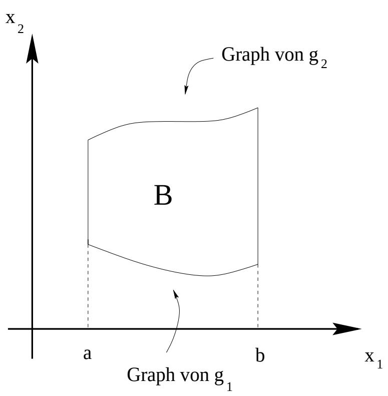
1 Der Gaußsche und Stokessche Satz in der Ebene

Der sogenannte Hauptsatz der (eindimensionalen) Differential- und Integralrechnung besagt, daß

$$\int_a^b f'(\xi)d\xi = f(b) - f(a)\,, \quad f \in C^1[a,b]\,,$$

d.h. das „eindimensionale“ Integral $\int_a^b$ wird durch einen „nulldimensionalen“ Randterm $f(b) - f(a)$ ausgedrückt. In Form des sogenannten Gaußschen Satzes gibt es ein $n-$dimensionales Analogon. In diesem Kapitel wird der zweidimensionale Fall behandelt.

Es sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, und $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $g_1 < g_2$ auf $]a,b[$. Die Punktmenge $B = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in [a,b]\,, g_1(x_1) \leq x_2 \leq g_2(x_1)\}$ wird in der Anfängerliteratur als Normalbereich bezeichnet.



Der folgende Hilfssatz ist bereits eine Billigversion des Gaußschen Satzes.

Hilfssatz 1.1 *Sei $u \in C^1(B)$ und B das oben definierte Normalgebiet. Dann gilt*

$$\int_B \frac{\partial}{\partial x_2} u\, dx = -\int_a^b u(\xi, g_1(\xi))\, d\xi - \int_b^a u(\xi, g_2(\xi))\, d\xi \tag{1.1}$$

(Links findet man ein zweidimensionales, rechts zwei eindimensionale Integrale.)

Beweis:

Zunächst wird angemerkt, daß das zweidimensionale Riemannintegral existiert, da der Integrand stetig ist und Normalbereiche Riemann-meßbar sind (Übungsaufgabe). Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\, dx = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x_1)}^{g_2(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 =$$

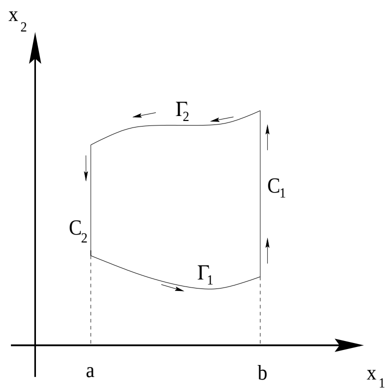
$$= - \int\limits_a^b u(x_1, g_1(x_1))\, dx_1 + \int\limits_a^b u(x_1, g_2(x_1))\, dx_1$$

woraus die angegebene Formel (1.1) folgt. □

Die rechte Seite von (1.1) soll nun als Kurvenintegral ausgedrückt werden, so daß man die gängige Form des Gaußschen Satzes erhält.

Den Graphen von g_1 und g_2 entsprechen Kurvenstücke Γ_1 und Γ_2 mit den Parameterdarstellungen

$$\varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ g_1(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b] \quad \text{und} \quad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} b + a - t \\ g_2(a + b - t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$$



Offensichtlich ist $u(\xi, g_1(\xi)) = \begin{pmatrix} u(\varphi^{(1)}(\xi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\varphi}^{(1)} \Rightarrow \int\limits_a^b u(\xi, g_1(\xi))\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_1} \binom{u}{0}\, d\vec{s}$. Man erinnere sich an die Definition des Kurvenintegrals $\int\limits_\Gamma f \cdot d\vec{s} = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt$, wenn $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve ist.

Entsprechend gilt

$$\int\limits_b^a u(\xi, g_2(\xi))\, d\xi = - \int\limits_a^b u(b + a - t, g_2(b + a - t))\, dt$$

$$= \int\limits_a^b \begin{pmatrix} u(\varphi^{(2)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\varphi}^{(2)}(t)\, dt = \int\limits_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} ds\,.$$

Wir betrachten noch die Kurvenstücke C_1 und C_2 . C_2 hat die Parametrisierung $\psi^{(2)}(t) = \binom{a}{t}$, $t \in [g_1(a), g_2(a)]$; C_1 entsprechend $\psi^{(1)}(t) = \binom{b}{t}$, $t \in [g_1(b), g_2(b)]$.

Es gilt $\int\limits_{C_i} \binom{u}{0}\, d\vec{s} = \int \begin{pmatrix} u(\psi^{(i)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\psi}^{(i)}(t)\, dt = 0$.

Bezeichnet nun Γ die aus den Kurvenstücken $\Gamma_1, C_1, \Gamma_2, C_2$ der Reihe nach zusammengesetzte geschlossene Kurve, so ergibt sich

$$-\int\limits_a^b u(\xi, g_1(\xi))\, d\xi - \int\limits_b^a u(\xi, g_2(\xi))\, d\xi = -\int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{s}\,.$$

Für das Kurvenintegral $\int\limits_\Gamma \binom{u}{0}\, d\vec{s}$ schreibt man auch

$$\int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{s} = \int\limits_\Gamma u\, dx_1\,.$$

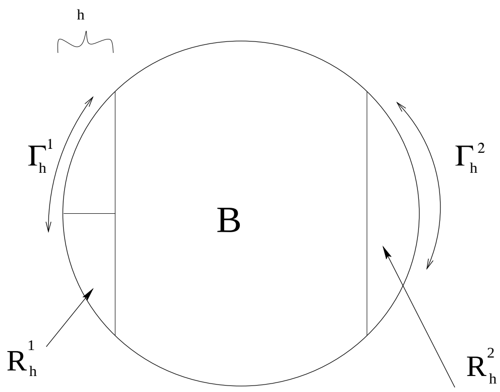
Die Kurve Γ läuft von dem Punkt $(a, g_1(a))$ über die Punkte $(b, g_1(b)), (b, g_2(b)), (a, g_2(a))$, also im mathematisch positiven Sinne. (Das Zusammensetzen von Kurvenstücken zu einer einzigen Kurve erreicht man durch Verschiebung der einzelnen Parameterintervalle, so daß sich diese zu einem einzigen Intervall zusammenfügen.) Wir fassen zusammen:

Satz 1.1 *Sei B ein Normalbereich des $\mathbb{R}^2$ mit einer positiv orientierten Randkurve Γ. Dann gilt*

$$\int \frac{\partial}{\partial x_2} u\, dx_1\, dx_2 = -\int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{s}\,. \tag{1.2}$$

Um auch einfache Gebiete wie Kreise im Satz von Gauß behandeln zu können, dehnen wir den Begriff des Normalgebietes auf Punktmengen $B = \{(x_1, x_2) | a \le x_1 \le b,\ g_1(x_1) \le x_2 \le g_2(x_1)\}$ aus, wenn g_1, g_2 stetig, aber <u>nur im Innern</u> von $[a, b]$ stetig differenzierbar sind. Zusätzlich wird verlangt, daß die Bogenlänge der Kurvenstücke mit der Parametrisierung $\begin{pmatrix} t \\ g_i(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a, a + \varepsilon]$ bzw. $t \in [b - \varepsilon, b]$ <u>gegen Null</u> für $\varepsilon \to 0$ geht.

Satz 1.1 überträgt sich dann für diese Bereiche B, indem ein Grenzübergang durchgeführt wird. Will man z.B. den Kreis B als Grenzgebiet zulassen, schneidet man links und rechts ein Stückchen R_h^i , $(i = 1, 2)$ ab. Das verbleibende Gebiet ist ein simples Normalgebiet gemäß unserer Definition, in dem der Satz von Gauß gilt.

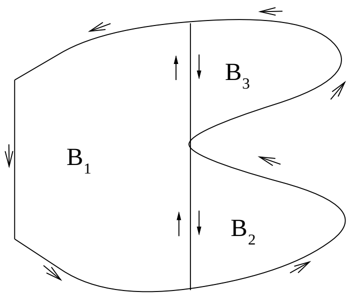


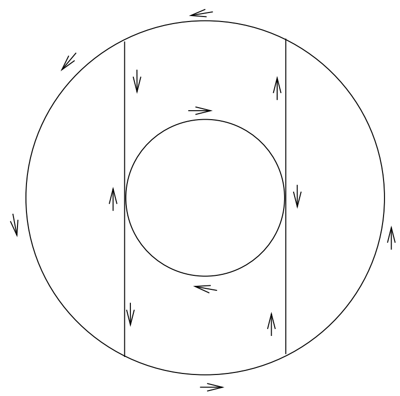
Geht man zur Grenze $h \to 0$, gilt

$$\int\limits_{R_h^i} \tfrac{\partial}{\partial x_2} u\, dx \to 0 \quad \text{und} \quad -\int\limits_{\Gamma_h^i} \left(\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \to 0, \qquad i = 1, 2\,,$$

da $\left|\Gamma_h^i\right| \to 0 \quad$ und $\quad \mu(R_h^i) \to 0$. Man erhält damit den Satz von Gauß auch für Grundgebiete der beschriebenen Art.

Satz 1.1 läßt sich ausdehnen auf allgemeine Bereiche, die wir hier „verallgemeinerte Normalbereiche" nennen, die aus der Vereinigung endlich vieler Normalbereiche bestehen, welche an den senkrechten geradlinigen Teilen des Randes zusammenstoßen.





Man wendet Satz 1.1 auf die Bereiche B_i an. An den Schnittflächen heben sich die Kurvenintegrale weg, da sie gegenläufig sind.

Satz 1.1 gilt entsprechend für die Ableitung von u nach der ersten Variablen

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_1} u\, dx = +\int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} d\vec{s}\,. \tag{1.3}$$

Das +-Zeichen entsteht, weil die Vertauschung der Variablen x_1, x_2 eine Spiegelung an der Geraden $(x_1 = x_2)$ und damit eine Umkehrung der Orientierung der Randkurve Γ bedeutet. Fassen wir Satz 1.1 und Aussage (1.3) zusammen mit $w = \binom{u}{0} = \binom{w_1}{w_2}$, $\operatorname{div} w = \frac{\partial}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} w_2$.

Wir erhalten somit eine Form des Satzes von Gauß in der Ebene

Satz 1.2

$$\int_B \operatorname{div} w \, dx = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -w_2 \\ +w_1 \end{pmatrix} d\vec{s},$$

sofern $w \in C^1(B, \mathbb{R}^2)$, und B ein bezüglich beider Koordinatenrichtungen verallgemeinertes Normalgebiet ist.

Wir wollen Satz 1.2 umschreiben, indem wir die Bogenlänge als Parameter für die Kurve Γ einführen. Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ eine stetige, stückweise gleichmäßig differenzierbare Parameterdarstellung der Randkurve Γ, und es gelte $\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in [\alpha, \beta]$, in denen φ differenzierbar ist. Die Bogenlänge des Kurvenstücks von $\varphi(\alpha)$ bis $\varphi(t)$ ist

$$s(t) = \int_\alpha^t |\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(\xi)| \, d\xi \tag{1.4}$$

wobei die Punkte t, in denen φ_ξ nicht existiert, ausgenommen sind. Da $\dot{s} \geq 1$ bis auf endlich viele Werte, liefert (1.4) eine umkehrbar eindeutige, orientierungserhaltende Abbildung des Parameterintervalls $[\alpha, \beta]$ auf $[0, |\Gamma|]$, $|\Gamma|$ =Länge der Kurve, und es gilt

$$\frac{dt(s)}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} = \frac{1}{|\dot{\varphi}(t(s))|}$$

Wir betrachten, daß

$$\frac{d}{ds}\varphi(t(s)) = \dot{\varphi}(t(s))\frac{dt(s)}{ds} = \frac{\dot{\varphi}(t(s))}{|\dot{\varphi}(t(s))|}$$

und erkennen, daß $\left|\frac{d}{ds}\varphi(t(s))\right| = 1$ und somit $\frac{d}{ds}\varphi(t(s))$ ein Tangentenvektor mit Norm 1 ist.

Offensichtlich ist $\frac{1}{|\dot{\varphi}(t(s))|}\big(-\dot{\varphi}_2(t(s)), \dot{\varphi}_1(t(s))\big)$ orthogonal zu $\dot{\varphi}(t(s))$ und daher ein <u>Normalenvektor</u> im Punkt $\varphi(t(s))$.

Wir wollen uns überlegen, ob dieser Normalenvektor ins Innere des Gebietes B oder ins Äußere gerichtet ist. Da der Übergang zur Bogenlänge als Parameter die Orientierung nicht verändert, genügt es, die Frage für $(-\dot{\varphi}_2(t), \dot{\varphi}_1(t))$ zu entscheiden.

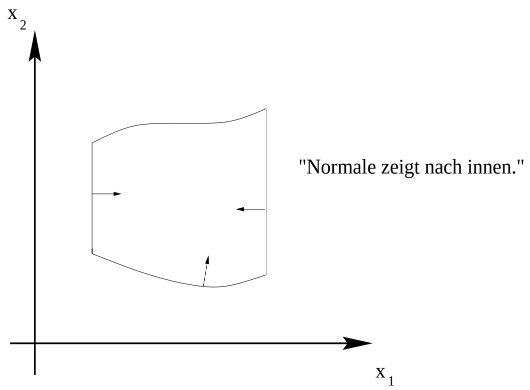
Für das Kurvenstück Γ_1 ist

$$(-\dot{\varphi}_2(t),\, \dot{\varphi}_1(t)) = (-g_1'(t),\, 1)$$

die zweite Komponente des letzten Vektors > 0, zeigt also „nach oben“ und damit ins Innere von B. Ähnlich schließt man für die anderen Kurvenstücke, d.h. der Normaleneinheitsvektor

$$\nu(s) = \frac{d}{ds}\varphi(t(s))$$

zeigt ins Innere von B.



Wir schreiben noch $\psi(s) = \varphi(t(s))$, d.h. ψ ist eine Parametrisierung von Γ mit der Bogenlänge als Parameter und beachten, daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -w_2(\psi(s)) \\ w_1(\psi(s)) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{ds}\psi(s) &= w_1\frac{d}{ds}\psi_2 - w_2\frac{d}{ds}\psi_1\Big|_s \\ &= -w(\psi(s)) \cdot \nu(s) \end{aligned}$$

Damit läßt sich Satz 1.2 umschreiben in Satz 1.3. Unter den Voraussetzungen von Satz (1.2) gilt

Satz 1.3 *(Satz von Gauß in der Ebene)*

$$\int\limits_B \operatorname{div} w\, dx = -\int\limits_0^{|\Gamma|} w(\varphi(s)) \cdot \nu(s)\, ds$$

Hierbei ist ψ eine Parametrisierung des Randes durch die Bogenlänge s und $\nu(s)$ der ins Innere von B gerichtete Normaleneinheitsvektor am Punkt $\psi(s)$.

Der Stokessche Satz in der Ebene. Setzt man in Satz 1.2

$$\tilde{w}_1 = -w_2,\ \tilde{w}_2 = w_1, \quad \operatorname{rot}\tilde{w} = \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{w}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{w}_1$$

so ergibt sich

Satz 1.4 *(Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)*

$$\int_B \operatorname{rot} \tilde{w}\, dx = \int_\Gamma \tilde{w} \cdot d\vec{s}$$

Illustration

Sei $B = B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| |x| \leq r\}$. Dann entspricht Γ dem Kreisrand ($|x| = r$).
Sei $w(x) = \binom{x_1}{x_2}$. Dann ist $\operatorname{div} x = 2$. Der nach innen gerichtete Normaleneinheitsvektor an der Stelle x ist $-\frac{x}{|x|}$. Nach dem Satz von Gauß gilt

$$2\pi r^2 = \int_B \operatorname{div} x\, dx = \int_0^{|\Gamma|} x \cdot -\frac{x}{|x|}\, ds = \int_0^{|\Gamma|} r\, ds = |\Gamma| r \Rightarrow |\Gamma| = 2\pi r$$

Als wichtige Anwendung des Gaußschen Satzes in der Ebene werden wir den Cauchyschen Integralsatz in Kapitel 3 behandeln. Zur Vorbereitung benötigen wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche im folgenden Kapitel behandelt werden.

2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Es bezeichnet $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen $z = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1$.

Wiederholung einiger Begriffe: $\mathcal{R}e(z) = \alpha, \quad \mathcal{I}m(z) = \beta$ („Real- und Imaginärteil“);
Betrag von z: $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \bar{z} = \alpha - i\beta$ (konjugierte komplexe Zahl);
ε-Umgebung von $z : U_\varepsilon(z) = \{z \leftarrow \mathbb{C} \big| |z - z_0| < \varepsilon\}$;
Konvergenzbegriff in $\mathbb{C}$: $z_m \to z \Leftrightarrow |z_m - z| \to 0$;
Komplexe Zahlen $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ werden in der sogenannten Gaußschen Ebene durch Punkte oder Vektoren $\binom{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}^2$ dargestellt;

Es sei $U(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ und $u : U(z_0) \to \mathbb{C}$ eine („komplexe“) Funktion, u läßt sich darstellen in der Form $u(z) = u(\xi + i\eta) = v(\xi, \eta) + iw(\xi, \eta), z = \xi + i\eta, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit reellwertigen Funktionen v und w.

