Vorlesung

FUNKTIONALANALYSIS II

gehalten im SS 1999 an der Universität Bonn von

Michael Růžička

ausgearbeitet von

Sonja Goj und Katrin Lorenz

Inhaltsverzeichnis

Teil A

Fixpunktsätze

Definition 0.1 *Sei $T\colon A \to B$ eine Abbildung, und seien A, B Teilmengen eines Banachraums X. Jede Lösung von*

$$Tx = x$$

heißt Fixpunkt.

Wir werden im Folgenden Fixpunktsätze betrachten, d.h. Sätze, die die Existenz von Fixpunkten unter bestimmten Bedingungen sicherstellen. Eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt, ist z.B.

$$Tx = x + x_0 \qquad\qquad x_0 \in X,\ x_0 \neq 0.$$

Fixpunktsätze sind eines der grundlegenden Hilfsmittel in der Funktionalanalysis und sie sind nützlich bei der Untersuchung von unterschiedlichen Problemen.

Beispiele:

- Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen:

  $$F(x) = 0.$$

  Diese Gleichung kann in ein Fixpunktproblem umgeschrieben werden; verschiedene Möglichkeiten sind:

  $$\begin{aligned}
  Tx &= x - F(x) && \text{(einfachste Möglichkeit)},\\
  Tx &= x - \omega F(x) && \text{(lineare Relaxation mit } \omega > 0\text{)},\\
  Tx &= x - \frac{F(x)}{F'(x)} && \text{(Newtonverfahren)},\\
  Tx &= H^{-1}(F(x) - G(x)), && \text{(Splitting–Methode)},\\
  &\qquad \text{wobei } F(x) = H(x) + G(x). &&
  \end{aligned}$$

- Gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$
$$x(0) = x_0.$$

Für stetiges f ist dieses Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Wir definieren den Operator T_{x_0} durch

$$T_{x_0}x = y,$$
$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Ein Fixpunkt von T_{x_0} ist eine Lösung des Anfangswertproblems.
Wir werden die Sätze von Picard–Lindelöf und von Peano kennenlernen, die die Existenz von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Banachräumen sicherstellen.

- Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einer nichtlinearen Funktion f.
Dieses Problem schreiben wir mit Hilfe von

$$Tu = (-\Delta)^{-1}(f(u))$$

um in ein Fixpunktproblem.

1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir wählen einen konstruktiven Zugang zur Lösung des Problems

$$Tx = x, \qquad x \in M. \tag{1.1}$$

(Dabei sei T eine nichtlineare Abbildung.)
Wir definieren eine iterative Folge

$$x_{n+1} = Tx_n\,, \qquad x_0 \in M\,,\ n = 0, 1, 2\ldots\,, \tag{1.2}$$

und hoffen, daß diese gegen einen Fixpunkt von T konvergiert (unter bestimmten Voraussetzungen an T).

Definition 1.1 *Ein Operator* $T\colon M \subseteq X \to X$ *auf einem metrischen Raum* (X,d) *heißt* k–kontraktiv *genau dann, wenn*

$$\exists k \in (0,1) : \forall x, y \in M : \; d(Tx,Ty) \le k\, d(x,y)\,. \tag{1.3}$$

T *heißt* kontraktiv, *wenn*

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in M \text{ mit } x \neq y.$$

Satz 1.1 (Banach, 1922) *Sei* $M \subseteq X$ *eine nichtleere, abgeschlossene Menge,wobei* (X,d) *ein vollständiger metrischer Raum sei, und*

$$T\colon M \subseteq X \to M \tag{1.4}$$

ein gegebener k*–kontraktiver Operator. Dann gilt:*
(a) Die Gleichung (1.1) hat genau eine Lösung $x \in M$*, d.h.* T *hat genau einen Fixpunkt in* M*.*
(b) Die approximative Folge (x_n) *konvergiert gegen die Lösung* x *für alle Anfangswerte* x_0*.*
(c) Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *gilt*

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le \frac{k}{1-k} d(x_{n+1}, x_n)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le k d(x_n, x)\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Beweis:
1. Wir zeigen zunächst, daß (x_n) eine Cauchy-Folge ist: Nach Definition der Folge (x_n) und wegen der k–Kontraktivität des Operators T gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\le k d(x_{n-1}, x_n) \\ &\le \cdots \\ &\le k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Dreiecksungleichung anwenden und das gerade erhaltene Ergebnis verwenden, ergibt sich

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\le (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\, d(x_1, x_0) \\ &= k^n (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1})\, d(x_1, x_0) \\ &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

nach der Summenformel für die geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{m-1} k^n = \frac{1-k^m}{1-k} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$.
Da $k < 1$ ist, haben wir gezeigt, daß (x_n) eine Cauchy–Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von X folgt daraus, daß es ein Element $x \in X$ gibt, so daß

$$x_n \to x.$$

2. $x \in M$, denn $x_0 \in M, x_1 \in M, \ldots$. Alle Folgenglieder x_n liegen in M nach Definition der Folge, da $T\colon M \to M$. Da M abgeschlossen ist, gilt dann auch für den Grenzwert der Folge:

$$x \in M.$$

3. x ist eine Lösung der Gleichung (1.1), denn es gilt:
T ist stetig, da T k–kontraktiv ist. Deshalb folgt, wenn man in der Gleichung (1.2) n gegen ∞ gehen läßt, die Beziehung

$$x = Tx, \tag{1.6}$$

und damit die Existenz einer Lösung des Problems (1.1).

4. Eindeutigkeit:
Angenommen, x und y seien Lösungen von (1.1), d.h. $Tx = x$, $Ty = y$.
Aufgrund der k–Kontraktivität des Operators T folgt dann

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

Wegen $k < 1$ muß dann aber $d(x,y) = 0$ gelten, also x=y.
Damit ist auch die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

5. Fehlerabschätzungen:
Wenn wir in der Ungleichung

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)$$

den Limes für $m \to \infty$ betrachten, erhalten wir die erste Ungleichung, die sogenannte A priori–Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0).$$

Die zweite Ungleichung, die sogenannte A posteriori–Abschätzung, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) &\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m}, d_{n+m+1}) \\ &\leq (k + k^2 + \ldots k^m) d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

wenn wir den Grenzübergang für $m \to \infty$ betrachten.
Die dritte Ungleichung folgt schließlich aus der k–Kontraktivität des Operators T:

$$d(x_{n+1}, x) = d(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x). \tag{1.8}$$

□

Wir wollen uns nun durch die Angabe von Gegenbeispielen davon überzeugen, daß alle Voraussetzungen notwendig sind:

(i) $M = (0, 1), \qquad Tx = \frac{x}{2},$
M ist nicht abgeschlossen, die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt in M.

