1 Das Lebesguesche Maß beschränkter Punktmengen

Zu Beginn der Integrationstheorie haben wir den Riemannschen Inhalt oder das Riemannsche Maß beschränkter Punktmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert.
(Eine Menge heißt Riemann-meßbar, wenn ihr äußeres Riemann-Maß mit dem inneren Riemann-Maß übereinstimmt.) Es zeigt sich jedoch, daß für viele Fragen der Analysis der Begriff des Riemann-Maßes nicht allgemein genug ist, d.h. es gibt Mengen, denen man gerne einen n-dimensionalen Inhalt zuordnen würde, die jedoch nicht Riemann-meßbar sind. Z.B. gibt es beschränkte offene Mengen des $\mathbb{R}^n$, die nicht Riemann-meßbar sind. Es ist jedoch möglich, mit Hilfe eines allgemeineren Maßbegriffs - nämlich mit Hilfe des sogenannten Lebesgueschen Maßes - auch diesen Mengen einen n-dimensionalen Inhalt zuzuordnen.

Mit Hilfe dieses zu entwickelnden Maßbegriffs wird es außerdem möglich sein, den Begriff des Riemannschen Integrals zu dem des Lebesgueschen Integrals zu erweitern. Die Notwendigkeit dieser Erweiterung ergibt sich aus folgendem Sachverhalt:

Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die etwa ein n-dimensionales Intervall I nach $\mathbb{R}$ abbilden, und gilt, daß

$$\int_I |f_i - f_k|^2 \, dx \to 0$$

für $i, k \to \infty$ - man sagt hierzu, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Quadratmittel bildet - so ist es im allgemeinen nicht richtig, daß eine Riemann-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_I |f - f_k|^2 \, dx \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

obwohl dies, wie man in den fortgeschritteneren Disziplinen der Analysis lernt, sehr erwünscht ist. Der Anfänger möge sich jedoch daran erinnern, daß Zahlenfolgen eine solche Eigenschaft besitzen: Aus

$$|a_i - a_k| \to 0 \quad \text{für} \quad i, k \to \infty, \quad a_k, a_i \in \mathbb{R}$$

folgt die Existenz einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $|a_i - a| \to 0 \quad (i \to \infty)$.

Es zeigt sich nun, daß das später einzuführende Integral (welches mit Hilfe des Lebesgueschen Maßes definiert wird), die obige Eigenschaft besitzt, d. h. ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_I |f_i - f_k|^2 \, dx \to 0 \quad (i, k \to \infty),$$

wobei $\int\limits_I$ hier das zu definierende Lebesguesche Integral bedeutet, so kann in der Tat gezeigt werden, daß eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\int\limits_I |f - f_k|^2 \, dx \to 0 \quad (k \to \infty),$$

wobei das Integral $\int\limits_I$ wieder im Sinne von Lebesgue zu verstehen ist.

Aus diesen und vielen anderen Gründen ist es notwendig, den Begriff des Lebesgueschen Maßes und des Lebesgueschen Integrals einzuführen. Leider ist die Konstruktion einer offenen, nicht im Riemannschen Sinne meßbaren offenen Menge kompliziert, so daß wir hierauf verzichten und direkt zur Definition des Lebesgueschen Maßes einer beschränkten offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ schreiten.

Das Lebesguesche Maß einer offenen Menge

Wir vereinbaren folgende Notation: Gilt für zwei Mengen A und B, daß alle Elemente von A auch Elemente von B sind, so schreiben wir $A \subset B$. In manchen Büchern findet man für denselben Sachverhalt auch oft die Schreibweise $A \subseteq B$.

Definition 1.1 *Als Lebesgue-Maß eines offenen (abgeschlossenen) Intervalls $I \subset \mathbb{R}^n$*

$$I = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n | \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i, \, i = 1, \ldots, n\}$$

definieren wir die Zahl

$$\mu(I) := \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \, .$$

(Im Gegensatz zum Riemannschen Inhalt $|\Omega|$ einer Menge Ω bezeichnen wir ihren Lebesgueschen Inhalt mit $\mu(\Omega)$. Für Intervalle I ist offenbar $\mu(I) = |I|$.)

Um das Lebesguesche Maß einer beschränkten, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zu definieren, zeigen wir im folgenden Satz, daß Ω die Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Intervallen $I_i, i \in \mathbb{N}$ ist, die keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Als Lebesgue-Maß von Ω wird dann die (konvergente) Summe $\mu(\Omega) = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ definiert. In einem weiteren Satz wird gezeigt, daß $\mu(\Omega)$ unabhängig von der Wahl der I_i ist.

Satz 1.1 *Jede nichtleere offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen n-dimensionalen Würfeln, die paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte haben und deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.*

Beweis: Die Punktmenge $\mathbb{R}^n_h$, die wir als „Gitter“ bezeichnen wollen, bestehe aus allen Punkten x des $\mathbb{R}^n$ der Gestalt $x = (m_1 h, \dots, m_n h)$ mit $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathfrak{Q}_h$ die Menge aller abgeschlossenen Würfel mit Kantenlänge h, deren Ecken die Punkte aus $\mathbb{R}^n_h$ sind.

Wir betrachten die konzentrischen Gitter

$$\mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^n_{\frac{1}{4}}, \dots \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2^m}}$$

und die zugehörigen Mengen

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}, \mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}, \dots \mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^m}}$$

von konzentrischen Würfeln.

Alle n-dimensionalen Würfel aus $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}$ usw. sind abgeschlossen, haben achsenparallele Seiten und je zwei Würfel aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^m}}, m$ fest, haben keine gemeinsamen inneren Punkte. Jeder Würfel aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^k}}$ enthält 2^k Würfel aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^{k+1}}}$ und hat die Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Schließlich ist die Menge aller Würfel aus allen $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^m}}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ abzählbar.

Es sei Ω eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir werden Ω als Vereinigungsmenge von Würfeln aus den $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^m}}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ darstellen.

Ist P ein beliebiger Punkt von Ω, so läßt sich eine Folge ineinandergeschachtelter Würfel des ersten, zweiten, dritten, ... Gitters angeben, die P enthalten. Diese Würfel seien $W^{(1)} \supset W^{(2)} \supset W^{(3)} \supset \dots$. Da P ein innerer Punkt von Ω ist, die Seitenlängen der $W^{(m)}$ aber für $m \to \infty$ gegen Null gehen, sind von einem gewissen Index an alle Würfel $W^{(m)}$ in Ω enthalten. Also existieren Würfel der oben konstruierten Folge, die in Ω enthalten sind.

Es sei nun T_1 die Menge aller Würfel von $\mathfrak{Q}_1$, die in Ω enthalten sind, T_2 die Menge aller Würfel aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}$, die in Ω, aber in keinem der Würfel aus T_1 enthalten sind, T_3 die Menge aller Würfel aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{4}}$, die in Ω, aber in keinem der Würfel von T_1 und T_2 enthalten sind usw. Entsprechend wird durch Induktion die Menge T_i von Würfeln aus $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2^{i-1}}}$ definiert. Wir setzen $T = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} T_i$ und behaupten, daß T eine Menge von n-dimensionalen Würfeln ist, deren Vereinigungsmenge Ω ist und welche die anderen gewünschten Eigenschaften hat. Aus der Konstruktion folgt, daß die Würfel aus T_i keine gemeinsamen inneren Punkte haben und daß gilt:

$$\Omega \supset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{W \in T_i} W \,.$$

Es bleibt $\Omega \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{W\in T_i} W$ zu zeigen. Dies ist ebenfalls klar, denn ist $P \in \Omega$, so existieren, wie schon gezeigt, Würfel aus T_i, in denen P enthalten ist, wenn i genügend groß ist. Es sei i_0 der kleinste Index mit dieser Eigenschaft. Der Würfel W aus T_{i_0} mit $P \in W$ liegt dann in T, denn W liegt in keinem T_k mit $k < i_0$ denn dann wäre i_0 nicht der kleinste Index, für den es einen Würfel W aus T_{i_0} mit $W \ni P$ gibt. Der Satz ist bewiesen, wenn man noch beachtet, daß die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist.

□

Satz 1.2 *Es seien A, B beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $A \subset B$, jede von ihnen sei als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener n-dimensionaler Würfel W_i bzw. Q_i darstellbar:*

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i\,, \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$$

Dabei sollen je zwei W_i bzw. Q_i keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)\,.$$

Beweis: Man beachte zunächst, daß wegen der Beschränktheit von B die Partialsummen von $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$ beschränkt sind. Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$. Dasselbe gilt für $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$. Angenommen, die Aussage des Satzes wäre falsch; dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)\,,$$

und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(W_i) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)\,.$$

Wir wählen nun offene Würfel $\tilde{Q}_j$ mit $\tilde{Q}_j \supset Q_j$ und $\mu(\tilde{Q}_j) < \mu(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$, $\varepsilon > 0$ ist vorgegeben. Dann bildet das System $\{\tilde{Q}_j | j \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von A, insbesondere auch von $\bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$. Die Menge $\bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$ ist jedoch kompakt, daher reichen endlich viele $\tilde{Q}_j$, $j = 1, \ldots k_0$ zur Überdeckung von $\bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$ aus, d. h. es gilt $\bigcup\limits_{j=1}^{k_0} \tilde{Q}_j \supset \bigcup\limits_{i=1}^{N} W_i$. Da die W_i keine gemeinsamen inneren Punkte haben, folgt

$$\sum_{j=1}^{k_0} \mu(\tilde{Q}_j) \geq \sum_{i=1}^{N} \mu(W_i)$$

Dies ist ebenfalls beweisbedürftig, aber anschaulich evident, so daß wir auf einen Beweis verzichten. Aus der letzten Ungleichung folgt

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(W_i) < \sum_{j=1}^{k_0} (\mu(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) + \varepsilon$$

Mit $\varepsilon \to 0$ ergibt sich der Widerspruch

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(W_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)\,.$$

□

Folgerung zu Satz 1.2: Gilt in Satz 1.2 die Gleichheit $A = B$, so folgt $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(W_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$. Dies bedeutet, daß die Zahl $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$ unabhängig von der Wahl der Würfel W_i ist, so fern sie nur keine gemeinsamen inneren Punkte haben und $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i$ gilt.