Definition: u heißt an der Stelle z (komplex) differenzierbar $\Leftrightarrow$ es existiert eine Zahl, bezeichnet mit $u'(z)$, so daß

$$\lim_{\substack{h \to 0, h \neq 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} = u'(z)$$

Die komplexe Differenzierbarkeit zieht eine Fülle von Eigenschaften der Funktion u nach sich, wie wir desweiteren sehen werden. In diesem Kapitel zeigen wir nur, daß obige Differenzierbarkeit zwei Differentialgleichungen - die Cauchy-Riemannschen - zwischen $v(\xi, \eta) = \mathcal{R}e(u(z))$ und $w(\xi, \eta) = \mathcal{I}m(u(z))$ impliziert.

Satz 2.1 *Es sei $u : U(z) \to \mathbb{C}$ an der Stelle z differenzierbar.*

$$z = \xi + i\eta, u(z) = v(\xi, \eta) + iw(\xi, \eta) \Rightarrow u'(z) = v_\xi(\xi, \eta) + iw_\xi(\xi, \eta) = iv_\eta(\xi, \eta) + w_\eta(\xi, \eta')$$

Hierbei bezeichnet v_ξ, w_η etc. die entsprechende partielle Ableitung von v nach ξ etc..

Aus Satz 2.1 liest man ab

Satz 2.2 *Aus der komplexen Differenzierbarkeit der Funktion $u : U(z) \to \mathbb{C}$ folgt:*

$$v_\xi(\xi, \eta) = w_\eta(\xi, \eta), \; v_\eta(\xi, \eta) = -w_\xi(\xi, \eta)\,. \tag{2.1}$$

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung von Satz 2.2. Aus der Gültigkeit von (2.1) folgt die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion u (siehe Übungsaufgaben)

Die beiden partiellen Differentialgleichungen für v und w, also der Real- bzw. Imaginärteil von u, heißen **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**.

Beweis von Satz 2.1:

Wir nutzen die Beziehung

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{u(z+h)-u(z)}{h} = u'(z)$$

einmal für $h = h_1 \in \mathbb{R}, h_1 \to 0$ und einmal für $h = ih_2, h_2 \in \mathbb{R}, h_2 \to 0$ aus. Im ersten Fall folgt

$$\frac{u(z+h)-u(z)}{h} = \frac{v(\xi+h_1,\eta)-v(\xi,\eta)}{h_1} + i\frac{w(\xi+h_1,\eta)-w(\xi,\eta)}{h_1} \to u'(z)$$

d. h. die Existenz der partiellen Ableitungen v_ξ und w_ξ und die Gleichheit $v_\xi(\xi,\eta) + iw_\xi(\xi,\eta) = u'(z)$. Setzen wir hingegen $h = ih_2, h_2 \in \mathbb{R}$, folgt

$$\frac{u(z+h)-u(z)}{h} = \frac{v(\xi,\eta+h_2)-v(\xi,\eta)}{ih_2} + i\frac{w(\xi,+h+h_2)-w(\xi,\eta)}{ih_2} \to u'(z)$$

und

$$-iv_\eta(\xi,\eta) + w_\eta(\xi,\eta) = u'(z)\,.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil von $u'(z)$ ergibt sich

$$v_\xi = w_\eta,\ w_\xi = -v_\eta$$

$\square$

Beispiel: (i) Die Funktion $u(z) = \bar{z}$ ist nicht differenzierbar!

$$u(z) = \xi - i\eta, \qquad v_\xi = 1, w_\eta = -1, \qquad v_\xi \neq w_\eta\,!$$

Glücklicherweise ist $u(z) = z$ differenzierbar.

(ii) $f(z) = z^m$ ist komplex bezüglich $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar, da $\frac{(z+h)^m - z^m}{h} = \frac{1}{h}(z+h-z)\sum\limits_{i=0}^{m-1}(z+h)^j z^{m-1-j} \to mz^{m-1}$ für $h \to 0, h \in \mathbb{C}, h \neq 0$. Konvergente Potenzreihen sind komplex differenzierbar, wenn die abgeleitete Reihe auf Kompakta gleichmäßig konvergiert, etwa $\sin z, \cos z, e^z$.

Mit $z = \xi + i\eta$, ξ, η reell, gilt

$$e^z = e^\xi e^{i\eta} = e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta)$$

Es gilt in der Tat $(e^\xi \cos\eta)_\eta = (-e^\xi \sin\eta)_\xi$ und $(e^\xi \cos\eta)_\xi = (e^\xi \sin\eta)_\eta$, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

Wir werden später sehen, daß eine auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ differenzierbare Funktion u unendlich oft differenzierbar ist. Aus den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen folgt dann

$$v_{\xi\xi} = w_{\xi\eta}, \quad w_{\xi\eta} = -v_{\eta\eta} \text{ und damit } v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0. \text{ Analog gilt } \quad w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = 0\,.$$

Man drückt dies aus in

Satz 2.3 *Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion sind harmonische Funktionen bezüglich ξ, η.*

3 Der Cauchysche Integralsatz

Auch in der komplexen Ebene läßt sich der Begriff des Kurvenintegrals einführen.

Definition: Eine stetige Abbildung $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ eines reellen Intervalls $[\alpha, \beta]$ in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ heißt Parameterdarstellung einer Kurve Γ.

Eine Kurve Γ in $\mathbb{C}$ wird wie im $\mathbb{R}^n$ als Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen definiert.

Γ heißt stückweise glatt, wenn φ bis auf endlich viele Punkte differenzierbar ist und die Ableitungen gleichmäßig stetig sind. Die Ableitung φ ist wie üblich als Limes von Differenzenquotienten definiert. Mit $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ (φ_1, φ_2 reelle Funktionen), ist $\dot\varphi = \dot\varphi_1 + i\dot\varphi_2$.

Es sei nun $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion (präziser: $f : \{z \in \mathbb{C} \big| z = \varphi(t),\, t \in [\alpha, \beta]\} \to \mathbb{C}$)

Das Kurvenintegral $\int\limits_\Gamma f\, dz$ läßt sich definieren als Limes von Riemannschen Summen

$$\sum_{j=1}^{N} f(\varphi(\tau_j))(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j))$$

mit einer Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$ und einer Belegung $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$.

Alternativ, falls die Parameterdarstellung φ von Γ stückweise glatt ist, definiert man

$$\int\limits_\Gamma f\, dz = \sum_{i=1}^{L} \int\limits_{\Gamma_i} f\, dz = \sum_{i=1}^{L} \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} f(\varphi(t))\dot\varphi(t)\, dt$$

Hierbei sind Γ_i die Teilkurven und $[\alpha_i, \beta_i]$ die Teilintervalle, in denen Γ glatt ist. Beachte, daß $f\dot\varphi$ kein Skalarprodukt ist wie bei reellen Kurvenintegralen, sondern eine komplexe Multiplikation.

Der Cauchysche Integralsatz ist ein überraschender, zentraler Satz der sogenannten Funktionentheorie, also der Theorie differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Er erscheint in dem hier eingeschlagenen Beweisweg als Konsequenz des Gaußschen Satzes in der Ebene. Wir benötigen daher eine, für Anwendungen völlig ausreichende Voraussetzung an die Kurve Γ.

Voraussetzung 3.1 *Γ sei Randkurve eines verallgemeinerten, einfach zusammenhängenden Normalbereichs $B \subset \mathbb{C}$ mit einer stetigen, stückweise gleichmäßig stetig differenzierbaren Parametrisierung $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Von einer Randkurve sprechen wir, wenn Γ den Rand von B nicht mehrfach in der gleichen Richtung durchläuft.*

In der Tat erfüllt die in Kapitel 1 angegebene Parametrisierung des Randes diese Voraussetzung.

Der Begriff Normalbereich wurde in Kapitel 1 für $B \subset \mathbb{R}^2$ eingeführt und wird hier in Analogie bezüglich der reellen und imaginären Achse verwendet.

Satz 3.1 *(Cauchyscher Integralsatz) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Es sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex stetig differenzierbar. Ferner sei Γ eine* *<u>geschlossene</u>* *Kurve in Ω und genüge der Voraussetzung 3.1. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f\,dz = 0 \tag{3.1}$$

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes in einfach zusammenhängenden Gebieten. Gilt für eine stetige komplexe Funktion f die Bedingung (3.1) für alle geschlossenen Kurven Γ, welche Voraussetzung 3.1 genügen, so ist f komplex differenzierbar. Dieses Ergebnis ist auch als Satz von Morera bekannt (siehe Übungsaufgabe).

Beweis von Satz 3.1 : Wir übersetzen das Integral $\int\limits_\Gamma f\,dz$ ins Reelle. Es gilt

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_0^1 f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,dt$$

wobei $\int\limits_0^1 = \sum \int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}$, $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_m = 1$ und φ in $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ gleichmäßig stetig differenzierbar ist.

Sei $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, φ_1, φ_2 reell, und $\psi(t) = \binom{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$.

Schließlich sei $f(\xi + i\eta) = u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta)$ mit reellen Funktionen u, v und reellen Variablen ξ, η

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f\,dz \quad &= \\
&= \int_0^1 f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,dt = \int_0^1 (u(\psi(t)) + iv(\psi(t)))(\dot{\varphi}_1(t) + i\dot{\varphi}_2(t))\,dt = \\
&= \int_0^1 [u(\psi(t))\dot{\varphi}_1(t) - v(\psi(t))\dot{\varphi}_2(t)]\,dt + i\int_0^1 [u(\psi(t))\dot{\varphi}_2(t) + v(\psi(t))\dot{\varphi}_1(t)]\,dt =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} u(\psi(t)) \\ -v(\psi(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\psi_1(t) \\ \dot\psi_2(t) \end{pmatrix} dt + i \int_0^1 \begin{pmatrix} v(\psi(t)) \\ u(\psi(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\psi_1(t) \\ \dot\psi_2(t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{\tilde\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} + i \int_{\tilde\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

Hierbei ist $\tilde\Gamma$ die zur Parametrisierung ψ gehörige geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$. (Würde man $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ identifizieren, wäre $\Gamma = \tilde\Gamma$).

Nach dem Gaußschen Satz in der Ebene, Satz 1.3, folgt

$$\int_\Gamma f\, dz = \int_B (-v_\xi - u_\eta)\, d\xi\, d\eta + i \int_B (u_\xi - v_\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist aber sowohl $-v_\xi - u_\eta = 0$ als auch $u_\xi - v_\eta = 0$. Daraus folgt $\int_\Gamma f\, dz = 0$. □

Es gibt sehr viele Beweise des Cauchyschen Integralsatzes. Schöner ist es, wenn man beim Beweis innerhalb der komplexen Funktionentheorie bleibt und nicht den Umweg über das Reelle beschreitet. Die Aussage des Cauchyschen Integralsatzes gilt im Allgemeinen nicht, wenn f nicht komplex differenzierbar ist.

Beispiele

(i) (Übungsaufgabe): Sei $f(z) = \bar z$ und $\Gamma = \{re^{it} | 0 \le t < 2\pi\}$. Γ läuft in positiver mathematischer Richtung entlang des Kreises $C_r = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = r\}$. Dann gilt $\int_\Gamma f(z)\, dz \neq 0$

(ii) **Lemma 3.1** *Sei Γ definiert wie in Beispiel (i). Dann gilt*

$$\int_\Gamma z^{-1}\, dz = 2\pi i$$

Bemerkung: z^{-1} ist bei $0 + 0i$ nicht differenzierbar, daher sind die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes nicht erfüllt. Wenn Γ den Nullpunkt nicht umschließen würde, wäre $\int_\Gamma z^{-1}\, dz = 0$ nach Satz 3.1.

Beweis von Lemma 3.1: $\int_\Gamma z^{-1}\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$ □

Wunderbarerweise gilt jedoch

Lemma 3.2 *Sei $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$ und Γ wie oben. Dann gilt*

$$\int_\Gamma z^m \, dz = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma z^{-m} \, dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-m} \, rie^{it} \, dt = \\
&= ir^{-m+1} \int_0^{2\pi} e^{(1-m)it} \, dt = \\
&= ir^{-m+1} \frac{1}{1-m} \, i^{-1} e^{(1-m)it} \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

4 Die Cauchysche Integralformel

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Punktmenge. Es sei Γ eine geschlossene Kurve in Ω, welche der folgenden Standardvoraussetzung genüge.

Voraussetzung 4.1 *Γ besitze eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ und die Menge $\{\varphi(t) | t \in [0,1]\}$ sei Rand eines einfach zusammenhängenden verallgemeinerten Normalbereichs B. Γ sei positiv orientiert und durchlaufe den Rand von ∂B nicht mehrfach in der gleichen Richtung.*

Der Begriff „positive Orientierung“ wurde hier nicht präzise definiert. Beim Durchlaufen des Parameterintervalls von 0 bis 1 liegt das von der Kurve eingeschlossene Gebiet B links zur Fahrtrichtung von $\varphi(t)$. Ein möglicher - nicht äquivalenter! - Ersatz für die Bedingung, daß Γ positiv orientiert ist und ∂B nicht mehrfach in der gleichen Richtung durchläuft, ist

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = 1 \,, \quad \text{wenn} \quad z_0 \in B \,.$$

Diese Bedingung läßt z. B. zu, daß die Kurve $(n+1)$-mal in positiver und n-mal in negativer Richtung durchlaufen wird.

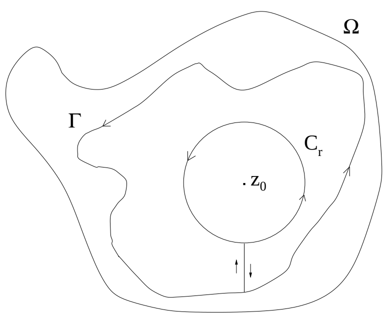
Satz 4.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ nicht leer und offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex stetig differenzierbar. Es sei Γ eine geschlossene Kurve in Ω, welche der Voraussetzung 4.1 genüge. Ferner sei $z_0 \in \Omega, z_0$ liege in dem beschränkten Bereich B, welcher Γ als Rand hat. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \qquad .$$

Beweis: Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

wenn C_r die positiv orientierte Randkurve des Kreises $\{z \in \mathbb{C} \big| |z - z_0| = r\} \subset B$ ist.



Es gilt

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = A_r + \tilde{A}$$

Mit Lemma 3.1 gilt

$$\tilde{A} = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{C_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi\, f(z_0)$$

Weiterhin gilt wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f, daß

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq K,\ z \in B\,.$$

Daraus folgt

$$|A_r| = \left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq K|C_r| = K\cdot 2\pi r \to 0 \quad \text{für} \quad r \to 0$$

Daraus folgt

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \tilde{A} = 2i\pi\, f(z_0)$$

□

Da die Funktion $\frac{1}{z-z_0}$, $z \in \Gamma$, bezüglich z_0 beliebig oft komplex stetig differenzierbar ist, ist auch $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ beliebig oft bezüglich z_0 komplex differenzierbar. Dieses überraschende Ergebnis halten wir fest in

Satz 4.2 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in einer offenen, nichtleeren Punktmenge stetig differenzierbar. Dann ist f in Ω unendlich oft differenzierbar.*

Eine einfache, weitere Überlegung zeigt, daß sich f als konvergente Potenzreihe schreiben läßt. Es sei etwa $y \in U_r(0) \subset \mathbb{C}, r$ genügend klein, und $\Gamma = C_{r+\delta}$ die positiv orientierte Randkurve zum Kreis $\{z \in \mathbb{C}\big|\,|z| = r+\delta\}, \delta > 0$. Die Funktion f sei stetig komplex differenzierbar in $\{z \in \mathbb{C}\big|\,|z| = r+2\delta\}$. Dann gilt wegen der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-y}\,dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z}\frac{1}{1-y/z} = \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{y}{z}\right)^m dz \end{aligned}$$

Da $|\frac{y}{z}| \le \frac{r}{r+\delta}$, $z \in \Gamma$, konvergiert die Summe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{z}\right)^m$ gleichmäßig, und wir dürfen Summation und Integration vertauschen.

$$f(y) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, y^m, \quad a_m = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{m+1}}\, dz$$

In der Tat ist damit $f(y)$ als konvergente Potenzreihe mit Null als Entwicklungspunkt dargestellt. Entsprechend erhalten wir mit einer Verschiebung um die komplexe Zahl y_0 eine Entwicklung um den Punkt y_0. Wir halten fest (mit $\epsilon = r + 2\delta$):

Satz 4.3 *Sei $f : U_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar und $\epsilon' < \epsilon$. Dann läßt f sich in $U_{\epsilon'}(z_0)$, $0 < \epsilon' < \epsilon$ in eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 entwickeln:*

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

Bemerkung: Eine „Formel“ für a_m mit $z_0 = 0$ ist dem Beweis zu entnehmen.

In dem nächsten Kapitel findet sich eine klassische Anwendung der Cauchyschen Integralformel, nämlich die explizite Berechnung spezieller uneigentlicher Integrale.

