty[\times \mathbb{R})$, so daß die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in }]0, \infty[\times \mathbb{R} \tag{7.4}$$

erfüllt ist und die Anfangsbedingung

$$\lim_{t \to 0} u(t, \cdot) = u_0(\cdot) \in L^2 \cap L^1$$

gilt. Wir wollen mit Hilfe der Fourier-Transformation bezüglich des Argumentes x eine Lösungsdarstellung für u herleiten. Aus (7.4) folgt

$$\hat{u}_t(t, \alpha) + \alpha^2 \hat{u}(t, \alpha) = 0$$

und somit

$$\hat{u}(t, \alpha) = e^{-\alpha^2 t} \hat{u}(0, \alpha) = e^{-\alpha^2 t} \hat{u}_0(\alpha)\,.$$

Die Voraussetzung $u_{xx} \in L^1$ sichert, daß die durch $h(\alpha) = \alpha^2 \hat{u}(t, \alpha)$ definierte Funktion h in L^∞ liegt. Daraus folgt $\hat{u}(t, \cdot) \in L^1$, da dann für $|\alpha| \geq 1, |\hat{u}(t, \alpha)| \leq K|\alpha|^{-2}$. Damit ist Satz 7.1 anwendbar, und es gilt

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t - i\alpha x} \hat{u}_0(\alpha)\, d\alpha\,.$$

(ii) Berechnung von Integralen

Beispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & |x| \leq 1\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man berechnet leicht

$$\hat{f}(\alpha) = \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\right)^2$$

Aus dem Umkehrsatz folgert man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\Big)^2 e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \begin{cases} 1-|x|\,, & |x|\le 1\,,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $x = 0$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}\Big)^2\,d\alpha = 2\pi$$

Ausdehnung der Inversionsformel nach L^2

Wie im vorigen Kapitel erläutert, lassen sich die Abbildungen $\mathcal{F}^*, \mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2 \cap L^\infty$ durch Abschließung von $L^1 \cap L^2$ nach ganz L^2 fortsetzen. Die fortgesetzten Abbildungen werden ebenfalls mit $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ bezeichnet. Es erhebt sich die Frage, ob immer noch $\mathcal{F}^*\mathcal{F}$ = Identität in L^2 gilt. Dies ist so, es gilt

Satz 7.2 *Sei $u \in L^2$. Dann gilt für die durch Abschließung fortgesetzten Abbildungen $\mathcal{F}^*\mathcal{F}u = u$.*

Beweis: Wir approximieren u bezüglich der L^2-Norm durch Funktionen $u_m \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{u}_m \in L^1$. Hierzu benutzen wir, daß $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in L^2 liegt. Der Beweis dieser Dichtheitsaussage läuft wie üblich, d.h. erstens durch Abschneiden (d.h. Übergang von f zu $f\chi_R, \chi_R = 1$ auf $[-R, R]$, Null sonst), zweitens durch Faltung mit Mittelfunktionen. Da $u_m \in C_0^\infty$ folgt $\hat{u}_m \in L^1$ (auch in Dimensionen ≥ 1), da aus $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s u_m \in L^1$ folgt, daß $|\alpha|^s|\hat{u}_m(\alpha)| \le K$. Für u_m gilt

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F}u_m = u_m$$

nach Satz 7.1. Grenzübergang $m \to \infty$ bezüglich der L^2-Konvergenz ergibt die Behauptung. $\square$

8 Fourier-Transformation im Raum von Schwartz und temperierte Distributionen

Für viele Beweise oder Rechnungen ist es bequem zu wissen, daß die Fourier-Transformation den Funktionenraum $\mathcal{S}$ von Schwartz in sich selbst abbildet. Der Raum $\mathcal{S}$ besteht aus C^∞-Funktionen, die im Unendlichen mitsamt allen Ableitungen stärker als jedes reziproke Polynom gegen Null gehen.

Definition 8.1

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \big| \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ gilt } |x|^p |\nabla^q f(x)| \to 0 \text{ für } |x| \to \infty\}$$

Hierbei bedeutet $\nabla^q f$ den Vektor aller Ableitungen der Ordnung q.

Satz 8.1 *Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann folgt $\mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}^*(f) \in S$.*

Beweis: Die Voraussetzung $f \in \mathcal{S}$ impliziert $|f(x)| \le \frac{K}{|x|^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \ge 1$ und somit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ebenso ergibt sich, mit Multi-Index Schreibweise $[D^\beta = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\beta_j}$, $x^l = \prod_{j=1}^n x_j^{l_j}$ mit $\sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{j=1}^n l_j = 1]$

$$x^l D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

für alle Multi-Indizes β und l . Hieraus folgern wir

$$D^\gamma(x^l D^\alpha f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

für alle Multi-Indizes γ und α.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir

$$\hat{f}(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\alpha x} f(x)\, dx\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Satz 5.6 existieren alle Ableitungen $D^l \hat{f}$, da $x^l f \in L^1$. Da

$$(\hat{f})^{(l)}(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [(ix)^l f(x)] e^{i\alpha x}\, dx$$

und wiederholte partielle Integration

$$(\hat{f})^{(l)}(\alpha) = \frac{(-1)^m}{(i\alpha)^m} \int_{\mathbb{R}^n} D^m[(ix)^l f(x)] e^{i\alpha x}\, dx\, D^m = \prod_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_j})^{m_j} .$$

