GEMISCHTE RANDWERTPROBLEME

Skript zur Vorlesung
von Prof. Dr. J. Frehse
Sommersemester 2000

`Dieses Skript ist noch in der Entstehung.`
`Fehler bitte an steffens@math.uni-bonn.de`

Inhaltsverzeichnis

1. Erzwungene und natürliche Randbedingungen

Der eindimensionale Fall. Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$F_i : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ bzw. } F_i : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \; i = 0, 1$$

vorgegebene Funktionen, die wir der Einfachheit halber als stetig voraussetzen. (Allgemeiner würde man die sogenannten Caratheodory-Bedingungen fordern.)

Wir betrachten die Differentialgleichung bzw. das Differentialgleichungssystem

$$Lu = -\,(F_1(x, u, u'))' + F_0(x, u, u') = 0. \tag{1.1}$$

Solche Gleichungen ergeben sich z.B. als Eulergleichungen von Vatiationsproblemen

$$\int_a^b F(x, u, u')\, dx = \min !.$$

Einfachstes Beispiel: $F_1(x, u, \eta) = \eta\,,\; F_0(x, u, \eta) = f(x)$. Dann ergibt sich die Differentialgleichung $-u'' + f(x) = 0$. Ohne Randbedingungen ist (1.1) unterbestimmt. Durch Anwendungen sind folgende Randbedingungen motiviert:

(i) Dirichletrandbedingung: $u(a) = u(b) = 0$ oder auch eine inhomogene Randbedingung $u(a) = \alpha\,,\; u(b) = \beta$.
(ii) Natürliche Randbedingung (oder Neumannsche Randbedingung):

$$F_1(x, u, u')|_a = F_1(x, u, u')|_b = 0. \tag{1.2}$$

Ein besseres Verständnis dieser Randbedingungen erhält man über die *schwache* Formulierung von (1.1). Hierzu benötigen wir den Sobolevschen Funktionenraum $H^1(I)$ sowie $H_0^1(I)$, welche auf verschiedene Weise äquivalent definiert werden können. Am schnellsten begreift man die folgende Definition:

$$H^1(I) = \{u \in C(\bar{I})|\; u \text{ besitzt eine verallgemeinerte Ableitung aus } L^2\} \tag{1.3}$$

Die Aussage „u besitzt eine verallgemeinerte Ableitung aus L^2“ bedeutet: „Es existiert ein Element $v \in L^2(I)$ mit der Eigenschaft: $(u, \varphi') = -(v, \varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$.“Hierbei ist $C(\bar{I})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\bar{I}(= I)$ und $C_0^\infty(I) = \{\varphi \in C(\bar{I})\,,\; \varphi = 0$ in $U(a) \cup U(b)\,,\; \varphi \in C^\infty\}$. Die Klammern $(.,.)$ bedeuten das L^2-Skalarprodukt: $(w, y) = \int_I wy\, dx$, $L^2(I) = \{[u]|u$ meßbar, $\int u^2\, dx < \infty\}\,,\; [u] = \{v|u - v = 0$ fast überall $\}$. Üblich, da mehr mathematische Einsicht bringend, ist die folgende Definition:

$$H^1(I) = \{u : I \to \mathbb{R}|u \text{ ist absolutstetig und } u' \in L^2\}\,. \tag{1.4}$$

Zur Definition der Absolutstetigkeit verweisen wir auf Lehrbücher zur sogenannten reellen Analysis (Natanson, Skript Analysis IV). Die Defintion (1.4) hat den Vorteil, dass wegen der Absolutstetigkeit von u die Ableitung von u' fast überall als Limes von Differenzenquotienten definiert ist.

Interessiert man sich mehr für partielle Differentialgleichungen und sieht den eindimensionalen Fall als läppischen Spezialfall an, definiert man

$$H^1(u) = \{u \in L^2(I) | u \text{ besitzt eine verallgemeinerte Ableitung aus } L^2\} \tag{1.5}$$

(so würde man im n-dimensionalen Fall, mit I ersetzt durch $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, vorgehen). Da es lästig ist, dass die Elemente von L^2 keine Funktionen sondern Funktionenklassen sind, wird man, wenn man mit Definition (1.5) arbeitet, sofort einen Einbettungssatz heranziehen, welcher besagt, dass jedes Element $u \in H^1(I)$ einen (absolut-) stetigen Repräsentanten $\tilde{u}$ besitzt ($\tilde{u}$ ist sogar Hölderstetig zum Exponenten $\frac{1}{2}$). Man stellt sich dann stillschweigend die Elemente von $H^1(I)$ als eben diese $\tilde{u}$ vor, braucht also nicht mehr mit Funktionenklassen zu arbeiten. Aber Vorsicht, u' ist nur aus L^2, also nach wie vor eine Funktionenklasse und keine Funktion!

Die schwache Formulierung von (1.1) lautet:

$$(F_1(.,u,u'),\varphi') + (F_0(.,u,u'),\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I)\,. \tag{1.6}$$

Gilt (1.6), nennt man $C_0^\infty(I)$ den „Testraum“. Damit die Integrale in (1.6) existieren, benötigt man *Wachstumsbedingungen* an F_0 und F_1. Da der Testraum hier sehr gut ist, reicht *quadratisches* Wachstum von F_0 und F_1 in dem Argument, in welchem u' steht.

Wir setzen stärker voraus

$$|F_1(.,\mu,\eta)| \le K_c + K_c|\eta|,\ |F_0(.,\mu,\eta)| \le K_c + K_c|\eta|^2\,,\ |\mu| \le C\,,\ \eta \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

und können dann (1.6) auf einen größeren Testraum ausdehnen. Es gilt nämlich

$$(F_1(.,u,u'),\varphi') + (F_0(.,u,u'),\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in H_0^1(I)\,. \tag{1.8}$$

Hierbei ist $H_0^1(I)$ die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der H^1-Norm $\|u\|_{H^1} = [(u,u) + (u',u')]^{1/2}$. Man kann sich überlegen, dass

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(I) |\ u(a) = u(b) = 0\}\,.$$

Das Dirichletproblem $Lu = 0$ lautet somit: Gesucht ist $u \in V = H_0^1(I)$, so dass (1.8) gilt für alle $\varphi \in V$. Man *erzwingt* also die Randbedingung, indem man sie von vorneherein in den Grundraum V steckt. Man spricht daher bei Dirichletrandbedingungen auch von *erzwungenen* Randbedingungen.

Wählt man stattdessen den Grundraum $V = H^1(I)$, lautet die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} &\text{Gesucht ist } u \in V = H^1(I)\,, \text{ so dass} \\ &(F_1(.,u,u'),\varphi') + (F_0(.,u,u'),\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in V\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Aus (1.9) kann man schließen, dass $F_1(.,u,u')$ verallgemeinerte Ableitungen in L^1 besitzt und somit absolutstetig ist (s. Analysis IV-Skript) - genauer gesagt, einen absolutstetigen Repräsentanten besitzt. Es gilt also - nach partieller Integration

$$\int_a^b [-(F_1(.,u,u'))' + F_0(.,u,u')]\varphi\, dt = 0\,,\ \varphi \in C_0^\infty(I)\,,$$

und damit - über ein „Dichtheitsargument“ -

$$-(F_1(.,u,u'))' + F_0(.,u,u') = 0 \text{ fast überall in } I\,. \tag{1.10}$$

Es entstanden keine Randterme, da $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Benutzt man nun (1.9) für Elemente $\varphi \in V = H^1(I)$, entstehen nach der partiellen Integration Randterme:

$$\int_a^b [-F_1(.,u,u'))' + F_0(.,u,u')]\varphi\,dx = F_1(.,u,u')|_a\varphi(a) + F_1(.,u,u')|_b\varphi(b) = 0\,. \tag{1.11}$$

Das Integral in (1.11) verschwindet wegen (1.10), es verbleibt

$$F_1(.,u,u')|_b\varphi(b) = F_1(.,u,u')|_a\varphi(a) = 0\,,$$

und da $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ beliebige Werte annehmen können, folgt

$$F_1(.,u,u')|_a = F_1(.,u,u')|_b = 0\,. \tag{1.12}$$

Die Randbedignungen (1.12) ergeben sich also auf *natürliche* Weise, wenn man $V = H^1(I)$ als Testraum wählt - daher der Name.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass $u'(a)$ und $u'(b)$ für $u \in H^1$ i. A. nicht definiert sind. In unserem Fall aber ergibt die Differentialgleichung die zusätzliche Regularitätsaussage, dass $F_1(.,u,u')$ stetig ist, d.h. $F_1(.,u,u')|_a\,,\ F_1(.,u,u')|_b$ ist definiert.

In höheren Dimensionen ist diese Regularitätsaussage bei schlechten Daten nicht immer richtig - man beschränkt sich dann einfach auf die schwache Formulierung.

Von *gemischten* Randbedingungen sprich man, wenn auf einem Teil des Randes des Grundgebietes Dirichlet bzw. Neumann (=natürliche) Randbedingungen gegeben sind, also etwa $u(a) = 0\,,\ F_1(.,u,u')|_b = 0$. Im eindimensionalen Fall ist dies analytisch nicht interessant, da a und b getrennt liegen.

Andere Randbedingungen:

Durch Hinzufügen von Randtermen in der schwachen Formulierung lassen sich *inhomogene Neumannbedingungen* und *Randbedingungen dritter Art* erzeugen. Gesucht ist $u \in H^1(I)$, so dass

$$(F_1(.,u,u'),\varphi) + (F_0(.,u,u'),\varphi) - g_a(u(a))\varphi(a) + g_b(u(b))\varphi(b) = 0$$

für alle $\varphi \in H^1(I)$.

Eine Lösung dieses Problems erfüllt automatisch

$$\begin{aligned} F_1(.,u,u')|_a + g_a(u(a)) &= 0 \\ F_1(.,u,u')|_b + g_b(u(b)) &= 0\,. \end{aligned}$$

Hängt g_a, g_b nicht von u ab, liegt eine inhomogene Neumannbedingung vor, im Fall einer Abhängigkeit - z.B. linearer Natur $g_a(u(a)) = \alpha u(a) + \alpha_0\,,\ g_b$ analog - spricht man von Randbedingungen dritter Art.

Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung treten zusätzliche interessante Effekte auf. Die elastische Verbiegung eines eindimensionalen Balkens wird näherungsweise über die Gleichung

$$u^{(iv)} = f \tag{1.13}$$

mit Randbedingungen modelliert. Man stelle sich den horizontal liegenden Balken als Intervall $[a,b]$ vor. Nach Einschalten der Schwerkraft ($f \neq 0$) geschieht eine Auslenkung u des Balkens in vertikaler Richtung. Es werden insbesondere die folgenden drei Randbedingungen betrachtet:

1. *Fest eingespannter Balken.* Dies entspricht den *erzwungenen Randbedingungen*

   $$u(a) = u(b) = 0 \textit{ und } u'(a) = u'(b) = 0\,.$$

   Dies wird durch die Wahl des Raumes $H_0^{2,2}(a,b)$ als Grundraum ausgedrückt. Die schwache Formulierung von (1.13) lautet: Gesucht ist $u \in H_0^{2,2}(a,b)$, so dass

   $$(u'', \varphi'') = (f, \varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^{2,2}(a,b)\,.$$

2. *Gelenkig eingespannter Balken.* Hier fordert man die *erzwungene* Randbedingung

   $$u(a) = u(b) = 0$$

   und die natürliche Randbedingung

   $$u''(a) = u''(b) = 0\,.$$

   Als Grundraum wählt man hier $H_0^{1,2} \cap H^{2,2}(a,b)$; dies ist der Teilraum von $H^{2,2}$ aller Funktionen $v \in H^{2,2}$ mit $v(a) = v(b) = 0$. (Im Gegensatz zu $H_0^{2,2}$ gilt also *nicht* notwendig $v'(a) = 0\,,\ v'(b) = 0$.) Die schwache Formulierung lautet jetzt: Gesucht ist $u \in H_0^{1,2} \cap H^{2,2}(a,b)$ mit

   $$(u'', \varphi'') = (f, \varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^{1,2} \cap H^{2,2}(a,b)\,. \tag{1.14}$$

   Aus (1.14) schließt man zunächst - nach einem Regularitätsnachweis - $u^{(iv)} = f$ und anschließend, durch partielle Integration,

   $$(f, \varphi) = (u'', \varphi'') = -(u''', \varphi') + u''\varphi'|_a^b = -(u^{(iv)}, \varphi) + u''\varphi'|_a^b\,.$$

   Der Randterm $-u'''\varphi|_a^b$ fällt weg, da $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Somit ergibt sich $u''\varphi'|_a^b = 0$, woraus die *natürliche* Randbedingung $u''(a) = u''(b) = 0$ folgt.