(ii) $M = \mathbb{R}, \qquad Tx = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arc}\tan x.$
Mit $T'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ folgt nach dem Mittelwertsatz
$|Tx - Ty| = |1 - \frac{1}{1+x^2}||x - y| < |x - y|$, d.h.
T ist kontraktiv, aber nicht k–kontraktiv; T hat in $\mathbb{R}$ keinen Fixpunkt.

(iii) $M = [0, 1], \qquad N = [2, 3], \qquad T\colon M \to N.$
T bildet M nicht in sich selbst ab und kann deshalb natürlich keinen Fixpunkt haben.

(iv) $M = \emptyset$, T beliebig.
Dann kann T natürlich keinen Fixpunkt haben.

1.1 Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes

In vielen Anwendungen hängt T noch von einem zusätzlichen Parameter $p \in P$ ab. Dabei ist P ein metrischer Raum, der sogenannte *Parameterraum*.
In diesem Fall betrachtet man

$$T_p x_p = x_p\,, \qquad x_p \in M\,,\ p \in P. \tag{1.9}$$

Folgerung 1.1 *Es gelte:*

(i) T_p erfülle für alle $p \in P$ die Voraussetzung von Satz 1.1, wobei k von p unabhängig ist.

(ii) Es existiert ein $p_0 \in P: \quad \forall x \in M \qquad \lim\limits_{p \to p_0} T_p x = T_{p_0} x.$

Dann existiert für alle $p \in P$ eine eindeutige Lösung x_p von (1.9) und

$$\lim_{p \to p_0} x_p = x_{p_0}.$$

Beweis: Sei x_p Lösung von (1.9), die nach Satz 1.1 existiert. Für diese Lösung gilt:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\le k d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \end{aligned}$$

wegen der k–Kontraktivität von T_p.
Wenn wir die Ungleichung nach $d(x_p, x_{p_0})$ auflösen, folgt für $p \to p_0$:

$$d(x_p, x_{p_0}) \le \frac{1}{1-k} d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \to 0$$

nach Voraussetzung.
Also haben wir gezeigt

$$x_p \to x_{p_0}$$

für $p \to p_0$. □

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = p_0, \tag{1.10}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung auf $[t_0 - c,\ t_0 + c]$.
Wenn f in einer geeigneten Umgebung von (t_0, p_0) stetig ist, dann ist obiges Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung:

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad t \in [t_0 - c,\ t_0 + c]\,, \tag{1.11}$$

mit

$$\begin{aligned} f\colon Q \subset \mathbb{R} \times X \to X, \\ Q = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X : |t - t_0| \le a, \|x - p_0\| \le b\}. \end{aligned}$$

Hier ergibt sich ein Problem, denn wir haben weder die Ableitung x' noch das Integral $\int f(s)\,ds$ für Funktionen mit Werten in Banachräumen definiert. Im Prinzip sind die Definitionen analog zu den entsprechenden Begriffen aus der Theorie reellwertiger Funktionen; im nächsten Teil (Integration und Differentiation in Banachräumen) werden wir sie exakt angeben. Der folgende Beweis nutzt überhaupt nicht die Struktur von $\mathbb{R}$ und ist deshalb übertragbar auf allgemeine Banachräume X. Wir stellen uns zunächst $X = \mathbb{R}$ in den Rechnungen vor.

Satz 1.2 (Picard 1890, Lindelöf 1894) *Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0, p_0 \in X$ gegeben. Sei $f\colon Q \to X$ stetig und genüge den Bedingungen*

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\|_X &\le L\|x - y\|_X \qquad \forall (t,x),(t,y) \in Q, \\ \|f(t,x)\|_X &< K \qquad \forall (t,x) \in Q\,, \end{aligned}$$

wobei $L, K > 0$ gegeben sind. Dann gilt:

(a) Wir setzen $c = \min(a, \frac{b}{K})$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $x(t)$ von (1.11) im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, die auch die eindeutige Lösung von (1.10) ist.

(b) Die Folge von Approximationen

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\,ds, \\ x_0(t) &= p_0, \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - c, t_0 + c]$ gegen die Lösung $x(t)$.

(c) Sei $0 < d < c$ gegeben. Dann hat (1.11) genau eine Lösung $x_p(t)$, die auf $[t_0 - d, t_0 + d]$ definiert ist, für alle p aus einer genügend kleinen Umgebung von p_0.
Und es gilt:
Für $p \to p_0$ konvergiert $x_p(t) \rightrightarrows x_{p_0}(t)$ gleichmäßig auf $[t_0 - d, t_0 + d]$.

(d) Wir setzen $k = 1 - e^{-Lc}$ und definieren

$$\|x\|_0 = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} e^{-L|t - t_0|}\|x(t)\|_X$$

für $x(t) \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_0 &\le \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|_0, \\ \|x_{n+1} - x\|_0 &\le \frac{k}{1-k}\|x_{n+1} - x_n\|_0, \\ \|x_{n+1} - x\|_0 &\le k\|x_n - x\|_0\,. \end{aligned}$$

Beweis: Wir schreiben (1.11) als Operatorgleichung um in

$$\begin{aligned} Y &= C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \\ \|f\|_Y &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} \|f(t)\|_X, \\ \|f\|_0 &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} e^{-L|t-t_0|}\|f(t)\|_X. \end{aligned}$$

Es gilt

$$e^{-Lx}\,\|f\|_Y \le \|f\|_0 \le \|f\|_Y,$$

d.h. die Normen $\|.\|_0$ und $\|.\|_Y$ sind äquivalent. Insbesondere bedeutet das, daß Folgen, die bezüglich einer Norm konvergent sind, auch bezüglich der anderen Norm konvergieren.
Daraus ergibt sich, daß $(Y, \|.\|_0)$ ein Banachraum ist.