5 Der Residuensatz

Wir betrachten Funktionen f, die in der Umgebung $U(z_0)$ eines Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{m=-j}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \tag{5.1}$$

mit einer konvergenten Potenzreihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m$, $a_m \in \mathbb{C}$ haben.

Offensichtlich ist $f(z)$ an der Stelle z_0 nicht definiert, man spricht von einer Laurent-Entwicklung von f und nennt Singularitäten der oben angegebenen Art ($\sim (z-z_0)^{-m}$, $0 < m \leq j$) Polstellen.

In $U(z_0) - \{z_0\}$ ist f komplex differenzierbar aufgrund der Darstellung durch eine konvergente Potenzreihe.

Sei $B_r(z_0) = B_r = \{z \in \mathbb{C} \big| |z - z_0| \leq r\} \subset U(z_0)$ und C_r die positiv orientierte Randkurve von B_r. Aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels erhalten wir

Satz 5.1 *Sei f gegeben wie in (5.1). Dann gilt*

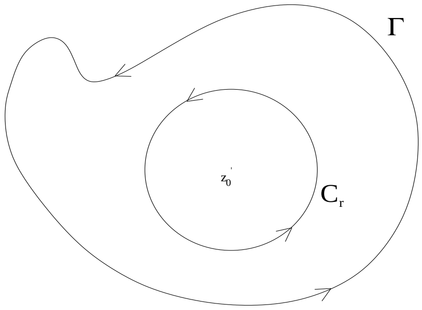
$$\int_{C_r} f(z)\, dz = 2i\pi a_{-1}$$

Die Zahl $a_{-1} \in \mathbb{C}$ nennt man das Residuum der Funktion f an der Stelle z_0:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Es ist aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes klar, daß man die Kurve C_r in Satz 5.1 durch eine positiv orientierte Randkurve Γ ersetzen kann, welche einen einfach zusammenhängenden verallgemeinerten Normalbereich B, der B_r enthält, berandet. Zum Begriff Randkurve sei an Voraussetzung 3.1 erinnert. Hierbei verlangen wir, daß f in der Menge $B' \setminus \{z_0\}$ holomorph ist, $B' \supset\supset B$. (Die etwas größere Menge B' haben wir eingeführt, damit die Existenz des Kurvenintegrals von f über ∂B sichergestellt ist.)

Satz 5.2 *Unter den oben getroffenen Voraussetzungen für* Γ *und* f *gilt* $\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 2i\pi a_{-1}$



Es kommt oft vor, daß eine Funktion f in einem Gebiet Ω holomorph ist (d.h. stetig komplex differenzierbar) bis auf endlich viele Polstellen $z_k \in \Omega$. Die Funktion f läßt sich in einer Umgebung $U(z_k), z_j \notin U(z_k)\, \forall j \neq k$, darstellen als Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{m=-j}^{\infty} a_m (z - z_k)^m,\ z \in U(z_k)$$

und es gilt der „Residuensatz"

Satz 5.3 *Sei* Γ *positiv orientierte Randkurve eines einfach zusammenhängenden, verallgemeinerten Normalbereiches* B *und* $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig und im Innern von* B *stetig komplex differenzierbar bis auf endlich viele Polstellen* $z_k \in \operatorname{int} B$*. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k)\,. \tag{5.2}$$

Eine Anwendung dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel behandeln.

6 Berechnung uneigentlicher reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich häufig in sehr eleganter Weise reelle uneigentliche Integrale berechnen. Wir wollen dies anhand des klassischen Beispiels

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

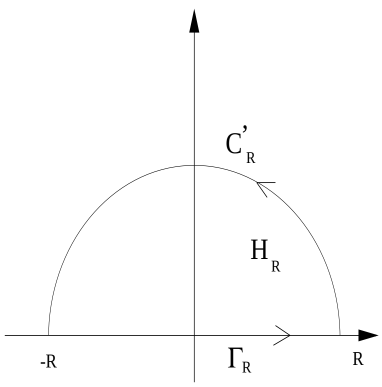
illustrieren. Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \varepsilon_R\,,$$

wobei $\varepsilon_R \to 0$ aufgrund der Existenz des uneigentlichen Integrals. Wir bezeichnen

$$\varepsilon'_R = \int\limits_{C'_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz\,.$$

Hierbei ist C'_R die positiv orientierte Randkurve des oberen Halbkreises $H_R = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| \leq R,\, \mathcal{I}m(z) > 0\}$. Da der Nenner sich durch $(|R|-1)^4$ nach unten abschätzen läßt, folgt $\varepsilon'_R \to 0$, für $R \to \infty$.



Es gilt also

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^4} - \varepsilon_R + \varepsilon'_R\,.$$

Hierbei ist Γ_R die aus dem reellen Intervall $[-R, R]$ und C'_R zusammengesetzte Kurve.

Die Funktion $1+z^4$ hat die vierten Wurzeln von -1 als Nullstellen: $\eta_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \eta_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}, \eta_3 = e^{\frac{-i\pi}{4}}, \eta_4 = e^{\frac{-3i\pi}{4}}$. Die Singularitäten von $\frac{1}{1+z^4}$ der oberen Halbebene ($\mathcal{I}m(z) \geq 0$) sind η_1, η_2.

Es ist $1+z^4=\prod_{i=1}^4(z-\eta_j)$. Die Funktion $g_j(z)=\frac{z-\eta_j}{1+z^4}$ ist holomorph in einer Umgebung von η_j.

$$\int\limits_{C_r(\eta_j)} \frac{1}{1+z^4}\,dz=\int\limits_{C_r(\eta_j)} \frac{1}{z-\eta_j}\,g_j(z)\,dz=2i\pi g_j(\eta_j)$$

nach der Cauchyschen Integralformel. $C_r(\eta_j)$ ist die positiv orientierte Randkurve des Kreisleins um η_j mit Radius r.

Berechnung von $g_j(\eta_j)$:

$$\begin{aligned} g_j(\eta_j) &= \lim_{\substack{z\to\eta_j\\ z\neq\eta_j}} \frac{z-\eta_j}{1+z^4}=\lim_{\substack{z\to\eta_j\\ z\neq\eta_j}} \frac{1}{\frac{1+z^4-(1+\eta_j^4)}{z-\eta_j}}=\frac{1}{4z^3}\Big|_{\eta_j}= \\ &= \frac{1}{4\eta_j^3}\,. \end{aligned}$$

Beachte, daß $1+\eta_j^4=0$ und $\frac{1+z^4-(1+\eta_j^4)}{z-\eta_j}$ gegen die <u>Ableitung</u> von $1+z^4$ an der Stelle η_j konvergiert. Daraus folgt

$$\int\limits_{C_r(\eta_j)} \frac{1}{1+z^4}\,dz=\frac{i\pi}{2\eta_j^3}\,.$$

Entwickelt man g_j in eine Potenzreihe um η_j, erkennt man, daß $g_j(\eta_j)$ das Residuum von $\frac{g_j(z)}{z-\eta_j}=\frac{1}{1+z^4}$ ist. Aus dem Residuensatz folgt daher, daß

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz=2i\pi[\mathrm{Res}(\frac{1}{1+z^4},\eta_1)+\mathrm{Res}(\frac{1}{1+z^4},\eta_2)]\,,$$

denn nur die Singularitäten η_1,η_2 werden von Γ_R umschlossen. $\Rightarrow$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz=2i\pi(\frac{1}{4\eta_1^3}+\frac{1}{4\eta_2^3})=\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{\eta_1^3}+\frac{1}{\eta_2^3})$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \eta_1^{-3}+\eta_2^{-3} &= e^{-\frac{i\pi}{4}}+e^{\frac{-3i\pi}{4}}=e^{\frac{-i\pi}{4}}+e^{-i\pi+i\pi-\frac{3i\pi}{4}}= \\ &= e^{\frac{-i\pi}{4}}-e^{\frac{i\pi}{4}}=-2i\sin\frac{\pi}{4}=-2i\,\sin 45^o=-2i\frac{1}{\sqrt{2}}=-i\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz=\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

Grenzübergang $R\to\infty$ ergibt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4}\,dz=\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$.

7 Berechnung unendlicher Reihen mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie

In diesem Kapitel beweisen wir die bekannte, von Euler stammende Beziehung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

welche in seinen Grabstein eingemeißelt ist, sowie andere Gleichungen dieser Art, wobei wir die Hilfsmittel der komplexen Funktionentheorie verwenden.

Die im Reellen bekannte Funktion $\ln(x)$ läßt sich auf verschiedene Weise ins Komplexe fortsetzen. Die einfachste Definition ist

$$\ln z = \int_1^z \frac{1}{y}\,dy \qquad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_- .$$

Hierbei ist $\int_1^z$ das Kurvenintegral über eine beliebige, 1 und z verbindende, nicht $\mathbb{R}_-$ schneidende Kurve Γ . Wegen des Cauchyschen Integralsatzes ist der Wert nur von z abhängig. Unter $\mathbb{R}_-$ wird die Menge aller Zahlen $\{\alpha + 0 \cdot i, \alpha \leq 0\}$ verstanden. Durch den Ausschluß von $\mathbb{R}_-$ erreicht man, daß die Singularität bei 0 nicht von Γ umschlossen wird.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j = \ln(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$ für komplexe Werte fortzusetzen und durch analytische Fortsetzung den Definitionsbereich auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ auszudehnen.

Die dritte Möglichkeit wäre die „Zeigerdarstellung"

$$z = re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}_+,\ \theta \in \,]-\pi, \pi[$$

$$\ln z := \ln r + i\theta\,.$$

Man beachte, daß

$$\lim_{\beta \to +0} \ln(\alpha + i\beta) - \lim_{\beta \to +0} \ln(\alpha - i\beta) = 2i\pi \quad \text{für} \quad \alpha < 0\,.$$

Auf dem negativen reellen Strahl ist der auf diese Weise definierte Logarithmus nicht definiert, bei Annäherung an den negativen reellen Strahl durch komplexe Zahlen mit positiven bzw. negativen Imaginärteil hat die Funktion ln einen Sprung von $2i\pi$.

Da $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}$, sieht man, daß die Darstellung $z = re^{i\theta}$ nicht auf ein eindeutiges θ führt, wenn man nur $\theta \in \mathbb{R}$ verlangt. Fordert man z. B. $\theta \in]\pi, 3\pi]$ und definiert $\log z = \log r + i\theta$, so „befindet man sich in einem anderen Zweig des Logarithmus".

Wir stellen einige einfache Identitäten zusammen, um spezielle Reihen zu berechnen. $\ln z$ soll auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$definiert sein und $\ln(-1+\beta i) \to \pm i\pi$ für $\beta \to \pm 0$.

Lemma 7.1 *Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Dann gilt*

$$J(a) := \int_1^a \frac{\ln z}{1+z}\,dz + \int_1^{1/a} \frac{\ln z}{1+z}\,dz = \frac{1}{2}(\ln a)^2 \tag{7.1}$$

Beweis: Mit Hilfe der Substitution $z \to \frac{1}{z}$ und der Beziehung $\ln(z^{-1}) = -\ln z$ erkennt man

$$\int_1^a \frac{\ln z}{1+z}\,dz = \int_1^{1/a} \frac{\ln z}{z(1+z)}\,dz = \int_1^{1/a} \frac{\ln z}{z} - \int_1^{1/a} \frac{\ln z}{1+z}\,dz\,.$$

Daraus folgt

$$\Big(\int_1^a + \int_1^{1/a}\Big) \frac{\ln z}{1+z}\,dz = \frac{1}{2}(\ln z)^2\Big|_1^{1/a} = \frac{1}{2}(\ln a)^2\,.$$

Die schematische Anwendung der Rechenregeln der reellen Analysis ist natürlich beweisbedürftig. Ein möglicher Beweis besteht in dem Permanenzprinzip, welches besagt, daß im Reellen gültige Funktionalgleichungen für analytische Funktionen mit Hilfe analytischer Fortsetzung auch im Komplexen gültig sind. □

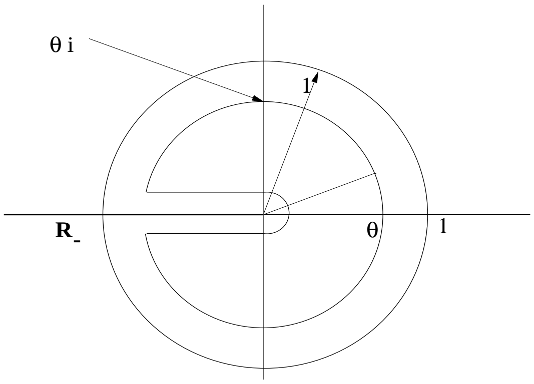
Wir werden (7.1) für $a = i$ anwenden und die Integrale umformen. Hierzu betrachten wir

$$J_\theta(i) = \int_\theta^{i\theta} \frac{\ln z}{1+z}\,dz + \int_\theta^{-i\theta} \frac{\ln z}{1+z}\,dz\,, \quad \theta \in \mathbb{R},\, 0 < \theta < 1 \tag{7.2}$$

und beachten, daß

$$J_\theta(i) \to J(i)\,, \qquad (\theta \to 1)\,.$$

Die Kurvenintegrale in (7.2) erstrecken wir wegen der geplanten Umformungen nur über Kurven, die in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \big|\, |z| \le \theta \big|\, \mathrm{dist}(\mathbb{R}_-, z) \ge \varepsilon\}$ laufen.



Hilfssatz 7.1

$$\left(\int_1^i + \int_1^{-i}\right) \frac{\ln(z)}{1+z}\, dz \quad = \quad \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2} - \frac{\pi^2}{4}$$

Beweis: Wir führen eine Reihenentwicklung durch und wenden partielle Integration an. Die Maßnahmen sind wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen für $0 < \theta < 1$ gerechtfertigt.

$$\begin{aligned}
J_\theta(i) &= \left(\int_\theta^{i\theta} + \int_\theta^{-i\theta}\right)\left(\frac{\ln z}{1+z}\right) dz = \left(\int_\theta^{i\theta} + \int_\theta^{-i\theta}\right)\left[\ln z \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^m\right] dz \\
&= \left(\int_\theta^{i\theta} + \int_\theta^{-i\theta}\right)\left[\ln z\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{z^m}{m}\right)'\right)\right] dz = \\
&= -\left(\int_\theta^{i\theta} + \int_\theta^{-i\theta}\right)\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}z^{m-1}\right] dz + \left(\ln z \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{z^m}{m}\right)\left(\Big|_\theta^{i\theta} + \Big|_\theta^{-i\theta}\right) \\
&= A + B
\end{aligned}$$

mit

$$A = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2} z^m \left(\Big|_\theta^{i\theta} + \Big|_\theta^{-i\theta}\right)$$

und

$$B = \ln(i\theta)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(i\theta)^m}{m} + \ln(-i\theta)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(-i\theta)^m}{m} - 2\ln\theta\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\theta^m}{m}$$

Es ist klar (gleichmäßige Konvergenz), daß

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 1} A &= -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\,z^m\big(\big|_1^i+\big|_1^{-i}\big)\\ &= +2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l)^2}(i)^{2l}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l^2}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}=+\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\end{aligned}$$

Die Terme $(-1)^{m+1}z^m\big(\big|_i+\big|_{-i}\big)$ heben sich weg für $m=2l+1$; es bleibt $m=2l$. Wir berechnen die Summe S_1+S_2 der ersten beiden Summanden in der Definition von B.

Es ist

$$\begin{aligned}&\ln(i\theta)(-1)^{m+1}(i\theta)^m+\ln(-i\theta)(-1)^{m+1}(-i\theta)^m=\\ &\qquad=\ln i(-1)^{m+1}(i\theta)^m+\ln(-i)(-1)^{m+1}(-i\theta)^m=\\ &\qquad=(-1)^{m+1}\Big[\frac{i\pi}{2}(i\theta)^m-\frac{i\pi}{2}(-i\theta)^m\Big]=(*)\end{aligned}$$

Für $m=2l, l\in\mathbb{N}$ gilt

$$(*)=0$$

und für $m=2l+1$ gilt

$$(*)=\frac{i\pi}{2}\big(i(-1)^l\theta^{2l+1}+i(-1)^l\theta^{2l+1}\big)=(-1)^{l+1}\pi\theta^{2l+1}$$

$$S_1+S_2=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{2l+1}\pi\theta^{2l+1}$$

Der Wert dieser Reihe läßt sich elementar angeben.