3. *Der freie Balken.* Um ein physikalisch sinnvolles Problem zu haben, fordern wir an der Stelle a erzwungene Randbedingungen

   $$u(a) = u'(a) = 0$$

   (es ginge auch $u(a) = 0$ ohne die zweite Bedingung) und fordern an der Stelle b die natürliche Randbedingung

   $$u''(b) = u'''(b) = 0\,.$$

   Man kann sich einen eindimensionalen Balken vorstellen, der an der Stelle b nicht unterstützt ist.

Die schwache Formulierung des Problems lautet: Gesucht ist $u \in V = H^{2,2}(a,b) \cap \{v | v(a) = v'(a) = 0\}$ mit

$$(u'', \varphi'') = (f, \varphi), \qquad \varphi \in V.$$

Hieraus schließen wir ähnlich wie unter 2., dass $u''\varphi'|_b - u'''\varphi|_b = 0$ und somit die natürliche Randbedingung $u''(b) = u'''(b) = 0$ gilt.

Der mehrdimensionale Fall. Es sei Ω eine beschränkte offene Punktmenge. Wir betrachten partielle Differentialgleichungen in *Divergenzform*

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i(F_i(x,u,\nabla u)) + F_0(x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1.15}$$

mit Funktionen

$$F_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Differentialgleichungen in Divergenzform treten typischerweise als Eulergleichungen von Variationsproblemen

$$F(x,u,\nabla u)\,dx = \min!$$

auf.
Das übliche zu (1.15) gehörige Minimumproblem lautet: Gesucht ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i(x,u,\nabla u), D_i\varphi) + (F_0(x,u,\nabla u), \varphi) = 0 \tag{1.16}$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Eine der möglichen Definitionen des Sobolevraumes $H_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2 | \exists v_m \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \|u - v_m\|_{H^1} \to 0\,,\ m \to \infty\}\,,$$

d.h. $H_0^1(\Omega)$ wird als Abschließung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der H^1-Norm, $\|w\|_{H^1}^2 = \int_\Omega w^2\,dx + \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx$ definiert.

Eine andere Möglichkeit der Definition von $H_0^{1,2}(\Omega)$ besteht darin, den Sobolevraum $H^{1,2}(\Omega)$ als Menge von Funktionenklassen $[v]$ zu definieren, wobei aus $v_1, v_2 \in [v]$ folgt, dass $v_1 = v_2$ bis auf eine Menge der Kapazität Null. (Diesen Begriff wollen wir hier nicht definieren.) Da die Kapazität von $\partial\Omega$ *nicht verschwindet*, ist die Aussage $u|_{\partial\Omega} = 0$ sinnvoll. In der Tat läßt sich die Äquivalenz der verschiedenen Begriffe zeigen.
Wir notieren dennoch hier die ähnliche Definition von $H^{1,2}$:

$$H^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2 | D_i u \in L^2\}\,, \qquad D_i = \text{ verallgemeinerte Ableitung}.$$

Damit die Integrale in (1.16) erklärt sind, benötigt man für die F_i die sogenannten Caratheodory-Bedingungen, die sicherstellen, dass $F_i(x,u,\nabla u)$ messbar ist, und man benötigt *Wachstums*-Bedingungen, damit $F_i(x,u,\nabla u) \in L^2$, $i = 1, \ldots, n$, und $F_0(x,u,\nabla u) \in L^1$ ist.

Man fordert etwa - mit vielen Varianten -

$$
\begin{aligned}
|F_i(x,u,\eta)| &\leq K|u| + K|\eta| + K\,, \qquad i = 1,\dots,n\,, \\
|F_0(x,u,\eta)| &\leq K|\eta|^2 + K|u| + K\,.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Unter diesen Voraussetzungen ist (1.16) für $\varphi \in H_0^{1,2} \cap L^\infty$ erklärt.

Wählt man in (1.16) anstelle von $H_0^{1,2}$ den Raum $V = H^{1,2}(\Omega)$ als Grundraum und gilt die schwache Formulierung

$$
\sum_{i=1}^{n} (F_i(x,u,\nabla u), D_i\varphi) + (F_0(x,u,\nabla u),\varphi) = 0\,, \qquad \varphi \in H^{1,2} \cap L^\infty\,,
\tag{1.18}
$$

so erhält man im Falle, dass etwa $F_i(x,u,\nabla u) \in C^1(\bar\Omega)$, durch partielle Integration (Satz von Gauß)

$$
\int_\Omega [-\sum_{i=1}^{n} D_iF_i(x,u,\nabla u) + F_0(x,u,\nabla u)]\varphi\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega} \nu_i F_i(x,u,\nabla u)\varphi\,do = 0.
\tag{1.19}
$$

Hierbei ist $\nu(x) = \nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ der in das Gebietsäußere zeigende Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \partial\Omega$. Damit ν definiert ist, benötigt man die Differenzierbarkeit des Randes $\partial\Omega$. — In der schwachen Formulierung (1.18) benötigt man diese Forderung nicht, welches ein Vorteil ist.

Was macht man gegen seine Vergeßlichkeit?

Ist in (1.19) ν wirklich der äußere Normalenvektor oder doch der innere? Um dies zu entscheiden, betrachtet man den eindimensionalen Fall: Es gilt, $(a < b)$,

$$
(u',\varphi') = -(u'',\varphi) + u'(b)\varphi(b) - u'(a)\varphi(a)\,.
$$

$u'(b)$ entspricht dem Ausdruck $(\nu\cdot\nabla)u$ in n Dimensionen und entspricht der bezüglich $[a,b]$ nach außen gerichteten Normalenableitung, da $u'(b) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{u(b+h)-u(b)}{h}$.

Analog ist $-u'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{u(a-h)-u(a)}{h}$ und entspricht ebenfalls der nach außen gerichteten Normalableitung.

Aus (1.19) schließt man wie üblich das Erfülltsein der Gleichung

$$
-\sum_{i=1}^{n} D_iF_i(x,u,\nabla u) + F_0(x,u,\nabla u) = 0\,,
$$

indem man zunächst nur Funktionen φ mit Nullrandbedingungen betrachtet. Man erhält dann

$$
\int_{\partial\Omega} \nu_i F_i(x,u,\nabla u)\varphi\,do = 0
$$

für alle $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$, woraus man die *natürliche Randbedingung* (oder Neumannbedingung)

$$
\sum_{i=1}^{n} \nu_i(x) F_i(x,u(x),\nabla u(x)) = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega
$$

erhält.

Im linearen Fall

$$F_i(x, u(x), \nabla u(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) D_k u(x)$$

folgt somit

$$\nu^T A \nabla u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Den Vektor $\nu^T A(x)$ oder auch $A^T \nu(x)$ bezeichnet man als *Konormale* im Punkt $x \in \Omega$.

Man beachte, dass nur im Fall

$$\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik} D_k u) = \Delta u$$

die Konormale gleich der Normalableitung $\frac{\partial}{\partial \nu} u = \nu \nabla u$ ist.

Ähnlich wie im eindimensionalen Fall erhält man durch Hinzufügen von Randtermen

$$\int_{\partial\Omega} g(x, u(x)) \varphi(x)\, do$$

in (1.19) auf Seite 7 die *Randbedingungen dritter Art*

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(x) F_i(x, u(x), \nabla u(x)) + g(x, u(x)) = 0\,.$$

Gemischte Randwertprobleme

In diesem Fall fordert man, dass die gesuchte Funktion u auf einem Teil Γ des Randes $\partial\Omega$ verschwindet und die Funktionen φ im Testraum die gleichen Eigenschaften haben. Um dies präzise zu formulieren, definieren wir den Raum $H_\Gamma^{1,2}$.

<u>Definition:</u> $H_\Gamma^{1,2}(\Omega)$ ist die Abschließung des Teilraumes

$$\begin{aligned} \tilde{V} = \{u \in H^{1,2}(\Omega) | \exists \text{ Umgebung } U(\Gamma)\,,\ \text{so dass} \\ u = 0 \text{ auf } U(\Gamma) \text{ fast überall } \} \end{aligned}$$

bezüglich der H^1-Norm.

Alternativ könnte man auch wählen

$$\tilde{V} = \{u \in C^1(\Omega) | u = 0 \text{ in } U(\Gamma) \text{ und } u, \nabla u \in L^2(\Omega)\}\,.$$

Schließlich könnte man das Verschwinden von u auf Γ und damit den Raum $H_\Gamma^{1,2}$ mit Hilfe des Kapazitätsbegriffes definieren.

Das *gemischte Randwertproblem* lautet somit: Gesucht ist $u \in H^{1,2}_\Gamma(\Omega)$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} F_i(x, u, \nabla u) D_i \varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} F_0(x, u, \nabla u) \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in H^{1,2}_\Gamma \cap L^\infty(\Omega)$.
Man nennt dies auch manchmal *Zaremba-Problem.*
Die analytische Schwierigkeit besteht darin, dass auch bei glatten Randdaten an den Übergangspunkten von der erzwungenen zur natürlichen Randbedingung Singularitäten entstehen können.

2. Die klassische H^2-Regularität

Mit Hilfe der Funktionalanalysis (*Lax-Milgram*-Lemma) erhält man bekanntlich schwache Lösungen $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, oder allgemeiner $u \in H_\Gamma^{1,2}(\Omega)$, von elliptischen Differentialgleichungen, etwa

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i a_{ik}(x) D_k u = f\,,$$

in schwacher Formulierung

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}(.)D_k u, D_i\varphi) = (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \in H_\Gamma^{1,2}(\Omega)\,. \tag{2.1}$$

Hierbei bedeutet (w,v) wieder das L^2-Skalarprodukt und wir setzen voraus, daß

$$a_{ik} \in L^\infty(\Omega)\,, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \geq c_0|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ x \in \Omega\,. \tag{2.3}$$

(Statt (2.3) schreibt man kürzer $(a_{ik}) \geq c_0 I$.)

Bedingung (2.3) — eventuell im Verein mit (2.1) — nennt man *gleichmäßige Elliptizität.*
Für f fordern wir:

$$f \in L^2(\Omega)\,. \tag{2.4}$$

Unter den Bedingungen (2.2)–(2.4), Ω offen und beschränkt, liefert die Funktionalanalysis eine Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ von (2.1), oder allgemeiner $u \in H_\Gamma^{1,2}$, wenn das $(n-1)$-dimensionale Maß von Γ positiv ist.