Sei $M = \{f \in Y;\ \|f - p_0\|_Y \le b\}$. Wir definieren nun den Operator T_{p_0} durch

$$T_{p_0}\colon M \subseteq (Y, \|.\|_0) \to (Y, \|.\|_0) : x \mapsto y\,, \tag{1.12}$$

wobei

$$y(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds\,. \tag{1.13}$$

Nun überprüfen wir die Voraussetzungen von Satz 1.1:

1. M ist abgeschlossen in $(Y, \|.\|_0)$, denn:
   Betrachte

   $$x_n \in M, \qquad x_n \to x \quad \text{in } (Y, \|.\|_0).$$

   Da die beiden Normen äquivalent sind, gilt dann auch $x_n \to x$ in $(Y, \|.\|_Y)$.
   Da $x_n \in M$, ist

   $$\|x_n - p_0\|_Y \le b.$$

   Durch Übergang zum Grenzwert für $n \to \infty$ ergibt sich

   $$\|x - p_0\|_Y \le b,$$

   d.h. $x \in M$.

2. T_{p_0} bildet M in sich selbst ab, denn:
   Nach Definition von M gilt:

   $$x \in M \Rightarrow \forall t \qquad |x(t) - p_0| \le b.$$

Wir müssen also nachprüfen, ob $\|T_{p_0}x - p_0\|_Y \leq b$ ist:

$$\begin{aligned}\|T_{p_0}x - p_0\|_Y &= \max_{[t_0-c,t_0+c]} \Big\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds \Big\|_X \\ &\leq \max_{[t_0-c,t_0+c]} K \int_{t_0}^{t} ds \leq cK \leq b\end{aligned}$$

nach Wahl von c.
Also gilt: $T_{p_0}\colon M \to M$.

3. T_{p_0} ist k–kontraktiv auf M in $(Y, \|.\|_0)$, denn es gilt für $x, y \in M$

$$\begin{aligned}\|T_{p_0}x - T_{p_0}y\|_0 &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} e^{-L|t-t_0|} \Big\| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \Big\|_X \\ &\leq \max_t \int_{t_0}^{t} L\|x(s)-y(s)\|_X e^{-L|s-t_0|} e^{L|s-t_0|} e^{-L|t-t_0|}\,ds \\ &\leq L\|x-y\|_0 \max_t \int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|-L|t-t_0|}\,ds \\ &\leq \|x-y\|_0 \max_t (1 - e^{-L|t-t_0|}) \\ &\leq k\|x-y\|_0,\end{aligned}$$

wobei $k = 1 - e^{-Lc} < 1$.

Nach Satz 1.1 folgt dann, daß genau ein $x \in M$ existiert mit $x = T_{p_0}x$;
somit ist Teil (a) des Satzes bewiesen.

Teil (d) folgt unmittelbar aus Satz 1.1, insbesondere

$$\|x_n - x\|_0 \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_0 - x_1\|_0 \quad \to 0$$

für $n \to \infty$, d.h. $x_n \rightrightarrows x$, da $\|.\|_Y$ äquivalent ist zu $\|.\|_0$ und Konvergenz bezüglich der Maximumsnorm gleichmäßige Konvergenz bedeutet. Damit ist auch Teil (b) bewiesen.

Zum Beweis von (c):
Wir gehen analog vor wie oben in 1. – 3., nun mit

$$\begin{aligned}Y &= C([t_0-d, t_0+d]; X), \\ Q &= \{(t,x); |t-t_0| \leq a, \|x-p_0\|_X \leq b\}, \\ M &= \{f \in Y, \|f-p_0\| \leq b\}.\end{aligned}$$

Wie in 1.–3. erhalten wir dann, daß für p in einer kleinen Umgebung von p_0 gilt:

$$\exists! x_p : T_p x_p = x_p.$$

Sei nun $p_n \to p_0$ für $n \to \infty$:

$$\|T_{p_n} x - T_{p_0} x\|_0 = \|p_n - p_0\|_X \to 0.$$

Nach Folgerung (1.1) gilt dann

$$x_{p_n} \rightrightarrows x_{p_0} \qquad \text{für} \qquad n \to \infty.$$

$\square$

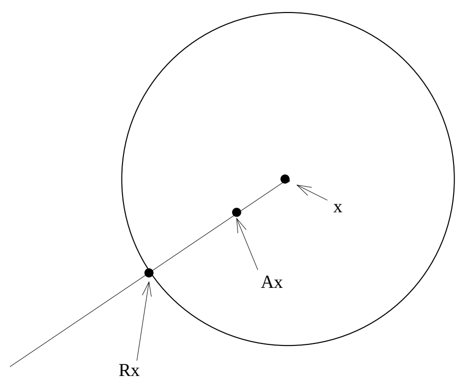
2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Der Banachsche Fixpunktsatz benutzt nur einfache Eigenschaften eines vollständigen, metrischen Raumes und stellt eine relativ starke Anforderung an den Operator (k–Kontraktivität). Die Sätze von Brouwer (im $\mathbb{R}^n$) und Schauder (in ∞–dimensionalen Räumen) benutzen das folgende tiefliegende topologische Resultat:
Sei $\overline{B_1(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$. Es gibt keine stetige Abbildung (Retraktion):

$$R\colon \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$$

$$\text{mit} \qquad R(x) = x \qquad\qquad \forall x \in \partial B_1(0).$$

Man kann sich z.B. vorstellen, man versuchte, eine Gummimembran, die den ganzen Kreis bedeckt, an den Rand zu ziehen; sie muß auf jeden Fall zerreißen.
Dieses Resultat ist anschaulich klar, aber keineswegs trivial!



Intuitiv kann man sich klarmachen:
Eine stetige Abbildung $A\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es exitiert ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $Ax = x$.