Es gilt

$$\begin{aligned}(\operatorname{arctg} x)'&=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{2m}\Rightarrow\\ \operatorname{arctg} x&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\Rightarrow\\ S_1+S_2&=-\pi\operatorname{arctg}\theta\ \to\ -\pi\operatorname{arctg}1=\frac{-\pi^2}{4}\quad\text{für}\quad\theta\to 1\end{aligned}$$

Für den dritten Summanden in der Definition von B überlegt man sich, daß $\lim\limits_{\theta\to 1} S_3=0$. Es gilt nämlich

$$(\ln\theta)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\theta^m}{m}\Big)=(\ln\theta)(\ln(1+\theta))\to 0\qquad\theta\to 0\,.$$

Wir erhalten somit

$$\lim_{\theta\to 1} B = \frac{-\pi^2}{4}$$

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so folgt

$$J(i) = A + B = \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2} - \frac{\pi^2}{4}$$

und damit die Behauptung des Hilfssatzes. □

Wir setzen („Zeta-Funktion an der Stelle 2 “)

$$\zeta(2) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\,, \qquad \zeta_a(2) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\,.$$

Es gilt

$$\zeta_a(2) = \frac{1}{2}\,\zeta(2)\,, \tag{7.3}$$

da

$$\zeta_a(2) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} - 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l)^2} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\,.$$

Satz 7.1 *Es gilt*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Beweis: Nach Lemma 7.1 ist

$$J(i) = \frac{1}{2}(\ln i)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Nach Hilfssatz 7.1 ist

$$J(i) = \frac{3}{2}\,\zeta_a(2) - \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}\zeta_a(2) = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \zeta_a(2) = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}$$

und wegen (7.3)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

□

Wir setzen $\zeta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^s}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ („ζ-Funktion"). Für die Werte von $\zeta(2m), m \in \mathbb{N}$, gibt es eine elementare Darstellung

$$\zeta(2m) = c_{2m}\pi^{2m}$$

c_{2m} ist rational und wird durch eine Rekursionsrelation berechnet: $c_4 = \frac{1}{90}$, $c_6 = \frac{1}{945}$. Man kann z. B. den hier dargestellten Beweis zur Berechnung von $\zeta(2)$ auf den Fall $\zeta(2m)$ übertragen, indem man $(\int_1^i + \int_1^{-i}) \frac{(\ln t)^{2m-1}}{1+t}\, dt$ berechnet. Für ungerade Werte von s ist eine elementare Darstellung für $\zeta(s)$ bis heute nicht bekannt (und vielleicht auch nicht möglich, da sich so viele große Mathematiker darum bemüht haben).

Es ist bekannt, daß $\zeta(3)$ transzendent ist. Wir wollen in diesem Kapitel noch wenigstens die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)^3}$ berechnen. Zunächst erwähnen wir

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = \frac{3}{2}\zeta(3) \tag{7.4}$$

Beweis von (7.4) : Wir führen den Beweis ähnlich wie in Hilfssatz (7.1), unterdrücken aber aus Zeitgründen die dort geführte saubere Rechtfertigung der partiellen Integration, welche durch die Einführung des Parameters $\theta \to 1$ erreicht wurde. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt &= \int_0^1 (\ln t)^2 \Big(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, t^m\Big)\, dt = \int_0^1 (\ln t)^2 \Big(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \Big(\frac{t^m}{m}\Big)'\Big)\, dt = \\
&= -2\int_0^1 (\ln t) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{t^{m-1}}{m}\, dt = -2\int_0^1 (\ln t) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \Big(\frac{t^m}{m^2}\Big)'\, dt = \\
&= 2\int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \Big(\frac{t^m}{m^3}\Big)'\, dt = 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^3} =: 2\zeta_a(3)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\zeta_a(3) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^3} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)^3} = \zeta(3) - 2\cdot\frac{1}{8}\zeta(3) \\
&= \frac{3}{4}\zeta(3)
\end{aligned}$$

folgt

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = \frac{3}{2}\zeta(3)$$

□

Anmerkung: Der „n-Logarithmus“ ist definiert durch

$$L_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^n} \qquad (n = 2 : \text{„Dilogarithmus“}) .$$

Offensichtlich läßt sich $L_n(z)$ mit $\int\limits_0^z \frac{(\ln t)^{n-1}}{1 \pm t}\, dt$ in Beziehung bringen. Hinweise finden sich in der Integraltafel von Gröbner-Hofreiter II.

Lemma 7.2

$$\int\limits_{1/a}^{a} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = \frac{1}{3}(\ln a)^3 \tag{7.5}$$

Beweis:

$$\int\limits_{1}^{a} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = -\int\limits_{1}^{1/a} \frac{(\ln t)^2}{(1+t^{-1})t^2}\, dt = -\int\limits_{1}^{1/a} \frac{(\ln t)^2}{t(1+t)}\, dt =$$
$$= -\int\limits_{1}^{1/a} \frac{(\ln t)^2}{t}\, dt + \int\limits_{1}^{1/a} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt .$$

Daraus folgt

$$\int\limits_{1/a}^{a} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = -\frac{1}{3}(\ln t)^3\Big|_1^{1/a} = \frac{1}{3}(\ln a)^3 .$$

□

(7.5) wird insbesondere für $a = i$ benutzt.

$$\int\limits_{-i}^{i} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = \frac{1}{3}\Big(\frac{i\pi}{2}\Big)^3 = \frac{-i}{24}\pi^3 \tag{7.6}$$

Es gilt der

Hilfssatz 7.2

$$\int\limits_{-i}^{i} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\, dt = 4i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} - \frac{i\pi^3}{6}$$

Beweis: Wir verzichten auf die saubere Rechtfertigung der partiellen Integrationen - sie wird ähnlich wie bei Hilfssatz 7.1 durchgeführt.

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{i} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\,dt &= \int_{-i}^{i} (\ln t)^2 \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m t^m\,dt = \int_{-i}^{i} (\ln t)^2 \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\Big(\frac{t^m}{m}\Big)'\,dt = \\ &= -2\int_{-i}^{i} \ln t \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\Big(\frac{t^m}{m^2}\Big)'\,dt + \Big[(\ln t)^2 \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m}\Big]_{-i}^{i} = \\ &= 2\int_{-i}^{i} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^{m-1}}{m^2}\,dt - \Big[2\ln t \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m^2}\Big]_{-i}^{i} \\ &\quad + \Big[(\ln t)^2 \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m}\Big]_{-i}^{i} = \\ &= \Big[2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m^3}\Big]_{-i}^{i} + \text{ die beiden Randterme } R_1 + R_2\,.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\Big[2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m^3}\Big]_{-i}^{i} = 4\sum_{l=0}^{\infty}\frac{i^{2l+1}}{(2l+1)^3} = 4i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^3}\,.$$

(Man hört schon die Nachtigall trapsen!)

$$R_1 = \Big[-2\ln t \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m^2}\Big]_{-i}^{i} = +4\frac{i\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^{2l}}{(2l)^2} = \frac{i\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l^2} = -\frac{i\pi}{2}\zeta_a(2)\,.$$

Schließlich gilt:

$$R_2 = \Big[(\ln t)^2 \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^m}{m}\Big]_{-i}^{i} = -\frac{\pi^2}{4}\cdot 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{i^{2l+1}}{2l+1} = -i\frac{\pi^2}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)}\,.$$

Die Reihe $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)}$ läßt sich mit Hilfe reeller Analysis berechnen. Unterbrechung des Beweises von Hilfssatz 9.2.

Lemma 7.3

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)} = \frac{\pi}{4} \qquad \textit{(Leibniz)}$$

Beweis: Für $x \in [0,1]$ gilt

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^{2l} \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \Big(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l x^{2l}\Big)\,dx = \Big[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1}\Big]_0^1$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}$$

Die Vertauschung von $\int\limits_0^1$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty}$ muß hier wieder gesondert gerechtfertigt werden, da die Reihe nicht gleichmäßig konvergiert. ($\int\limits_0^1 \leftrightarrow \int\limits_0^\theta$, $\theta \to 1$). Wegen $\operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich die Behauptung. □

Weiterführung des Beweises von Hilfssatz 9.2: Wir sammeln die Ergebnisse aus Lemma 7.3 sowie dem bisher geführten Beweis:

$$\int_{-i}^{i} \frac{(\ln t)^2}{1+t}\,dt = 4i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} - \frac{i\pi}{2}\zeta_a(2) - i\frac{\pi^2}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1} =$$
$$= 4i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} - \frac{i\pi}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12} - i\frac{\pi^2}{2}\frac{\pi}{4} =$$
$$= 4i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} - i\pi^3\Big(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\Big) = 4i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} - \frac{i\pi^3}{6}$$

(Ende des Beweises von Hilfssatz 9.2)

Mit (7.6) und Hilfssatz 9.2 ergibt sich daher wegen $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{8}$

Satz 7.2

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \tag{7.7}$$

8 Zweidimensionale Riemannsche Oberflächenintegrale

(i) Der Begriff der zweidimensionalen Fläche im $\mathbb{R}^3$

Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge, z. B. ein Kreis oder ein zweidimensionales Intervall.

Definition: Eine Abbildung $\varphi : B \to \mathbb{R}^3$ nennen wir eine Parameterdarstellung einer Fläche. Eine (orientierte) Fläche ist eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen $\varphi : B \to \mathbb{R}^3$. Zwei Parameterdarstellungen $\varphi : B \to \mathbb{R}^3, \tilde{\varphi} : \tilde{B} \to \mathbb{R}^3$ heißen äquivalent, wenn eine umkehrbar eindeutige stetig differenzierbare Abbildung $\psi : B \leftrightarrow \tilde{B}$ existiert mit

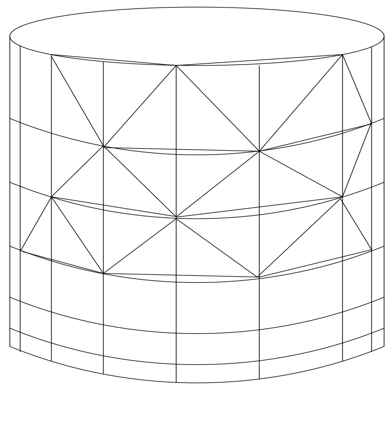
$$\tilde{\varphi}(\psi(\cdot)) = \varphi \qquad \text{,so daß } \det \nabla\psi(x) \neq 0 \; \forall x \in B$$

Beispiel: $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ („Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$“), $\varphi(\xi, \eta) = (\xi, \eta, \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \in \mathbb{R}^3)$. Offensichtlich ist $|\varphi(\xi, \eta)| = 1$ und die dritte Komponente von $\varphi \geq 0$, d. h. der Graph von φ ist der Rand der dreidimensionalen Halbkugel $\{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1, x_3 \geq 0\}$.
Eine andere Parameterdarstellung ist

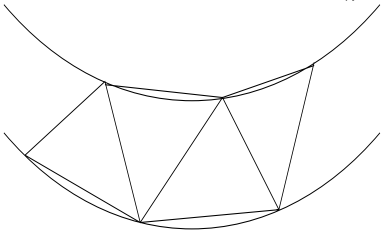
$$\tilde{\varphi}(r, \varphi) = (r \sin\varphi, r\cos\varphi, \sqrt{1 - r^2}), \quad \tilde{B} = \{(r, \varphi) \big| 0 \leq r \leq 1, \; 0 < \varphi < 2\pi\}$$

Es ist naheliegend, daß man den zweidimensionalen Flächeninhalt einer „gekrümmten“ Fläche im $\mathbb{R}^3$ als Limes von approximierenden Polyederflächen definiert. Im Prinzip geht man auch so vor, kann aber dabei auf die Nase fallen, wenn man nicht präzise ist. Dies sei zunächst an Hand des sogenannten Schwarzschen Paradoxons erläutert.

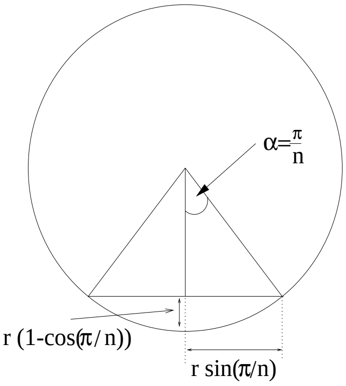
(ii) Das Schwarzsche Paradoxon ist ein Beispiel einer Approximation eines simplen Zylindermantels vom Radius r und der Höhe H im $\mathbb{R}^3$, d. h. die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \big| x_1^2 + x_2^2 = r, \, 0 \leq x_3 \leq H\}$, durch eine Polyederfläche, deren elementarer Inhalt gegen unendlich geht, wenn die Polyederfläche gegen den Zylinder geht.



Hierzu teilt man den Zylinder in N Scheiben, die zur (x_1, x_2)- Ebene parallel sind. Die Grundflächen dieser Scheiben sind die Mengen $\{x \big| x_1^2 + x_2^2 \leq r, x_3 = \frac{kH}{N}\}$, $k = 0, \ldots, N-1$. Wir nehmen noch den Index $k = N$ dazu. Der Kreisrand ($x_1^2 + x_2^2 = r$) wird äquidistant durch n Punkte unterteilt, die Teilungspunkte zum Index $k+1$ sind zu den Teilungspunkten der k-ten Scheibe um den Winkel $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}$ versetzt.



Wir legen durch die Teilungspunkte Dreiecke, wie in der Skizze angedeutet. Wir berechnen den elementaren Flächeninhalt aller dieser $(2N \cdot n)$-Dreiecke.



Die Seitenlänge beträgt $2r \sin \frac{\pi}{n}$, die Höhe $\sqrt{r^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + (\frac{H}{N})^2} = \sqrt{4r^2(\sin\frac{\pi}{2n})^4 + (\frac{H}{N})^2}$.

Der Gesamtinhalt beträgt daher

$$J = N \cdot n \cdot 2r \sin\frac{\pi}{n} \sqrt{4r^2\Big(\sin\frac{\pi}{2n}\Big)^4 + \Big(\frac{H}{N}\Big)^2} =$$
$$= 2\pi r \, \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \sqrt{\frac{1}{4}\pi^4 r^2 \left(\frac{\sin(\pi/(2n))}{\pi/(2n)}\right)^4 \Big(\frac{N}{n^2}\Big)^2 + H^2}$$

Wir führen den Grenzübergang $N, n^2 \to \infty$ mit der Kopplung $N/n^2 = d$ durch. Dann folgt

$$J \to 2\pi r \sqrt{\frac{1}{4}\pi^4 r^2 d^2 + H^2}\,,$$

so daß, da d beliebig gewählt, jeder Limes $\geq 2\pi r H$ für J möglich ist!
Man glaubt es kaum!
Das Paradoxon von Schwarz beruht auf der Tatsache, daß die Winkel in den auftretenden Teildreiecken sich 0^0 bzw. 180^0 nähern. Verwendet man Approximationen der Zylinderfläche, in welcher die Teildreiecke nicht in dieser Weise ausarten, ist eine Definition des Flächeninhaltes sowie von Oberflächenintegralen in vernünftiger Weise möglich.

(iii) Die Gramsche Determinante und der Flächeninhalt von Dreiecken
Wir benötigen eine elegante Darstellung des elementaren zweidimensionalen Flächeninhaltes von Dreiecken im $\mathbb{R}^3$. Die folgenden Matrizen haben alle reelle Koeffizienten.

Lemma 8.1 *: Es sei Δ ein Dreieck mit den Eckpunkten $0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ (Spaltenvektoren). Dann beträgt sein elementarer zweidimensionaler Flächeninhalt*

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\sqrt{\det(A^T A)}\,.$$

Hierbei ist A die Matrix (a_1, a_2).

Anmerkung: $A^T A$ ist eine 2×2-Matrix. Man nennt die Determinante $\mathrm{gram}(A) = \det(A^T A)$ die Gramsche Determinante von A.

Man kann Lemma 8.1 „zu Fuß“ mit Hilfe des aus der Schule bekannten „Cosinussatzes“ beweisen. Wir wollen jedoch einen eleganteren Beweis, der sich auch auf m-dimensionale Bereiche im $\mathbb{R}^n$ übertragen läßt, vorführen. Hierzu benötigen wir

Lemma 8.2 *: Sei A eine 3×2-Matrix (d. h. drei Zeilen und zwei Spalten) und B eine 2×2-Matrix mit $|\det B| = 1$. Dann ist*

$$\mathrm{gram}(A) = \mathrm{gram}(AB)$$

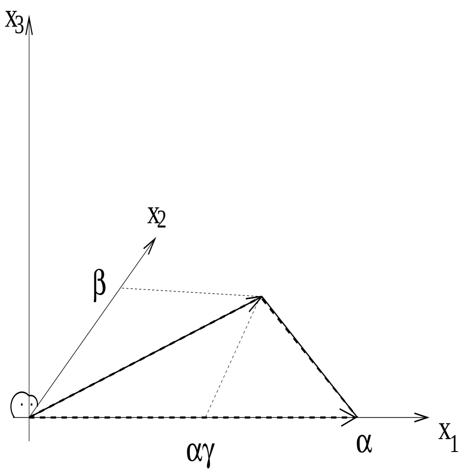
Beweis: $\det((AB)^T(AB)) = \det\left(B^T A^T AB\right) = \det(B^T)\det(A^T A)\det(B) = \det(A^T A)$ $\quad {}_Box$

Beweis von Lemma 8.1:

Sei A die 3×2-Matrix (a_1, a_2) und Δ_A das dazugehörige Dreieck mit den drei Eckpunkten $0, a_1, a_2$. Dann existieren eine orthogonale Dreh-Matrix S und Zahlen α, β, γ, so daß

$$SA = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

d.h. das gedrehte Dreieck Δ_{SA} liegt in der $x_1 - x_2$-Ebene, wobei eine Seite auf der x_1-Achse liegt.