Nach Möglichkeit möchte man natürlich klassische Lösungen ($u \in C^2$ o.ä.) haben. Der erste Schritt hierzu besteht im Nachweis, daß u eine schwache Differenzierbarkeit oder Ordnung mehr, als zur Definition des schwachen Lösungsbegriffes nötig ist, hat, also $u \in H^2(\Omega)$. Dies wird mit der wohl über 100 Jahre alten Differenzenquotienten-Technik bewiesen. Die Grundidee beruht auf dem folgenden Lemma:

Lemma 2.1. *Sei $v \in L^2(Q)$, und es gelte $v = 0$ in einer Umgebung $U(\partial Q)$ der offenen Menge $Q \subset \mathbb{R}^n$. Die Differenzenquotienten $D_i^h v = h^{-1}(v(.+he_i) - v(.))$, $e_i =$ i-ter Einheitsvektor, seien gleichmäßig für $h \to 0$ in L^2 beschränkt. Dann gilt $v \in H^1(Q)$.*

Anmerkung: Man benötigt die Bedingung $v = 0$ in $U(\partial Q)$ nicht, man muß dann aufpassen, daß $D_i^h v$ in Randnähe definiert bleibt.
Man fordert stattdessen, daß

$$\|D_i^h v\|_{L^2(Q_m)} \leq K\,, \qquad 0 < h \leq h(Q_m)$$

für eine aufsteigende Folge von offenen Mengen $Q_m \subset\subset Q_{m+1} \subset\subset \ldots \subset Q$, $\bigcup_m Q_m = Q$. Die Konstante k muß gleichmäßig bezüglich m und h sein. Der Einfachheit halber beweisen wir nun Lemma 2.1.

Beweis von Lemma 2.1: Sei Λ eine Nullfolge von positiven Schrittweiten. Wegen der schwachen Kompaktheit beschränkter Teilmengen in L^2 gibt es eine Teilfolge Λ' und Funktionen $v_i \in L^2$ mit

$$D_i^h v \to v_i \qquad \text{schwach in } L^2.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, h genügend klein (damit keine Randterme entstehen) folgt

$$\begin{aligned} &(D_i^h v, \varphi) = -(v, D_i^{-h}\varphi)\,, \qquad \text{wobei} \\ &D_i^{-h} v(x) = h^{-1}\big(v(x) - v(x - he_i)\big)\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Grenzübergang in (2.5) liefert

$$(v_i, \varphi) = -(v, D_i\varphi)\,,$$

d.h. v_i ist erste verallgemeinerte Ableitung von v in Richtung der i-ten Koordinate. □

Um die H^2-Regularität der Lösung einer partiellen Diferentialgleichung zu erhalten, genügt es also, die Differenzenquotienten gleichmäßig in L^2 abzuschätzen.

Erheblich einfacher ist der Nachweis der *inneren* H^2-Regularität, womit wir uns zunächst befassen wollen.

(a) Innere H^2-Regularität

Wir beschränken uns hier auf den einfachen linearen Fall

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}(.)D_k u, D_i\varphi) = (f, \varphi)\,, \qquad \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{2.6}$$

Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich auch der nichtlineare Fall

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i(x, \nabla u), D_i\varphi) = (f, \varphi)$$

mit ähnlichen Methoden behandeln. Auch eine u-Abhängigkeit läßt sich einbauen. Für die Differenzenquotiententechnik benötigt man die zusätzliche Voraussetzung:

$$a_{ik} \text{ ist Lipschitzstetig}\,. \tag{2.7}$$

Satz 2.1. *Die Funktion $u \in H^{1,2}(\Omega)$ genüge der Gleichung (2.6). Es sei $f \in L^2$, und die Koeffizienten a_{ik} mögen der Elliptizitätsbedingung (2.3) und der Bedingung (2.7) genügen. Dann gilt:*

$$u \in H^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)\,.$$

Die Inklusion $u \in H^{2,2}_{\text{loc}}$ bedeutet, daß die Restriktionen $u|_{\Omega_0}$, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, in $H^{2,2}(\Omega_0)$ liegen.

Beweis von Satz 2.1: Wegen Lemma 2.1, Seite 10 genügt es, eine gleichmäßige Abschätzung

$$\int_\Omega \tau^2 \big|D^h u\big|^2 \, dx \le K \qquad (h \to 0) \tag{2.8}$$

zu erreichen. D^h steht für D_i^h, τ ist eine Lokalisierungsfunktion, d.h. $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau = 1$ auf $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. τ soll Scherereien am Rand vermeiden. Zum Nachweis von (2.8) wählt man $\varphi = -D^{-h}(\tau^2 D^h u)$ als Testfunktion in (2.6). Der Faktor τ^2 erzwingt, daß die Testfunktion in $H_0^{1,2}$ liegt. Wir erhalten

$$-\sum_{i,k=1}^n \Big(a_{ik} D_k u, D_i\big(D^{-h}(\tau^2 D^h u)\big)\Big) = -\big(f, D^{-h}(\tau^2 D^h u)\big)\,. \tag{2.9}$$

Wir wälzen (= partielle Summation) den Operator D^{-h} auf den linken Faktor in (2.9). Dies ergibt

$$\sum_{i,k=1}^n \big(D^h(a_{ik} D_k u), D_i(\tau^2 D^h u)\big) = -\big(f, D^{-h}(\tau^2 D_u^h)\big) = R\,. \tag{2.10}$$

Die diskrete Produktregel lautet:

$$D^h(v \cdot w) = w \cdot D^h v + E^h v D^h w\,,\ E^h v = v(.+he)\,.$$

Damit entstehen auf der linken Seite von (2.10) die Terme

$$a_{ik} D_k D^h u + E^h D_k u D^h a_{ik}\,.$$

Diese werden mit $\tau^2 D_i D^h u + 2\tau D^h u D_i \tau$ multipliziert. Es entstehen die Terme

$$A_0 = \sum_{i,k=1}^n \tau^2 a_{ik} D_k D^h u D_i D^h u\,,$$

welche „die Musik machen“, sowie

$$A_1 = 2\sum_{i,k=1}^n a_{ik} D_k D^h u \tau D_i \tau D^h u\,,$$

$$A_2 = \sum_{i,k=1}^n E^h D_k u D^h a_{ik} \tau^2 D_i D^h u\,,$$

$$A_3 = \sum_{i,k=1}^n E^h D_k u D^h a_{ik} 2\tau D^h u D_i \tau\,.$$

Es gilt somit

$$\int A_0\, dx \le \sum_{j=1}^3 \Big|\int A_j\, dx\Big| + \Big|\int R\, dx\Big|\,. \tag{2.11}$$

Wir benutzen das im Anschluß bewiesene Lemma, dass für $v \in H^1$ die Ungleichung

$$\|D^{\pm h} v\|_{L^2(U)} \le \|Dv\|_{L^2(V)}\,,\ U \subset\subset V\,,\ h \le \operatorname{dist}(U, \partial V)$$

gilt. Ist $v \in H^1$, sind somit die Größen $\|D^{\pm h}v\|$ gleichmäßig für $h \to 0$ beschränkt. Außerdem beachten wir

$$\|E^h v\|_{L^2(U)} \le \|v\|_{L^2(V)}\,, \qquad U \subset\subset V \text{ wie oben,}$$

und wir erinnern uns an die Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit der a_{ik}, die $\left|D^h a_{ik}\right| \le K$ impliziert.

Wir schätzen damit ab:

$$\begin{aligned}
\int |A_1|\,dx &\le \|\tau\nabla D^h u\|_2 \|\nabla\tau D^h u\|_2 \le K\|\tau\nabla D^h u\|_2\,,\\
\int |A_2|\,dx &\le K\|\tau\nabla D^h u\|_2\, \|E^h\nabla u\tau\|_2 \sup_{i,k} \|D^h a_{ik}\|_\infty \le K\|\tau\nabla D^h u\|\,,\\
\int |A_3| &\le \|E^h D_k u\tau\|_2 \sup_{i,k} \|D^h a_{ik}\|_\infty \|D^h u\nabla\tau\|_2 \le K\,.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite R wird ebenfalls nach dem obigen Lemma abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\int R\,dx &\le \|f\|_{L^2}\|D^{-h}(\tau^2 D^h u)\|_{L^2} \le K\|D(\tau^2 D^h u)\|_{L^2}\\
&\le K\|\tau\nabla D^h u\|_{L^2}\,.
\end{aligned}$$

Der Term, der die schöne Musik macht, wird über die Elliptizitätsbedingung nach *unten* abgeschätzt:

$$c_0 \int \tau^2 |\nabla D^h u|^2\,dx \le \int A_0\,dx\,.$$

Damit erreichen wir über (2.11) die Abschätzung

$$\|\tau\nabla D^h u\|_{L^2}^2 \le K\|\tau\nabla D^h u\|_{L^2} + K\,. \tag{2.12}$$

(Offensichtlich haben wir im Verlauf der Abschätzungen mehrfach die Konstante K erhöht und umdefiniert. Dies ist üblich, damit man sich nicht vor lauter Indizes die Augen verdirbt.)

Links in (2.12) steht der abzuschätzende Ausdruck quadratisch, rechts linear. Damit ergibt sich die gewünschte gleichmäßige Abschätzung

$$\|\tau\nabla D^h u\|_{L^2}^2 \le K \qquad (h \to 0)\,,$$

und Satz 2.1 ist bewiesen. □

Wir benötigen noch das

Lemma 2.2. *Es gelte* $U' \subset\subset U\,,\ 0 < h \le \operatorname{dist}(U', \partial U)\,.$
Dann folgt

$$\|D^{\pm h}v\|_{L^2(U')} \le \|Dv\|_{L^2(U)}\,.$$

Bemerkung: Dieses Lemma gilt auch bezüglich der $H^{m,p}$-Normen und vielen anderen mehr.

Beweis von 2.2: Für glatte Funktionen φ gilt $D^h\varphi(x) = h^{-1}(\varphi(x+he) - \varphi(x)) = h^{-1}\int_0^h (e \cdot \nabla)\varphi(x+se)\,ds$ und damit

$$\int_{U'} |D^h\varphi(x)|^2\,dx = \int_{U'} h^{-2}\Big|\int_0^h (e\cdot\nabla)\varphi(x+se)\,ds\Big|^2\,dx\,. \tag{2.13}$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\Big|\int_0^h (e\cdot\nabla)\varphi(x+se)\,ds\Big|^2 \le h\int_0^h \big|(e\cdot\nabla)\varphi(x+se)\big|^2\,ds\,.$$

Wir setzen dies in (2.13) ein, vertauschen die Integrationen und erhalten

$$\int_{U'} \big|D^h\varphi(x)\big|^2\,dx \le h^{-1}\int_0^h\int_{U'} \big|(e\cdot\nabla)\varphi(x+se)\big|^2\,dx\,ds\,.$$

Da $0 < h < s$, gilt jedenfalls

$$\int_{U'} \big|(e\cdot\nabla)\varphi(x+se)\big|^2\,dx \le \int_U \big|(e\cdot\nabla)\varphi(y)\big|^2\,dy\,,$$

somit folgt mit $e\cdot\nabla = D$

$$\int_{U'} \big|D^h\varphi(x)\big|^2\,dx \le h^{-1}\int_0^h \big|D\varphi\big|^2\,dx = \int_U \big|D\varphi\big|^2\,dx\,.$$

□

(b) Die H^2-Differenzierbarkeit bis zum Rande im Fall des Halbraums

Um die Inklusion $u \in H^{2,2}(\Omega)$ für die Lösung u zu beweisen, behandelt man zunächst den Fall, daß für eine Umgebung U der Teil $\partial\Omega \cap U$ des Randes mit der Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0\}$ zusammenfällt.
Man wählt sich dann eine Lokalisierungsfunktion $\tau \in C_0^\infty(U)$, $\tau = 1$ auf $U' \subset\subset U$, und bildet die Testfunktion

$$\varphi = -D_t^{-h}(\tau^2 D_t^h u)\,.$$

Hierbei steht D_t^{-h} für den Differenzenquotienten in *tangentialer* Richtung, also $i = 1, \ldots, n-1$. Für diese Testfunktion ist $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$, wenn $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, da mit $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{trg}\tau$ auch $x \pm he_t \in \partial\Omega \cap U$ gilt.