Die Randterme verschwinden, da $f \in \mathcal{S}$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$|\alpha^m \hat{f}^{(l)}(\alpha)| \leq \int |D^m(x^l f(x)] f'\, dx \leq K .$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Inklusion $x^s D^r f(x) \in L^1$ wie eingangs bewiesen. Durch ein Spiegelungsargument $f(x) \leftrightarrow f(-x)$ beweist man analog $\mathcal{F}^*(f) \in \mathcal{S}$. □

Die Fourier-Transformation ist von so großer Bedeutung, daß man auch denjenigen Funktionen, die nicht im Unendlichen abfallen, sondern z.B. wie Polynome wachsen, eine Fourier-Transformierte zuordnen möchte. Diese Objekte sind dann aber nicht notwendigerweise Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$, sondern „temperierte Distributionen“. Dieses wollen wir hier kurz erläutern.

Definition 8.2 *(Konvergenz in $\mathcal{S}$) Eine Funktionenfolge ($f_j \in \mathcal{S}$) konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{S}$, wenn für alle Multi-Indizes m und l $\quad x^l D^m f_j \to x^l D^m f$ gleichmäßig konvergiert. Man schreibt $f_j \to f$ in $\mathcal{S}$.*

Definition 8.3 *Eine temperierte Distribution ist eine bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{S}$ stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{C}$. Die Wirkung einer temperierten Distribution δ auf ein $f \in \mathcal{S}$ wird mit $\langle \delta, f \rangle$ bezeichnet, die Menge der temperierten Distributionen mit $\mathcal{S}'$.*

Beispiele:
(i) Das Dirac-Funktional δ_y, welches definiert ist durch

$$\langle \delta_y, f \rangle = f(y) , \qquad f \in \mathcal{S} .$$

(ii) Für einen beliebigen Multi-Index $m = (m_1, \dots, m_n)$ definiert man das Funktional $\delta_{m,y}$ durch

$$\langle \delta_{m,y}, f \rangle = (D^m f)(y) , \qquad f \in \mathcal{S} .$$

(iii) Integration über eine niederdimensionale Fläche:

$$\langle l_y, f \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, y)\, dx_1\, dx_2 , \qquad f \in \mathcal{S}$$

(iv) Natürliche Einbettung der L^1-Funktion in $\mathcal{S}'$: Für $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei l_g definiert durch

$$\langle l_g, f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} gf\,dx\,, \qquad f \in \mathcal{S}\,.$$

Definition 8.4 *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}(l)$ einer temperierten Distribution $l \in \mathcal{S}'$ ist dasjenige Element aus $\mathcal{S}'$, welches durch die Gleichung*

$$\langle \mathcal{F}(l), f\rangle = \langle l, \mathcal{F}f\rangle \qquad \forall f \in S$$

definiert wird. Man beachte, daß auch $\mathcal{F}^*$ den Raum $\mathcal{S}$ in sich abbildet. Ferner sind wegen der Inversionsformel $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^*$ Abbildungen von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$, so daß sich die in der Definition suggerierte Eindeutigkeit ergibt.

Ist l eine Distribution der Gestalt l_g aus Beispiel (iv) - man sagt, „l“ ist eine Funktion und identifiziert „$l = g$“ -, so ist

$$\langle \mathcal{F}(l_g), f\rangle = \int g\mathcal{F}f\,dx = \int \mathcal{F}(g)f\,dx\,.$$

Hieraus folgt

$$\mathcal{F}(l_g) = l_{\mathcal{F}(g)}\,,$$

d.h. daß die Erweiterung des Definitionsbereiches von $\mathcal{F}$ mit der Anfangsdefinition von $\mathcal{F}$ auf L^1 konsistent ist.

Beispiel: Sei $\delta = \delta_0$ das Dirac-Funktional mit $\langle \delta, f\rangle = f(0)$. Es gilt

$$\langle \mathcal{F}(\delta), f\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}f\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\alpha}f(x)\,dx\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\langle „1“, f(x)\rangle\,.$$

Hierbei ist „1“ diejenige Distribution, die durch die Funktion, welche identisch eins auf $\mathbb{R}^n$ ist, dargestellt wird. Man schreibt daher auch $\mathcal{F}(\delta) = 1$.

9 Weitere Sätze über Fourier-Transformation

Die Theorie der Fourier-Transformation ist ein riesiges Gebiet. Wir geben im Folgenden einige bekannte Sätze zur Fourier-Transformation ohne Beweise an.