Definition 1.2 *Ist A insbesondere offen und beschränkt, so gibt es auch eine Zerlegung $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i$ mit dieser Eigenschaft, und wir definieren $\mu(A) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(W_i)$ als das Lebesguesche Maß der Menge A.*

Um das Maß allgemeinerer Mengen zu definieren, schreiten wir zunächst zur Definition des Lebesgueschen Maßes beschränkter abgeschlossener Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$. Hierzu wird die abgeschlossene Menge M in einen offenen Quader Q eingeschlossen. Die Menge $Q - M$ ist dann offen, und es ist anschaulich einleuchtend, daß man die Zahl $\mu(Q) - \mu(Q - M)$ als Lebesguesches Maß $\mu(M)$ definiert. Damit können wir nun das innere und äußere Lebesguemaß einer beschränkten Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren. Wir setzen

$$\mu^*(M) = \inf\{\mu(O)|\, O \subset \mathbb{R}^n, \quad O \,\text{ist offen}\,,\, O \supset M\}$$
$$\mu_*(M) = \sup\{\mu(A)|\, A \subset \mathbb{R}^n, \quad A \,\text{ist abgeschlossen}\,,\, A \subset M\}\,.$$

Definition 1.3 *Die beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-meßbar, wenn das innere und das äußere Lebesgue-Maß von M übereinstimmen. Wir bezeichnen dann $\mu(M) = \mu_*(M) = \mu^*(M)$ als das Lebesguesche Maß (oder Lebesgue-Maß) von M.*

Man kann sich überlegen, daß für offene beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ die Beziehung $\mu^*(M) = \mu_*(M)$ und $\mu^*(M) = \mu(M)$ gilt, wobei $\mu(M)$ im Sinne der Definition 1.2 zu verstehen ist. Beschränkte offene Mengen M sind also Lebesgue-meßbar und ihr Maß ist die Zahl $\mu(M)$ im Sinne der Definition 1.3 und es gilt $\mu(M) = \mu^*(M) = \mu_*(M)$. Eine entsprechende Überlegung gilt für abgeschlossene Mengen.

Wir beweisen die Behauptung für eine offene Menge M. Dazu betrachten wir eine Zerlegung der Menge M durch disjunkte offene Würfel W_i, die die Eigenschaft haben, daß

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N} W_i) \ \to \ \mu(M) \qquad (N \to \infty)\,.$$

Da $\mu(\bigcup_{i=1}^{N} W_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{N} \bar{W}_i)$ und $\bigcup_{i=1}^{N} \bar{W}_i$ abgeschlossen ist, folgt $\mu(M) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{N} \bar{W}_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{N_0} \bar{W}_i) + \varepsilon \leq \sup\{\mu(A) | A \subset M$ abgeschlossen und beschränkt $\} + \varepsilon = \mu_*(M) + \varepsilon \overset{\spadesuit}{\leq} \mu^*(M) + \varepsilon = \mu(M) + \varepsilon$. Hierbei ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, N_0 hängt von ε ab. Die Beziehung $\mu^*(M) = \mu(M)$ ist klar, da M offen ist. Wir erhalten also

$$\mu(M) \leq \mu_*(M) + \varepsilon \leq \mu(M) + \varepsilon$$

und nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$\mu(M) \leq \mu_*(M) \leq \mu(M)\,, \quad \text{also}$$

$$\mu(M) = \mu_*(M)\,.$$

Bemerkung: Die mit $\spadesuit$ gekennzeichnete Abschätzung stellt einen Vorgriff auf Satz 2.1 dar. Im Falle offener Mengen ist sie aber recht einfach zu beweisen:

> Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset M$ kompakt und $\varepsilon > 0$.
> Zerlege die Menge M nach Satz 1.1 in $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, wobei W_i offene Würfel. Wähle etwas größere Würfel $\tilde{W}_i$, so daß $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{W}_i) = \mu(M) + \varepsilon$. Nach dem Satz von Heine-Borel existiert

ein $N > 0$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{W}_i$. Sei nun $W \subset \mathbb{R}^n$ ein sehr großer Würfel, so daß $A \subset M \subset W$. Es folgt

$$\mu(A) = \mu(W) - \mu(W - A)$$
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{W}_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{N} \bar{\tilde{W}}_i) = \mu(W) - \mu(W - \bigcup_{i=1}^{N} \bar{\tilde{W}}_i)$$

Da $(W - \bigcup_{i=1}^{N} \bar{\tilde{W}}_i) \subset (W - A)$ und beide Mengen offen, folgt nach Satz 1.1 $\mu(W - \bigcup_{i=1}^{N} \bar{\tilde{W}}_i) \leq \mu(W - A)$. Somit folgt schließlich

$$\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{W}_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{W}_i) = \mu(M) + \varepsilon$$

Die Behauptung $\mu_*(M) \leq \mu(M)$ folgt dann nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und Bilden des Supremums über aller kompakten Teilmengen $A \subset M$.

Weitere Beispiele Lebesgue-meßbarer Mengen:

Neben den beschränkten offenen und beschränkten abgeschlossenen Mengen sind die Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die höchstens abzählbar unendlich viele Elemente haben, ebenfalls meßbar und besitzen das Lebesguesche Maß Null. Wegen der Ungleichung $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ (Übungsaufgabe!) genügt es zu zeigen, daß das äußere Maß der Menge A, die abzählbar unendlich viele Elemente besitzen soll, gleich Null ist. Hierzu sei $A = \{P_i \in \mathbb{R}^n | \, i = 1, 2, \ldots\}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Wir bilden offene Würfel W_i mit Mittelpunkt P_i und Seitenlänge $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Es gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \supset A$ und $\mu^*(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$, denn $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ ist offen. Wir lassen ε gegen Null gehen und erhalten $\mu^*(A) = 0$.

Ähnlich beweist man, daß sich das Lebesguesche Maß von Mengen nicht ändert, wenn man die Menge durch Hinzufügen oder Wegnehmen von abzählbar unendlich vielen Punkten abändert.

Es gibt Beispiele von Mengen mit überabzählbar vielen Punkten, die das Maß Null haben.

Bei den Beispielen werden Eigenschaften meßbarer Mengen benutzt, die wir im nächsten Kapitel beweisen werden.

2 Eigenschaften meßbarer Mengen und ihres Lebesgue-Maßes

Ohne Beweise notieren wir die folgenden Sätze.

Satz 2.1 *Für jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mu_*(M) \le \mu^*(M)\,.$$

Satz 2.2 *Es seien A, B beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $A \subset B$.*

Dann gilt

$$\mu_*(A) \le \mu_*(B)\,, \qquad \mu^*(A) \le \mu^*(B)\,.$$

Satz 2.3 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und darstellbar als Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Dann gilt*

$$(a) \qquad \mu^*(M) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i).$$

Die unendliche Reihe wird hierbei als konvergent vorausgesetzt. Sind die M_i paarweise disjunkt, so gilt weiterhin

$$(b) \qquad \mu_*(M) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(M_i).$$

Beweis: (a) Mit Hilfe der Zerlegung offener Mengen durch abzählbar viele abgeschlossene Würfel und Satz 1.2 macht man sich klar, daß

$$\mu(O) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(O_i)\,,$$

wenn $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ abzählbare Vereinigung beschränkter offener Mengen $O_i \subset \mathbb{R}^n$.
Sei $\varepsilon > O$. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es zu jedem M_i eine offene Menge $O_i \supset M_i$ mit $\mu(O_i) \le \mu^*(M_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Es gilt $M \subset O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, und daher

$$\mu^*(M) \le \mu(O) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(O_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Der Beweis zu (b) erfolgt mit ähnlichen Methoden. □

Satz 2.4 *Es sei M eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und $W \supset M$ ein offener Würfel des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mu^*(M) + \mu_*(W - M) = \mu(W)\,.$$

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge A mit $A \subset W - M$, $\mu(A) > \mu_*(W - M) - \varepsilon$. Die Menge $G = W - A$ ist offen und beschränkt und enthält M. Daraus folgt

$$\mu^*(M) \leq \mu(G) = \mu(W) - \mu(A) < \mu(W) - \mu_*(W - M) + \varepsilon\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt

$$\mu^*(M) + \mu_*(W - M) \leq \mu(W)\,.$$

Wir beweisen nun die umgekehrte Ungleichung

$$\mu^*(M) + \mu_*(W - M) \geq \mu(W)\,.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene beschränkte Menge $G \supset M$, $G \subset W$ mit $\mu(G) < \mu^*(M) + \varepsilon$.
Die Menge $F = \bar{W} - G$ ist abgeschlossen und es gilt

$$F = \bar{W} - G \subset \bar{W} - M\,.$$

Daraus folgt

$$\mu_*(\bar{W} - M) \geq \mu(F) = \mu(\bar{W} - G) = \mu(\bar{W}) - \mu(G)\,,$$

wie man sich mit Hilfe der Definition des Maßes offener und abgeschlossener Mengen überlegt.
Es ergibt sich

$$\mu_*(\bar{W} - M) \geq \mu(\bar{W}) - \mu^*(M) - \varepsilon$$

und nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$\mu_*(\bar{W} - M) + \mu^*(M) \geq \mu(\bar{W}) = \mu(W)\,.$$

Aus

$$\begin{aligned}\mu_*(\bar{W} - M) &= \mu(Q) - \mu^*(Q - \bar{W} - M) \overset{(*)}{=} \mu(Q) - \mu^*(Q - W - M) = \\ &= \mu_*(W - M)\end{aligned}$$

folgt die gewünschte Ungleichung. □

Bemerkung und Folgerung: $(*)$ ist hierbei nicht trivial. (Q ist hierbei ein offener Würfel, der $\bar{W}$ enthält.) Man küberlegt sich recht einfach, daß M und $W - M$ entwdeder beide meßbar oder beide nicht meßbar sind. Ersetzt man nämlich in Satz 2.4 M durch $W - M$, so folgt

$$\mu^*(W - M) + \mu_*(M) = \mu(W) = \mu^*(M) + \mu_*(W - M)\,.$$

Ist nun M meßbar, so folgt $\mu^*(M) = \mu_*(M)$ und $\mu^*(W - M) = \mu_*(W - M)$. Ist hingegen M nicht meßbar, d. h. $\mu^*(M) \neq \mu_*(M)$, so folgt $\mu^*(W - M) \neq \mu_*(W - M)$.

Satz 2.5 *Die Mengen $M_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, seien meßbar und paarweise disjunkt. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ sei beschränkt. Dann ist $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ meßbar, und es gilt $\mu(M) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(M_i)$.*

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(M_i) \overset{\text{Satz (2.3b)}}{\leq} \mu_*(M) \overset{\text{Satz (2.1)}}{\leq} \mu^*(M) \overset{\text{Satz (2.3a)}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i)\,.$$

Daraus folgt $\mu_*(M) = \mu^*(M)$, also die Meßbarkeit von M sowie die behauptete Gleichung.

□

Diese Eigenschaft des Maßes bezeichnet man als vollständige Additivität oder σ-Additivität.