[Bild]

Ist nun $u \in H^{1,2}(\Omega)$, so gibt es nach Definition von $H^{1,2}$ eine Folge von Testfunktionen $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in H^1. Damit ist auch

$$-D_t^{-h}(\tau^2 D_t^h u_m) \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

und nach Grenzübergang $m \to \infty$ folgt $\varphi \in H_0^{1,2}$ für das o.g. φ.
Es gilt somit

$$-\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}D_k u, D_i(D_t^{-h}(\tau^2 D_t^h u)) = (f, D_t^{-h}(\tau^2 D_t^h u))\,. \tag{2.14}$$

Im Falle des Neumann-Problems gilt (2.14) ebenfalls, da dann jede $H^1(\Omega)$-Funktion als Testfunktion erlaubt ist. Für $D_n^{\pm h}$ anstelle von $D_t^{\pm h}$ gilt (2.14) im Fall des Dirichlet-Problems im Allgemeinen nicht.

Man geht nun völlig analog wie im Fall der inneren Differenzierbarkeit vor. Wir wälzen D_t^{-h} auf den linken Faktor in (2.14), aufgrund der geometrischen Situation entstehen keine Randterme, und die Abschätzungen können völlig analog zu Satz 2.1 (Seite 11) wiederholt werden. Dies gilt auch für das Neumann-Problem. Man landet wohlbehalten bei einer gleichmäßigen Abschätzung

$$\|\tau \nabla D_t^h u\|_{L^2} \le K\,,$$

woraus nach Lemma 2.1 auf Seite 10

$$\nabla D_t u \in L^2(\Omega) \tag{2.15}$$

folgt.
Die normalen Ableitungen $D_n D_t u$ holt man sich aus der Gleichung: Wegen der schon bewiesenen inneren H^2-Regularität gilt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik}D_k u) = f \qquad \text{punktweise fast überall in } U'\,.$$

Man beachte, dass aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von a_{ik} diese auch in $H^{1,\infty}$ liegen (im wesentlichen wegen Lemma 2.1). Damit gilt

$$a_{nn}D_n^2 u = (D_n a_{nn})D_n u + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} D_i(a_{ik}D_k u) + f\,.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung liegt aber in L^2, da keine reinen zweiten Ableitungen in Normalenrichtung vorkommen. (Beachte: Aus $D_t \nabla u \in L^2$ folgt $D_t D_t u \in L^2$, $D_t D_n u \in L^2$.) Da wegen der Elliptizität $a_{nn} \ge c_0$, folgert man, dass die L^2_{loc}-Funktion $D_n^2 u$ in L^2 liegt. Damit erhalten wir den

Hilfssatz 2.1. *Es sei U offen und $\partial\Omega \cap U = U \cap \{x_n = 0\}$. Es sei $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ bzw. $u \in H^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung des Problems*

$$\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}D_k u, D_i\varphi) = (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \ \textit{bzw.}\ H^{1,2}(\Omega)\,.$$

Es gelte $a_{ik} \in H^{1,\infty}$, $(a_{ik}) \ge c_0 > 0$, $f \in L^2$. Dann gilt $u \in H^{2,2}(U' \cap \Omega)$, $U' \subset\subset U$.

(c) H^2-Regularität bei krummlinigem Rand

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der allgemeine Fall wird mit Hilfe einer lokalen $H^{1,\infty}$-Transformation auf den schon unter (b) behandelten Fall zurückgeführt. Wir setzen die folgende Situation voraus: Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ (z. B. $V - B_R(x_0)\,, x_0 \in \partial\Omega$) und U eine Nullumgebung in $\mathbb{R}^n$. Es existiere eine Abbildung

$$g : U \to V\,,$$

so dass

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \nabla g \text{ ist Lipschitzstetig (d.h. } g \in H^{2,\infty}) \\
\text{(ii)} & g \text{ ist umkehrbar eindeutige Abbildung auf ganz } V \\
\text{(iii)} & \det \nabla g \geq a_0 > 0 \\
\text{(iv)} & \partial\Omega \cap V = g(U \cap (x_n = 0)) \\
\text{(v)} & V \cap \complement\Omega = g(U \cap (x_n > 0)) \\
\text{(vi)} & V \cap \Omega = g(U \cap (x_n < 0))
\end{array}$$

Die Abbildung g bildet also den Teil der Hyperebene $(x_n = 0)$, der in U liegt, auf den Teil $\partial\Omega \cap V$ des Randes $\partial\Omega$ ab. Der oberhalb der Hyperebene $(x_n = 0)$ liegende Teil wird in das Komplement $\complement\Omega$ von Ω abgebildet, der untere Teil nach Ω.

Wir betrachten nun die in schwacher Form geschriebene elliptische Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}(x) D_k u, D_i\varphi) = (f, \varphi)\,, \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.16}$$

für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ und überlegen uns die Gestalt des transformierten Problems, d.h. welcher Gleichung die Funktion $v : U \cap (x_n < 0) \to V \cap \Omega$, $v = u(g(x))$ genügt. Hierzu notieren wir ein paar einfache Identitäten. Unter ∇z verstehen wir den *Zeilen*vektor $(D_1 z, \dots, D_n z)$, $A(x) = (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n$. Ist p ein Spalten- und q ein Zeilenvektor, so ist das Matrizenprodukt $p\,q$ nichts anderes als das Skalarprodukt $p \cdot q^T$. $g(x)$ ist ein Spaltenvektor, $\nabla g(x)$ die Matrix mit den Spalten $D_1 g(x), D_2 g(x), \dots, D_n g(x)$. Wegen der Kettenregel gilt

$$(\nabla v)(x) = \nabla\left(u\left(g(x)\right)\right) = \nabla u|_{g(x)} \nabla g(x) \qquad \text{(Zeilenvektor)}\,,$$

somit $\nabla u|_{g(x)} = (\nabla v)(x)(\nabla g(x))^{-1}$.
Nach der Substitutionsregel gilt ($\varphi \in C_0^\infty(\Omega \cap V)$)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}(x)D_k u, D_i\varphi) = \int\limits_{\Omega\cap V} \nabla\varphi(y)A(y)(\nabla u)^T(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{(x_n<0)\cap U} (\nabla\varphi A \nabla u^T)|_{g(x)} \det \nabla g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{(x_n<0)\cap U} \nabla\Big(\varphi\big(g(x)\big)\Big)\big(\nabla g(x)\big)^{-1} A\big(g(x)\big)\Big(\big(\nabla g(x)\big)^{-1}\Big)^T \Big(\nabla\big(u\big(g(x)\big)\big)\Big)^T \det \nabla g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{(x_n<0)\cap U} \nabla\tilde\varphi \tilde A \nabla v(x)^T\,dx\,.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(x) &= \varphi(g(x))\,,\\ \tilde A(x) &= (\nabla g(x))^{-1}A(g(x))((\nabla g(x))^{-1})^T \det \nabla g(x)\,.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt

$$(f,\varphi) = \int\limits_{\Omega\cap V} f\varphi\,dy = \int\limits_{(x_n<0)\cap U} f(g(x))\varphi(g(x)) \det \nabla g(x)\,dx\,,$$

d.h. Gleichung (2.17) transformiert sich in

$$\sum_{i,k=1}^{n}(\tilde a_{ik}D_k v, D_i\tilde\varphi) = (f \det \nabla g, \tilde\varphi)\,. \tag{2.18}$$

Da sich Testfunktionen $\zeta \in C_0^\infty(V \cap \Omega)$ durch Funktionen $\tilde\varphi$ der Gestalt

$$\tilde\varphi(x) = \varphi(g(x))\,,\ \varphi \in C_0^\infty(V\cap\Omega)$$

bezüglich der H^1-Norm approximieren lassen (beweisbedürftig!), lautet die transformierte Differentialgleichung

$$-\sum_{k,i=1}^{n} D_i(\tilde a_{ik}D_k v) = f \det \nabla g\,,$$

d.h. wir haben für v die Situation unter (b) erreicht, da der Randteil des Gebiets nun in der Hyperebene $(x_n = 0)$ liegt.

Ist nun $g \in H^{2,\infty}$, $\det \nabla g > 0$, so folgt $\det \nabla g > a_0 > 0$ und $\tilde a_{ik} \in H^{1,\infty}$. Damit sind die Voraussetzungen der Situation unter (b) erfüllt, und wir erhalten, dass

$$v \in H^{2,\infty}(\Omega \cap V')\,,\ V' \subset\subset V\,,$$

und wegen der Voraussetzungen an u schließlich den Satz

Satz 2.2. *Ist $f \in L^2$, (a_{ik}) Lipschitz und gleichmäßig positiv definit*[1] *und erfüllt Ω die Voraussetzungen (i)–(vi) mit den Rand überdeckenden offenen Mengen $V = V_i$, so gilt $u \in H^{2,2}(\Omega)$.*

Anmerkung: Mit einer sorgfältigen Betrachtung unter Benutzung der Sobolevschen Ungleichung

$$\|\nabla u\|_{2n/(n-2)} \leq \|\nabla^2 u\|_2 + \|u\|_2$$

erhält man den letzten Satz unter der schwächeren Voraussetzung $g \in H^{2,n}$ anstelle $g \in H^{2,\infty}$.

Die Beweistechnik und damit der analoge Satz zur $H^{2,2}$-Regularität gilt auch für Gleichungen und Systeme der Gestalt

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i F_i(x, \nabla u) = f\,.$$

Hierbei müssen Bedingungen an F_{ix} und $\frac{\partial}{\partial \eta_k} F_i(x,\eta) = F_{ik}(.,\eta)$ gestellt werden:

$$|F_{ix}(x,\eta)| \leq K + K|\eta|\,,\ |F_{ik}| \leq K\,,\ (F_{ik}) \geq c_0 I \text{ Elliptizität }\,.$$

Ein alternativer, im linearen Fall möglicher Zugang zu $H^{2,2}$-Abschätzungen bis zum Rand benutzt Koerzitivitätsungleichungen der Gestalt

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_{ik} D_i D_k u\|_2 \geq c_0 \|\nabla^2 u\|_2 - \lambda \|u\|_{L^2}\,,$$

die für konstante, positiv definite Matrizen (a_{ik}) mit Hilfe der Theorie singulärer Integrale bewiesen werden. Den Fall stetiger Koeffizienten kann man dann mit Hilfe der Zerlegung der 1 behandeln. Da hier nur $a_{ik} \in C$ vorausgesetzt wird, liefert dieser Zugang bessere Ergebnisse. Die alte Differenzenquotiententechnik funktioniert dafür bei einer Vielzahl nichtlinearer Probleme.

[1] d. h. $\exists c_0 : (a_{ik}) \geq c_0 > 0$ auf Ω

3. Gemischte Randwertprobleme und $H^{3/2}$-Abschätzungen in tangentialer Richtung

Wie wir in Kapitel 0 gesehen haben, ist die $H^{2,2}$-Regularität bis zum Rande des Grundgebietes im Falle gemischter Randbedingungen im allgemeinen *nicht* richtig.

Was sich jedoch erreichen läßt, sind Abschätzungen der „gebrochenen"Ableitungen der Lösung bis zur Ordnung $\frac{3}{2}$. Der vorliegende Abschnitt birgt die wesentliche Grundidee des Vorgehens, welches auch in anderen Situationen (Gebiete mit Ecken und Kanten bei reinem Dirichletrand oder Übergang von Dirichlet- zu Neumann-Rand — sowie bei anderen Gleichungen, z.B. Gleichungen höherer Ordnung) funktioniert.

Es gibt verschiedene Arten zu definieren, ob eine Funktion eine gebrochene Differentiationsordnung besitzt. Die naheliegendste verläuft über die Fouriertransformation. Ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $F(u)$ ihre Fouriertransformation, so definiert man für $q \in \mathbb{R},\ q > 0$

$$u \in \hat{H}^{q,2} \Leftrightarrow |\xi|^q F(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

(Das Dachzeichen über dem H verwenden wir nur, um keine Verwechslung zu anderen Definitionen aufkommen zu lassen)

Ist $u \in \hat{H}^{m,2}\,,\ M \in \mathbb{N}$, so liegt u in dem üblichen Sobolevraum $H^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ und umgekehrt.