„Beweis" durch Widerspruch:
Annahme: Für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $Ax \neq x$.
Dann folgt: Es gibt eine stetige Retraktion

$$\begin{aligned} &R\colon \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0) \\ &\text{mit } R(x) = x \qquad \forall x \in \partial B_1(0). \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu obiger Aussage.

In $\mathbb{R}$ ist der Satz einfach zu beweisen: Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann existiert ein $x \in [a,b]$ mit: $\quad f(x) = x$.

Beweis: Setze

$$g(x) = f(x) - x.$$

Da f das Intervall $[a,b]$ auf sich selbst abbildet, gilt:

$$f(a) \geq a, \qquad \text{und} \qquad f(b) \leq b.$$

Übertragen auf g bedeutet das:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \qquad \text{und} \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz folgt dann, daß ein x_0 existiert mit

$$g(x_0) = 0 = f(x_0) - x_0,$$

also ist x_0 der gesuchte Fixpunkt. □

2.1 Der Satz von Brouwer

Für den – nicht anschaulichen – Beweis des Satzes von Brouwer benötigen wir ein Lemma:

Lemma 2.1 *Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ unendlich oft differenzierbar. Wir definieren D_i als*

$$D_i := \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0\,. \tag{2.1}$$

Beweis: Nach Definition von D_i erhalten wir

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}, \ldots\right) + \ldots$$

Wir benutzen folgende abkürzende Schreibweise:

$$C_{ij} := \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{j+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

mit $(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n)$ aufsteigend angeordnet.
Es ist klar, daß C_{ij} symmetrisch ist, also $C_{ij} = C_{ji}$ gilt.
Mit der neuen Bezeichnung können wir nun schreiben:

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \sum_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij}.$$

Noch einmal umgeschrieben:

$$(-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+i} C_{ij} \sigma(i,j),$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma(i,j) &= 1\,, & j &< i, \\ \sigma(i,i) &= 0\,, & & \\ \sigma(i,j) &= -1\,, & j &> i. \end{aligned}$$

Summation über alle i ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_j} &= \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j) \\ &= \sum_{j,i=0}^{n} (-1)^{j+i} C_{ji} \sigma(j,i) \\ &= (-1) \sum_{i,j} (-1)^{i+j} C_{ij} \sigma(i,j), \end{aligned}$$

denn die C_{ij} sind symmetrisch, und es ist $\sigma(i,j) = -\sigma(j,i)$. Im zweiten Schritt haben wir einfach die Bezeichnungen von i und j vertauscht.
Aus der Beziehung, die wir insgesamt erhalten haben (eine Beziehung der Form $Z = -Z$), folgt das Gewünschte:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0.$$

□

Satz 2.1 (Brouwer, 1912) *Jede stetige Abbildung T einer abgeschlossenen Kugel des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir betrachten o.B.d.A. die abgeschlossene Einheitskugel $B = \overline{B_1(0)}$.
Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten, indem wir sie zunächst für unendlich oft differenzierbare Abbildungen T zeigen, im zweiten Schritt dann auf stetige Abbildungen verallgemeinern.

1. Es sei

$$T\colon B \to B \quad \in C^\infty(\bar{B}).$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an: Sei $Tx \neq x$ für alle $x \in B$.
Sei nun $a = a(x)$ definiert als die größere Wurzel von

$$|x + a(x - Tx)|^2 = 1.$$

Wenn man die quadratische Gleichung für a löst, erhält man

$$a = a(x) = \frac{1}{|Tx - x|^2}\left((x, Tx - x) + \sqrt{(x, x - Tx)^2 + (1 - |x|^2)|Tx - x|^2}\right).$$

a ist wohldefiniert, denn die Diskriminante ist immer positiv:
Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

$|x| < 1 \Rightarrow$ Diskriminante > 0,
denn $x \neq Tx$.

$|x| = 1 \Rightarrow (x, Tx - x) \neq 0$, sonst wäre
$1 = |x|^2 = (x, x) = (x, Tx) = |x||Tx|\cos(\sphericalangle(x, Tx))$,
und wegen $|Tx| \leq 1$ müßte dann $\cos(\sphericalangle(x, Tx)) = 1$ gelten.
Daraus würde aber folgen $x = Tx$, was ein Widerspruch zur Annahme $x \neq Tx$ ist.

Also ist die Diskriminante in allen Fällen positiv, a ist somit wohldefiniert.

Da die Funktionen $\sqrt{t}, \frac{1}{t^2}$ für $t > 0$ glatt sind, ist $a(x)$ auch glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar für alle $x \in B$.

Für $|x| = 1$ ist $a(x) = 0$, da sich $a(x)$ dann wie folgt vereinfacht:

$$a(x) = \frac{1}{|Tx - x|^2}\left((x, Tx) - |x|^2 + \sqrt{(|x|^2 - (x, Tx))^2}\right),$$

aber es ist $|x|^2 - (x, Tx) > 0$, da sonst $1 = |x|^2 < (x, Tx) \leq |x||Tx| = |Tx| \leq 1$, was zu dem Widerspruch $1 < 1$ führt.
Definiere

$$f(t, x) = x + ta(x)(x - Tx).$$

$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich eine glatte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &f(0,x) = x, \\ &\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| = 1, \\ &|f(1,x)| = 1 \quad \text{für} \quad x \in B \qquad \text{nach Wahl von } a. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$F(t) = \int\limits_B D_0(t,x)\,dx$$

$$\text{mit } D_0(t,x) := \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i=1,\dots,n}.$$

F hat folgende Eigenschaften:

$$F(0) = \int\limits_B \det(I)\,dx = \operatorname{vol} B > 0.$$

$$F(1) = \int\limits_B \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,x)\right)_{i=1,\dots,n} dx = 0,$$

denn wegen $|f|^2 = 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{n} f_j^2 = 1 \Rightarrow 0 = 2\sum\limits_j f_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ (Ableitung)

sind die Zeilen der Matrix linear abhängig.