Satz 2.6 *Die Vereinigung $\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i$ endlich vieler meßbarer Mengen M_i ist meßbar, und es gilt $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{N} \mu(M_i)$.*

Beweis: Sei $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i$, $M_i \subset \mathbb{R}$ meßbar. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt abgeschlossene Mengen $A_i \subset M_i$ und offene Mengen $O_i \supset M_i$ mit

$$\mu_*(M_i) \leq \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{N}, \qquad \mu^*(M_i) \geq \mu(O_i) - \frac{\varepsilon}{N}\,.$$

Daraus folgt wegen $\mu^*(M_i) = \mu_*(M_i)$

$$\mu(O_i) - \mu(A_i) \leq \frac{2\varepsilon}{N}\,.$$

Man setze $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, $O = \bigcup_{i=1}^{N} O_i$. Es gilt

$$\mu(A) \le \mu_*(M) \le \mu^*(M) \le \mu(O) .$$

Andererseits ist wegen Satz 2.5

$$\mu(A_k) + \mu(O_k - A_k) = \mu(O_k), \quad \text{also} \quad \mu(O_k - A_k) \le \frac{2\varepsilon}{N} .$$

Es ist $O - A \in \bigcup_{k=1}^{N} (O_k - A_k)$. Für offene Mengen Z_j wurde schon gezeigt, daß $\mu(\bigcup_{j=1}^{J} Z_j) \le \sum_{j=1}^{J} \mu(Z_j)$ gilt. Daraus folgt

$$\mu(O - A) \le \sum_{k=1}^{N} \mu(O_k - A_k) \le N \frac{2\varepsilon}{N} = 2\varepsilon .$$

Aus Satz 2.5 folgt wieder $\mu(O - A) = \mu(O) - \mu(A)$, d. h. es gilt $\mu(O) - \mu(A) \le 2\varepsilon$. Da $\mu^*(M) - \mu_*(M) \le \mu(O) - \mu(A)$, folgt $\mu^*(M) - \mu_*(M) \le 2\varepsilon$ und Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt $\mu^*(M) = \mu_*(M)$, also die Meßbarkeit von M. Schließlich gilt

$$\mu(M) = \mu^*(M) \le \mu(O) \le \sum_{i=1}^{N} \mu(O_i) \le \sum_{i=1}^{N} (\mu^*(M_i) + \frac{\varepsilon}{N}) = \sum_{i=1}^{N} \mu^*(M_i) + \varepsilon ,$$

woraus $\mu(M) \le \sum_{i=1}^{N} \mu(M_i)$ folgt. Die oben verwendete Eigenschaft $\mu(O) \le \sum_{i=1}^{N} \mu(O_i)$ beweist man wiederum durch Ausschöpfung der offenen Mengen O und O_i durch Würfel (siehe Satz 1.2). □

Satz 2.7 *Der Durchschnitt endlich vieler meßbarer Mengen ist meßbar.*

Beweis: Der Beweis wird im Fall beschränkter Mengen durch Komplement-Bildung auf Satz 2.6 zurückgeführt (Übungsaufgabe). □

Satz 2.8 *Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann ist auch $M_1 \ominus M_2 := M_1 - M_1 \cap M_2$ meßbar.*

Beweis: Es sei W ein offener Würfel mit $M_1, M_2 \subset W$. Dann gilt

$$M_1 \ominus M_2 = M_1 \cap (W - M_2)$$

und der Beweis ist auf Satz 2.7 zurückgeführt. □

Satz 2.9 *Die Vereinigung* $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ *abzählbar vieler, meßbarer Mengen* $M_i \subset \mathbb{R}^n$ *ist meßbar, sofern* M *beschränkt ist.*

Beweis: Wir setzen $A_1 = M_1$, $A_2 = M_2 - M_1 \cap M_2$,
$A_3 = M_3 - M_3 \cap (M_1 \cup M_2)$, $A_4 = M_4 - M_4 \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$,
$A_k = M_k - M_k \cap (M_1 \cup M_2 \cup \ldots M_{k-1})$.
Die Mengen A_k sind disjunkt, und es gilt $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
Da die Mengen A_k aufgrund der vorangegangenen Sätze meßbar sind, folgt die Aussage des Satzes aus Satz 2.5. □

Satz 2.10 *Der Durchschnitt* $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ *abzählbar vieler meßbarer Mengen* $M_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, *ist meßbar.*

Beweis: Es sei W ein Würfel mit $W \supset M$. Es gilt $W - M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W - M_i)$, und der Beweis ist auf die Sätze 2.4 und 2.9 zurückgeführt. □

Satz 2.11 *Die Mengen* $M_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, *seien meßbar, und es gelte* $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \ldots$. *Die Vereinigungsmenge* $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ *sei beschränkt. Dann ist* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(M_i)$.

Beweis: Man kann die Menge $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ in der Form $M = M_1 \cup (M_2 - M_1) \cup (M_3 - M_2) \cup \ldots$ darstellen, wobei die einzelnen Glieder $M_k - M_{k-1}$ paarweise disjunkt sind. Daraus folgt

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_{k+1} - M_k) =$$
$$= \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [\mu(M_{k+1} - \mu(M_k)]\,.$$

Daraus folgt

$$\mu(M) = \lim_{N \to \infty} \left\{ \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{N-1} [\mu(M_{k+1}) - \mu(M_k)] \right\} = \lim_{N \to \infty} \mu(M_N)\,.$$

□

Satz 2.12 *Die Mengen $M_i \subset \mathbb{R}^n$ seien meßbar, und es gelte $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$. Dann gilt* $\mu(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i) = \lim\limits_{N\to\infty} \mu(M_N)$.

Beweis analog zu Satz 2.12.

Man bezeichnet die Aussagen in den letzten beiden Sätzen zuweilen auch als σ-Stetigkeit des Lebesguemaßes (bzgl. $\bigcup$ und $\bigcap$).

3 Meßbare Funktionen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $F : M \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Menge $M(f > a)$ durch

$$M(f > a) := \{x \in M | f(x) > a\}.$$

Analog werden die Mengen $M(f \geq a)$, $M(f < a)$, etc. definiert.

Definition 3.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $M(f > a)$ meßbar ist.*

Beispiel:
(a) Es sei $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist F meßbar. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist nämlich die Menge $M(F > a)$ beschränkt und offen und daher meßbar.
(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. f sei konstant auf den Intervallen $[x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, N$, $\quad 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = 1$. Dann ist f meßbar.

Wir wollen u.a. beweisen, daß Summe und Produkt meßbarer Funktionen wieder meßbar sind. Hierzu einige Vorbereitungen.

Lemma 3.1 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : M \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind dann die Mengen $M(f \geq a)$, $M(f = a)$, $M(f \leq a)$, $M(f < a)$ meßbar.*

Beweis: Es gilt $M(f \geq a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} M(f > a - \frac{1}{i})$.
$M(f > a - \frac{1}{i})$ ist meßbar, daher auch der Schnitt über alle $M(f > a - \frac{1}{i})$. Die Meßbarkeit von $M(f \leq a)$ folgt aus $M(f \leq a) = M - M(f > a)$, die Meßbarkeit von $M(f = a)$ und $M(f < a)$ durch ähnlich einfache Überlegungen. □

Satz 3.1 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar sowie $b \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die folgenden Funktionen meßbar :*
(1) $f + b$,
(2) bf,
(3) $|f|$,
(4) f^2 *und*
(5) $1/f$ *im Falle von* $(f(x) \neq 0,\ x \in M)$.

Beweis: Die Meßbarkeit von $f+b$ folgt aus $M(f+b>a)=M(f>a-b)$.
Die Meßbarkeit von $M(bf>a)$ folgt aus

$$M(bf>a)=\left\{\begin{array}{lll} M(f>\frac{a}{b} & \text{für} & b>0 \\ M(f<\frac{a}{b} & \text{für} & b<0 \end{array}\right\} \quad \text{unter Benutzung von Lemma 3.1}$$

Die Meßbarkeit von $M(f^2>a)$ folgt aus

$$M(f^2>a)=\left\{\begin{array}{lll} M & \text{für} & a<0 \\ M(f>\sqrt{a})\cup M(f<-\sqrt{a}) & \text{für} & a\geq 0 \end{array}\right\}.$$

Die Fälle (3) und (5) werden ähnlich behandelt. □

Lemma 3.2 *Es sei $M\subset\mathbb{R}^n$ meßbar und $f,g:M\to\mathbb{R}$ meßbar. Dann ist die Menge $M(f>g)=\{x\in M|f(x)>g(x)\}$ meßbar.*

Beweis: Es gilt

$$M(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(M(f>r_k)\cap M(g<r_k)\right),$$

wobei die r_k alle rationalen Zahlen durchlaufen. Da die Mengen $M(f>r_k)$und $M(g<r_k)$ meßbar sind, gilt dies dann auch für $M(f>g)$. □

Satz 3.2 *Es sei $M\subset\mathbb{R}^n$ meßbar und $f,g:M\to\mathbb{R}$ meßbar. Dann sind $f+g$ und fg meßbar; ebenso $\frac{f}{g}$, falls $g(x)\neq 0$ für alle $x\in M$.*

Beweis: Aus Satz 3.1 folgt, daß für $a\in\mathbb{R}$ die Funktion $(-g+a)$ eine meßbare Funktion ist. Aus Lemma 3.2 folgt die Meßbarkeit von

$$M(f>-g+a)=M(f+g>a)$$

und damit die Meßbarkeit von $f+g$.
Die Meßbarkeit von fg folgt aus der Darstellung

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$$

und den bisherigen Ergebnissen über die Meßbarkeit von Funktionen. Ähnlich einfach weist man die Meßbarkeit von $\frac{f}{g}$ nach. □

4 Folgen meßbarer Funktionen

Satz 4.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, meßbar . Es existiere eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_i(x) \to f(x) \qquad (i \to \infty) \qquad \textit{für alle}\, x \in M\,.$$

Dann ist $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar .

Man beachte, daß der Satz nicht richtig ist, wenn man „meßbar " durch „stetig" ersetzt.

Beweis von Satz 4.1: Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir bilden die Mengen $A_m^{(k)} := M(f_k > a + \frac{1}{m})$, $B_m^{(N)} := \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} A_m^{(k)}$, welche meßbar sind. Zum Beweis genügt es daher, zu zeigen, daß gilt:

$$M(f > a) = \bigcup_{N,m=1}^{\infty} B_m^{(N)}\,.$$

(i) Es sei $x_0 \in M(f > a)$. Dann ist $f(x_0) > a$, und es gibt eine natürliche Zahl m mit $f(x_0) > a + \frac{1}{m}$, und wegen der Konvergenz $f_i(x_0) \to f(x_0)$ gibt es ein N, so daß für $k \geq N$ gilt:

$$f_k(x_0) > a + \tfrac{1}{m}\,.$$

Daraus folgt $x_0 \in A_m^{(k)}$ für $k \geq N$, und $x_0 \in B_m^{(N)} \subset \bigcup\limits_{N,m=1}^{\infty} B_m^{(N)}$. Somit haben wir gezeigt: $M(f > a) \subset \bigcup\limits_{N,m=1}^{\infty} B_m^{(N)}$.