Wir werden die Räume $\hat{H}^{q,2}$ später ebenfalls als Hilfsmittel verwenden; für nichtlineare Probleme sind u.E. die sogenannten Nikolski-Räume, mit denen ebenfalls gebrochene Differenzierbarkeit definiert wird, zweckmäßiger.

Definition 3.1. *Sei $0 < \alpha < 1$. Eine Funktion $u \in L^p(\Omega)\,,\ 1 < p < \infty$ liegt in $\mathcal{H}^{\alpha,p}(\Omega)$ genau dann, wenn ein $h_0 > 0$ existiert, so daß für $i = 1, \ldots, n$ gilt:*

$$\sup\Big\{\int\limits_{\Omega_h}\Big|\frac{u(x+h_{e_i}) - u(x)}{h^\alpha}\Big|^p dx :\ 0 < h < h_0\Big\} < \infty\,. \tag{3.1}$$

Hierbei ist $\Omega_h = \{x \in \Omega | x + h_{e_i} \in \Omega\,,\ i = 1, \ldots, n\}$, e_i der i-te Einheihtsvektor. Gilt (3.1) nur für gewisse e_i, so sagen wir, daß u gebrochene Ableitungen der Ordnung α in Richtung dieser e_i hat.

Ist in (3.1) $\alpha = 1$, so gilt

$$\mathcal{H}^{1,p} = H^{1,p}$$

mit $H^{1,p}$ als dem üblichen Sobolevraum.
Mit Hilfe von (3.1) zuzüglich der L^p-Norm läßt sich die Norm in $\mathcal{H}^{\alpha,p}$ definieren. Es ist nicht schwer zu sehen, daß dann $\mathcal{H}^{\alpha,p}$ vollständig ist.

Für $s = m + \alpha\,,\ m \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1$, definiert man $\mathcal{H}^{s,p}$, indem man $\nabla^m u \in \mathcal{H}^{\alpha,p}$ fordert.

Bemerkenswert ist, daß die bekannten Sobolevschen Ungleichungen auch für $\mathcal{H}^{\alpha,p}$ gelten.

Bekanntlich gilt für die üblichen Sobolevräume $H^{m,p}$ bei Gebieten Ω mit Lipschitzrand, $p < n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|u\|_{\frac{np}{n-mp}} \leq K\|u\|_{H^{1,p}} . \tag{3.2}$$

Für Nikolski-Räume gilt etwas schwächer

$$\|u\|_q \leq K_q \|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha,p}} , \qquad (\alpha p < n) \tag{3.3}$$

für alle $q < \frac{np}{n-\alpha p}$.
Nur für $a = m \in \mathbb{N}$ gilt also die schärfere Eigenschaft $q = \frac{np}{n-\alpha p}$. Unser Ziel in diesem und den folgenden Abschnitten besteht darin, die Inklusion $u \in \mathcal{H}^{3/2,2}$ oder schwächer $u \in \mathcal{H}^{3/2-\delta,2}$ zu erreichen.

Grundlegende Testfunktion

Will man für die schwache Lösung einer Differentialgleichung etwas beweisen, muß man sich Information aus der Gleichung mit Hilfe einer geschickt gewählten Testfunktion holen.

Wir betrachten die folgende Situation: Es sei Ω der offene Halbraum $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n < 0\}$, sein Rand $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ bestehe aus den Teilen

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\,,\ x_1 \geq 0\} \text{ sowie } \partial\Omega - \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\,,\ x_1 < 0\} .$$

Wir untersuchen die Funktion $u \in H^{1,p}_\Gamma(\Omega)$ oder auch $u \in H^{1,p}_\Gamma(\Omega \cap U)$, wobei U eine offene (Kugel-)Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ ist. Der Index Γ bei $H^{1,p}_\Gamma$ bedeutet, daß $u = 0$ auf Γ in einem verallgemeinerten Sinn ist (s. Kapitel 1).

Bezeichnungen: $D_i^h w(x) = h^{-1}(w(x + he_i) - w(x))$ (wie bisher), $D^h_{\alpha,i} w(x) = h^{-\alpha}(w(x + he_i) - w(x))$, $D^h_{\alpha,e} w(x) = h^{-\alpha}(w(x + he) - w(x))$.

Lemma 3.1. *Sei* $u \in H^{1,p}_\Gamma(\Omega \cap U)$, $\tau \in H^{1,\infty}(U)$, $\operatorname{supp} \tau \subset\subset \Omega$. *Dann ist* $\tau D_i^h u \in H^{1,p}_\Gamma(\Omega \cap U)$, $0 < h \leq h_0$, $i = 1, \ldots , n - 1$.

Die Einschränkung $h \leq h_0$ benötigen wir, damit $\tau D_i^h u$ vernünftig definiert wird: Ist $x \in \operatorname{supp} \tau \Rightarrow x + he_i \in U$ für $h \leq h_0$.

Beweis: Es genügt, Lemma 3.1 für $H^{1,\infty}$-Funktionen u mit $u|_\Gamma = 0$ zu beweisen, da diese Funktionenklasse (z.B. per Definition) dicht in $H^{1,2}_\Gamma$ ist. Dies ist aber trivial: Ist $x \in \Gamma$, so ist auch $x + he_i \in \Gamma$ für $i = 1, \ldots , n - 1$. □

Wir merken an, daß für die x_1-Richtung sogar gilt:

$$\tau D_1^{-h} D_1^h u \in H^{1,p}_\Gamma(\Omega) .$$

Das Interessante sind die Richtungen e_2 bis e_{n-1}.

Weiterhin benutzen wir die folgende, simple aber grundlegende Identität, die wir gleich in der speziellen Form notieren, in der wir sie benötigen. Hierfür sei $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder

$\Omega \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

(3.4) $\quad F(x,\eta)$ ist bezüglich $\eta \in \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar (schwächer: $\in H^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}$).

Mit $\frac{\partial}{\partial \eta_i} F(.,\eta) = F_i(.,\eta)$, $\frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial}{\partial \eta_k} F = F_{ik}(.,\eta)$ gilt mit $u \in H^{1,p}$ das folgende

Lemma 3.2.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x,\nabla u(x)) D_i D_e^h u(x) =$$

$$= \frac{1}{h}[F(x,\nabla u(x+he) - F(x,\nabla u(x))] - h \int_0^1 (1-t) \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{F}_{ik} D_i D_e^h u(x) D_k D_e^h u(x)$$

mit $\tilde{F}_{ik} = F_{ik}\big(x,(1-t)\nabla u(x+he) + t\nabla u(x)\big)$.

Beweis: Für jedes x (fast überall) setzen wir

$$\varphi(t) = F(x,(1-t)\nabla u(x+he) + t\nabla u(x))$$

und benutzen

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = -\int_0^1 (1-t)'\varphi'(t)\,dt = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt\,,$$

somit $\varphi'(0) = \varphi(1) - \varphi(0) - \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$.
Berechnet man $\varphi(1)$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ etc. und teilt durch h, so erhält man gerade das Lemma 3.2.

$\square$

Setzt man noch die Elliptizitätsbedingung

$$\text{(3.5)} \qquad \sum_{i,k=1}^{n} F_{ik}(x,\eta)\xi_i\xi_k \geq c_0|\xi|^2\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ x \in \Omega$$

mit einem $c_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, voraus, ergibt sich

Lemma 3.3.

$$c_0 h|\nabla D_e^h u|^2 \leq -\sum_{i=1}^{n} F_i(.,\nabla u) D_i D_e^h u + F(.,\nabla u(x+he)) - F(.,\nabla u)\,.$$

Wir wenden die beiden einfachen Ideen auf gemischte Randwertprobleme im Halbraum an. Da wir den Gradienten ∇u einer $H^{1,2}$-Funktion in die Funktionen $F_i, F, \tilde{F}_{ik}$ einsetzen, benötigen wir Caratheodory- und Wachstumsbedingungen damit die Integrale in der Definition der schwachen Lösungen definiert sind.

(3.6)
F, F_i, F_{ik} erfüllen die Caratheodory-Bedingungen($=$ Meßbarkeit in x, Stetigkeit in η).

$$\left\{\begin{array}{ll} |F(x,\eta)| & \le K + K|\eta|^2 \\ |F_i(x,\eta)| & \le K + K|\eta| \\ |F_{ik}(x,\eta)| & \le K \end{array}\right. \tag{3.7}$$

gleichmäßig für $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $i, k = 1, \dots, n$.
Bei den Abschätzungen benötigt man noch

$$|F(x,\eta) - F(y,\eta)| \le K|\eta|^2|x-y| + K|x-y|\,, \tag{3.8}$$

was als Wachstumsbedingung für die Ableitung F_x, nämlich $|F_x(x,\eta)| \le K|\eta|^2 + K$ interpretiert werden kann.

Der folgende „Haupthilfssatz" sichert, daß in der Eingangs beschriebenen geometrischen Situation die Lösungen gemischter Randwertprobleme tangentiale Ableitungen der Ordnung $\frac{3}{2}$ im Sinne von Nikolski-Räumen haben. Die gebrochenen *Normal*ableitungen werden wir in späteren Kapiteln untersuchen (bis auf ein $\delta > 0$ ergibt sich das gleiche Resultat).

Haupthilfssatz 3.1. *Es sei $u \in H^{1,2}_\Gamma(\Omega \cap U)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\sum_{i=1}^n \Big(F_i(x, \nabla u), D_i\varphi\Big) = (f, \varphi)\,, \qquad \varphi \in H^{1,\infty}_\Gamma, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset\subset U\,. \tag{3.9}$$

Die Funktionen F_i seien Ableitungen einer Stammfunktion F, d.h. $F_i(x,\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} F(x,\eta)$. Es mögen die Wachstums- und Caratheodory-Bedingungen gelten („Quadratisches Wachstum"). Ferner sei $f \in L^2$. Dann gilt für $U_0 \subset\subset U$

$$\sup_{0<h<h_0} \left\| \frac{\nabla u(.+he) - \nabla u}{h^{1/2}} \right\|_{L^2(\Omega \cap U_o)} \le K$$

für alle Richtungen $e \in \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle$.

Beweis: Nach Lemma 3.1 dürfen wir in (3.9) $\varphi = \tau^2 D^h_e u$, $\tau \in C^\infty_0(U)$, $\tau = 1$ auf $U_=$ setzen. Mit Lemma 3.3 ergibt sich

$$c_0 h \int |\nabla D^h_e u|^2 \tau^2 \le -\sum_{i=1}^n \big(F_i(., \nabla u), D_i D^h_e u \tau^2\big) + \int_\Omega \frac{\tau^2}{h}\big(F(., \nabla u(.+he)) - F(., \nabla u)\big)\,dx =$$

$$= -(f, D^h_e u\tau^2) + \sum_{i=1}^n \big(F_i(., \nabla u), D_i \tau^2 D^h_e u\big) + \frac{1}{h}\int \tau^2 \Big(F\big(., \nabla u(.+he)\big) - F(., \nabla u)\Big)\,dx =$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

Da $f \in L^2$ und $\|D^h_e u\|_{u_0} \le \|D_e u\|_u$ ist I für $0 < h \le h_0$ beschränkt. Entsprechendes gilt für II wegen der Wachstumsbedingung für F_i.