$F'(t) = 0$, da

$$F'(t) = \int\limits_B \frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x)\,dx \overset{(2.1)}{=} \sum \pm \int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t,x)\,dx,$$

wobei

$$D_i = \det\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

$$\int\limits_B \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t,x)\,dx = \int\limits_{\partial B} D_i(t,x) n_i(x)\,dS = 0.$$

D_i enthält $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ für $|x| = 1$, also erhalten wir, wie behauptet, $F'(t) = 0$.
Wegen dieser Eigenschaft muß F konstant sein. Wir haben aber als weitere Eigenschaften von F erhalten: $F(0) > 0$ und $F(1) = 0$, was zu einem Widerspruch führt. Also ist unsere Annahme falsch; die Abbildung T muß einen Fixpunkt besitzen.
Damit haben wir den Satz für unendlich oft differenzierbare Abbildungen gezeigt.

2. Sei nun $T\colon B \to B$ stetig.
   Nach dem Weierstraß-Approximationssatz gibt es Polynome, die T approximieren, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists P_\varepsilon \in C^\infty(B, \mathbb{R}^n) : \forall x \in B : \; |P_\varepsilon(x) - Tx| < \varepsilon.$$

   Es ist aber $|P_\varepsilon(x)| \leq |P_\varepsilon(x) - Tx| + |Tx| \leq 1 + \varepsilon$. Definiere $H_\varepsilon(x) := \frac{P_\varepsilon(x)}{1+\varepsilon}\colon B \to B, \quad H_\varepsilon \in C^\infty(B, B)$. Wie wir im ersten Teil des Beweises gezeigt haben, besitzt H_ε einen Fixpukt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(x) - Tx| &= \Big|\frac{P_\varepsilon(x)}{1+\varepsilon} - Tx\Big| \\
&\leq \frac{1}{1+\varepsilon}|P_\varepsilon(x) - Tx| + \Big|Tx\big(\frac{1}{1+\varepsilon} - 1\big)\Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} < 2\varepsilon \qquad \forall x \in B.
\end{aligned}$$

   Angenommen, T hat keinen Fixpunkt: Dann ist

$$f(x) = |Tx - x| > 0 \qquad \text{stetig.}$$

   Damit nimmt die Funktion f in der abgeschlossenen Kugel B (Kompaktum!) ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $\eta > 0$ mit $f(x) = |Tx - x| \geq \eta > 0$.
   Wähle $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$. Dann liest sich die obige Ungleichung

$$|H_\varepsilon(x) - Tx| < \eta.$$

   Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
|Tx - x| &\leq |Tx - H_\varepsilon(x)| + |H_\varepsilon(x) - x| \\
&< \eta + |H_\varepsilon(x) - x|.
\end{aligned}$$

   Durch Umformung dieser Ungleichung erhalten wir schließlich mit

$$0 \leq |Tx - x| - \eta < |H_\varepsilon(x) - x| \qquad \forall x \in B$$

   einen Widerspruch, da H_ε einen Fixpunkt besitzt. □

Folgerung 2.1 *Jede stetige Abbildung einer zur Kugel B homöomorphen Menge M in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis: Seien

$$\begin{aligned} T\colon M &\to M \text{ stetig,} \\ h\colon B &\to M \text{ ein Homöomorphismus,} \end{aligned}$$

d.h. h und h^{-1} sind stetig, eineindeutig und surjektiv.
Die durch

$$S \equiv h^{-1} \circ T \circ h\colon B \to B$$

definierte Abbildung ist stetig. Somit folgt nach dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von S, d.h.

$$Sx_0 = x_0.$$

Nach Definition von S heißt das:

$$h^{-1}Th(x_0) = x_0.$$

Durch Anwendung von h auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir

$$T(h(x_0)) = h(x_0),$$

d.h. $h(x_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von T. □

Beispiele von zur Kugel homöomorphen Mengen sind:

- konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$,
- einfach zusammenhängende Mengen.

2.2 Anwendungen auf nichtlineare Gleichungssysteme

Wir betrachten nun

$$g_i(x) = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

wobei die g_i stetige, nichtlineare Funktionen sind, die folgender Bedingung genügen:

$$\exists R > 0 : \sum_{i=1}^{n} g_i(x) x_i \geq 0 \qquad \forall x \ \text{ mit } \ |x| = R. \tag{2.3}$$

Folgerung 2.2 *Seien* $g_i, i = 1, \ldots, n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetige Funktionen, die der Bedingung (2.3) genügen. Dann existiert eine Lösung* x_0 *von (2.2) mit* $\|x_0\| \leq R$.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, (2.2) habe keine Lösung. Sei $g := (g_1, \ldots, g_n)$. Wir definieren

$$f_i(x) = -R\,\frac{g_i(x)}{\|g(x)\|}.$$

Da $\|g(x)\| > 0$ ist für alle x, sind die f_i wohldefiniert und stetig und bilden die abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)}$ in sich selbst ab. Die durch $f = (f_1, \ldots, f_n)$ definierte Funktion mit $f \colon \overline{B_R} \to \overline{B_R}$ ist natürlich ebenfalls stetig. Somit folgt mit dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von f, also

$$x_0 = f(x_0).$$

Daraus ergibt sich

$$\|x_0\| = R,$$

denn $\|x_0\| = \|f(x_0)\| = \| - R\frac{g(x)}{\|g(x)\|}\| = R$. Damit gilt nach Bedingung 2.3

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n g_i(x_0)(x_0)_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \underbrace{f_i(x_0)}_{=x_0}(x_0)_i \frac{\|g(x_0)\|}{R} \\ &= -\|x_0\|^2 \frac{\|g(x_0)\|}{R} < 0\,. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir einen Widerspruch. Die Annahme muß also falsch sein, d.h. es gibt eine Lösung von (2.2). □

Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^*, $K \subseteq X$, $M \subseteq K \times X^*$, $T \colon K \to X^*$. Wir suchen $u \in K$, so daß

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v, f) \in M.$$

(Dies wird später wichtig sein für „maximal monotone Operatoren".)