(ii) Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, sei nun $x_0 \in \bigcup\limits_{N,m=1}^{\infty} B_m^{(N)}$. Dann existieren ein N und ein m mit $x_0 \in B_m^{(N)}$. Für $k \geq N$ ist also $x_0 \in A_m^{(k)}$ oder $f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}$, $k \geq N$. Grenzübergang $k \to \infty$ ergibt

$$f(x_0) \geq a + \tfrac{1}{m} > a$$

und

$$x_0 \in M(f > a)\,.$$

Der Satz ist damit bewiesen. $\square$

Man überlegt sich mit der angegebenen Beweismethode noch leicht das folgende Korollar:

Korollar 4.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_i : M \to \mathbb{R}$ meßbar sowie $f : M \to \mathbb{R}$. Es existiere eine Menge E mit $\mu(E) = 0$, so daß*

$$f_i(x) \to f(x) \qquad (i \to \infty) \qquad \text{für alle}\, x \in M - E\,.$$

Dann ist f meßbar .

Neben der punktweisen Konvergenz von Funktionen spielt der Begriff der Maßkonvergenz von Funktionen eine große Rolle:

Definition 4.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_1, f_2, \dots$, sowie $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar. Für jedes $\sigma > 0$ gelte*

$$\mu(M(|f_i - f| \geq \sigma)) \to 0 \qquad (i \to \infty)\,.$$

Dann sagt man, die Funktionenfolge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiere (in M) dem Maß nach gegen f und schreibt

$$f_i \Rightarrow f \qquad (i \to \infty)\,.$$

Satz 4.2 *(Satz von Lebesgue zur Maßkonvergenz): Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt und $f_i : M \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots$, meßbar sowie $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben. Es existiere eine Menge $E \subset M$ mit $\mu(E) = 0$, so daß*

$$f_i(x) \to f(x) \qquad (i \to \infty) \quad \text{für alle}\, x \in M - E\,.$$

Dann gilt $f_i \Rightarrow f \qquad (i \to \infty)$.

Man kann dies auch so ausdrücken: „Punktweise Konvergenz fast überall impliziert. Maßkonvergenz.“ Hierbei ist „fast überall“ gleichbedeutend mit „überall mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null“.

Beweis: Nach dem Korollar zu Satz 4.1 ist f meßbar .
Es sei $M_k(\sigma) = M(|f_k - f| \geq \sigma)$, $R_N(\sigma) = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} M_k(\sigma)$, $R = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R_i(\sigma)$.
Es gilt $R_1(\sigma =\supset R_2(\sigma) \supset R_3(\sigma) \supset \dots$, und daher $\mu(R_i(\sigma)) \to \mu(R) \qquad (i \to \infty)$.
Wir zeigen, daß $R \subset E$ gilt. Für $x_0 \notin E$ gilt nämlich $f_k(x_0) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$. Daher gibt es ein N mit

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma, \qquad k \geq N\,.$$

Dies bedeutet $x_0 \notin M_k(\sigma)$ für $k \geq N$ und $x_0 \notin \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} M_k(\sigma) = R_N(\sigma)$, daher also $x_0 \notin R$.
Aus $x_0 \notin E$ folgt also $x_0 \notin R$. Daraus folgt $R \subset E$ und $\mu(R_i(\sigma)) \to \mu(R) = 0 \quad (i \to \infty)$.

Die Aussage $\mu(R_i(\sigma)) \to 0$ bedeutet aber gerade die Maßkonvergenz $f_i \Rightarrow f \quad (i \to \infty)$.
$\square$

Bemerkung: Wir haben Meßbarkeit nur für beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert. Im Fall unbeschränkter Mengen ist obiger Satz nicht richtig, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$M := [0, \infty) \subset \mathbb{R}^n.$$
$$f_i(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; x \in [i, \infty) \\ 0 & ; x \in [0, i) \end{array} \right\}.$$

Die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert in M punktweise gegen Null, aber nicht dem Maß nach!

Für spätere Zwecke halten wir noch die etwas stärkere Aussage fest, die beim Beweis des Satzes mit abfiel:

Korollar 4.2 *Unter den oben getroffenen Voraussetzungen gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} M(|f_k - f| \geq \sigma\right) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Dies ist mehr als die Aussage

$$\mu(M(|f_k - f| \geq \sigma) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wie wir gesehen haben, impliziert die fast überall punktweise Konvergenz die Maßkonvergenz - die Umkehrung gilt nicht, wie man an dem folgenden Beispiel erkennt. Wir definieren Funktionen $f_i^{(k)} : [0, 1[\to \mathbb{R}$ durch

$$f_i^{(k)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x \in \left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right[\\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}; k = 1, 2, \ldots \text{ und } i = 1, 2, \ldots, k$$

und numerieren die Folge nur durch einen Index, d. h. wir setzen
$\varphi_1 := f_1^{(1)}$, $\varphi_2 := f_1^{(2)}$, $\varphi_3 := f_2^{(2)}$, $\varphi_4 := f_1^{(3)}$. Die Folge $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ konvergiert dann dem Maß nach gegen Null, aber nicht punktweise fast überall. Man kann jedoch beweisen, daß jede maßkonvergente Folge von Funktionen eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge von Funktionen hat:

Satz 4.3 *(Satz von Riesz über maßkonvergente Funktionenfolgen) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_1, f_2, \ldots$, sowie $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar, und es gelte $f_i \Rightarrow f \quad (i \to \infty)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k=1}^{\infty}$, so daß $f_{m_k} \to f \quad (k \to \infty)$ punktweise fast überall in M.*

Beweis: Die gewünschte Teilfolge wird folgendermaßen konstruiert:
Es sei $m_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\mu\left(M\left(|f_{m_2} - f| \geq \frac{1}{1}\right)\right) < \frac{1}{2^1}$$

und $m_2 \in \mathbb{N}$ derart, daß $m_2 > m_1$ und

$$\mu\left(M\left(|f_{m_2} - f| \geq \frac{1}{2}\right)\right) < \frac{1}{2^2}$$

und allgemein $m_i \in \mathbb{N}$ derart, daß $m_i > m_{i-1}$ und

$$\mu\left(M\left(|f_{m_i} - f| \geq \frac{1}{i}\right)\right) < \frac{1}{2^i}\,.$$

Die Wahl dieser m_i ist wegen der Maßkonvergenz der f_i möglich. Wir zeigen, daß $f_{m_i} \to f$ punktweise fast überall.
Es sei

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} M(|f_{m_k} - f| \geq \frac{1}{k})\,, Q = \bigcap_{k=i}^{\infty} R_i$$

Wegen $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ gilt $\mu(R_i) \to \mu(Q) \quad (i \to \infty)$. Andererseits ist
$\mu(R_i) < \sum\limits_{k=i}^{\infty} \mu(M(|f_{m_k} - f| \geq \frac{1}{k})) < \sum\limits_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad (i \to \infty)$. Es gilt also $\mu(Q) = 0$.
Ist nun $x_0 \notin M - Q$, dann ist $x_0 \notin \mathbb{R}_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$ und damit $x_0 \notin \mathbb{R}_k$ für $k \geq i_0$. Das heißt für $k \geq i_o$ gilt $x_0 \notin M(|f_{m_k} - f| \geq \frac{1}{k})$ und folglich

$$|f_{m_k}(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{k}$$

Für $k \to \infty$ folgt daraus $f_{m_k}(x_0) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$ für $x_0 \in M - Q, \quad \mu(Q) = 0$. Der Satz ist damit bewiesen. □

Ein weiterer wichtiger Satz zum Fragenkreis dieses Kapitels ist folgender:

Satz 4.4 *(Satz von Egorov): Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_i : M \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots$, sowie $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Es gelte $f_i \to f \quad (i \to \infty)$ punktweise fast überall in M. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine meßbare Menge $E_\delta \subset M$, so daß $\mu(E_\delta) < \delta$ und $f_i \to f \quad (i \to \infty)$ gleichmäßig auf $M - E$ konvergiert.*

Beweis: Aus dem Korollar zu Satz 4.2 folgt für alle $\sigma > 0$: $\mu(R_N(\sigma)) \to 0 \quad (N \to \infty)$, wobei $R_N(\sigma) = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} M(|f_k - f| \geq \sigma)$. Wir können daher eine Folge $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ in der folgenden Weise konstruieren:
Wähle $m_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\mu\left(R_{m_1}\left(\frac{1}{1}\right)\right) < \frac{1}{2^1},$$

wähle $m_2 > m_1$, $m_2 \in \mathbb{N}$, derart, daß

$$\mu\left(R_{m_2}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < \frac{1}{2^2},$$

und allgemein $m_k > m_{k-1}$, $m_k \in \mathbb{N}$, derart, daß

$$\mu\left(R_{m_k}\left(\frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Man wähle nun i_0 so, daß $\sum\limits_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \delta$ ausfällt und setze

$$E_\delta = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} R_{m_i}\left(\frac{1}{i}\right).$$

Es gilt $\mu(E_\delta) = \mu\left(\bigcup\limits_{i=i_0}^{\infty} R_{m_i}\left(\frac{1}{i}\right)\right) \leq \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} \mu\left(R_{m_i}\left(\frac{1}{i}\right)\right) \leq \sum\limits_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \delta$.

Wir zeigen, daß $f_i \to f \quad (i \to \infty)$ gleichmäßig auf $M - E_\delta$. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq i_0$, so daß $\frac{1}{k} < \varepsilon$ für $k \geq k_0$. Ist nun $x_0 \in M - E_\delta$, so folgt $x_0 \notin \bigcup\limits_{i=i_0}^{\infty} R_{m_i}\left(\frac{1}{i}\right)$ und $x_0 \notin R_{m_i}\left(\frac{1}{i}\right)$ für $i \geq i_0$. Dies bedeutet

$$x_0 \notin \bigcup_{k=m_i}^{\infty} M(|f_k - f| \geq \frac{1}{i} \qquad \text{für} \quad i \geq i_0 \quad \text{und}$$

$$x_0 \notin M(|f_k - f| \geq \frac{1}{i} \quad \text{für} \quad i \geq i_0,\, k \geq m_i\,.$$

Daraus folgt $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{i}$ für $i \geq i_0$, $k \geq m_i$. Für $i = k_0$ folgt somit

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{k_0} < \varepsilon \quad \text{für} \quad k \geq m_{k_0} \tag{4.1}$$

Die gleichmäßige Konvergenz der f_k gegen f auf $M - E_\delta$ ist damit bewiesen, denn zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir eine Zahl $m_{k_0} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq m_{k_0}$ die Ungleichung (4.1) gilt.