Wir schreiben III in der Form

$$\mathrm{III} = \frac{1}{h}\int\limits_{\Omega} \tau^2 D_e^h(F(x,\nabla u))\,dx + \frac{1}{h}\int \tau^2[F(x+he),\nabla u(.+he) - F(x,\nabla u(.+he))]\,.$$

Wegen (3.8) erhält man

$$\mathrm{III} =\leq \int\limits_{\Omega} \tau^2 D_e^h(F(x,\nabla u))\,dx + K\int \tau^2(|\nabla u|^2(x+he)+K)\,dx = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2\,.$$

Mit der sogenannten partiellen Summation $\int \omega D_e^h z\,dx = -\int D_e^{-h}\omega z\,dx$, welche für die tangentiale Richtung zulässig ist, formen wir III_1 um. Der Term III_2 ist gleichmäßig für $0 < h \to h_0$ beschränkt, da $\nabla u \in L^2$. Damit ist

$$\mathrm{III} \leq -\int D_e^{-h}\tau^2 F(.,\nabla u)\,dx + K\,,$$

woraus die Beschränktheit von III nach oben folgt, die wir quadratisches Wachstum von F im Argument ∇u haben, $\nabla u \in L^2$ gilt und $\tau^2 \in H^{1,\infty}$. Damit ist $c_0 h\int |\nabla D_e^h u|^2\,dx$ beschränkt für $0 < h < h_0$ und der Haupthilfssatz ist bewiesen. □

4. $H^{3/2}$-Regularität für das Dirichletproblem bei Gebieten mit Ecken

Im vorigen Kapitel haben wir die $H^{3/2}$-Regularität im Sinne von Nikolski-Räumen bei *gemischten* Randwertproblemen für die tangentialen Richtungen erhalten. Die Behandlung der fehlenden zum Gebietsrand normalen Richtung ist schwieriger und wird mit Hilfe von Fourieranalysis in Kapitel 7 durchgeführt. Zunächst wollen wir hier den einfacheren Fall des Dirichletproblems, bei dem keine Fourieranalysis vonnöten ist, behandeln.

Die folgende Voraussetzung an den Rand $\partial\Omega$ des Grundgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist sehr befriedigend, da diese Voraussetzung bei vielen anderen Sätzen benötigt wird.

Die Kegeleigenschaft von $\partial\Omega$

Definition 4.1. *Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die* äußere Kegeleigenschaft*, wenn es eine endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ des Randes $\partial\Omega$ durch beschränkte offene Mengen U_i und zugehörige offene beschränkte Kegel $C_i \subset \mathbb{R}^n$ mit Kegelspitze im Nullpunkt gibt, so dass für $x \in \partial\Omega \cap U_i$ die Menge $x + C_i$ in $\complement\Omega \cup \{x\}$ liegt.*

Unter einem *beschränkten Kegel* versteht man i.A. eine Punktmenge der Gestalt

$$\{\alpha x_0 + (1-\alpha)y \,|\, 0 \leq \alpha < 1\,, y \in G\}$$

mit einer beschränkten, in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene H enthaltenen Menge G und einem Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, der *nicht* in G enthalten ist.

x_0 ist die „Spitze des Kegels“.

Für die vorliegenden Zwecke fordert man - äquivalent - einfach, dass die C_i die Gestalt haben:

$$C_i = \left\{\theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \,|\, 0 \leq \alpha_i \leq 1\,,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,,\ 0 < \theta \leq \theta_0 \right\}$$

mit linear unabhängigen Vektoren $y_i \in \mathbb{R}^n$, so dass C_i in einem Halbraum $\{z \in \mathbb{R}^n \mid (a \cdot z) \geq 0\}$ mit einem $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, liegt. Hinweis: Wir haben hier „beschränkte Kegel“ definiert. Üblicherweise definiert man „Kegel“ folgendermaßen:

Definition 4.2. *Eine konvexe Menge M ist ein Kegel mit der Spitze $0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für $x \in M$ auch $\alpha x \in M$ für alle $\alpha \geq 0$.*

Verlängert man beim „beschränkten Kegel“ die von x_0 ausgehenden Strahlen, erhält man einen Kegel im Sinne der obigen - üblichen - Definition, sofern G konvex ist.

Analog zum Begriff der „äußeren Kegeleigenschaft“ definiert man die „innere Kegeleigenschaft“, d.h. man verlangt, daß die verschobenen Kegel $x + C_i$ bis auf den Nullpunkt im Inneren von Ω liegen.
Wegen der Endlichkeitsvoraussetzung (endlich viele überdeckende Mengen U_i) spricht man auch von *eingeschränkter Kegeleigenschaft* (restricted cone property).

Die Kegeleigenschaft entspricht in etwa der Lipschitzstetigkeit des Randes. Die innere Kegeleigenschaft wird häufig als Voraussetzung für wichtige Sätze in der Theorie partieller Differentialgleichungen verlangt. Zwei Beispiele (S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems):

1. Die Sobolevschen Ungleichungen

Satz 4.1. *Ω besitze die innere Kegeleigenschaft und sei beschränkt. Dann existiert eine Konstante $K = K_{\Omega,p}$, so dass für $Kp < n$*

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq K\|\nabla u\|_p + K\|u\|_p \,.$$

2. Der Calderonsche Erweiterungssatz

Satz 4.2. *Ω besitze die innere Kegeleigenschaft und sei beschränkt. Dann existiert ein beschränkter, linearer Fortsetzungsoperator $F : H^{m,p}(\Omega) \to H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, der jeder Funktion $u \in H^{m,p}(\Omega)$ eine Fortsetzung $u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ zuordnet.*

(Dieser Satz wird in dieser Vorlesung nicht benötigt.)

Die Kegeleigenschaft ist für Anwendungen genügend allgemein, da z.B. Gebiete mit Ecken, auch einspringenden, die Kegeleigenschaft besitzen.
Da die Kegel als offen (und nichtleer) vorausgesetzt sind, ergibt sich, dass es zu jedem U_i der den Rand übedeckenden Mengen zugehörige linear unabhängige Richtungen

$$a_1^i, \dots, a_n^i \in \mathbb{R}^n \,, \quad \|a_j^i\| = 1 \,,$$

gibt, so dass für alle $x \in \partial\Omega$

$$x + \theta a_j^i \in \complement\Omega \,, \qquad j = 1, \dots, n \,, \qquad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \,. \tag{4.1}$$

Aus der äußeren Kegeleigenschaft folgt die folgende Eigenschaft:
Eigenschaft 4.2: Es gibt offene Mengen $V_i \subset\subset U_i$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{N} V_i \supset \partial\Omega \qquad \text{Überdeckungseigenschaft}$$

und jeder Punkt $x \in V_i \cap \complement\Omega$ in einem Kegel $x_0 + \frac{1}{2}C_i$ liegt, $x_0 \in \partial\Omega$.

Eigenschaft 4.2 ist plausibel und folgt aus der äußeren Kegeleigenschaft; der Beweis ist aber lästig, so dass wir Eigenschaft 4.2 einfach zusammen mit Definition 4.1 als *verschärfte Kegeleigenschaft* bezeichnen.

Das Dirichletproblem

Wir betrachten das Dirichletproblem: Gesucht ist $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i(x, \nabla u), D_i\varphi) = (f, \varphi) \text{ für alle } \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega) \,. \tag{4.2}$$

Hierbei sind die F_i wieder Funktionen, die die folgenden Voraussetzungen erfüllen mögen:

1. Die $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien Restriktionen von Funktionen $F_i : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset\subset Q$. Wir haben gleich denselben Buchstaben verwendet.
2. Die $F_i : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllen die Caratheodory-Bedingungen.
3. Es existiere eine Funktion $F : Q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit
$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} F(x,\eta) = F_i(x,\eta)\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,,\ \eta \in \mathbb{R}^n\,.$$
4. Es gelte die Elliptizitätsbedingung
$$\sum_{i,k=1}^{n} F_{ik}(x,\eta)\xi_i\xi_k \geq c_0|\xi|^2\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ x \in Q\,,\ \eta \in \mathbb{R}^n\,,$$
wobei $\frac{\partial}{\partial \eta_k} F_i = F_{ik}$.
5. Es gelten die Wachstumsbedingungen
   (i) $|F_{ik}| \leq K$
   (ii) $|F_i(x,\eta)| \leq K + K|\eta|$
   (iii) $|F(x,\eta)| \leq K + K|\eta|^2$
   (iv) $|F(x,\eta) - F(y,\eta)| \leq (K + K|\eta|^2)|x-y|$ (Dies entspricht $|F_x| \leq K + K|\eta|^2$.)

Satz 4.3. *Es sei $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung des Dirichletproblems (4.2). Die F_i mögen die Voraussetzungen 1.–5. erfüllen; Ω habe die äußere Kegeleigenschaft. Ferner sei $f \in L^2$. Dann gilt $u \in H^{3/2}(\Omega)$.*

Wie in Kapitel 3 bedeutet die Inklusion $u \in H^{3/2}(\Omega)$, dass ∇u im Nikolski-Raum zur Differenzierbarkeitsordnung $\frac{1}{2}$ liegt:
$$h^{-1/2}\|\nabla u(.+he_i) - \nabla u\|_{L^2} \leq K\,, \qquad 0 < h < h_0\,.$$

Beweis: Setzt man die Funktion $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ außerhalb von Ω durch Null fort, so gilt für die fortgesetzte Funktion, die wir ebenfalls mit u bezeichnen: $u \in H_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Dies ist klar, wenn man u als Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in der H^1-Norm definiert. Da die F_i auf Q fortgesetzt sind, gilt also $\sum_{i=1}^{n}(F_i(.,\nabla u), D_i\varphi) = (f,\varphi)$ für alle $\varphi \in H_0^{1,2}$, $\varphi = 0$ auf $Q - \Omega$.

Wir beschränken uns nun auf eine Umgebung $U = U_i$ der überdeckenden Mengen aus der Definition der äußeren Kegeleigenschaft. Zu diesem U_i gehört ein Kegel $C = C_i$,
$$C_i = \left\{\theta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \;\middle|\; \sum \alpha_j = 1\,,\ 0 \leq \alpha_j \leq 1\,,\ 0 < \theta \leq \theta_0\right\},$$
$a_j = a_j^i$ linear unabhängig, so dass mit $x \in \partial\Omega \cap U$
$$x + \theta a_j \in \complement\Omega\,, \qquad 0 < \theta \leq \theta_0 \tag{4.3}$$
gilt.

Wir setzen $e = a_j$ und bilden die folgende Testfunktion:
$$\varphi = \tau^2 D_e^h u\,,$$

$\tau \in C_0^\infty(U)$, $\tau = 1$ auf $U' \subset\subset U$. Wie bisher

$$D_e^h u(x) = h^{-1}(u(x+he) - u(x))\,.$$

Da $\tau \in C_0^\infty(U)$, gilt offensichtlich $\varphi \in H_0^{1,2}(Q)$. Entscheidend ist nun, dass

$$\varphi = \tau^2 D_e^h u = 0 \text{ auf } Q - \Omega$$

für genügend kleines $h > 0$ gilt. Ist nämlich $x \in (Q - \Omega) \cap U$, so gibt es nach Eigenschaft 4.2 ein $x_0 \in \partial\Omega \cap U_i$ (beachte $U = V_i \subset U_i$), so dass $x \in x_0 + \frac{1}{2}C_i$, d.h.