Satz 2.2 *Sei* $K \subseteq X$ *konvex, kompakt und nichtleer, wobei* X *ein Banachraum ist. Ferner sei* $M \subseteq K \times X^*$ *eine monotone Teilmenge, d.h.*

$$\langle f - g, v - w\rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v, f), (w, g) \in M. \tag{2.4}$$

Sei $T \colon K \to X^*$ *stetig. Dann existiert eine Lösung* $u \in K$ *von*

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v, f) \in M\,. \tag{2.5}$$

Beispiel:
$K = [a,b], X = \mathbb{R} = X^*$, $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Der Graph von φ

$$S = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in [a,b]\}$$

ist monoton, denn

$$\forall x, y \in [a,b] : (\varphi(x) - \varphi(y)) \cdot (x - y) \geq 0.$$

Dann existiert für alle stetigen $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in [a,b]$ von

$$(\varphi(x) - Tu) \cdot (x - u) \geq 0.$$

Als konkretes Beispiel kann man betrachten: $\varphi(x) = x + 2$, $T(x) = x^2$ und $[a,b] = [-3,3]$ bzw. $[a,b] = [0,3]$ bzw. $[a,b] = [3,6]$ (siehe auch Aufgabe 2 von Übungsblatt 2).

Beweis: Angenommen, (2.5) habe keine Lösung.

1. Zerlegung der Eins:
   Definiere:

   $$U(v,f) = \{u \in K, \langle f - Tu, v - u\rangle_X < 0\}.$$

   $U(v,f)$ ist offen, da $\langle f - Tu, v - u\rangle_X$ stetig von den Argumenten abhängt und T stetig ist. (Urbilder offener Mengen sind unter stetigen Abbildungen offen.)
   Da (2.5) nach Annahme keine Lösung hat, gilt:

   $$K \subseteq \bigcup_{(v,f)\in M} U(v,f).$$

   Da K kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung durch $U(v_i, f_i)$, $i = 1, \ldots, m$.
   Nach Infini III gibt es eine Zerlegung der Eins, d.h.

   $$\begin{aligned} &\exists \beta_i\colon K \to \mathbb{R} \text{ stetig }, \operatorname{supp} \beta_i \subseteq U(v_i, f_i), \\ &\forall x \in K : \sum_{i=1}^m \beta_i(x) = 1\,, \qquad 0 \leq \beta_i(x) \leq 1. \end{aligned}$$

2. Sei $K_1 = co(v_1, \ldots, v_m)$.
   Für $u \in K_1$ definiere

   $$\begin{aligned} p(u) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(u) v_i, \\ q(u) &= \sum_{i=1}^m \beta_i(u) f_i. \end{aligned}$$

$p\colon K_1 \to K_1$ ist stetig, $\dim K_1 < \infty$, und K_1 ist homöomorph zur Kugel. Nach dem Satz von Brouwer folgt damit die Existenz eines Fixpunktes, d.h.

$$\exists u^* \in K_1 \qquad \text{mit} \qquad p(u^*) = u^*.$$

3. Wir setzen

$$\Delta_{ij} := \langle f_i - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X \,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij} + \Delta_{ji} &= \langle f_i - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i - u^* \rangle_X \\
&= \langle f_i - Tu^*, v_i - u^* \rangle_X - \langle f_i - Tu^*, v_i \rangle_X \\
&\quad + \langle f_i - Tu^*, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X \\
&\quad - \langle f_j - Tu^*, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i \rangle_X \\
&= \Delta_{ii} + \Delta_{jj} + \underbrace{\langle f_i - f_j, v_j - v_i \rangle_X}_{\leq 0 \text{ wegen } (2.4)} \\
&\leq \Delta_{ii} + \Delta_{jj}.
\end{aligned}$$

Wegen $p(u^*) = u^*$ und nach Definition von p und q gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle q(u^*) - Tu^*,\ p(u^*) - u^* \rangle_X \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^m \beta_i(u^*) f_i + Tu^*, \sum_{j=1}^m \beta_j(u^*) v_j - u^* \right\rangle_X \\
&= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\Delta_{ij}, \qquad \text{da} \qquad \sum_{i=1}^m \beta_i = 1, \\
&= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{1}{2}(\Delta_{ij} + \Delta_{ji}) \\
&\quad \text{(aus Symmetriegründen)} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{1}{2}(\Delta_{ii} + \Delta_{jj}) \\
&\quad \text{nach der oben berechneten Ungleichung.}
\end{aligned}$$

Falls $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*) \neq 0$, folgt aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins:

$$u^* \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j).$$

Nach Konstruktion von $U(v, f)$ muß dann gelten:

$$\Delta_{ii} < 0 \text{ und } \Delta_{jj} < 0.$$

Damit ergibt sich aus der zuletzt berechneten Ungleichung der Widerspruch $0 < 0$. Also muß gelten

$$\beta_i(u^*) = 0 \ \forall i = 1, \dots, m.$$

Da aber $u^* \in K_1 \subseteq K$, gibt es ein i_0 mit $\beta_{i_0}(u^*) \neq 0$, denn es existiert eine Zerlegung der Eins. Dies ist ein Widerspruch; also existiert eine Lösung des Problems (2.5). □

2.3 Kompakte Operatoren

Wenn wir den Satz von Brouwer auf unendlich–dimensionale Banachräume X übertragen wollen, erkennen wir folgendes Problem: Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ ist in X nicht kompakt, was im $\mathbb{R}^n$ gilt und im Beweis des Satzes von Brouwer eine wichtige Rolle gespielt hat.

Gegenbeispiel (Kakutani 1943)

Sei H ein separabler Hilbertraum.
Wir schreiben wieder abkürzend $B = \overline{B_1(0)}$.
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H, d.h. für alle n gilt: $\|y_n\| = 1, (y_n, y_m) = \delta_{mn}$.
Wir definieren die Abbildung U, indem wir die Wirkung auf die Basisvektoren angeben:

$$U\colon y_n \mapsto y_{n+1} \quad \forall n.$$

Jedes $x \in H$ besitzt eine Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis der folgenden Art:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i.$$

Damit können wir angeben, wie die Abbildung U auf beliebige Elemente x des Hilbertraums wirkt:

$$U(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

$U\colon H \to H$ ist stetig, außerdem bildet U die Menge $S = \{x, \|x\| = r\}$ mit $r^2 = \sum_i \alpha_i^2$ in sich selbst ab, wie man mit Hilfe der Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis einfach nachrechnen kann.
Wir betrachten nun

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)y_0 + U(x).$$

f ist stetig und $f\colon B \to B$, wie wir leicht nachrechnen können:
Sei $\|x\| \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \frac{1}{2}(1-\|x\|)\underbrace{\|y_0\|}_{=1} + \underbrace{\|U(x)\|}_{=\|x\|}\\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\|x\| + \|x\|\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leq 1.\end{aligned}$$

Annahme: $\exists x_0 \in B: \quad f(x_0) = x_0$, umgeschrieben

$$x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}(1-\|x_0\|)y_0.$$

Es gibt drei mögliche Fälle:

(i) $x_0 = 0$.
Dann folgt

$$0 = \frac{1}{2}y_0,$$

was nicht möglich ist, da y_0 ein Basisvektor ist.