□

5 Struktur meßbarer Funktionen

Meßbare Funktionen sind selbstverständlich nicht notwendigerweise beschränkt, wie das Beispiel der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ zeigt. Man kann jedoch zeigen, daß meßbare Funktionen „fast beschränkt“ sind, d. h. sie besitzen die Eigenschaft, die in dem folgenden Satz behauptet wird:

Satz 5.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine meßbare Menge $E_\delta \subset M$, so daß $\mu(E_\delta) < \delta$ ist und f auf $M - E_\delta$ beschränkt ist, d. h. es existiert eine Zahl $C_\delta \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C_\delta$ für $x \in M - E_\delta$.*

Beweis: Für $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $M_N = \{x \in M | N + 1 > |f(x)| \geq N\}$. Daraus folgt $\mu(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_i) < \infty$, und es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{i=N_0}^{\infty} \mu(M_i) < \delta$. Man setze $E_\delta = \bigcup_{i=N_0}^{\infty} M_i$. Es gilt $\mu(E_\delta) = \mu(\bigcup_{i=N_0}^{\infty} M_i) = \sum_{i=N_0}^{\infty} \mu(M_i) < \delta$. Wegen $M - E_\delta = \bigcup_{i=0}^{N_0-1} M_i$ gilt $f(x) \leq N_0$ auf $M - E_\delta$, und der Satz ist bewiesen. □

Von deutlich größerer Aussagekraft und schwieriger zu beweisen ist der Satz von Lusin.

Satz 5.2 *(Satz von Lusin) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine meßbare Menge $E_\delta \subset M$ mit $\mu(E_\delta) < \delta$, so daß die Funktion $f : (M - E_\delta) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.*

Anmerkung: Es wird <u>nicht</u> behauptet, daß die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ in den Punkten $x \in M - E_\delta$ stetig ist.

Zum Beweis von Lemma 5.2 genügt das folgende Lemma:

Lemma 5.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine meßbare Menge $E_\delta \subset M$ mit $\mu(E_\delta) < \delta$ und eine Folge stetiger Funktionen $(f_i)_{i=1}^{\infty}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die für $i \to \infty$ auf $M - E_\delta$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Aus Lemma 5.1 folgt Satz 5.1 mit Hilfe des bekannten Satzes, daß die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen stetig ist, wenn die Folge gleichmäßig konvergiert.

Man kann noch die folgende Verschärfung des Satzes von Lusin angeben:

Satz 5.3 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \subset M$ mit $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ und eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von f, die auf $M - E_\varepsilon$ mit f übereinstimmt.*

Beweis: Nach dem vorigen Satz gibt es eine Menge meßbare $E'_\varepsilon \subset M$ mit $\mu(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, so daß $f : (M - E'_\varepsilon) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Da man Lebesgue-meßbare Mengen von innen durch abgeschlossene Mengen approximieren kann, gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subset M - E'_\varepsilon$, so daß $\mu(M - A) < \varepsilon$ ist. Wir setzen $E_\varepsilon = M - A$. Wir benutzen nun den Satz von Urysohn, daß jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ stetig fortgesestzt werden kann (da A abgeschlossen ist). Vgl. etwa Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Kap. III/1, S. 386. □

6 Das Lebesguesche Integral

Zunächst wird das Lebesguesche Integral beschränkter meßbarer Funktionen definiert. Hierzu seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte meßbare Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte meßbare Funktion. Es gelte $a < f(x) < b$ für $x \in M$. Es seien $\mathfrak{Z} = \{x_0, \ldots, x_N\}$,
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Zwischenpunkte zur Zerlegung. Dann bezeichnen wir die Zahl

$$L(\mathfrak{Z}, \xi_i) := \sum_{i=1}^{N} \xi_i \mu(M(x_{i-1} \leq f < x_i))$$

als Lebesguesche Summe der Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ bzgl. $\mathfrak{Z}$ und ξ_i. Die Zahlen

$$O_L(\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{N} x_i \, \mu(M(x_{i-1} \leq f < x_i)) \quad \text{bzw.}$$
$$U_L(\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{N} x_{i-1} \, \mu(M(x_{i-1} \leq f < x_i))$$

bezeichnen wir als Lebesguesche Obersumme bzw. Lebesguesche Untersumme von $f : M \to \mathbb{R}$ bzgl. der Zerlegung $\mathfrak{Z}$. Unter der Feinheit $|\mathfrak{Z}|$ der Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ verstehen wir die Zahl $\max\limits_{i=1,\ldots N} (x_i - x_{i-1})$.

Definition 6.1 *Die meßbare und beschränkte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $a < f < b$ heißt Lebesgue-integrierbar (oder L-integrabel), wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft existiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so daß für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{x_0, \ldots, x_N\}$ von $[a, b]$ mit Feinheit δ und alle Zwischenpunkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ die Ungleichung*

$$|A - L(\mathfrak{Z}, \xi_i)| < \varepsilon$$

gilt. Wir schreiben $A = \int\limits_M f \, dx$ oder $A = \int\limits_M f(x) \, dx$ und nennen A das Lebesguesche Integral der Funktion f über M.

Satz 6.1 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt. Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt. Dann ist f Lebesgue-integrierbar.*

Beweis: Es gilt die Abschätzung

$$0 \le O_L(\mathfrak{Z}) - U_L(\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})\, \mu(M(x_i > f \ge x_{i-1})) \le$$
$$\le \max_{i=1,\dots N} (x_i - x_{i-1}) \sum_{i=1}^{N} \mu(M(x_i > f \ge x_{i-1})) = |\mathfrak{Z}|\mu(M)\,.$$

Wählt man $\delta < \frac{\varepsilon}{\mu(M)}$, falls $\mu(M) \neq 0$, so folgt offenbar

$$O_L(\mathfrak{Z}) - U_L(\mathfrak{Z}) < \varepsilon \tag{6.1}$$

für $|\mathfrak{Z}| < \delta$.
Wir setzen $A = \inf\{O_L(\mathfrak{Z}) | \mathfrak{Z}\,\text{ist Zerlegung von}\,[a, b]\}$.
Es gilt

$$U_L(\mathfrak{Z}) \le A \le O_L(\mathfrak{Z}) \quad \text{und} \quad U_L(\mathfrak{Z}) \le L(\mathfrak{Z}, \xi_i) \le O_L(\mathfrak{Z})\,.$$

Wegen (6.1) folgt daraus

$$|A - L(\mathfrak{Z}, \xi_i)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |\mathfrak{Z}| < \delta\,.$$

Die Lebesgue-Integrierbarkeit von f ist damit bewiesen. □

Für das Lebesgue-Integral gelten die folgenden Regeln, die wir ohne Beweis angeben, da sie in einfacher Weise auf entsprechende Eigenschaften der Lebesguesummen zurückgeführt werden können.

Satz 6.2 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_M (\alpha f_1 + \beta f_2)\, dx = \alpha \int_M f_1\, dx + \beta \int_M f_2\, dx\,.$$

Gilt zusätzlich $f_1 \le f_2$ auf M, so folgt $\int\limits_M f_1\, dx \le \int\limits_M f_2\, dx$.
Insbesondere gilt $\int\limits_M f\, dx \le \sup\limits_{x \in M} |f(x)|\, \mu(M)$.

Satz 6.3 *(„Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals“) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle meßbaren Mengen $e \subset M$ mit $\mu(e) < \delta$ die Beziehung $|\int\limits_e f\, dx| < \varepsilon$ gilt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der letzten Behauptung von Satz 6.2.

Satz 6.4 *(Vollständige Additivität oder σ-Stetigkeit des Lebesgue-Integrals) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt. Ferner seien die Mengen $M_i \subset M$, $i = 1, 2, \dots$, meßbar und paarweise disjunkt. Dann gilt*

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} f\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\,dx\,.$$

(Der Satz beinhaltet insbesondere, daß die letztgenannte unendliche Reihe konvergiert.)

Beweis: Aus der Definition des Lebesgueschen Integrals mit Hilfe der Lebesgueschen Summen folgt sofort

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i} f\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{M_i} f\,dx\,.$$

Da $\mu(\bigcup\limits_{i=N_0}^{\infty} M_i) < \varepsilon$ für $N_0 = N_0(\varepsilon)$, erhält man die Aussage des Satzes leicht mit Hilfe der letzten Aussage von Satz 6.2. □

Zur Definition des Lebesgueschen Integrals unbeschränkter Funktionen geht man folgendermaßen vor:

Es seien $M \subset \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar sowie $f \geq 0$. Für $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ definieren wir

$$f_L(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{falls} & f(x) \leq L \\ 0 & \text{falls} & f(x) > L \end{array} \right\}$$

Wegen des Monotoniesatzes für Lebesguesche Integrale gilt

$$\int\limits_M f_L\,dx \leq \int\limits_M f_K\,dx \quad \text{für} \quad L \leq K\,.$$

Dies bedeutet, daß $(\int\limits_M f_N\,dx)_{N\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge ist.

Ist diese Folge gleichmäßig beschränkt , so hat sie einen Grenzwert, und wir sagen dann, die

Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar und bezeichnen mit $\lim\limits_{L\to\infty} \int\limits_M f_L\, dx$ das Lebesguesche Integral $\int\limits_M f\, dx$ von f.

Lassen wir die Voraussetzung $f \geq 0$ fallen und betrachten ganz allgemein meßbare Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, so setzen wir

$$f_+(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{falls} & f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} & \end{array} \right\}$$

und

$$f_-(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{falls} & f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} & \end{array} \right\} .$$

Wir bezeichnen $f : M \to \mathbb{R}$ als Lebesgue-integrierbar, wenn f_+ und f_- Lebesgue-integrierbar sind und setzen dann

$$\int\limits_M f\, dx = \int\limits_M f_+\, dx - \int\limits_M (-f_-)\, dx\,.$$

Es sei angemerkt, daß aus der Integrierbarkeit von f im Sinne von Lebesgue diejenige von $|f|$ folgt. (Beim uneigentlichen Riemannschen Integral ist dies nicht so.)

Auch für das Lebesguesche Integral unbeschränkter Funktionen gelten die in Satz 6.1 - Satz 6.4 aufgestellten Regeln, wie man sich leicht überlegt. Als Beispiel beweisen wir die vollständige Additivität des Lebesgueschen Integrals.