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\theta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j\,,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\,,\ \alpha_j \geq 0\,,\ \theta \in (0, \theta_0]\,.$$

Da e einer der Vektoren a_j ist, folgt für genügend kleines $h < h_0$:

$$x + he \in x_0 + C_i\,.$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} x + he &= x_0 + \left(\frac{1}{2}\alpha_1\theta + h\right) a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\theta}{2}\alpha_j a_j = \\ &= x_0 + \frac{\theta}{2}\left[\left(a_1 + \frac{h}{\theta}\right) a_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j a_j\right] = \\ &= x_0 + \frac{\theta}{2}\,(1 + h/\theta)\left[\frac{(\alpha_1 + h/\theta)}{1 + h/\theta} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{1 + h/\theta} a_j\right]. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Vektoren a_j in der letzten Klammer sind ≥ 0, ihre Summe ist 1, da $\sum \alpha_j = 1$. Der Faktor $\frac{\theta}{2}(1 + h/\theta) = \frac{\theta+h}{2}$ ist kleiner als θ_0, falls $h < \theta_0$, da $\theta < \theta_0$.
Der Vektor $x + he$ hat also die Gestalt eines Vektors aus $x_0 + C_i$, liegt daher in $\complement\Omega$. Damit ist $u(x + he) = 0$ für $x \in \mathbb{R} - \Omega \cap \operatorname{trg}\tau$, und die Testfunktion $\varphi = \tau D_e^h u$ ist zulässig.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir ähnlich wie in Kapitel 3 vor: Aus der Differentialgleichung folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i, D_i(\tau D_e^h u)) = (f, D_e^h u)\,.$$

Die Terme $(f, D_e^h u)$ und $(F_i, (D_i\tau) D_e^h u)$ sind für $0 \leq h < h_o$ gleichmäßig beschränkt, da die L^2-Norm von $D_e^h u$ sich durch die L^2-Norm von ∇u abschätzen läßt (unter Vergrößerung des betrachteten Integrationsgebietes um den Abstand h_0), und ferner $f \in L^2$ und $F_i \in L^2$ (wegen der Wachstumsbedingung). Daraus folgt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (F_i, \tau D_e^h u)\right| \leq K \qquad 0 < h \leq h_0\,. \tag{4.4}$$

Wir benutzen die Darstellung aus Kapitel 3

$$\begin{aligned}
hD_e^h F(x,\nabla u) &= F(x+he,\nabla u(x+he)) - F(x,\nabla u(x+he)) + \\
&\quad + F(x,\nabla u(x+he)) - F(x,\nabla u) = \\
&= B + F(x,\nabla u(x+he)) - F(x,\nabla u) = \\
&= B + \sum_{i=1}^{n} F_i(x,\nabla u(x)) D_i(u(x+he)-u(x)) + \\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} \int_0^1 (1-t) F_{ik}\big(x, t\nabla u(x+he) + (1-t)\nabla u(x)\big) D_i\big(u(x+he)-u(x)\big) \cdot \\
&\cdot D_k\big(u(x+he)-u(x)\big)\, dt
\end{aligned}$$

mit

$$|B| \le hK|\nabla u(x+he)|^2 \tag{4.5}$$

aufgrund der vorausgesetzten Lipschitzbedingung (5.iv). Nach Multiplikation mit τ, Division durch h und Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_Q \tau D_e^h F(x,\nabla u)\, dx &= \int_Q \tau B/h\, dx + \sum_{i=1}^{n} (F_i, \tau D_e^h u) + \\
&+ h \int_0^1 \int_Q \sum_{i,k=1}^{n} \tau(1-t) F_{ik}(.,\dots) D_i D_e^h u D_k D_e^h u\, dx\, dt\,.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir verwenden die Abschätzungen (4.4), (4.5) und die Elliptizitätsbedingung. Dann folgt aus der obigen Gleichung:

$$h \int_Q |\nabla D_e^h u|^2 \tau\, dx \le K_0 + \int_Q \tau D_e^h F(x,\nabla u)\, dx\,.$$

Für spätere Zwecke notieren wir K_0:

$$K_0 = K \int_Q \tau |\nabla u(x+he)|^2\, dx + |(f,\tau D_e^h u)| + \sum_{i=1}^{n} \int_Q |F_i|\ |\nabla \tau|\ |D_e^h u|\, dx + K \int_Q \tau\, dx\,. \tag{4.7}$$

Wir benutzen nun die Identität

$$\int_Q \tau D_e^h F\, dx = - \int_Q D_e^{-h} \tau F\, dx\,.$$

Der letzte Ausdruck ist beschränkt für $0 < h < h_0$, da $F \le K|\nabla u|^2 + K$ und $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$. Entsprechendes gilt für K_0.

Damit haben wir eine gleichmäßige Abschätzung von $h \int_Q |\nabla D_e^h u|^2\, dx$ für n linear unabhängige Richtungen $a_j = a_j^i$ erreicht. Daraus ergibt sich eine entsprechende für $h \int |\nabla D_e^h u|^2\, dx$ mit $e = e_j = j$-ter Einheitsvektor. (Hierzu stellt man $D_{e_1}^h u(x)$ durch $\sum D_{a_j}^{\beta,h} u(x)$ dar, mit $0 < \beta_0 \le$

$\beta_j < B_0$. B_0 hängt nur von $a_1, \dots, a_n$ ab.)
Die behauptete $\mathcal{H}^{1/2}$-Abschätzung für ∇u ist damit bewiesen. (Im Inneren gilt ohnehin $\nabla u \in H^1_{\mathrm{loc}}$.) □

Anmerkung: Wegen des Einbettungssatzes $\|\nabla u\|_q \le K\|\nabla u\|_2 + K\|\nabla u\|_{\mathcal{H}^{1/2}}$ mit $q < \frac{2n}{n-1}$ läßt sich die Voraussetzung $f \in L^2$ durch

$$f \in L^{q^*}\,,\; q^* > \frac{2n}{n+1}$$

abschwächen.

5. Abschätzungen in Nikolski-Morrey-Räumen

Die Ergebnisse aus Kapitel 4 lassen sich wesentlich verbessern, wenn man zur Verfügung hat, dass die Lösung des Randwertproblemes u Hölderstetig bis zum Rand ist. Dies ist bei skalaren Problemen der Fall (Systeme haben wir der Einfachheit halber ohnehin nicht betrachtet, obwohl die bisherigen Ergebnisse hierzu gültig sind.) Setzt man für die Lösung u des in Kapitel 4 betrachteten Randwertproblems zusätzlich die Inklusion $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ (= Raum der Hölderstetigen Funktion auf $\bar{\Omega}$ mit Hölderexponent α, $0 < \alpha < 1$) voraus, so läßt sich zeigen, dass ∇u im Nikolski-Morrey-Raum $\mathcal{H}^{1/2,3-2\alpha}$ liegt. Wir erläutern zunächst die verwendeten Funktionenräume.

Morrey- und Nikolsky-Morrey-Räume

Definition 5.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Die $L^p(\Omega)$-Funktion z erfüllt eine* Morrey-Bedingung *zum Morrey-Exponenten $n - \lambda$, wenn*

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |z|^p \; dx \leq K R^{n-\lambda} \text{ gleichmäßig für } x_0 \in \Omega\,,\ 0 < R \leq R_0\,, \tag{5.1}$$

mit einer Konstanten K gilt. Die Menge aller $L^p(\Omega)$-Funktionen z, welche (5.1) mit einer Konstanten $K = K_z$ erfüllen, bildet den Morrey-Raum $L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Wir wiederholen die Definition des Raumes $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ der Hölderstetigen Funktionen.

Definition 5.2.

$$C^{\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) |\ |u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}\}\,.$$

Die Bedingung (5.1) mit $n - \lambda > 0$ bedeutet, dass das Ausmaß eventueller Singularitäten eingeschränkt ist.

Morrey-Räume sind von großer Bedeutung für partielle Differentialgleichungen.

Es gilt das folgende Lemma von Morrey:

Lemma 5.1. *Sei $\nabla u \in L^{p,\lambda}\,,\ u \in L^p\,,\ p \in [1, n)\,,\ \lambda = p - \alpha p\,,\ 0 < \alpha < 1$. Das Gebiet Ω habe Lipschitzrand. Dann gilt $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Anders ausgedrückt: Im Grenzfall $\int_{B_R} |\nabla u|^p \, dx \leq K R^{n-p}$ kann man noch nicht die Hölderstetigkeit behaupten; ist der Morrey-Exponent $n - p$ jedoch etwas größer, nämlich $n - p + \alpha p$, so ergibt sich die Hölderstetigkeit von u.

Auch im Fall $\lambda > p$ ergibt sich „Neues“:

Satz 5.1. *Sei $u \in L^p$, $\nabla u \in L^{p,\lambda}$, $p \in [1, n)$, $n \geq \lambda > p$. Das Gebiet Ω habe Lipschitzrand. Dann ist $u \in L^{q,\lambda}$ mit*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}\,. \tag{5.2}$$

Anmerkung: Bereits die Aussage $u \in L^q$, welche im Wesentlichen auf Stampacchia und Marčinkiewičz zurückgeht, ist von Interesse, da sie die L^{p^*}-Inklusion von u, welche aus dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt, verbessert: Im ungünstigsten Fall ist $\lambda = n$, $u \in L^{q,n} = L^q$ und (5.2) liefert $1/q = 1/p - 1/n = (n-p)/np$, d.h. $q = p^*$ ist der Sobolev-Exponent. Ist $\lambda < n$, so ergibt sich ein besserer Exponent. Für feinere Untersuchungen ist von Interesse, dass auch der Morrey-Exponent λ für u erhalten bleibt. Die Verbesserung stammt von Chiarenza-Frasca.

Nikolski-Morrey-Räume

Definition 5.3. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Der Raum $\mathcal{H}^{\alpha,p,\lambda}$ besteht aus allen L^p-Funktionen z, für die*

$$h^{-\alpha p} \int\limits_{B_R(x_0)\cap\Omega_h} |z(x+he_i) - z(x)|^p \, dx \leq KR^{n-\lambda}\,, \ i = 1, \ldots, n\,,$$

für alle $R \in (0, R_0)\,,\ x_0 \in \Omega\,,\ h \in (0, h_0)$. Hierbei ist $\Omega_h = \{x \in \Omega | x + he_i \in \Omega\,,\ i = 1, \ldots, n\}$ und e_i der i-te Einheitsvektor.

Es gilt eine zu Satz 5.1 analoge Aussage:

Satz 5.2. *Sei Ω beschränkt und habe Lipschitzrand. Es sei $u \in \mathcal{H}^{\alpha,p,\lambda}\,,\ p \in [1, n)\,,\ \alpha \in (0,1)$ und*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda} > 0\,.$$

Dann ist $u \in L^s$ für alle $s < q$.

Auch dieser Satz verfeinert den entsprechenden Einbettungssatz für Nikolski-Räume.

Satz von De Giorgi-Nash und C^α-Regularität

Der Satz von De Giorgi-Nash ist historisch zunächst der gleichmäßig elliptischen linearen Differentialgleichung mit meßbaren Koeffizienten gewidmet.

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik}(x) D_k u) = f \in L^{n/2+\delta}\,. \tag{5.3}$$

Satz 5.3 (De Giorgi-Nash). *Es sei $u \in H^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (5.3). Es sei $a_{ik} \in L^\infty(\Omega)\,,\ (a_{ik}) \geq c_0 I$. Dann ist $u \in C^\alpha(\Omega)$ mit einem $\alpha \in (0,1)$. Es gelten a-priori-Abschätzungen $\alpha \leq \alpha(\delta, \|a_{ik}\|_\infty / c_0)\,,\ [u]_\alpha \leq K(\|a_{ik}\|_\infty\,,\ c_0\,,\ \|f\|_{n/2+\delta}\,,\ \mu(\Omega))$.*

Anmerkung: Wegen fehlender Voraussetzung an $\partial\Omega$ wird hier nicht die Hölderstetigkeit bis zum Rand von Ω behauptet.

Anmerkung: Gegenbeispiele von Serrin zeigen, dass es Lösungen $u \in H^{1,2-\varepsilon}(\Omega)\,,\ u \notin C^\alpha$ gibt.

Der Satz von de Giorgi-Nash ist in verschiedene Weise auf nichtlineare skalare Gleichungen ausgedehnt worden. Wir benötigen hier die folgende Variante:

Satz 5.4 (Hölderstetigkeit bis zum Rand). *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$, dessen Rand die Bedingung „A“ erfülle. Für die rechte Seite f gelte $f \in L^{n/2+\delta}$, $\delta > 0$. Die Funktionen F_i mögen die Caratheodory-Bedingungen erfüllen; ferner gelte die Koerzitivitätsbedingung*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x,\eta)\eta_i \geq c_0|\eta|^2 - K$$

und die Wachstumsbedingung $|F_i(x,\eta)| \leq K|\eta| + K$ mit Konstanten $c_0 > 0$, K. Dann liegt die Lösung $u \in H_\Gamma^{1,2}(\Omega)$ des gemischten Randwertproblemes

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i(x,\nabla u), D_i\varphi) = (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \in H_\Gamma^{1,2} \tag{5.4}$$

in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ mit einem Hölderexponenten $\alpha \in (0,1)$, $\alpha = \alpha(c_0, K, \Omega, n)$.