(ii) $\|x_0\| = 1 \Leftrightarrow \sum_i \alpha_i^2 = 1$.
Dann erhalten wir

$$x_0 = U(x_0),$$

was sich mit x_0 in der Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis, d.h. $x_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i$, wie folgt liest:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

Wir bilden nun das Skalarprodukt mit y_j:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (y_i, y_j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (y_{i+1}, y_j).$$

Aufgrund der Eigenschaften der Orthonormalbasis ergibt sich daraus:

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} \qquad \forall j,$$

d.h. alle α_j sind gleich, und somit ergibt sich der Widerspruch

$$\sum_j \alpha_j^2 = \infty \neq 1.$$

(iii) $0 < \|x_0\| < 1$. Sei

$$x_0 = \sum_i \alpha_i y_i, \qquad \text{also} \qquad \sum_i \alpha_i^2 < 1.$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0 = x_0 - U(x_0) = \sum_i (\alpha_i - \alpha_{i-1})y_i,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0, \\ \alpha_i &= \alpha_{i+1}\,, \qquad\qquad i \neq 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\ldots \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \ldots\,,$$

womit $\sum_i \alpha_i^2 = \infty$ und somit ein Widerspruch folgt.

In allen der drei möglichen Fälle tritt ein Widerspruch auf, d.h. die Annahme muß falsch sein. Also hat f keinen Fixpunkt.

Aus diesem Gegenbeispiel lernen wir, daß in unendlich–dimensionalen Banachräumen stetige Abbildungen nicht unbedingt einen Fixpunkt haben müssen. Es ist also notwendig, noch stärkere Forderungen an die Funktionen zu stellen. Dazu betrachten wir folgenden Ansatz: Wir untersuchen solche Operatoren, die durch „endlich dimensionierte“ Operatoren angenähert werden können, und versuchen, den Satz von Brouwer auf diese anzuwenden.
Für eine genaue Umsetzung dieser Idee benötigen wir folgende

Definition 2.1 *Sei $T\colon M \subseteq X \to Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator T heißt* kompakt (vollstetig)*, wenn gilt:*

(i) T ist stetig,

(ii) T bildet beschränkte Mengen $B \subseteq M$ in relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{T(B)}$ ist kompakt.

Wir erinnern an die Definition einer kompakten Teilmenge eines normierten Vektorraumes:
Sei $M \subseteq X, X$ ein normierter Vektorraum.
M ist kompakt. $\Leftrightarrow$ Jede Überdeckung durch offene Mengen enthält eine endliche Teilüberdeckung (Heine–Borel), d.h.

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \Rightarrow \exists N, \alpha_1, \dots, \alpha_N : M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} M_{\alpha_i}.$$

Eine äquivalente Definition ist die der Folgenkompaktheit:

$$\forall (x_n) \subseteq M \qquad \exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in M.$$

Eine weitere Möglichkeit der Definition ist die Existenz von sogenannten endlichen ε–Netzen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : x_1, \dots, x_N \in M : \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i).$$

In endlich–dimensionalen Räumen gilt außerdem: M kompakt. $\Leftrightarrow$ M abgeschlossen und beschränkt.
Im unendlich–dimensionalen Fall gilt nur die Implikation: M kompakt. $\Rightarrow$ M abgeschlossen und beschränkt.

Ein Operator $T\colon M \subseteq X \to Y$ ist kompakt, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:
i) $\dim Y < \infty$ und T stetig und beschränkt.
ii) $\dim X < \infty$, T stetig und M abgeschlossen.

Satz 2.3 *Seien X und Y Banachräume, $T\colon M \subseteq X \to Y$, M beschränkt, $M \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist kompakt.

(ii) Für alle n existieren $P_n\colon M \to Y$ mit $\dim R(P_n) < \infty$, P_n kompakt und

$$\forall x \in M : \|P_n x - Tx\|_Y < \frac{1}{n}.$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i):
Es gelte (ii). Zu zeigen ist: T ist kompakt.

1. Stetigkeit:
   Wir haben zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_Y &\leq \|Tx - P_n x\|_Y + \|P_n x - P_n y\|_Y + \|P_n y - Ty\|_Y \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\leq \frac{1}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y + \frac{1}{n} \qquad \text{(nach (ii))}\\
&\leq \frac{3}{n}, \qquad \text{weil } P_n \text{ stetig ist}
\end{aligned}$$

für genügend großes n und geeignet gewähltes $\delta(\varepsilon)$.

2. Kompaktheit von $T(M)$:
   Wir zeigen: $\forall n$ existiert ein endliches $\frac{3}{n}$-Netz: Von oben wissen wir

$$\|Tx - Ty\|_Y \leq \frac{2}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y. \tag{2.6}$$

   P_n ist kompakt, deshalb gibt es $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$P_n(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(P_n x_i),$$

   d.h. für alle $y \in M$ existiert ein x_i mit

$$\|P_n y - P_n x_i\|_Y \leq \frac{1}{n}.$$

   Zusammen mit (2.6) ergibt sich daraus

$$\forall y\ \exists x_i \qquad \|Tx_i - Ty\|_Y \leq \frac{3}{n},$$

   d.h.

$$T(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{3}{n}}(Tx_i),$$

   somit die Kompaktheit von $T(M)$.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß T kompakt ist, also (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii):
Sei T kompakt und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Aufgrund der vorausgesetzten Kompaktheit von T ist $T(M)$ relativ kompakt, d.h.

$$\exists x_i \in M, i = 1, \ldots, N: \qquad T(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(\underbrace{Tx_i}_{=: y_i}).$$

Wir konstruieren eine „Zerlegung der Eins“ wie folgt: Seien für $i = 1, \ldots, N$ Funktionen a_i definiert durch

$$a_i(x) = \max\left(\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|_Y\,, 0\right).$$

Die a_i haben folgende Eigenschaften:

(i) Jedes a_i ist stetig, denn T ist stetig und das Maximum zweier stetiger Funktionen ist stetig.