Wegen $(SA)^T SA = A^T S^T SA = A^T A$ gilt $\mathrm{gram}(SA) = \mathrm{gram}(A)$. Sei nun $B = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt dann

$$SAB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und wg. Lemma 8.1} \quad g(SAB) = g(A)$$

Wegen $(SAB)^T(SAB) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$ folgt schließlich $\mathrm{gram}(A) = |\alpha\beta|^2$, d.h. $\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{gram}(A)}$ entspricht dem Flächeninhalt des durch S und B transformierten Dreiecks. Da die Abbildungen S und B aber den Flächeninhalt nicht ändern, ist die Aussage bewiesen. □

Anmerkung: Lemma 8.1 und sein Beweis sind nur als Motivation zu sehen, der elementare Inhalt und die Abbildungseigenschaften müßten axiomatisch eingeführt werden. Wir verzichten hierauf, da wir das Oberflächenintegral direkt und ohne Rückgriff auf elementargeometrische Eigenschaften definieren werden.

(iv) Riemannsche Oberflächensummen und Oberflächenintegrale

Es sei F eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung $\varphi : B \to \mathbb{R}^3, B \subset \mathbb{R}^2$, und $f : \varphi(B) \to \mathbb{R}$ (man schreibt auch $f : F \to \mathbb{R}$). Wir wollen erläutern, was man unter dem Oberflächenintegral

$$\int_F f \, do$$

versteht. Eine Möglichkeit der Definition ist

$$\int_F f \, do = \int_B f(\varphi(\xi)) \, g(\nabla\varphi(\xi)) \, d\xi \tag{8.1}$$

mit

$$g(\nabla\varphi(\xi)) = \sqrt{\det(\nabla\varphi(\xi)^T \, \nabla\varphi(\xi))}$$

Beachte: $\int_B \cdots d\xi$ ist ein skalarwertiges, zweidimensionales Riemannsches Integral, $\nabla\varphi(\xi)$ hat zwei Spalten und drei Zeilen, der zweidimensionale Gradient wurde zeilenweise genommen, $\nabla\varphi(\xi)^T \, \nabla\varphi(\xi)$ ist eine 2×2 Matrix. Um (8.1) hinzuschreiben, benötigen wir die folgenden

Voraussetzungen: B sei Riemann-meßbar und beschränkt, $\nabla\varphi(\xi)$ existiere und sei gleichmäßig stetig, (schwächer: φ sei stetig und stückweise gleichmäßig stetig differenzierbar mit glatten Sprungstellen.) $f : F \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig.

Lemma 8.3 *: $\int\limits_F f\,do$ ändert sich nicht bei stetig differenzierbarem Parameterwechsel* $\psi : B \leftrightarrow B'$, $\det \psi \neq 0$.

Beweis: Nach der Substitutionsregel gilt

$$\int\limits_B f(\varphi(\xi))\, g(\nabla\varphi(\xi))\, d\xi = \int\limits_{B'} f(\varphi(\psi(\eta)))\, g(\nabla\varphi(\xi))\big|_{\xi=\psi(\eta)}\, |\det \nabla\psi(\eta)|\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{B'} f(\varphi(\psi(\eta))\, g(\nabla(\varphi(\psi(\eta)))\, d\eta\,.$$

Wir haben verwendet, daß

$$\det(\nabla\varphi^T(\eta)\, \nabla\varphi(\xi)) \cdot |\det\, \nabla\psi(\eta)|^2 = \det\, \left((\nabla\varphi(\xi)\, \nabla\psi(\eta))^T \cdot (\nabla\varphi(\xi)\, \nabla\psi(\eta))\right)$$

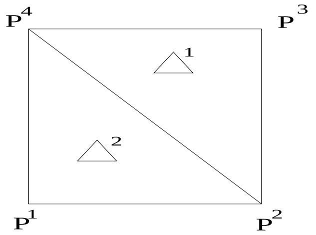
ist. □

Die Definition (8.1) ist motiviert dadurch, daß man sich für $g(\nabla\varphi(\xi))\, d\xi$ den Flächeninhalt eines infinitesimalen Oberflächenelementes vorstellen kann. Am besten versteht man dies, wenn man Riemannsche Oberflächensummen einführt, die im Limes gegen den Ausdruck (8.1) konvergieren.

Es sei $\mathfrak{Z} = \{I_\nu | \nu = 1, \cdots, N\}$ eine Zerlegung eines Quadrates $Q \supset B$ mit achsenparallelen Seiten. Die I_ν seien zweidimensionale Intervalle, d. h. Rechtecke mit achsenparallelen Seiten. Es gelte $\operatorname{int} I_\nu \cap \operatorname{int} I_\mu = \emptyset$, $\nu \neq \mu$ und $\bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \bar{I}_\nu = \bar{Q}$. Um die Paradoxie unter (ii) zu vermeiden, setzen wir voraus, daß eine Zahl h existiert, so daß

$$\alpha_0 h \leq |P_\nu^i - P_\nu^k| \leq \alpha_1 h\,, \qquad i,k = 1,\cdots,4 \quad, i \neq k \tag{8.2}$$

mit Konstanten α_0 und α_1. Die Eckpunkte der I_μ seien $P_\nu^1, \cdots, P_\nu^4$. I_ν wird zerlegt durch die beiden Dreiecke $\Delta_\nu^{(1)}$ bzw. $\Delta_\nu^{(2)}$ mit den Eckpunkten



$P_\nu^1, P_\nu^2, P_\nu^4$ und $P_\nu^2, P_\nu^3, P_\nu^4$.

Wir betrachten das Dreieck, welches von $\varphi(P_\nu^i)(i = 1,2,4)$ aufgespannt wird.
(Zur Erinnerung: φ ist die Parameterdarstellung der Fläche F). Sein Flächeninhalt beträgt

nach (iii)

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det A^T A} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) & -\varphi(P_\nu^1) \\ \varphi(P_\nu^4) & -\varphi(P_\nu^1) \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Nach dem Taylorschen Satz (Entwicklung bis zum ersten Glied) gilt wegen (8.3)

$$\varphi(P_\nu^i) - \varphi(P_\nu^1) = \nabla\varphi(P_\nu^1)\,(P_\nu^i - P_\nu^1) + o(h)\,,\ i = 2, 4$$

und somit

$$\begin{aligned} &g\Big(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) & -\varphi(P_\nu^1) \\ \varphi(P_\nu^4) & -\varphi(P_\nu^1) \end{pmatrix}\Big) = \\ &= \Big[\det\Big(\begin{pmatrix} P_\nu^2 & -P_\nu^1 \\ P_\nu^4 & -P_\nu^1 \end{pmatrix}^T (\nabla\varphi(P_\nu^1))^T\,\nabla\varphi(P_\nu^1)\begin{pmatrix} P_\nu^2 & -P_\nu^1 \\ P_\nu^4 & -P_\nu^1 \end{pmatrix}\Big)\Big]^{1/2} + o(h^2) \end{aligned}$$

Man beachte, daß der (hier zweidimensionale) Gradient ∇ zeilenweise genommen wird, $\nabla\varphi(P_\nu^1)$ ist eine Matrix mit zwei Spalten und drei Zeilen.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &g\left(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) & -\varphi(P_\nu^1) \\ \varphi(P_\nu^4) & -\varphi(P_\nu^1) \end{pmatrix}\right) = \\ &= \left[\det\nabla\varphi(P_\nu^1)^T\,\nabla\varphi(P_\nu^1)\right]^{1/2}\left[\det\begin{pmatrix} P_\nu^2 & -P_\nu^1 \\ P_\nu^4 & -P_\nu^1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} P_\nu^2 & -P_\nu^1 \\ P_\nu^4 & -P_\nu^1 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} + o(h^2) = \\ &= g(\nabla\varphi(P_\nu^1))\,g\begin{pmatrix} P_\nu^2 - P_\nu^1 \\ P_\nu^4 - P_\nu^1 \end{pmatrix} + o(h^2) = \\ &= g(\nabla\varphi(\tilde{P}_\nu))\,g\begin{pmatrix} P_\nu^2 - P_\nu^1 \\ P_\nu^4 - P_\nu^1 \end{pmatrix} + o(h^2) \end{aligned}$$

wenn $\tilde{P}_\nu \in I_\nu$. Eine entsprechende Formel ergibt sich für das zweite Dreieck $\Delta^{(2)}$.

Der elementare Flächeninhalt der beiden von $\varphi(P_\nu^2)\,(i = 1, 4)$ aufgespannten Dreiecke beträgt somit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}g\Big(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) - \varphi(P_\nu^1) \\ \varphi(P_\nu^4) - \varphi(P_\nu^1) \end{pmatrix}\Big) + \frac{1}{2}g\Big(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) - \varphi(P_\nu^3) \\ \varphi(P_\nu^4) - \varphi(P_\nu^3) \end{pmatrix}\Big) = \\ &\qquad = \frac{1}{2}g(\nabla\varphi(\tilde{P}_\nu))\left[g\begin{pmatrix} (P_\nu^2 - P_\nu^1) \\ (P_\nu^4 - P_\nu^1) \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} P_\nu^2 - P_\nu^3 \\ P_\nu^4 - P_\nu^3 \end{pmatrix}\right] + o(h^2) = \\ &\qquad = g(\nabla\varphi(\tilde{P}_\nu))|I_\nu| + o(h^2)\,, \end{aligned} \tag{8.4}$$

denn die Summe der elementaren Flächeninhalte der beiden Dreiecke $\Delta^{(1)}, \Delta^{(1)}$ beträgt $|I_\nu| =$ elementarer Inhalt von I_ν.

Als <u>Riemannsche Oberflächensumme</u> bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und der Belegung $\tilde{P}_\nu \in I_\nu$ verstehen wir die Zahl

$$J_F(\mathfrak{Z}, \tilde{P}_\nu, f) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} f(\tilde{P}_\nu) \left[g\left(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) & -\varphi(P_\nu^1) \\ \varphi(P_\nu^4) & -\varphi(P_\nu^1) \end{pmatrix} \right) + g\left(\begin{pmatrix} \varphi(P_\nu^2) & -\varphi(P_\nu^3) \\ \varphi(P_\nu^4) & -\varphi(P_\nu^3) \end{pmatrix} \right) \right],$$

welche anschaulich eine Summation der elementaren Flächeninhalte der Dreiecke, die von den $\varphi(P_\nu^i)$ aufgespannt werden, multipliziert mit $f(\tilde{P}_\nu)$, bedeutet. Mit $f = 1$ entspricht dies anschaulich einer Approximation des Flächeninhalts von $\varphi(B)$.

Nach (8.4) gilt

$$J_F(\mathfrak{Z}, \tilde{P}_\nu, f) = J(\mathfrak{Z}, \tilde{P}_\nu, f(\varphi(\cdot))\, g(\nabla\varphi(\cdot)^T)) + o(1)\,, \tag{8.5}$$

wobei $J(\mathfrak{Z}, \tilde{P}_\nu, f(\cdots)$ usw.) die schon bekannte Riemannsche Summe aus dem zweiten Semester ist, welche zur Definition des zweidimensionalen Integrals

$$\int\limits_B f(\varphi(\xi))\, g(\nabla\varphi(\xi))\, d\xi$$

verwendet wird. Damit ist der Zusammenhang mit der eingangs getroffenen Definition des Oberflächenintegrals hergestellt.

Eine brauchbare Definition wäre somit

<u>Definition</u>: Es existiere eine Zahl A, bezeichnet mit $\int\limits_F f\, do$, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $h(\varepsilon) > 0$ existiert mit der Eigenschaft, daß für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{I_\nu, \nu = 1, \cdots, N\}$, welche der Einschränkung (8.2) mit $h \leq h(\varepsilon)$ genügt, und für jede Belegung $\tilde{P}_\nu \in I_\nu$ die Ungleichung

$$|A - J_F(\mathfrak{Z}, \tilde{P}_\nu, f)| < \varepsilon$$

gilt. Man bezeichnet dann $A = \int\limits_F f\, do$ als das Oberflächenintegral von f über F.

9 Der Satz von Gauß in räumlichen Normalgebieten

Wir beweisen in diesem Kapitel in Analogie zu Kapitel 1 den Satz von Gauß zunächst auf Normalgebieten

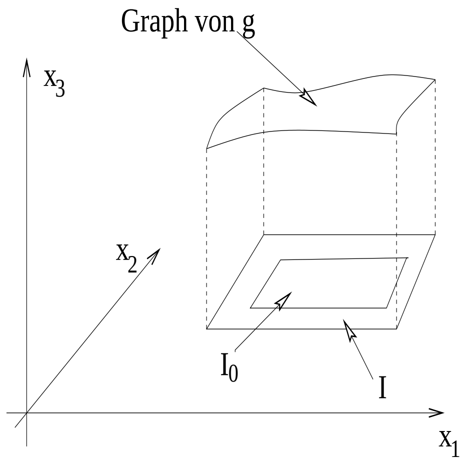
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \big| x_1, x_2 \in I, 0 \leq x_3 \leq g(x_1, x_2)\}$$

Hierbei ist I ein zweidimensionales Intervall und $g \in C^1(I)$, d. h. einmal stetig differenzierbar. Die Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes werden wir aber nicht durch Zerschneiden allgemeinerer Bereiche in Normalbereiche vornehmen (eine etwas unpräzise, da zu heuristische Beweismethode), sondern mit einer für die Analysis und Differentialgeometrie typischen Lokalisierungstechnik, welche in Kapitel 10 erläutert wird. Diese Lokalisierungstechnik hat den Vorteil, daß man zunächst nur Funktionen betrachten muß, deren Träger in einer „kleinen“ Menge liegt. Allgemein ist der Träger $\operatorname{trg} f$ einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}^N$, $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch den Abschluß der Menge $\{x \in M \big| f(x) \neq 0\}$. Englische Übersetzung: $\operatorname{trg} f = \operatorname{supp} f$ (support). „Klein“ bedeutet in diesem Zusammenhang, daß man sich in einer Umgebung des Randes des betrachteten Gebietes befindet, in welcher man mit besonders einfachen Parametrisierungen arbeiten kann.

In dem folgenden Hilfssatz betrachten wir ein Intervall $I_0 \subset\subset I$, d. h. $I_0 \subset I$ und $\operatorname{dist}(\partial I_0, \partial I) > 0$. Mit $\mathbb{R}_{>0}$ bezeichnen wir die Menge $\{\xi \in \mathbb{R} | \xi > 0\}$.

Hilfssatz 9.1 *: Sei I ein zweidimensionales Intervall, $g \in C^1(I)$, und B der oben definierte Normalbereich. Ferner sei $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig differenzierbar und es gelte $\operatorname{trg} f \subset I_0 \times \mathbb{R}_{>0}$, $I_0 \subset\subset I$. Dann gilt*

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_3} f \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_I f(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \, d\xi_1 d\xi_2$$



Durch die Einführung von I_0 und die Voraussetzung $\operatorname{trg} f \subset I_0$ verhindert man Ärgeres in den Rändern und Ecken.

Beweis des Hilfssatzes 9.1: Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_B \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{I_0} \left(\int_0^{g(\xi_1,\xi_2)} \frac{\partial}{\partial x_3} f\, dx_3 \right) d\xi_1\, d\xi_2 = $$
$$= \int_{I_0} f(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $f|_{x_3=0} = 0$, so daß die untere Grenze nicht auftaucht. □

Wir wollen das zweidimensionale Integral in Hilfssatz 9.1 durch ein Oberflächenintegral über die Fläche F ausdrücken, welche die Parameterdarstellung $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))^T \tag{9.1}$$

hat. Hierzu überlegen wir uns einen Zusammenhang mit dem Normalenvektor und dem Oberflächenelement $\sqrt{\det(\nabla\varphi^T \nabla\varphi)}\, d\xi_1 d\xi_2$. Für die Fläche F gilt

$$\sqrt{\det(\nabla\varphi^T\nabla\varphi)} = \left[\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_{\xi_1} \\ 0 & 1 & g_{\xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \end{pmatrix} \right) \right]^{1/2} =$$
$$= \left(\det \begin{pmatrix} 1 + g_{\xi_1}^2 & g_{\xi_1} g_{\xi_2} \\ g_{\xi_1} g_{\xi_2} & 1 + g_{\xi_2}^2 \end{pmatrix} \right)^{1/2} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$$

Im Folgenden benötigen wir den Begriff des Tangentialvektors an einem Punkt einer Fläche. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ist Tangentialvektor zur Fläche F im Punkt $p \in F$, wenn er Tangentenvektor zu einer in F verlaufenden Kurve im Punkt $p \in F$ ist. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche, so sind offensichtlich

$$v_1 := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\varphi(\xi_1 + h, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \xi_2)}{h} \quad \text{und} \quad v_2 := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2 + h) - \varphi(\xi_1, \xi_2)}{h}$$

Tangentialvektoren.

Lemma 9.1 *Die Vektoren $(1, 0, g_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2))$ und $(0, 1, g_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2))$ sind Tangentialvektoren der Fläche F im Punkt $(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))^T$. Der Vektor $\nu = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}(-g_{\xi_1}, -g_{\xi_2}, 1)$, ausgewertet an den Stellen (ξ_1, ξ_2), steht senkrecht zu den Tangentialvektoren und hat den Betrag 1.*

Anmerkung: $\nu(\xi_1, \xi_2)$ heißt Normaleneinheitsvektor der Fläche F im Punkt $(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))^T$. Bezüglich des Bereiches B ist er nach außen gerichtet. Da die Zuordnung $\xi \leftrightarrow \varphi(\xi)$ hier eindeutig ist, können wir auch $\nu(\xi)$ als $\nu(\varphi(\xi))$ schreiben.