Hierbei haben wir benutzt:

Definition 5.4. Ω genügt der Bedingung A, *wenn für alle $x_0 \in \partial\Omega$, alle $R \in (0, R_0)$ die Beziehung*

$$\mu(\complement\Omega \cap B_R(x_0)) \geq c_0 R^n$$

mit einem $c_0 > 0$ gilt.

Die Bedingung A ist z.B. erfüllt, wenn Ω der äußeren Kegeleigenschaft genügt.

Alternativ kann man auch die Gleichung $-D_iF_i(x,\nabla u) = f$ linearisieren, indem man schreibt

$$-D_i\Big[\Big(\int_0^1 F_{ik}(x, t\nabla u)\, dt\Big) D_k u\Big] = -D_i\big(F_i(x,\nabla u) - F_i(x,0)\big) = f + D_iF_i(x,0)\,;$$

mit $a_{ik} = \int_0^1 F_{ik}(.,t\nabla u)$ kommt man dann auf die ursprüngliche Form des Satzes von De Giorgi-Nash.

Wir werden wichtige Fragmente des Beweises dieses Satzes in Kapitel 9 behandeln.

Aus dem Satz von De Giorgi-Nash läßt sich eine Morrey-Bedingung für ∇u bis zum Rand folgern:

Lemma 5.2. *Sei $u \in H_\Gamma^1 \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ eine Lösung von (5.4). Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4 gilt*

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx \leq K R^{n-2+2\beta}, \qquad \beta = \min\left(\alpha,\, \frac{\alpha}{2} + \frac{2\delta}{n+2\delta}\right) > 0$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$, $0 < R < R_0$.

Beweis: Wir verwenden in (5.4) die Funktion $\varphi = \big(u - u(x_0)\big)\tau_R^2$ als Testfunktion, sofern $B_{2R}(x_0) \cap \Gamma = \emptyset$. Falls $B_{2R}(x_0) \cap \Gamma \neq \emptyset$, setzen wir einfach $\varphi = u\tau_R^2$. Hierbei ist τ_R die übliche Lipschitzstetige Lokalisierungsfunktion

$$\tau_R \equiv 1 \text{ auf } B_R(x_0)\,,\ \tau_R \equiv 0 \text{ auf } B_{2R}(x_0) - B_R(x_0)\,,\ |\nabla \tau_R| \leq R^{-1}\,.$$

Mit Hilfe der Wachstums- und Koerzivitätsvoraussetzung erhält man dann

$$\int |\nabla u|^2 \tau_R^2\, dx \leq \int \tau_R\, |\nabla u|\, |\nabla \tau_R|\, |u - u(x_0)|\, dx + \\ + K \int \Big(|u - u(x_0)|\, |\nabla \tau_R| \tau_R + K \tau_R^2 \Big)\, dx + \int |f|\, |u - u(x_0)| \tau_R^2\, dx$$

bzw. $u(x_0)$ ersetzt durch 0, falls $B_{2R}(x_0) \cap \Gamma \neq \emptyset$. Nach einfachem Umformen und Abschätzen ergibt sich

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx \leq K \int |\nabla \tau_R|^2 |u - u(x_0)|^2\, dx + KR^n + \int |f|\, |u - u(x_0)| \tau_R^2\, dx\,.$$

Wir beachten nun $|u - u(x_0)| \leq KR^\alpha$ auf B_{2R} bzw. $|u| \leq KR^\alpha$, falls $B_{2R} \cap \Gamma \neq \emptyset$, und erhalten

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx \leq KR^{n-2+2\alpha} + \|f\|_{n/2+\delta} KR^\alpha \cdot (R^n)^{1/q}\,,$$

$$\text{wobei} \qquad q = \frac{n/2 + \delta}{n/2 - 1 + \delta} = \frac{n + 2\delta}{n - 2 + 2\delta}\,.$$

Es ist

$$n/q = n \cdot \left(1 - \frac{2}{n + 2\delta}\right) = n - \frac{2n + 4\delta}{n + 2\delta} + \frac{4\delta}{n + 2\delta} = n - 2 + \frac{4\delta}{n + 2\delta}\,.$$

Daher

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx \leq KR^{n-2+2\alpha} + KR^{n-2+\alpha+4\delta/(n+2\delta)}\,.$$

□

Wir kommen nun zu dem angekündigten

Satz 5.5. *Das Gebiet Ω besitze die äußere Kegeleigenschaft. Die Funktionen F_i mögen die Voraussetzungen von Satz 4.3, Seite 26, erfüllen. Ferner gelte $f \in L^{n/2+\delta}$. Dann gilt für die Lösung u des Dirichletproblems*

$$\nabla u \in \mathcal{H}^{1/2,2,3-2\beta}(\Omega)\,.$$

Beweis: Wir benutzen (4.7), Seite 28, mit τ ersetzt durch τ_R, der üblichen Lokalisierungsfunktion ($\tau_R \equiv 1$ auf B_R, $\operatorname{trg} \tau_R = B_R$, $|\nabla \tau_R| \leq R^{-1}$). Dies ergibt für $B_R \subset (\tau = 1)$

$$h \int_{B_R} |\nabla D_e^h u|^2\, dx \leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

mit

$$A_1 = K \int\limits_Q \tau\tau_R |\nabla u(x+he)|^2\,dx\,, \qquad A_2 = |(f, \tau\tau_R D_e^h u)|\,,$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^n \int\limits_Q |F_i|\,|\nabla\tau|\,|D_e^h u|\,dx\,, \qquad A_4 = K \int\limits_Q \tau\tau_R\,dx\,,$$

$$A_5 = \int\limits_Q \tau\tau_R D_e^h F(x, \nabla u)\,dx\,.$$

Die Terme werden einzeln durch $KR^{n-3+2\beta}$ abgeschätzt:

$$A_1 \le K \int\limits_{B_{2R}} |\nabla u(x+he)|^2\,dx \le K \int\limits_{B_{2R}(x_0+he)} |\nabla u(x+he)|^2\,dx \le KR^{n-2+2\beta}$$

wegen Lemma 5.2, Seite 32. Weiterhin

$$A_2 \le \int\limits_{B_{2R}} |f|^2\,dx + \int\limits_{B_{2R}} |D_e^h u|^2\,dx\,,$$

$$\int\limits_{B_{2R}} |f|^2\,dx \le \left(\int |f|^{n+\delta}\,dx\right)^{2/(n+\delta)} |B_R|^{(n-2+\delta)/(n+\delta)}\,.$$

Da $|B_R|^{(n-2+\delta)/(n+\delta)} \le KR^{n(1-\frac{2}{n+\delta})} = KR^{n-2n/(n+\delta)} = KR^{n-2+2\delta/(n+\delta)}$ hat der Term $\int\limits_{B_{2R}} |f|^2\,dx$ allemal das richtige Wachstum in R.

Den Term $D_e^h u$ stellen wir durch

$$D_e^h u = \frac{1}{h} \int\limits_0^h (e\nabla) u(x+sh)\,ds$$

dar und schätzen ab

$$\int\limits_{B_R} |D_e^h u|^2\,dx \le \frac{1}{h} \int\limits_0^h \sup_s \int\limits_{B_R} |(e\nabla)(x+sh)|^2\,dx\,ds \le \frac{1}{h} \int\limits_0^h KR^{n-2+2\beta}\,ds = \tag{5.5}$$
$$= KR^{n-2+2\beta}$$

nach Lemma 5.2. Damit hat A_2 das gewünschte Wachstum in R (sogar $\sim R^{n-2+2\beta}$ statt $R^{n-3+2\beta}$).

Wir kommen nun zum „bösen“ Term A_3. Man schätzt ab

$$A_3 \le KR^{-1} \int\limits_{B_{2R}} |F_i|^2\,dx + KR^{-1} \int\limits_{B_{2R}} |D_e^h u|^2\,dx\,.$$

Der Term $\int\limits_{B_{2R}} |D_e^h u|^2$ wurde bereits in (5.4) auf Seite 32 abgeschätzt. Mit dem Faktor R^{-1} ergibt sich die richtige R-Potenz, den Term $\int\limits_{B_{2R}} |F_i|^2\,dx$ schätzen wir mit der Wachstumsbedingung ab und erhalten

$$\int\limits_{B_{2R}} |F_i|^2\,dx \le K \int\limits_{B_{2R}} \left(1 + |\nabla u|^2\right) dx \le K R^{n-2+2\beta}\,,$$

und damit hat auch A_3 die richtige Wachstumsordnung. $A_4 \le KR^n$ „ist kein Thema!“ Der Term A_5 ist wiederum interessant (böse = interessant):

$$\begin{aligned}
A_5 &= \int \tau\tau_R D_e^h F(x,\nabla u)\,dx = -\int D^h(\tau\tau_R)F(x,\nabla u)\,dx = \\
&= A_{15} + A_{25}\,, \qquad \text{mit} \\
A_{15} &:= -\int D^h\tau_R\tau F(x,\nabla u) \le \int\limits_{B_{2R+h}} |D^h\tau_R|(|\nabla u|^2 + K)\,dx\,, \\
A_{25} &:= -\int E_h\tau_R D_e^h\tau F(x,\nabla u)\,dx \le \|\nabla\tau\|_\infty \int\limits_{B_{2R}} (|\nabla u|^2 + K)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Der Term A_{25} wird wieder nach Lemma 5.2 auf Seite 32 abgeschätzt, und er verhält sich um eine Ordnung bezüglich R besser.

Für den Term A_{15} treffen wir eine Fallunterscheidung. Ist $h \ge 4R$, so gilt $D^h\tau_R \le \frac{1}{R}$ und $\operatorname{trg} D_e^h\tau_R = B_{2R}(x_0) \cup B_{2R}(x_0+h)$ und

$$A_{15} \le R^{-1} \int\limits_{B_{2R}(x_0)\cup B_{2R}(x_0+h)} (|\nabla u|^2 + K)\,dx \le KR^{n-3+2\beta}$$

nach Lemma 5.2.
Falls $h \le 4R$, gilt $|D_e^h\tau_R| \le \sup|e\nabla\tau_R| \le R^{-1}$ und somit

$$\int\limits_{B_{2R+h}} |D^h\tau_R|\left(|\nabla u|^2 + K\right) dx \le R^{-1} \sup_{x_0} \int\limits_{B_{6R}(x_0)} \left(|\nabla u|^2 + K\right) dx \le KR^{n-3+2\beta}$$

wie erwünscht.
Der Satz ist damit bewiesen. □

Mit Hilfe von Satz 5.4 und Satz 5.2 folgt aus Satz 5.5 das

Korollar 5.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.5 gilt für die Lösung u*

$$u \in L^{3+\sigma}(\Omega)$$

mit einem $\sigma > 0$. Die Aussage gilt für alle $n \ge 2$.

Beweis: Wir wenden den Einbettungssatz 5.2, Seite 31, an. Danach ist $u \in L^q$, falls $q < q^*$ und

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{3-2\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6-4\beta} = \frac{3-2\beta-1}{6-4\beta} = \frac{2-2\beta}{6-4\beta} = \frac{1-\beta}{3-2\beta}\,,$$

$$q = \frac{3-2\beta}{1-\beta} = \frac{3-3\beta}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} = 3 + \beta/(1-\beta)$$

und die Aussage gilt für $\sigma < \beta/(1-\beta)$. □