Satz 6.5 *Sei $g : M \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrabel und $M_i \subset M$ meßbar, $M_i \cap M_k = \emptyset$ für $i \neq k$. Dann 1gilt*

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} f\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\, dx\,.$$

Beweis: Wegen der Zerlegung $f = f_+ + f_-$ braucht man dies nur für (o.B.d.A.) nichtnegative Funktionen f zu beweisen. Es sei also $f \geq 0$. Zunächst gilt

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i} f\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{M_i} f\, dx\,. \tag{6.2}$$

Es ist nämlich (nach Satz 6.4)

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i} f_L\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{M_i} f_L\,dx$$

mit

$$f_L(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{für} & f(x) \leq L \\ 0 & \text{sonst} & \end{array} \right\},$$

und für $L \to \infty$ ergibt sich (6.2).

Es gilt $0 \leq \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{N} M_i} f\,dx \leq \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} f\,dx = K < \infty$, d. h. die Partialsummen $\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{M_i} f\,dx$ sind gleichmäßig beschränkt .

Daraus folgt (da die Reihenglieder positiv sind) die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\,dx$, und es gilt für $N \geq N_0$

$$\sum_{i=N}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\,dx < \varepsilon\,.$$

Weiterhin gilt für $N \geq N_0'$

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=N}^{\infty} M_i} f\,dx < \varepsilon\,.$$

Es gibt nämlich (nach Definition des Lebesgue-Integrals) ein L_0 mit

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} (f - f_{L_0})\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Wegen der schon sichergestellten totalen Additivität des Lesbesgueschen Integrals für beschränkte Funktionen gibt es ein N_0' mit

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=N_0'}^{\infty} M_i} f_{L_0}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{da} \quad \mu(\bigcup_{i=N}^{\infty} M_i) \to 0 \quad (N \to \infty)\,.$$

Wegen

$$0 \leq \int\limits_{\bigcup\limits_{i=N_0'}^{\infty} M_i} (f - f_{L_0})\, dx \leq \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} (f - f_{L_0})\, dx$$

gilt daher

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=N}^{\infty} M_i} f\, dx \leq \int\limits_{\bigcup\limits_{i=N_0'}^{\infty} M_i} f\, dx < \varepsilon\,, \quad \text{falls} \quad N \geq N_0'\,.$$

Wählt man $K = \max(N_0', N_0)$, so folgt

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=K}^{\infty} M_i} f\, dx < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{i=K}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\, dx < \varepsilon\,.$$

Wir erhalten damit

$$\Bigg| \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i} f\, dx - \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{M_i} f\, dx \Bigg| < 2\varepsilon$$

und nach Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. □

7 Konvergenzsätze für Lebesguesche Integrale

In dem vorliegenden Kapitel untersuchen wir die Frage, ob aus der punktweisen Konvergenz $f_i(x) \to f(x)$ bereits die Konvergenz im Integral $\int\limits_M f_i\,dx \to \int\limits_M f\,dx\,(i \to \infty)$ folgt. Zunächst überlegt man sich, daß dies i. A. nicht richtig ist. Man wähle $M = [0,1]$ und setze für $k \geq 3$

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{k} \\ k & \frac{1}{k} \leq x < \frac{2}{k} \\ 0 & \frac{2}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Offenbar gilt $f_k \to 0\,(k \to \infty)$ punktweise in M und $\int\limits_M f_k\,dx = 1$ für alle $k \geq 3$. Daher gilt nicht $\int\limits_M f_k\,dx \to \int\limits_M f\,dx$ mit $f = 0$. Man muß also Zusatzbedingungen geben, damit die gewünschte Konvergenz stattfindet. Der wichtigste Satz hierzu ist

Satz 7.1 *(Satz von Vitali) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f_i : M \to \mathbb{R}^n$ integrabel. Es gelte $f_i \to f\,(i \to \infty)$ punktweise fast überall in M mit einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}^n$. Die Integrale $\int f_i\,dx$ seien gleichmäßig absolutstetig, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$, so daß für alle meßbaren Mengen $e \subset M$ mit $\mu(e) < \delta$ die Ungleichung*

$$\Big|\int\limits_e f_i\,dx\Big| < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt

$$\int\limits_M f_i\,dx \to \int\limits_M f\,dx \qquad (i \to \infty)\,.$$

Beweis: (1) Wir beweisen die Aussage zunächst für den Fall, daß f integrabel ist. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aus der vorausgesetzten gleichgradigen (gleichgradig = gleichmäßig) Absolutstetigkeit der Integrale $\int f_i\,dx$ und der Absolutstetigkeit von $\int f\,dx$ folgt die Existenz einer Zahl $\delta > 0$, so daß

$$\Big|\int\limits_e (f_i - f)\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{falls} \quad \mu(e) < \delta,\, e \subset M \quad \text{meßbar}\,.$$

Aus dem Satz von Egoroff folgt die Existenz einer Menge $E_\delta \subset M$ mit $\mu(E_\delta) < \delta$, so daß $f_i \to f$ gleichmäßig auf $M - E_\delta$ für $i \to \infty$. Daraus folgt die Existenz eines i_0 mit

$$\Big|\int\limits_{M-E_\delta} (f_i - f)\,dx\Big| \leq \sup_{M-E_\delta} \big|f_i - f\big|\,\Big(\int\limits_{M-E_\delta} dx\Big) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad i \geq i_0\,.$$

Setzt man $e = E_\delta$, so folgt

$$\Big|\int\limits_e (f_i - f)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_e f_i\,dx - \int\limits_e f\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für} \quad i \geq i_0\,,$$

und die Behauptung ist unter Voraussetzung der Integrabilität von f bewiesen.

(2) Wir beweisen nun die Integrabilität von f. Hierzu beweisen wir zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Zahlen

$$\int\limits_M |f_i|\,dx\,.$$

Wir wählen $\varepsilon = 1$. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß für alle $e \subset M$ mit $\mu(e) < \delta$ die Beziehung $\big|\int\limits_e f_i\,dx\big| < 1$ gilt. Die Menge M ist Vereinigung endlich vieler Teilmengen M_j, $j = 1, \ldots, N$ mit $\mu(M_j) < \delta$, $j = 1, \ldots N$. Wir definieren

$$M_+^i := \{x \in M | f_i(x) \geq 0\},\ M_-^i := \{x \in M | f_i(x) < 0\}\,.$$

Dann gilt $\mu(M_+^i \cap M_j) < \delta$, $j = 1, \ldots, N$, und daher

$$\Big|\int\limits_{M_+^i \cap M_j} f_i\,dx\Big| = \int\limits_{M_+^i \cap M_j} |f_i|\,dx < 1, \qquad \Big|\int\limits_{M_-^i \cap M_j} f_i\,dx\Big| = \int\limits_{M_-^i \cap M_j} |f_i|\,dx < 1\,.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_M |f_i|\,dx \leq \sum_{j=1}^N \left(\int\limits_{M_+^i \cap M_j} |f_i|\,dx + \int\limits_{M_-^i \cap M_j} |f_i|\,dx \right) < 2N\,,$$

und die gleichmäßige Schranke für die Zahlen $\int_M |f_i|\,dx$ ist gefunden.

Als nächsten Schritt beweisen wir, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L_0 > 0$ existiert, so daß für alle $L \geq L_0$ gilt:

$$0 \leq \int\limits_{M(f_i \geq L)} f_i\,dx < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad 0 \geq \int\limits_{M(f_i \leq -L)} f_i\,dx < -\varepsilon\,.$$

Aus der gleichgradigen Absolutstetigkeit der Integrale $\int f_i\,dx$ folgt die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ mit

$$0 \leq \int\limits_{e \cap M_+^i} f_i\,dx < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad 0 \geq \int\limits_{e \cap M_-^i} f_i\,dx > -\varepsilon \quad \text{für} \quad e \subset M,\ \mu(e) < \delta\,.$$

Es gilt die Abschätzung

$$2N \geq \int_M |f_i|\,dx \geq \int\limits_{M(|f_i|\geq L)} |f_i|\,dx \geq L\,\mu(M(|f_i| \geq L)\,.$$

Daraus folgt

$$\mu(M(|f_i| \geq L)) \leq \frac{2N}{L} < \delta \quad \text{für} \quad L \geq L_0\,,$$

und daher

$$0 \leq \int\limits_{M_+^i \cap M(f_i \geq L)} f_i\,dx < \varepsilon, \qquad 0 \geq \int\limits_{M_-^i \cap M(f_i \leq -L)} f_i\,dx > -\varepsilon\,.$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis, daß f integrabel ist. Hierzu müssen wir zeigen, daß

$$C_L = \int\limits_M (f_+)_L\,dx \quad \text{und} \quad C_L^- = \int\limits_M (-f_-)_L\,dx$$

für $L \to \infty$ beschränkt bleiben. Dazu genügt es, zu zeigen, daß die Folgen $(C_L)_{L\in\mathbb{N}}$ und $(C_L^-)_{L\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind. Wir erinnern an die Definition der Abschneidung $(h)_L$ einer Funktion h:

$$(h)_L(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls} \quad h(x) < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Es genügt, die Cauchyfolgen-Eigenschaft für alle $L \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme von abzählbar vielen $L \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Es gilt

$$|\int\limits_M (f_{i+})_L\,dx - \int\limits_M (f_{i+})_K\,dx| = \int\limits_{M(L > f_{i+} \geq K)} f_{i+}\,dx \leq \int\limits_{M(f_i \geq K)} f_{i+}\,dx < \varepsilon\,,$$

falls $L \geq K \geq L_0$. Führt man den Grenzübergang $i \to \infty$, so gilt $(f_{i+})_L \to (f_+)_L$, $(f_{i+})_K \to (f_+)_K$ punktweise fast überall für alle L mit $\mu(M(f_{i+} = L)) = 0$ bzw. K mit $\mu(M(f_{i+} = K)) = 0$. Dies gilt für alle $K, L \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme von abzählbar vielen. Da $(f_+)_L$ integrabel ist, folgt aus dem ersten Teil des Beweises

$$\int\limits_M (f_{i+})_L\,dx \to \int\limits_M (f_+)_L\,dx \quad \text{etc.}\,.$$

Wir erhalten damit

$$|C_L - C_K| = |\int\limits_M (f_+)_L\,dx - \int\limits_M (f_+)_K\,dx| \leq \varepsilon, \quad \text{für} \quad L, K \geq L_0\,.$$

Die C_L bilden daher eine Cauchy-Folge. Entsprechend schließt man für C_L^-. Daraus folgt die Integrabilität von f, und mit Teil (1) des Beweises ist der Satz damit bewiesen. □