Beweis von Lemma 9.1: Die Vektoren

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h^{-1}[\varphi(\xi_1 + h, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \xi_2)] \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h^{-1}[\varphi(\xi_1, \xi_2 + h) - \varphi(\xi_1, \xi_2)]$$

sind gerade die im Lemma angegebenen Tangentialvektoren im Punkte $\varphi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))^T$. Der Vektor $(-g_{\xi_1}, -g_{\xi_2}, 1)$ steht offensichtlich senkrecht auf den Tangentialvektoren. □

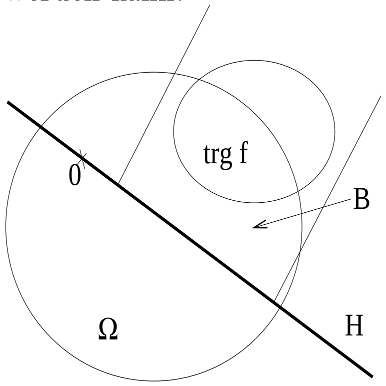
Die dritte Komponente des Normaleneinheitsvektors ist somit gerade gleich $(\det \nabla\varphi^T \nabla\varphi)^{-1/2}$.
Anmerkung: Die lineare Hülle der im Lemma genannten Tangentialvektoren enthält alle Tangentialvektoren $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h^{-1}[\varphi(\xi + ha) - \varphi(\xi)], \quad a \in \mathbb{R}^2,\ |a| = 1.$
Aus Hilfssatz 9.1 und Lemma 9.1 erhalten wir somit eine lokale Version des Satzes von Gauß in Normalgebieten, wenn wir das Oberflächenintegral wie in (8.1) auffassen.

Lemma 9.2 *Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 9.1 gilt*

$$\int_B \frac{\partial}{\partial x_3} f\, dx = \int_F f \nu_3\, do\,.$$

Hierbei ist $\nu_3(p)$ die dritte Komponente des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors in einem Punkt p der Fläche F.

Wir wollen nun die Situation betrachten, daß der Träger der betrachteten Funktion f in einem Teil eines Gebietes Ω liegt, der durch Drehung in die Situation des Hilfssatzes 9.1 gebracht werden kann.



Zweidimensionaler Schnitt durch Ω. Der Einfachheit halber wurde $0 \in H$ angenommen. Die Ebene H steht senkrecht zur vorliegenden Seite.

Wie in der Skizze angedeutet, ist der Randteil trg $f \cap \partial\Omega$ als Menge aller Punkte $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a g(\xi_1, \xi_2)$ mit orthogonalen Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in H$ und $a \perp e_i$, $|a| = 1$, $\xi \in I$ darstellbar.

Wir bezeichnen mit B die Menge

$$B = \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta a \,\big|\, \xi \in I,\, 0 \le \eta \le g(\xi_1, \xi_2)\} \tag{9.2}$$

$$e_1 \perp e_2,\ e_i \perp a,\ |e_1| = |e_2| = |a| = 1$$

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int\limits_B w\,dx = \int\limits_I \int\limits_0^{g(\xi_1,\xi_2)} w\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\eta$$

Mit $w = a \cdot \nabla f$, $w = 0$ auf H folgt

$$\int\limits_B a \cdot \nabla f\,dx = \int\limits_I f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a g(\xi_1, \xi_2))\,d\xi_1\,d\xi_2 \tag{9.3}$$

da

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta a)) = ((a \cdot \nabla) f)(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \eta a)\,.$$

Die rechte Seite in (9.3) wollen wir als Oberflächenintegral darstellen. Die Parametrisierung lautet:

$$\Phi(\xi) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a g(\xi_1, \xi_2)$$

$$\Rightarrow \Phi_{\xi_1}(\xi) = e_1 + a g_{\xi_1}(\xi),\ \ \Phi_{\xi_2}(\xi) = e_2 + a g_{\xi_2}(\xi)\,.$$

Die Gramsche Matrix $(\Phi_{\xi_i} \cdot \Phi_{\xi_k})_{i,k}^2$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 + g_{\xi_1}^2 & g_{\xi_1} g_{\xi_2} \\ g_{\xi_1} g_{\xi_2} & 1 + g_{\xi_2}^2 \end{pmatrix},\ \text{somit}\quad \sqrt{\det \nabla\Phi^T \nabla\Phi} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\,.$$

Wie zu erwarten war, ändert sich $\det(\nabla\Phi^T \nabla\Phi)$ bei der Drehung nicht.
Wir berechnen Tangential- und Normalenvektoren in der gedrehten Situation. Tangential(basis)vektoren sind

$$t_1 = e_1 + a g_{\xi_1}(\xi)\ \text{und}\quad t_2 = e_2 + a g_{\xi_2}(\xi)\,.$$

Der (bis auf einen Faktor eindeutige) Normalenvektor ist

$$\tilde\nu(\xi) = -e_1 g_{\xi_1}(\xi) - e_2 g_{\xi_2}(\xi) + a\,.$$

Durch Normieren ergibt sich der Normaleneinheitsvektor

$$\nu(\xi) = \tilde\nu(\xi)/|\tilde\nu(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}\,(-e_1 g_{\xi_\xi}(\xi) - e_2 g_{\xi_2} + a)\,,$$

und somit

$$a \cdot \nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}\,.$$

Wir halten dies fest in

Lemma 9.3 *Die Fläche F sei gegeben durch die Parametrisierung* $\varphi(\xi) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a g(\xi_1, \xi_2),\ \xi \in I \subset \mathbb{R}^2,\ e_1, e_2,\ a \in \mathbb{R}^3$ *seien orthonormal. Dann ist*

$$a \cdot \nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(\xi)|^2}}\,.$$

Mit (9.3) und Lemma 9.3 erhalten wir nun eine lokale Version des Satzes von Gauß.

Hilfssatz 9.2 *: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Sei B ein Normalgebiet wie oben definert mit* $\operatorname{int} B \subset \Omega$. *Es gebe einen Vektor a und Einheitsvektoren e_1 und e_2 mit $e_1, e_2 \in H,\ a \perp e_i,\ |a| = 1$, so daß eine Darstellung*

$$\operatorname{trg} f \cap \partial\Omega = \left\{ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a g(\xi_1, \xi_2) \,\middle|\, \xi \in I \right\}$$

existiert. Es gelte $\operatorname{trg} f \subset B = \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + a\eta \,|\, \xi \in I,\ 0 \le \eta \le g(\xi_1, \xi_2)\}$. *Dann gilt*

$$a \cdot \int\limits_B \nabla f \, dx = a \cdot \int\limits_F f\nu \, do \quad .$$

Es ist einleuchtend, daß die Existenz des in Hilfssatz 9.2 geforderten Vektors a die Existenz unendlich vieler benachbarter Vektoren a' nach sich zieht, die ebenfalls die Voraussetzung von Hilfssatz 9.2 mit entsprechenden Größen e_1', e_2', g' erfüllen. Man benötigt hierzu lediglich eine Lipschitzbedingung an g, damit bei der leichten Drehung der Ebene H keine vieldeutige Zuordnung $\xi_1, \xi_2 \leftrightarrow p \in \partial\Omega$ entsteht.

Es folgt dann

$$a' \cdot \int\limits_B \nabla f \, dx = a' \cdot \int\limits_F f\nu \, do \quad \text{für ausreichend viele linear unabhängige } a' \text{ und damit}$$

$$\int\limits_B \nabla f \, dx = \int\limits_F f\nu \, do$$

oder, in der üblichen Form, indem man die Gleichung auf Funktionen $f_i, i = 1, 2, 3$ anwendet und nur die i-te Komponente verwertet:

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \, dx = \int\limits_F f_i \nu_i \, do$$

Nach Aufsummieren erhält man schließlich

Hilfssatz 9.3 *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 9.2 gilt*

$$\int\limits_B \operatorname{div} f \, dx = \int\limits_F f \cdot \nu \, do$$

Hierbei ist

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \quad \text{bzw.} \ \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \quad \text{im } n\text{-dimensionalen Fall}$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 9.2 formulieren wir, indem wir sagen „$\bar{\Omega}$ ist lokal ein gedrehter und verschobener Normalbereich".

10 Faltungsoperation und Zerlegung der 1

(i) Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Definition: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) heißt „C-null-unendlich-Funktion“, in Zeichen $f \in C_0^\infty(\Omega)$, genau dann, wenn $f \in C^\infty$ (d. h. unendlich oft differenzierbar ist) und $\operatorname{trg} f \subset \Omega$. Wir sagen, „$f$ sei unendlich oft differenzierbar und habe kompakten Träger in Ω“. Man beachte, daß $\operatorname{trg} f$ als Abschluß der Menge $\{x|f(x) \neq 0\}$ definiert ist. Daher muß f in einer Umgebung des Randes von Ω verschwinden.

Beispiel: Sei

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} e^{-(|x|^2-1)^{-2}} & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| \geq 1 \end{array} \right\}, \; x \in \mathbb{R}^n \tag{10.1}$$

Lemma 10.1 *: Die in (10.1) definierte Funktion liegt in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

> Beweis: Für $|x| \neq 1$ ist die Differenzierbarkeit klar. Die Ableitungen von f für $|x| < 1$ sind Summen von Ausdrücken der Gestalt
>
> $$e^{-(|x|^2-1)^{-2}} \cdot (C^\infty - \text{Funktion}) \cdot (|x|^2 - 1)^{-s}, \; s \in \mathbb{N},$$
>
> welche für $|x| \to 1$, $|x| < 1$ gegen Null gehen, da „$e^{-(|x|^2-1)^{-2}}$ immer gegen $(|x|^2 - 1)^{-s}$ gewinnt“. Daher gehen die Differenzquotienten, an der Stelle $|x| = 1$ ausgewertet, ebenfalls gegen Null (Mittelwertsatz!). □

(ii) Faltung und Mittelfunktionen

Eine Mittelfunktion ist eine Funktion $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} w \, dx = 1$. Manchmal verlangt man zusätzlich $w \geq 0$.

Offensichtlich gibt es Mittelfunktionen, wähle etwa die Funktion f aus (10.1) und setze

$$w := \tfrac{1}{\int f \, dx} f \, .$$

Für zahlreiche Überlegungen in der Analysis benötigt man Mittelfunktionen mit kleinem Träger, die man z. B. folgendermaßen definieren kann: Sei $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Mittelfunktion mit Träger in der Kugel $B_1(0)$. Setze

$$w_h(x) = h^{-n} w(h^{-1}x), \quad h \in \mathbb{R}, \, h > 0 \tag{10.2}$$

Offensichtlich ist w_h ebenfalls Mittelfunktion, der Träger liegt jedoch in der Kugel $B_h(0)$.

Definition: Es sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$) eine Riemann-integrable Funktion, $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Faltung $w * g$ definiert durch

$$(w * g)(x) = \int\limits_{\operatorname{trg} w} w(t)\, g(x-t)\, dt\,.$$

Hierbei sind alle $x \in \Omega$ zugelassen, so daß $x - t \in \Omega$ für $t \in \operatorname{trg} w$. Wie ersichtlich, ist es günstig, einen „kleinen" Träger von w zu haben, da dann $x - t \in \Omega$ für alle $x \in \Omega$ mit Ausnahme eines kleinen Randstreifens.

Satz 10.1 : *Sei w_h definiert wie in (10.2) und $g \in C(\Omega)$ sowie $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Dann gilt $w_h * g \in C^\infty(\Omega_0)$, und $w_h * g \to g$ gleichmäßig in Ω_0 für $h \to 0$.*

Beweis: Durch die Substitution $t = x - t$ erhält man für alle x mit $x + \operatorname{trg} w_h \subset \Omega$

$$(w_h * g)(x) = \int w_h(x-t)\, g(t)\, dt$$

Da $w_h \in C_0^\infty$ und x nunmehr nur im Argument von w_h vorkommt, folgt die Differenzierbarkeitsaussage. Zum Nachweis der Konvergenz schreiben wir

$$\begin{aligned}
|(w_h * g)(x) - g(x)| &= \Big| \int w_h(t)(g(x-t) - g(x))\, dt \Big| \leq \\
&\leq \int |w_h(t)|\, dt \sup_{|t|\leq h} \big|g(x-t) - g(x)\big| = \\
&\leq \int |w(t)|\, dt \sup_{|t|\leq h} \big|g(x-t) - g(x)\big| = \\
&= \text{const.} \sup_{|t|\leq h} |g(x-t) - g(x)| < \varepsilon \qquad \text{für } h < h(\varepsilon)
\end{aligned}$$

□

(iii) Die Zerlegung der 1

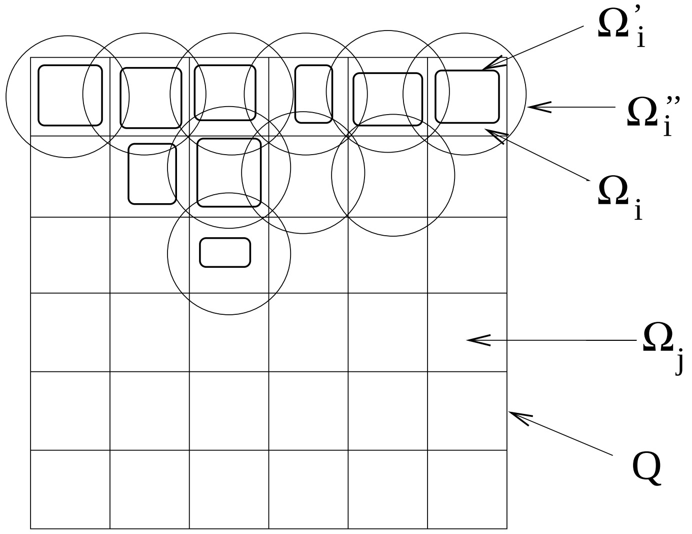
Dieses Hilfsmittel ist ein einfaches, viel benutztes Hilfsmittel der Analysis.

Satz 10.2 : *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel und $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, N$ offene, beschränkte Riemann-meßbare Punktmengen mit $\operatorname{int}\Omega_i \cap \operatorname{int}\Omega_h = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i \Supset Q$. Ferner seien Ω_i' und*

Ω_i'' offene Punktmengen mit $\Omega_i' \Subset \Omega_i \Subset \Omega_i''$. Dann existieren Funktionen $\zeta_i \in C_0^\infty(\Omega_i'')$ mit den Eigenschaften

$$\zeta_i = 1 \quad auf \quad \Omega_i'$$

$$\sum_{i=1}^{N} \zeta_i = 1 \quad auf \quad Q\,.$$



Beweis: Seien χ_i die charakteristischen Funktionen von Ω_i. Die Funktionen $w_h * \chi_i$ leisten das gewünschte!
Es gilt $\sum\limits_{i=1}^{N} \chi_i = 1$ auf $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \bar{\Omega}_i - E$, wobei E eine Teilmenge mit Riemann-Maß Null von $\bigcup\limits_{i,h} (\partial\,\Omega_i \cap \partial\,\Omega_h)$ ist. Es folgt: $\sum\limits_{i=1}^{N}(w_h * \chi_i) = 1$ auf Q für genügend kleines $h > 0$. Offensichtlich gilt auch $w_h * \chi_i = 1$ auf $\Omega_i' \Subset \Omega_i$, wenn h genügend klein. $\square$

11 Der Satz von Gauß in räumlichen Gebieten

Nach den Vorbereitungen in Kapitel neun und zehn wollen wir den eigentlichen Satz von Gauß formulieren. Wir wiederholen:

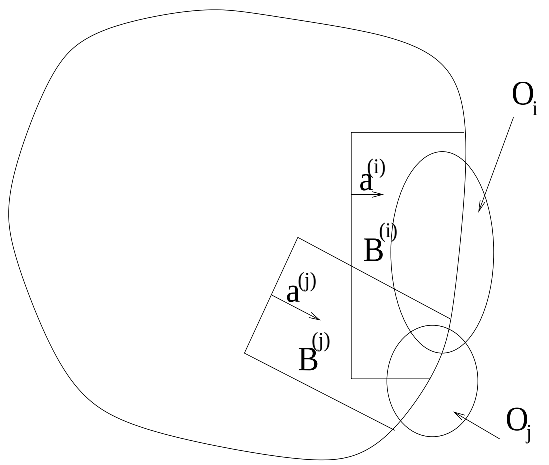
$$\underline{\text{Voraussetzungen an das zugrundeliegende Gebiet } \Omega \subset \mathbb{R}^3.} \qquad (11.1)$$

Ω sei eine offene beschränkte Punktmenge mit Rand $\partial\Omega$. Es existiere eine endliche Überdeckung $\{O_i |\, i = 0, \dots N\}$ von $\bar{\Omega}$, $O_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots N$, so daß $O_i \cap \bar{\Omega}$ in einem gedrehten und verschobenen Normalgebiet $B^{(i)}$ liegt, d. h. es existieren orthonormale Vektoren $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, a^{(i)}$, Verschiebungsvektoren $b^{(i)}$ und C^1-Funktionen $g^{(i)} : I^{(i)} \to \mathbb{R}$, $I^{(i)} \subset \mathbb{R}^2$, offen, so daß

$$B^{(i)} = \{b^{(i)} + \xi_1 e_1^{(i)} + \xi_2 e_2^{(i)} + \eta a^{(i)} | \xi \in I^{(i)},\, 0 \leq \eta \leq g(\xi_1, \xi_2)\}\,,$$

und

$$O_i \cap \partial\Omega \subset \{b^{(i)} + \xi_1 e_1^{(i)} + \xi_2 e_2^{(i)} + g(\xi_1, \xi_2) a^{(i)} |\, \xi \in I^{(i)},\, i = 1, \dots N\}$$



Geläufig ist auch die folgende alternative Voraussetzung an das zugrundeliegende Gebiet: „Ω sei in der Klasse C^1“, d. h. es gibt eine Überdeckung O_i, $i = 0, \dots N$, von Ω, und zugehörige C^1-Abbildungen $\psi^{(i)} : O_i \leftrightarrow \mathbb{R}^3, \quad 1, \dots, N$ mit der Eigenschaft, daß

$$\psi^{(i)}(\partial\Omega \cup O_i) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad \psi(O_i \cup \Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 < 0\}$$

Ferner wird $\nabla\psi \neq 0$ verlangt.