Ganz elementar ist

Satz 9.1 *(Riemann-Lebesgue)* $f \in L^1(\mathbb{R}) \to \overset{1}{f}(a) \to 0\,,\ a \to \pm\infty.$

Interessant und nicht trivial sind die Sätze von Bochner und Riesz, die Kriterien geben, daß die Fourier-Transformierte einer L^1-Funktion nichtnegativ ist (dies wird für einen Darstellungssatz verwendet, auf den wir nicht eingehen wollen).

Definition 9.1 *Eine Funktion $f \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ heißt positiv definit, wenn*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\varphi(t)\bar{\varphi}(s)\,ds \geq 0\,. \tag{9.1}$$

(Dies ist im Wesentlichen äquivalent zu einer diskreten analogen Bedingung, s. Chandrasekharan, „Classical Fourier Transformation“, Teil III, Kap. 3). Beispiel: $g(t) = e^{-ct^2}$; der Beweis ergibt sich aus dem eben zitierten Werk, dem dortigen Lemma III.13.3, angewandt auf $f = 1$.

Beweis: Siehe im Wesentlichen Lemma III.13.4 aus Chandrasekhanan. Hier wurde eine vereinfachte Version mit der Zusatzvoraussetzung $\hat{f} \in L^1$ hingeschrieben. □

Geheimnisvoll auf den ersten und zweiten Blick ist ein Satz von Wiener, mit dessen Hilfe ein sogenannter verallgemeinerter Tauberscher Satz bewiesen wird. Zunächst erläutern wir den Satz von Wiener (s. Chandrasekhanan I.12).

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und S_f die Menge der endlichen Linearkombination von Translationen von f, d.h. $g \in S_f \Leftrightarrow$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k f(t+c_k)\,, \quad c_h \in \mathbb{R}\,, \quad a_h \in \mathbb{C}.$$

Es gilt $S_f \in L^1(\mathbb{R})$. Sei nun $\overline{S}_f$ die Abschließung von S_f in der L^1-Norm. Manchmal hat man das Glück, daß $S_f = L^1$. Dann wendet man den Satz von Wiener an:

Satz 9.2 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\overline{S}_f = L^1(\mathbb{R})$. Genau dann ist $\hat{f}(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Überraschenderweise läßt sich dieser Satz zum Beweis von sogenannten verallgemeinerten Tauberschen Sätzen verwenden, eine mögliche Version (nach Wiener) ist

Satz 9.3 *Sei* $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, $K_1 \in L^1(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} K_1\,dx = 1$, $\hat{K}_1(\alpha) \neq 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. *Es existiere* $\lim_{x\to\infty} (K * h)(x) := A$. *Dann ist* $\lim_{x\to\infty} (K * h)(x) = A$ *für alle* $K \in L^1(\mathbb{R})$ *mit* $\int K\,dx = 1$.

Zur Motivation lese man in dem zitierten Text von Chandrasekharan II.13 nach.

Fourier-Multiplier

Es sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, von der noch Zusatzvoraussetzungen verlangt werden. Wenn man Glück hat, ist für alle $g \in \mathcal{S}$ die Abbildung

$$Tg := F^{-1}\phi F g \tag{9.2}$$

erklärt und ein Element aus einem $L^p, 1 \subset p \subset \infty$. F ist hierbei die Fouriertransformation und F^{-1} die Inverse. Man nennt dann T einen „Fourier-Multiplier". (Dies ist nicht die allgemeine Definition, selbstverständlich läßt sich der Bildraum „aufweichen", indem man Distributionen im Bild zuläßt.)

Unter geeigneten, durch Anwendungen motivierte Bedingung an ϕ hat T sehr gute Abbildungseigenschaften und ist stetig bezüglich L^p-Normen und anderen Normen. Hierzu gibt es umfangreiche Literatur - Einstieg: Michli, „Multi-Dimensional Singular Integrals and Integral Equations" oder die Bücher von Stein. Wir geben hier einen Satz aus dem Buch von Michlin an:

Satz 9.4 *Sei* $\phi \in C^n(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *und*

$$|x|^k |D^k \phi| \leq M\,, \qquad 0 \leq k \leq m\,.$$

Dann ist der Fourier-Multiplier $T = F^{-1}\phi F$ *auf einer in* L^p *dichten Teilmenge definiert* ($1 \subset p \subset \infty$), *und es gilt*

$$\|Tu\|_{L^p} \leq K_{p,n} \|u\|_{L^\infty}\,.$$

Hierbei bedeutet $D^k\phi$ *den Vektor aller partiellen Ableitungen der Ordnung* k.

Zur Motivation: Man denkt an die Gleichung $-\Delta u = f \in L^p$ in $\mathbb{R}^n$. Man möchte $D_j^2 u$ abschätzen. Es gilt $\|D_j^2 u\|_{L^p} = \|F^{-1} \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} F f\|_p$, d.h. die Funktion ϕ ist in diesem Falle $\phi(\xi) = \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}$. Aus dem obigen Satz folgt dann

$$\|D_2^2 u\|_p \leq K_{n,p} \|f\|_p\,.$$

Diese Ungleichung - auch nach Calderson-Zygmund benannt - ist ein wirklicher Dauerbrenner in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.