Eine Folgerung aus dem Satz von Vitali ist der

Satz 7.2 *(Satz von Lebesgue oder Satz von der majorisierten Konvergenz): Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f_i : M \to \mathbb{R}$ meßbar . Es gelte $f : M \to \mathbb{R}$. Ferner existiere eine integrable Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit $|f_i| \le g$ in M. Dann sind f_i und f integrabel, und es gilt $\int\limits_M f_i\,dx \to \int\limits_M f\,dx\,(i \to \infty)$.*

Beweis: Wir beweisen zunächst die Integrabilität von f_i. Hierzu muß gezeigt werden, daß die Zahlen $\int\limits_M (f_{i+})_L\,dx$ und $\int\limits_M (f_{i-})_L\,dx$ Cauchy-Folgen bilden.
Es gilt für $L \ge K$

$$|\int\limits_M (f_{i+})_L\,dx - \int\limits_M (f_{i+})_K\,dx| \le \int\limits_{M(f_i \ge K)} f_{i+}\,dx \le \int\limits_{M(f_i \ge K)} g\,dx \le \int\limits_{M(g \ge K)} g\,dx\,.$$

Der letzte Ausdruck ist für $K \ge K_0$ kleiner als ε, da g als integrabel vorausgesetzt wurde. Die Folge $(\int\limits_M (f_{i+})_L\,dx)_{L\in\mathbb{N}}$ ist daher eine Cauchy-Folge und f_{i+} muß integrabel sein. Entsprechend schließt man für f_{i-}. Aus der Ungleichung $|f_i| \le g$ folgt für jede meßbare Menge $e \subset M$

$$\int\limits_e |f_i|\,dx \le \int\limits_e g\,dx\,.$$

Wegen der Absolutstetigkeit des Integrals $\int g\,dx$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ mit $|\int\limits_e g\,dx| < \varepsilon$, falls $\mu(e) < \delta$, und die Voraussetzungen des Satzes von Vitali sind erfüllt. Die Behauptung des Satzes folgt damit aus Satz 7.1. □

Bemerkung: Durch einen Widerspruchsbeweis überlegt man sich leicht, daß man in den Sätzen 7.1 und 7.2 anstelle der punktweisen Konvergenz fast überall die Maßkonvergenz $f_i \Rightarrow f$ voraussetzen kann.

Ein weiterer wichtiger Satz ist folgendes Resultat, welches als Lemma von Fatou bekannt ist.

Satz 7.3 *: Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f_i : M \to \mathbb{R}$ integrabel, nichtnegativ. Es gelte $f_i \to f\,(i \to \infty)$ punktweise fast überall in M mit einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$. Ferner sei $\liminf\limits_{i\to\infty} \int\limits_M f_i\,dx$ endlich. Dann ist f integrabel, und es gilt*

$$\int\limits_M f\,dx \le \liminf_{i\to\infty} \int\limits_M f_i\,dx\,.$$

Beweis: Es sei

$$h_L(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls} \quad h(x) < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt $(f_i)_L \to (f)_L$ punktweise fast überall für alle reellen L mit Ausnahme abzählbar vieler, und aus dem Satz von Lebesgue folgt $\int_M (f_i)_L \, dx \to \int_M f_L \, dx$. Daraus folgt für $i \geq i_0(\varepsilon)$

$$0 \leq \int_M f_L \, dx \leq \varepsilon + \int_M (f_i)_L \, dx \leq \varepsilon + \int_M f_i \, dx \, .$$

Es sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ die Teilfolge, so daß $\int_M f_i \, dx \to \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \, dx, \quad i \in \Lambda, i \to \infty$.
Läßt man für diese $i \in \Lambda$ in der letzten Ungleichungskette i gegen ∞ gehen, so folgt

$$0 \leq \int_M f_L \, dx \leq \varepsilon + \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \, dx \, .$$

Daher ist $\int_M f_L \, dx$ beschränkt für $L \to \infty$, und daher ist f integrabel. Grenzübergang $L \to \infty$ ergibt

$$\int_M f \, dx \leq \varepsilon + \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \, dx \, ,$$

und anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt die Behauptung. □

Satz 7.4 *(Satz von Beppo Levi oder Satz von der monotonen Konvergenz): Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, beschränkt und $f_i : M \to \mathbb{R}^n$ integrabel. Es gelte $f_i \nearrow f$ punktweise fast überall in M mit einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, d. h. es gelte $f_i \to f \; (i \to \infty)$ punktweise fast überall in M und $f_i \leq f_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $\int_M f_i \, dx$ seien gleichmäßig beschränkt. Dann ist f integrabel, und es gilt*

$$\int_M f_i \, dx \to \int_M f \, dx \qquad (i \to \infty) \, .$$

Beweis: Es ist $f_i - f_1 \geq 0$ fast überall und $f_i - f_1 \to f - f_1$ punktweise fast überall $(i \to \infty)$. Da die Zahlen $\int_M f_i \, dx$ gleichmäßig beschränkt sind, ist $\liminf_{k\to\infty} \int_M (f_i - f_1) \, dx$ endlich. Aus dem Satz von Fatou folgt daher, daß $f - f_1$ und damit f integrabel ist. Es gilt $f_1 \leq f_i \leq f$, d. h. die f_i werden nach oben und unten durch die integrablen Funktionen f_1 und f abgeschätzt.
Aus dem Satz von Lebesgue bzw. dem Satz von Vitali folgt damit die behauptete Konvergenz $\int_M f_i \, dx \to \int_M f \, dx \quad (i \to \infty)$. □

8 Die Lebesgueschen Funktionenräume L^p. Vollständigkeit

Es sei Ω eine meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty[$. Mit $\tilde{L}^p(\Omega)$, kürzer $\tilde{L}^p$, bezeichnen wir die Menge aller meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für die $\int\limits_\Omega |f|^p \, dx$ existiert. Wenn wir das Symbol ∞ als „Wert " für das Integral zugelassen hätten, müßten wir hinzufügen: „... und endlich ist".

Sind $g, f \in \tilde{L}^p$, so ist offensichtlich für $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f \in \tilde{L}^p$ und, wie man sich überlegen kann, auch $g + f \in \tilde{L}^p$. Wir verzichten auf einen ausführlichen Beweis dieser Tatsache; sie ergibt sich aus der Abschätzung für die Abschneidungen f_L und g_L :

$$\sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f_L + g_L|^p \, dx} \;\leq\; \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f_L|^p \, dx} \;+\; \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |g_L|^p \, dx} \,. \tag{8.1}$$

Diese Abschätzung folgt aus der entsprechenden Ungleichung für die Lebesgueschen Summen. Grenzübergang $L \to \infty$ und Anwendung des Satzes von Fatou ergeben die gewünschte Ungleichung:

$$\sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f + g|^p \, dx} \;\leq\; \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f|^p \, dx} \;+\; \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |g|^p \, dx} \,. \tag{8.2}$$

Es gilt daher

Satz 8.1 *Die Menge $\tilde{L}^p(\Omega)$ ist bezüglich der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit reellen Zahlen ein reeller Vektorraum.*

Setzt man $||f||_p \;=\; \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f|^p \, dx}$, so gelten u.a. wegen (8.2) die Regeln:

(Positive Homogenität)	$\|\|\alpha f\|\|_p = \|\alpha\| \, \|\|f\|\|_p,$	$\alpha \in \mathbb{R}, f \in \tilde{L}^p$	(1)
(Dreiecksungleichung)	$\|\|f + g\|\|_p \leq \|\|f\|\|_p + \|\|g\|\|_p,$	$f, g \in \tilde{L}^p$	(2)
(Semidefinitheit)	$\|\|f\|\|_p \geq 0,$	$f \in \tilde{L}^p$	(3')

Ist auf einem reellen Vektorraum V eine Abbildung $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ gegeben, welche die obigen drei Eigenschaften erfüllt, so nennt man diese Abbildung eine Seminorm auf V. In diesem Sinne ist die oben eingeführte Abbildung $|| \cdot ||_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Seminorm. Eine Seminorm

$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn anstelle der Bedingung (3') die Bedingung der Definitheit, nämlich

$$||f|| \geq 0 \quad \forall f \in V \text{ und } ||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \tag{3}$$

gilt. Man nennt den Raum V dann einen normierten Raum. Der Raum $\tilde{L}^p(\Omega)$ ist leider kein normierter Raum bezüglich $||\cdot||_p$, da aus $\int\limits_\Omega |f|^p\,dx = 0$ nicht notwendig $f \equiv 0$, sondern bloß $f = 0$ auf $\Omega - E$ mit $\mu(E) = 0$ folgt. Da für normierte Räume viele nützliche Sätze gelten, führt man einen, dem Raum $\tilde{L}^p$ verwandten Raum L^p ein, welcher bezüglich $||\cdot||_p$ ein normierter Raum ist. Dies geschieht folgendermaßen: Es sei

$$N := \{f \in \tilde{L}^p(\Omega);\ ||f||_p = 0\}\,.$$

Wegen der Eigenschaften (1) und (2) der Norm ist N ein linearer Unterraum von $\tilde{L}^p(\Omega)$. Wir definieren nun den linearen Raum $L^p(\Omega)$ als Restklassenraum $\tilde{L}^p(\Omega)/N$, d. h. die Elemente von $L^p(\Omega)$ sind Klassen von Funktionen, deren Differenz in N liegt:

$$L^p(\Omega) := \{[f] \subset \tilde{L}^p(\Omega) | g - h \in N \quad \text{falls} \quad g, h \in [f]\}\,.$$

Man setzt $\alpha[f] := \{\alpha g | g \in [f]\}$, $[f] + [g] := \{h_1 + h_2 | h_1 \in [f],\ h_2 \in [g]\}$ für $[f], [g] \in L^p(\Omega)$. Bezüglich dieser Operationen ist $L^p(\Omega)$ ein reeller Vektorraum. Das Nullelement ist N. Die Norm eines Elementes $[f]$ aus $L^p(\Omega)$ wird definiert durch $||[f]||_p := ||g||_p$ wobei g ein Element aus $[f]$ ist. Die Definition der Norm mittels eines Repräsentanten ist von der Auswahl des Repräsentanten unabhängig, denn wenn $g' \in [f]$, so folgt

$$||g||_p + 0 = ||g||_p + ||g' - g||_p \geq ||g'||_p, \quad \text{also} \quad ||g||_p \geq ||g'||_p\,,$$

und nach Vertauschung von g und g' dann $||g'||_p \geq ||g||_p$, also schließlich $||g||_p = ||g'||_p$. Offensichtlich gelten für $[f], [g] \in L^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$||\alpha[f]||_p = |\alpha|\, ||[f]||_p \tag{1}$$

$$||[f] + [g]||_p \leq ||[f]||_p + ||[g]||_p \tag{2}$$

$$||[f]||_p \geq 0 \tag{3'}$$

Außerdem gilt nun aber die Eigenschaft (3) der Definitheit. Ist $||[f]||_p = 0$, so folgt $||g||_p = 0$ für alle $g \in [f]$, und daher $g = 0$ auf $M - E$ mit $\mu(E) = 0$. Daraus folgt $g \in N$, d. h. $[f] = N$, also gleich dem Nullelement in $L^p(\Omega)$.
Wir halten fest:

Satz 8.2 *Der Raum $L^p(\Omega)$ ist bezüglich der eingeführten Abbildung $||\cdot||_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein normierter Raum.*

Die Räume $L^p(\Omega)$ sind überdies hinaus vollständig normierte Räume. Diese Eigenschaft der Vollständigkeit ist von großer Wichtigkeit für die Analysis. Um den Begriff der Vollständigkeit zu definieren, führen wir zunächst den Begriff der Konvergenz in L^p ein:

Definition 8.1 *Eine Folge $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ von Elementen $f_i \in L^p(\Omega)$ konvergiert in $L^p(\Omega)$ gegen das Element $f \in L^p(\Omega)$, in Zeichen $f_i \to f$ in $L^p(\Omega)$, $i \to \infty$, wenn $||f_i - f||_p \to 0 \quad (i \to \infty)$. f heißt der Limes von $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in L^p. (Man spricht auch von der Konvergenz im Mittel oder p-Mittel.)*

Man überlegt sich leicht, daß aus $f_i \to f$, $g_i \to f$ in L^p, $\alpha_i \to \alpha$ in $\mathbb{R}$ die Konvergenzen $f_i + g_i \to f + g$ in L^p $(i \to \infty)$ und $\alpha_i f_i \to \alpha f$ in $L^p(\Omega)$, $(i \to \infty)$ folgen.

Definition 8.2 *Eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Elementen $f_i \in L^p(\Omega)$ heißt Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß*

$$||f_i - f_k||_p < \varepsilon \qquad \textit{für} \quad i, k \geq n_0 \,.$$

Es gilt der fundamentale Satz über die Vollständigkeit der L^p-Räume:

Satz 8.3 *(Vollständigkeit der Räume L^p): Jede Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ besitzt einen Limes in $L^p(\Omega)$.*

Beweis: Die Behauptung des Satzes ist äquivalent zu der Aussage:
Ist $f_i \in L^p$ und

$$||f_i - f_k||_p := \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |f_i - f_k|^p \, dx} \to 0 \quad \text{für} \quad i, k \to \infty \,,$$

so gibt es ein $f \in L^p$ mit

$$||f_i - f||_p \to 0 \qquad (i \to \infty) \,.$$

Dies ergibt sich folgendermaßen: Aus dem im Anschluß bewiesenen Hilfssatz folgt die Existenz einer Teilfolge $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so daß $f_{i_k} \to f$ punktweise fast überall konvergiert. Aus der Voraussetzung folgt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\int\limits_\Omega |f_i - f_{i_k}|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i, i_k \geq N \,.$$

Hält man i fest und läßt k gegen unendlich gehen, so erhält man aus dem Satz von Fatou

$$\int_\Omega |f_i - f|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p, \qquad i \geq N\,, \tag{$*$}$$

und insbesondere die Integrabilität von $|f_i - f|$, damit also $f_i - f \in L^p$ und $f \in L^p$. Bedingung $(*)$ bedeutet gerade

$$||f_i - f||_p < \varepsilon \qquad i \geq N\,,$$

und damit ergibt sich $f_i \to f$ in $L^p(\Omega)$, $\quad (i \to \infty)$. □

Hilfssatz 8.1 *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $(f_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_i : M \to \mathbb{R}$. Es gelte für jede Zahl $\sigma > 0$ die Konvergenz*

$$\mu(M(|f_i - f_k| \geq \sigma)) \to 0 \qquad (i, k \to \infty)\,,$$

d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_0 = N_0(\varepsilon, \sigma) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(M(|f_i - f_k| \geq \sigma)) < \varepsilon \quad \textit{für} \quad i, k \geq N_0\,.$$

Dann gibt es eine meßbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $(f_{i_k})_{k=1}^\infty$, $i_k \in \mathbb{N}$, die punktweise fast überall in M gegen f konvergiert.

Beweis: Zum Beweis konstruieren wir uns eine Teilfolge $(f_{i_k})_{k=1}^\infty$ der ursprünglichen Folge, so daß für fast alle $x \in M$ die Folge $(f_{i_k})_{k=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist. Diese Folge muß einen Limes haben (nach dem Cauchyschen Kriterium), den wir mit $f(x)$ bezeichnen. In den Punkten, wo $(f_{i_k}(x))_{k=1}^\infty$ nicht konvergiert, definieren wir $f(x) =$ beliebig, z. B. $= 0$. Dies definiert die gesuchte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$.
Die gewünschte Teilfolge $(f_{i_k})_{k=1}^\infty$ definieren wir uns folgendermaßen: Da nach Voraussetzung $\mu(M(|f_i - f_k| \geq \frac{1}{1\cdot 2}1)) \to 0$ für $i, k \to \infty$, gibt es ein $i_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\mu(M(|f_{i_1} - f_k| \geq \frac{1}{1 \cdot 2^1})) < \frac{1}{2^1} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N},\, k > i_1\,.$$

Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$\mu(M(|f_i - f_k| \geq \frac{1}{2 \cdot 2^1})) \to 0 \qquad \text{für} \quad i, k \to \infty\,.$$

Daher gibt es ein $i_2 \in \mathbb{N}, i_2 > i_1$ mit

$$\mu(M(|f_{i_2} - f_k| \geq \frac{1}{2 \cdot 2^2})) < \frac{1}{2^2} \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > i_2\,.$$

Allgemein seien $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ schon konstruiert, und es gelte

$$\mu(M(|f_{i_m} - f_k| \geq \frac{1}{m \cdot 2^m})) < \frac{1}{2^m}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > i_m\,.$$

Dann gibt es ein $i_{m+1} \in \mathbb{N}$, $\quad i_{m+1} > i_m$, mit

$$\mu(M(|f_{m+1} - f_k| \geq \frac{1}{(m+1)2^{m+1}})) < \frac{1}{2^{m+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > i_{m+1}\,.$$

Damit haben wir durch vollständige Induktion eine Teilfolge $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert mit der Eigenschaft

$$\mu(M(|f_{i_m} - f_{i_{m+1}}| \geq \frac{1}{m2^m})) < \frac{1}{2^m}, \quad i_m < i_{m+1}, \quad i_m \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots\,.$$

Wir setzen

$$M_m = M(|f_{i_m} - f_{i_{m+1}}| \geq \frac{1}{m2^m})\,,$$

und für $N \in \mathbb{N}$

$$R_N = \bigcup_{m=N}^{\infty} M_m \quad \text{sowie} \quad R = \bigcap_{N=1}^{\infty} R_N\,.$$

Wir wollen zeigen, daß $\mu(R) = 0$ gilt. (Anschließend wird sich ergeben, daß für $x \in M - R$ die Folge $(f_{i_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.) Offensichtlich gilt aufgrund der Konstruktion

$$\mu(R_N) = \mu(\bigcup_{m=N}^{\infty} M_m) \leq \sum_{m=N}^{\infty} \mu(M_m) < \sum_{m}^{\infty} = N\,\frac{1}{2^m}\,.$$

Die letzte Zahl ist der Reihenrest der geometrischen Reihe, der gegen 0 geht für $N \to \infty$. Daher gilt

$$\mu(R_N) \to 0, (N \to \infty)\,,$$

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{K} R_i\right) \to 0 \quad (K \to \infty)$$

$$\text{und} \qquad \mu(R) = \lim_{K\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{K} R_i\right) = 0\,.$$

Es sei nun $x \in M - R$. Wir wollen zeigen, daß $(f_{i_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein $N_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$|f_{i_k}(x) - f_{i_j}(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad k, j \geq N_0\,.$$

Da $x \in M - R$, gilt $x \notin R = \bigcap_{N=1}^{\infty} R_N$, d. h. es gibt ein $L_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin R_{L_0}$. Dies bedeutet $x \notin \bigcap_{m=L_0}^{\infty} M_m$, d.h.

$$x \notin M_m = M(|f_{i_m} - f_{i_{m+1}}| \geq \frac{1}{m2^m}) \quad \text{für} \quad m \geq L_0\,.$$

Dies bedeutet wiederum

$$|f_{i_m}(x) - f_{i_{m+1}}(x)| < \frac{1}{m2^m} \quad \text{für} \quad m \geq L_0\,.$$

Wir wählen $K_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{K_0} < \varepsilon$ und setzen $N_0 = \max(K_0, L_0)$. Es gilt dann

$$|f_{i_m}(x) - f_{i_{m+1}}(x)| < \frac{\varepsilon}{2^m} \quad \text{für} \quad m \geq N_0\,.$$

Daraus folgt für $j > m > N_0$

$$|f_{i_m}(x) - f_{i_j}(x)| \leq \sum_{k=m}^{j-1} |f_{i_k}(x) - f_{i_{k+1}}(x)| < \sum_{k=m}^{j-1} \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon\,.$$

Damit ist in der Tat nachgewiesen, daß $(f_{i_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bildet, und der Hilfssatz ist bewiesen. □

Ist ein normierter Raum V bezüglich seiner Norm vollständig (d. h. jede Cauchy-Folge bezüglich dieser Norm hat einen Limes), so nennt man diesen Raum einen Banach-Raum.

Wir erwähnen noch, daß im Fall $p = 2$ die Abbildung $(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$(f,g) := \int\limits_{\Omega} \tilde{f}\tilde{g}\,dx\,, \quad \tilde{f} \in f \in L^2(\Omega)\,, \quad \tilde{g} \in g \in L^2(\Omega)\,,$$

ein Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ definiert, d. h. es gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \quad f, f_1, f_2, g \in L^2(\Omega)$

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g) \tag{1}$$

$$(f,g) = (g,f) \tag{2}$$

$$(f,f) \geq 0 \quad \text{sowie} \quad (f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \tag{3}$$

Ein (reeller) Vektorraum V mit Skalarprodukt heißt prähilbertscher Raum. Definiert man auf V mit Hilfe des Skalarprodukts eine Norm durch $||u|| := \sqrt{(u,u)}$, so ist dieser Raum bezüglich dieser Norm insbesondere ein normierter Raum. Ist der Raum bezüglich dieser Norm vollständig, so nennt man den Raum einen (reellen) Hilbert-Raum.