Man kann sich (mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen) überlegen, daß die Zusatzvoraussetzung $\psi^{(i)} \in C^2$ (vermutlich zuviel) die oben getroffene Voraussetzung (11.1), impliziert.

Die Voraussetzung des Satzes von Gauß läßt sich dahingehend abschwächen - und dies ist für Anwendungen auch sehr wichtig - daß $\partial\Omega$ Kanten besitzt. Um dies präzise durchzuführen, müßte man in der lokalen Version die Funktion g stetig und stückweise gleichmäßig stetig differenzierbar voraussetzen und das Oberflächenintegral als Summe über die Flächenstücke, in denen ∇g gleichmäßig ist, definieren.

Satz 11.1 *Es sei Ω eine beschränkte offene Punktmenge, welche der Voraussetzung (11.1) genügen möge. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei stetig und besitze Riemann-integrierbare Ableitungen. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} f \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, do \,.$$

Hier ist $\nu(\xi)$ der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor an der Stelle $\xi \in \partial\Omega$.

Beweis: Wir überziehen $\mathbb{R}^3$ mit einem äquidistanten achsenparallelen Würfelgitter. Es besteht aus Würfeln Q_i^h mit Kantenlänge h.
Für genügend kleines h gilt die Aussage: Ist $Q \cup \bar{\Omega} \neq \emptyset$, dann liegt Q mitsamt einem konzentrischen Würfel der Länge $2h$ in einer der überdeckenden Mengen O_i. (Andernfalls konstruiert man mit Hilfe des Satzes von Bolzano/Weierstraß einen Häufungspunkt $P \in \bar{\Omega}$, der in keiner der O_i liegt.)

Nach dem Satz von der Zerlegung der Eins gibt es Funktionen $\eta_i \in C_0^\infty$ mit $\sum\limits_{j=1}^{N} \eta_j = 1$ auf $\bar{\Omega}$ und $\operatorname{trg} \eta_j \subset Q_j^{2h}$.

Wir betrachten nun die Funktion $f\eta_j$. Ihr Träger liegt in einem in der Voraussetzung genannten gedrehten Normalbereich. Nach dem lokalen Gaußschen Satz aus Kapitel 9 gilt

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(f\eta_j) \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f\eta_j \cdot \nu \, do$$

Für Funktionen η_j mit $\operatorname{trg} \eta_j \subset \Omega$ gilt $\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(f\eta_j) = 0$. Der entsprechende Term tritt rechts nicht auf, da dann $\eta_j = 0$ auf $\partial\,\Omega$. Nach Summation über $j = 1, \dots N$ fallen die η_j wieder heraus und der Satz ist bewiesen. □

Verallgemeinerung auf n-Dimensionen

Der Begriff des Oberflächenintegrals läßt sich völlig analog zum Fall von zweidimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^3$ auf den Fall m-dimensionaler Flächen im $\mathbb{R}^n$ übertragen:

Sei $\psi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^m$, Parameterdarstellung einer m-dimensionalen Fläche F. Dann bezeichnen wir mit $\operatorname{gram}(\nabla\varphi) = \det(\nabla\varphi^T \nabla\varphi)$ wieder die Gramsche Determinante und definieren

$$\int_F f\,do = \int_I f(\varphi(\xi))\,\sqrt{\operatorname{gram}(\nabla\varphi(\xi))\,d\xi}\,.$$

Die Motivation für diese Definition wird ähnlich wie in Kapitel 8 durch Riemannsche Oberflächensummen gegeben.
Entsprechend gilt der Satz von Gauß unter analogen Voraussetzungen wie in Satz 11.1 in n-Dimensionen

$$\int_\Omega \operatorname{div}\,dx = \int_{\partial\Omega} f\cdot\nu\,do\,.$$

12 Gaußscher Integralsatz und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen

Der Gaußsche Integralsatz spielt eine wichtige Rolle in der sogenannten schwachen Formulierung partieller Differentialgleichungen und der Formulierung von Randbedingungen. Wir beschränken uns hier auf einfache klassische Beispiele.

(i) Die Gleichung $-\Delta u = f$ unter Dirichlet-Randbedingungen

Es sei Ω eine beschränkte, offene, den Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Satzes von Gauß genügende Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und f eine Riemann-integrable Funktion. Ferner sei eine Funktion $g \in C(\partial\,\Omega)$ gegeben. Wir betrachten folgende Aufgabe: Gesucht ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, so daß

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{12.1}$$

$$u = g \quad \text{auf} \quad \Omega \tag{12.2}$$

Erinnerung: $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i})^2$

Das Problem (12.1), (12.2) nennt man „das (inhomogene) Dirichletrandwertproblem für die Poissongleichung $-\Delta u = f$". Die Bedingung (12.2) nennt man „Dirichletrandbedingung". Die Problemstellung wird durch physikalische Anwendungen, aber auch wegen der wichtigen mathematischen Sätze, die man dazu beweisen kann, motiviert.

Sind die zweiten Ableitungen von u Riemann-integrabel, kann man Gleichung (12.1) mit einer Funktion $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ multiplizieren und integrieren. Hierbei ist

$$C_0^1(\bar{\Omega}) = \{\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} | \quad \varphi \text{ besitzt gleichmäßig stetige erste Ableitungen in } \Omega \\ \text{und es gilt } \varphi|_{\partial\,\Omega} = 0.\}$$

Nach dem Satz von Gauß gilt (wir schreiben für $\int\limits_{\Omega}$ einfacher $\int$):

$$\int f\varphi\,dx = -\int \Delta u\,\varphi\,dx = -\int (\operatorname{div} \nabla u)\varphi\,dx = -\int [\operatorname{div}(\nabla u \varphi) - \nabla u \cdot \nabla\varphi]\,dx = \\ = \int \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx - \int\limits_{\partial\,\Omega} (\varphi \nabla u) \cdot \nu\,do = \int \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx\,,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\,\Omega$.

Wir erhalten also aus (12.1)

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi\,dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^1(\Omega) \tag{12.3}$$

(12.3) ist eine (der vielen möglichen) sogenannte "schwachen Formulierung " von (12.1). (Auf die Abschwächung des Begriffs der Ableitung wird im vierten Semester eingegangen.)
Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit von (12.3), sofern $u \in C^2(\Omega)$ und die zweiten Ableitungen von u Riemann-integrabel sind,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\varphi\,dx &= \int_\Omega [\operatorname{div}(\varphi\nabla u) - \Delta u\,\varphi]\,dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \nu\cdot(\varphi\nabla u)\,do - \int_\Omega \Delta u\,\varphi\,dx = -\int_\Omega \Delta u\,\varphi\,dx\end{aligned}$$

und damit

$$\int_\Omega (f+\Delta u)\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in C_0^1(\Omega) \tag{12.4}$$

Wir wählen für φ die in Kapitel 10 definierte Mittelfunktion $w_h(x_0-\cdot)$ und führen den Grenzübergang $h\to 0$ durch. Dann gilt

$$0 = \int_\Omega (f+\Delta u)w_h(x_0-x)\,dx \;\to\; f(x_0)+\Delta u(x_0)\,,$$

d. h. die Bedingung (12.3) impliziert unter den getroffenen Regularitätsvoraussetzungen an u und f die punktweise Bedingung $-\Delta u(x) = f(x)$.
Wir halten unsere Überlegungen in dem folgenden Satz fest.

Satz 12.1 *: Die Gleichungen (12.1) und (12.3) sind äquivalent, falls* $f\in C(\bar\Omega)$, $u\in C^2(\Omega)$, ∇u *gleichmäßig stetig und* $\nabla^2 u$ *Riemann-integrabel.*

(ii) Neumannsche Randbedingungen

Beim Dirichletproblem für die Gleichung (12.1) erhielten wir

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \int f\varphi\,dx \tag{12.5}$$

für alle φ aus dem „Testraum" $C_0^1(\Omega)$.
Wir verzichten nun auf die Forderung $u = g$ auf $\partial\Omega$ und fordern stattdessen, daß die Gleichung (12.5) für alle φ aus einem größeren Testraum gilt, nämlich

$$\int \nabla u\nabla\varphi\,dx = \int f\varphi\,dx \quad \text{für alle} \quad \varphi\in C^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\cap\{\varphi|\nabla\varphi \quad \text{gleichmäßig stetig}\} \tag{12.6}$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß ergibt sich wieder

$$\int f\varphi\,dx = \int \operatorname{div}(\varphi\nabla u\,)\,dx - \int \Delta u\,\varphi\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi\nabla u\cdot\nu\;do - \int \Delta u\,\varphi\,dx\,.$$

Insbesondere gilt die Gleichung (12.6) für $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, mit Satz 12.1 folgt $-\Delta u = f$, so daß die Gleichung

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi\nabla u\cdot\nu\,do = 0 \tag{12.7}$$

übrig bleibt. Aus (12.7) folgt mit Hilfe eines „Routine"-Argumentes, daß $\nabla u\cdot\nu = 0$ auf $\partial\Omega$. Auch für Studierende sollte diese Folgerung keine Schwierigkeiten bereiten, zur Übung wird dies in dem folgenden Hilfssatz vorgeführt:

Hilfssatz 12.1 *: Sei $v\in C(\partial\Omega)$ und $\int\limits_{\partial\Omega} v\,\varphi\,do = 0$ für alle $\varphi\in C^1(\partial\Omega)\cap C(\bar\Omega)$, $\nabla\varphi$ gleichmäßig stetig. Ferner gelte für die (lokale) C^1-Parametrisierung ψ von $\partial\Omega$, daß $\nabla\psi(x)\neq 0$, $x\in\partial\Omega$. Dann ist $v=0$.*

Beweis: Die Problematik liegt darin, daß zunächst nicht $\varphi\in C(\bar\Omega)$ in der Gleichung $\int\limits_{\partial\Omega} v\varphi\,do = 0$ erlaubt ist. Andernfalls könnte man $\varphi = v$ setzen und erhielte $\int\limits_{\partial\Omega} |v|^2\,do = 0$ und $\int\limits_I |v|^2\sqrt{\operatorname{gram}\nabla\psi}\,dx = 0$, woraus $|v|^2\sqrt{\operatorname{gram}\nabla\psi} = 0$ und $v^2 = 0$ punktweise folgt. Man hilft sich aus der Affäre, indem man beweist, daß v durch C^1-Funktionen v_m gleichmäßig approximiert werden kann. Es gilt

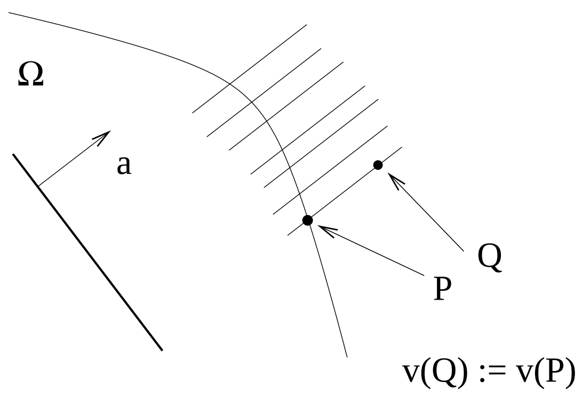
$$|v-v_m| = o(1),\ m\to\infty \quad \text{und} \quad \int\limits_{\partial\Omega} v\,v_m\,do = 0\,,$$

somit

$$\int\limits_{\partial\Omega} v\cdot(v+o(1))\,do = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_{\partial\Omega} |v|^2\,do = o(1)$$

woraus $\int\limits_{\Omega} |v|^2\,do = 0$ folgt. □

Wie bekommt man den Approximationssatz hin? Ein Routinier würde sagen: Nach dem Satz von Urysohn wird v stetig auf $U(\partial\Omega)$ fortgesetzt und mit Mittelfunktionen w_h gefaltet. Diese gefalteten Funktionen besitzen dann die gewünschte Eigenschaft. Wenn man den Satz von Urysohn vermeiden will, kann man ein bißchen basteln und an $\partial\Omega$ mehr voraussetzen, etwa daß $\partial\Omega$ lokal ein gedrehtes Normalgebiet ist und man setzt v einfach auf Linien konstant fort (in Richtung von a, s. Skizze).



Aus Hilfssatz 12.1 und (12.6) folgern wir daher

Satz 12.2 *Unter den getroffenen Voraussetzungen an Ω (u. a. Gültigkeit des Satzes von Gauß) und den Regularitätsvoraussetzungen an u und f impliziert die schwache Formulierung (12.6) die Gleichung*

$$\nu \cdot \nabla u = 0 \quad auf \quad \partial\Omega \tag{12.8}$$

Hierbei ist $\nu(x)$ der Normalenvektor im Punkt $x \in \partial\Omega$.

Die Gleichung (12.8) heißt (homogene) Neumannsche oder natürliche Randbedingung, während die Dirichletsche Randbedingung auch erzwungene Randbedingung genannt wird.

Die Neumannsche Randbedingung ist ebenfalls von großer Bedeutung bei physikalischen Anwendungen. Sie hängt von dem speziellen Operator ab. Betrachtet man z. B. einen Operator zweiter Ordnung in „Divergenzform“

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\right), \qquad a_{ik}(x) = a_{ki}(x),$$

und betrachtet man die Gleichung

$$Lu = f \quad \text{in} \quad \Omega,$$

so folgt aus der schwachen Formulierung

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}u\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx, \qquad \varphi \in C^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega),\ \nabla\varphi\,\text{gleichmäßig stetig}$$

die natürliche Randbedingung

$$((A\nu)(x))_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\nu_k(x) = 0, \quad i = 1,\dots,n$$

$\nu = (\nu_1 \dots \nu_n)$ = Normalenvektor in $x \in \Omega$.
Der Vektor $(A\nu)(x)$ heißt Konormale.

Für Anwendungen bedeutsam sind auch sogenannte gemischte Randbedingungen, bei denen man als Testraum alle Funktionen φ aus $C^1(\Omega)$ mit gleichmäßig stetigem $\nabla\varphi$ wählt, die auf einem Teil $\Gamma \subset \partial\Omega$ verschwinden. Auf $\partial\Omega - \Gamma$ folgt dann die natürliche Randbedingung, auf Γ wird eine Dirichletrandbedingung gestellt.

(iii) Variationsformulierung: Die schwache Formulierung einer partiellen Differentialgleichung läßt sich als notwendige Bedingung einer Minimierungsaufgabe herleiten. Hierzu definieren wir das Variationsintegral

$$J(u) = \int_\Omega \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\cdot) D_k u\, D_i u - fu\Big]\, dx\,.$$

$J(u)$ ist definiert, wenn z. B. $a_{ik} \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\bar{\Omega})$, und ∇u existiert und gleichmäßig stetig ist.

Satz 12.3 *Es sei V ein linearer Teilraum des Raumes $W = \{v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}) |\, \nabla v$ ist gleichmäßig stetig$\}$, und es gelte*

$$J(u) \le J(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

Dann gilt unter den obigen Annahmen an a_{ik} und f

$$\int_\Omega \Big[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} D_k u\, D_i\, \varphi - f\varphi\Big]\, dx = 0\,.$$

Beweis: Die durch $g(t) = J(u + t\varphi)$ definierte Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein Minimum. Daraus folgt:

$$0 = g'(t) \Rightarrow \int_\Omega \Big[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} D_k u\, D_i\, \varphi - f\varphi\Big]\, dx = 0\,.$$

□

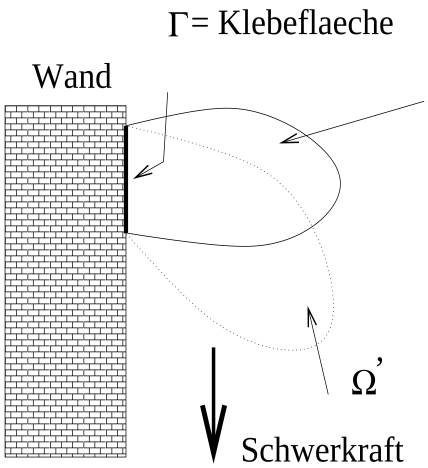
Anmerkung: Unter V kann man sich einen der Räume

$$V = \{v \in W \big|\, v|_{\partial\Omega} = 0\} \quad \text{„Dirichletrandbedingung“} \tag{12.9}$$
$$V = W \tag{12.10}$$
$$V = \{v \in W \big|\, v|_{\Gamma} = 0\} \quad \text{„gemischte Randbedingung“} \tag{12.11}$$

vorstellen. Erstaunlich ist, daß im Fall (12.10) die Minimalitätsforderung in Satz 12.3 von „der Natur" und der natürlichen Randbedingung $A\nu = 0$ auf $\partial\Omega$, $A = (a_{ik})$ geliefert wird.

(iv) Die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

Wir betrachten einen elastischen, dreidimensionalen Körper, der den Abschluß eines beschränkten Gebietes Ω (Gebiet = zusammenhängende, offene Punktmenge) ausfüllt. „ Elastisch" bedeutet, daß der Körper bei Einwirken einer Kraft verformt wird und nach Abschalten der Kraft wieder in den ursprünglichen Ruhestand versetzt wird.
Wir stellen uns z. B. vor, daß der Körper an eine Wand geklebt ist, die Schwerkraft angeschaltet wird und dann jeder Punkt x eine Verschiebung („displacement") $u(x)$ erleidet. Der Punkt x geht also in den Punkt $x + u(x)$ über. Nach Abschalten der Schwerkraft kehrt der Körper an seinen Ausgangspunkt zurück.



Unter gewissen physikalischen Annahmen (dreidimensionales Hooksches Gesetz) läßt sich beweisen, daß bei kleinen Verschiebungen näherungsweise die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie erfüllt sind. Sie lauten:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}C(\nabla u + \nabla u^T)\right) = f \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{12.12}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf} \quad \Gamma \tag{12.13}$$

$$\nu \cdot C(\nabla u + \nabla u^T) = 0 \text{ auf } \partial\Omega - \Gamma \tag{12.14}$$

Hierbei ist $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, ∇u also eine 3x3-Matrix. $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ nennt man den „symmetrischen Gradienten" von u, speziell in der Elastizitätstheorie heißt die Größe „Verzerrungstensor". Die Abbildung C bildet 3x3-Matrizen auf symmetrische Matrizen ab, heißt „Elastizitätstensor" und ist eine Materialgröße. Die Standardanwendung ist

$$CB = \mu B + \lambda(\operatorname{spur} B)I \tag{12.15}$$

mit Konstanten $\mu, \lambda > 0$. Diese Gleichungen heißen dann auch Lamé-Navier-Gleichungen. Die Divergenz ist komponentenweise zu verstehen. Im Fall der Beziehung (12.15) wird aus (12.12)

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\,[\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial x_k}u_i + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}u_k] - \sum_{i=1}^{n} \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\delta_{ik}\sum\frac{\partial}{\partial x_j}\,u_j)] = f$$

und damit

$$-\frac{1}{2}\mu\Delta\, u_k - (\frac{1}{2}\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_k}\;\mathrm{div}\, u = f$$

In der schwachen Formulierung lautet (12.12) als Folgerung des Satzes von Gauß

$$\frac{1}{2}\int C(\nabla u + \nabla u^T)\cdot\nabla\varphi\, dx = \int f\varphi\, dx, \quad \forall\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),\ \varphi\in V \quad \text{aus (12.11)}\,,$$

und die Bedingung (12.14) ist wieder eine natürliche Randbedingung. Physikalisch drückt sie aus, daß auf den Rand $\partial\,\Omega - \Gamma$ keine Kräfte wirken. Will man eine inhomogene Neumann-Bedingung formulieren, fügt man in die schwache Formulierung ein Randintegral hinzu:

$$\frac{1}{2}\int C(\nabla u + \nabla u^T)\cdot\nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega} f\varphi\, dx + \int_{\partial\,\Omega} p_0\cdot\varphi\, do\,.$$

Über den Satz von Gauß folgt dann

$$\nu\cdot C(\nabla u + \nabla u^T) = p_0\,,$$

wodurch physikalisch die Anwendung einer auf den Rand wirkenden Kraft formuliert wird.

13 Der Satz von Stokes für 2-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten die folgende Situation:

Voraussetzung 13.1 *Es sei $I \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter Parameterbereich, der durch eine positiv orientierte Randkurve Λ berandet sei. I sei verallgemeinerter Normalbereich (alternativ: Es gelte der Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$).*

Voraussetzung 13.2 *Die Fläche F sei Graph einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}^3$. g besitze zweite gleichmäßig stetige Ableitungen. Die Parameterdarstellung von F ist somit gegeben durch $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$.*

Die Fläche F hat die Randkurve Γ, welche durch die Parameterdarstellung $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ gegeben ist, wenn φ Parameterdarstellung von Γ ist.
Für $f : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $\operatorname{rot} f$ (englisch: $\operatorname{curl} f$) den Vektor

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 & -\frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 & -\frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & -\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix} .$$

Eselsbrücke:

$$\operatorname{rot} f = \det \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} .$$

Satz 13.1 *Unter den Voraussetzungen 13.1 und 13.2 gilt für $f \in C^1(U(F))$*

$$\int_F \nu \cdot \operatorname{rot} f \, do = \int_\Gamma f \, ds \,.$$

Hierbei ist $\nu(p)$ der Normaleneinheitsvektor der Fläche F im Punkt p mit $\nu_3(p) > 0$ (d. h. er ist nach „oben“ gerichtet). $U(F)$ = Umgebung von F.

Beweis: Die Formeln werden überschaubarer, wenn wir den Beweis einzeln für die Vektorfunktionen $\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{smallmatrix}\right)$ führen. Beginnen wir mit $f = \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$\operatorname{rot}(f_1, 0, 0)^T = (0, \frac{\partial}{\partial x_3} f_1, -\frac{\partial}{\partial x_2} f_1) \,.$$

Mit der aus Kapitel neun bekannten Darstellung des Normalenvektors an der Stelle $P = (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ergibt sich

$$\nu \cdot \mathrm{rot}(f_1, 0, 0)^T|_P = -\left[g_{\xi_2}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_3} f_1|_P + \frac{\partial}{\partial x_2} f_1|_P\right] \cdot \left(\sqrt{1 + \left|\nabla g\right|^2(\xi)}\right)^{-1} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \xi_2}(f_1(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))) \cdot \left(\sqrt{1 + |\nabla g|^2(\xi)}\right)^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_F \nu \, \mathrm{rot}(f_1, 0, 0)^T \, do = -\int\limits_I \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_1(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, .$$

Nach dem Satz von Gauß in der Ebene, nach Satz 1.1 und Satz 1.2 gilt

$$-\int\limits_I \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_1(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \, \xi_1 \, d\xi_2 = \int\limits_\Lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} ds \, ,$$

mit einer Parameterdarstellung $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ von Λ

$$-\int\limits_I \frac{\partial}{\partial \xi_2} f_1(\xi, g(\xi)) \, d\xi_1 \, d\xi_2 = \int\limits_\alpha^\beta f_1(\varphi(t), g(\varphi(t)) \, \dot{\varphi}_1(t) \, dt \, .$$

Das letzte Integral läßt sich als Kurvenintegral über Γ schreiben:

$$\int\limits_\Gamma (f_1, 0, 0)^T \, ds = \int\limits_\alpha^\beta (f_1(\varphi(t), g(\varphi(t)), 0, 0) \cdot (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \frac{d}{dt} g(\varphi_1, \varphi_2)) \, dt$$

Völlig analog erhält man

$$\int\limits_F \nu \cdot \mathrm{rot}(0, f_2, 0)^T \, do = \int\limits_\Gamma (0, f_2, 0)^T \, ds \, .$$

Wir behandeln jetzt $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$\mathrm{rot}(0, 0, f_3)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_3, \, -\frac{\partial}{\partial x_1} f_3, 0\right)^T$$

und

$$\nu \cdot \mathrm{rot}(0, 0, f_3)^T|_P = -g_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 + g_{\xi_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f_3|_P \cdot \left(\sqrt{1 + |\nabla g|^2(\xi)}\right)^{-1} =$$
$$= \left[-\frac{\partial}{\partial \xi_2} (g_{\xi_1} f_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} (g_{\xi_2} \, f_3)\right] \Big|_{(\xi_1, \xi_2, g(\xi))} \cdot \sqrt{1 + |\nabla g|^2(\xi)}^{-1}$$

Die letzte Gleichung muß man nachrechnen.
Es entstehen die Zusatzterme $-g_{\xi_1\xi_2} f_3 - g_{\xi_1} g_{\xi_2} f_3 + g_{\xi_2\xi_1} f_3 - g_{\xi_2} g_{\xi_1} f_3$, die sich wegheben.
Damit erhalten wir

$$\int\limits_F \nu \cdot \operatorname{rot}(0,0,f_3)^T \, do = \int\limits_I \left[-\frac{\partial}{\partial \xi_2}(g_{\xi_1}(\xi) f_3(\xi, g(\xi)) + \frac{\partial}{\partial \xi_1}(g_{\xi_2}(\xi) f_3 \xi, g(\xi)) \right] d\xi_1 \, d\xi_2$$

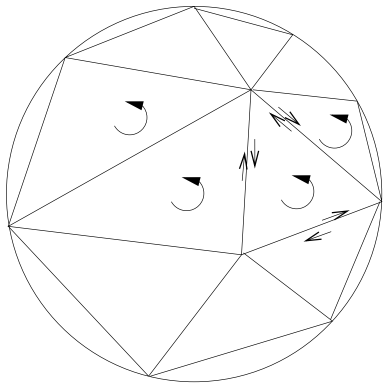
Nach dem Stokesschen Satz in der Ebene ist der letzte Ausdruck gleich

$$\int\limits_\alpha^\beta \left[g_{\xi_1} f_3(\cdot, g(\cdot))|_{\varphi(t)} \dot\varphi_1 + g_{\xi_2} f_3(\cdot, g(\cdot))|_{\varphi(T)} \dot\varphi_2 \right] dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta (0,0,f_3)^T \cdot (\dot\varphi_1, \dot\varphi_2, \frac{d}{dt} g(\varphi(\cdot)))^T \, dt = \int\limits_\Gamma (0,0,f_3)^T \, d\vec{s}$$

Der Satz ist damit bewiesen. □

Eine globale Version des Satzes von Stokes erhält man für Flächen F mit einer Parameterdarstellung $\psi : I \to \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}^2$, indem man den Parameterbereich I mit Hilfe (eventuell krummlinig behandelter) Dreiecke Δ_j, $j = 1, \ldots, N$ zerlegt und deren Randkurven Λ_j alle in der gleichen positiven Richtung orientiert.



Da gemeinsame Seiten zweier benachbarter Dreiecke Δ_j und Δ_k von den Randkurven Λ_j und Λ_k in gegenläufigem Sinne durchlaufen werden, bleibt bei der Summation $\sum\limits_j \int\limits_{\Lambda_j} \tilde f \, d\vec{s}$ über alle Dreiecke der Zerlegung nur das Randintegral $\int\limits_{\partial I} \tilde f \, d\vec{s}$ übrig, d. h. es gilt

$$\sum_j \int\limits_{\Lambda_j} \tilde f \, d\vec{s} = \int\limits_{\partial I} \tilde f \, d\vec{s} \,.$$

Die entsprechende Aussage überträgt sich auf den Bildbereich, wenn $\psi(\Lambda)$ und $\psi(\Delta_j)$ die entsprechenden Bilder der Randkurven Λ_j und Zerlegungsdreiecke sind:

$$\sum_j \int_{\psi(\Lambda_j)} f\,d\vec{s} = \int_\Gamma f\,d\vec{s}, \qquad \Gamma = \quad \text{Randkurve der Fläche}.$$

Analog wie beim Beweis des Satzes von Gauß erhalten wir den Satz von Stokes für Flächenstücke, die sich nach einer Drehung als Graph einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}^3$ schreiben lassen. Wie beim Satz von Stokes in der Ebene sind stückweise glatt berandete Parameterbereiche zulässig, z.B. Dreiecke.

Wir setzen nun voraus, daß diese Voraussetzung auf den Dreiecken Δ_j und dem zugehörigen Flächenstück gegeben ist und wenden den lokalen Satz von Stokes an. Damit ergibt sich für $f \in C^1$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{F_j} \nu \cdot \operatorname{rot} f\,do = \sum_{j=1}^{N} \int_{\psi(\Lambda_j)} f\,d\vec{s} = \int_\Gamma f\,d\vec{s}$$

mit einem Normalenvektor ν, der senkrecht auf der Fläche steht.

Wir können $\sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_{F_j} \nu \cdot \operatorname{rot} f\,do = \int\limits_\Gamma \nu \cdot \operatorname{rot} f\,do$ zusammenfassen, haben aber das Dilemma, daß ν auf benachbarten Teildreiecken der Zerlegung nicht notwendigerweise stetig ist, und beim Durchqueren des Randes von Δ_j sein Vorzeichen wechselt, also, anschaulich gesprochen, auf der „anderen Seite" der Fläche liegt. Dies passiert bei sogenannten nichtorientierbaren Flächen wie dem Möbiusband, bei dem man nicht von einer Außen- und Innenseite der Fläche reden kann.

Um solche unstetige Richtungsänderungen der Normalen zu vermeiden, kann man eine Stetigkeitsvoraussetzung treffen und erhält dann eine korrekte globale Version des Satzes von Stokes.

Wir verabreden ähnlich wie beim Satz von Gauß, daß die Restriktion der Parameterdarstellung $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ sich lokal nach einer Drehung als Graph einer Funktion von $I' \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ schreiben läßt. Präzise ist dies die folgende Voraussetzung:

Voraussetzung 13.3 *Die Fläche F sei durch eine Parameterdarstellung $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ gegeben. I möge der Voraussetzung 13.1 genügen. Ferner existiere eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$, so daß für jedes $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ folgendes gilt: Es existiert eine Triangulation von I durch (eventuell krummlinig) berandete Dreiecke Δ mit Durchmesser $< \varepsilon$, so daß die Fläche $\varphi|_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}^3$ sich als gedrehter Graph schreiben läßt, d.h. es existieren orthonormale Vektoren $e_1^\Delta, e_2^\Delta, a^\Delta$ und eine Funktion $g^\Delta : D_\Delta \to \mathbb{R}^3$ mit gleichmäßig zweiten stetigen Ableitungen, so daß $\varphi|_\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 e_1^\Delta + \xi_2 e_2^\Delta + g^\Delta(\xi_1, \xi_2) a^\Delta$ gilt. Hierbei sei D_Δ ein (eventuell krummlinig) berandetes Dreieck. Für die*

Vektoren a^Δ *gelte*

$$|a^\Delta - a^{\Delta'}| < \varepsilon\,, \quad \textit{wenn} \quad \Delta \cap \Delta' \neq \emptyset\,. \tag{13.1}$$

Diese Voraussetzung ist sicher sehr umständlich und wenig elegant, drückt aber das aus, was wir haben wollen. Die Bedingung (13.1) verhindert Sprünge der Normalenvektoren, welche wie beim Satz von Gauß in der Form

$$\nu(\varphi(\xi) = \{-e_1^\Delta g_{\xi_1}^\Delta(\xi) - e_2^\Delta g_{\xi_2}^\Delta(\xi) + a^\Delta\}|\nabla g^\Delta(\xi)|^{-1/2}\,, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

ausgedrückt werden kann. Um darüber hinaus das korrekte Vorzeichen der Normalenvektoren zu erzielen, muß für eines der Dreiecke Δ der Triangulation des Parameterbereiches die Rechtsschraubenregel verlangt werden, d.h. die Randkurve von $\varphi(\Delta)$ soll positiv orientiert sein und die zugehörigen Normalenvektoren sollen in Richtung des Daumens der rechten Hand zeigen, wenn man den Daumen im rechten Winkel abspreizt und die restlichen Finger aneinanderliegend in Richtung der Orientierung der Kurve zeigen.

Um die heuristische Verwendung menschlicher Körperteile (in diesem Falle der rechten Hand) bei der Formulierung der Voraussetzung zu vermeiden, wäre es z. B. korrekt, stattdessen zu verlangen, daß ein Teilstück $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ für ein Dreieck Δ der Zerlegung die Situation von Satz 13.1 vorliegt, d.h. $\varphi|_\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$, $a^\Delta = (0, 0, 1)$.

Wir erhalten somit eine Version des Satzes von Stokes:

Satz 13.2 *Es sei F eine Fläche mit positiv orientierter Randkurve Γ, welche der Voraussetzung 13.3 und $f \in C^1(U(F))$ genüge. Dann gilt*

$$\int_F \nu \cdot \operatorname{rot} f \, do = \int_\Gamma f \, ds\,.$$

Hierbei ist $\nu(P)$ der Normaleneinheitsvektor der Fläche F im Punkt P, dessen Richtung durch die Rechtsschraubenregel festgelegt ist.