(ii) $a_i(x) \geq 0$ nach Konstruktion.

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i(x) > 0 \quad \forall x \in M\,,$ wegen der Überdeckungseigenschaft der y_i.

(iv) $a_i(x) > 0 \Rightarrow \|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$ nach Konstruktion .

Wir definieren damit

$$\lambda_i(x) = \frac{a_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{N} a_j(x)}.$$

$\lambda_i, i = 1, \ldots, N$, bilden die gewünschte Zerlegung der Eins, denn es gilt:

(i) λ_i ist stetig nach (iii).

(ii) $0 \leq \lambda_i \leq 1$ nach Konstruktion.

(iii) $\sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \forall x \in M$ ebenfalls nach Konstruktion.

(iv) $\lambda_i > 0 \Rightarrow \|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Nun konstruieren wir den sogenannten „Schauderoperator“ P_n durch:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) y_i.$$

Wir überprüfen, ob P_n die geforderten Eigenschaften besitzt:

(i)

$$\begin{aligned}\|P_n x - Tx\|_Y &= \|P_n x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) Tx\|_Y \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)}_{=1} \|y_i - Tx\|_Y \leq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(ii) $\dim R(P_n) < \infty$ nach Konstruktion, da $R(P_n) \subseteq \operatorname{span}(y_1, \dots, y_N)$.

(iii) P_n ist beschränkt, denn

$$\|P_n x\| \leq \|P_n x - Tx\| + \|Tx\| \leq \frac{1}{n} + c,$$

da T kompakt und damit beschränkt ist.
P_n ist stetig, da λ_i stetig sind.
$P_n(M)$ beschränkt, $\dim R(P_n) < \infty$; $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt und abgeschlossen, was im endlich–dimensionalen Fall äquivalent zur Kompaktheit ist.
Also gilt insgesamt: P_n ist kompakt.

Somit haben wir einen Operator mit den gewünschten Eigenschaften angegeben, damit ist (ii) gezeigt. □

2.4 Der Satz von Schauder

Satz 2.4 (Schauder, 1930) *Sei $T\colon M \subseteq X \to M$ stetig, wobei X ein Banachraum, $M \neq \emptyset$, konvex und kompakt sei. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis: T ist kompakt, da $\overline{T(M)} \subseteq M$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist. Deshalb ist $T(M)$ relativ kompakt.
Nach Satz 2.3 gilt daher:

$$\forall n\ \exists P_n\colon M \to M_n \text{ mit } \|P_n x - Tx\| \leq \frac{1}{n},$$

wobei $M_n = \overline{co(y_1, \dots, y_n)} \subseteq M$. Setze

$$\tilde{P}_n := P_n | M_n.$$

Da M_n homöomorph zu $B_1(0)$ im $\mathbb{R}^n$ ist, gilt nach dem Satz von Brouwer:

$$\exists x_n : \tilde{P}_n x_n = x_n.$$

Betrachte nun die Folge der Fixpunkte (x_n):

$$x_n \in M_n \subseteq M.$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, d.h. es gilt

$$x_n \to x \in M.$$

Wir hoffen, daß der Limes x ein Fixpunkt des approximierten Operators T ist, und versuchen deshalb, den Abstand $\|Tx - x_n\|$ „klein“ zu bekommen:

$$\begin{aligned}
\|Tx - x_n\| &= \|Tx - \tilde{P}_n x_n\|, && \text{da } x_n \text{ Fixpunkt von } P_n \text{ ist.}\\
&\leq \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - \tilde{P}_n x_n\| && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} && \text{T stetig, nach Satz 2.3}\\
&\leq \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Bei Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich mit

$$\lim_{n\to\infty} (Tx - x_n) = 0$$

das gewünschte Resultat

$$Tx = x.$$

□

Wir wollen noch eine alternative Version des Satzes von Schauder beweisen, die häufiger benutzt wird als die andere. In der Praxis ist es nämlich oft leichter, die Kompaktheit eines Operators zu zeigen als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlich–dimensionalen Banachraumes. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.2 (Mazur) *Sei X ein Banachraum und A relativ kompakt. Dann ist auch $co(A)$ relativ kompakt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Da A als relativ kompakt vorausgesetzt wurde, existieren

$$z_1, \ldots, z_n \in A \quad \text{so, daß} \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i).$$

Setze $K = co\{z_1, \ldots, z_n\}$.
Nach Definition von $co(A)$ gibt es für $y \in co(A)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+, y_i \in A$ mit $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i, \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

$$\forall x \in A \quad \exists z_j \qquad \text{mit} \qquad \|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies erlaubt uns, die Funktion v durch folgende Vorschrift zu definieren:

$$v(x) = j \qquad \in \{1, \ldots, n\}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|y - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{v(y_i)}}_{\in K}\| &= \|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (y_i - z_{v(y_i)})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|y_i - z_{v(y_i)}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dies hat gezeigt:

$$co(A) \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x). \tag{2.7}$$

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned} \psi &: [0,1]^n \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\} \to K, \\ \psi &: (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i. \end{aligned}$$

ψ ist stetig, und es ist $\psi([0,1]^n \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\}) = K$. Weil der Definitionsbereich offensichtlich kompakt ist, und Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt, folgt, daß auch K kompakt ist, d.h.

$$\exists k_1, \ldots, k_N \text{ mit } K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k_i). \tag{2.8}$$

Aus (2.7) und (2.8) folgt dann insgesamt

$$co(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon}(k_i),$$

d.h. $co(A)$ ist relativ kompakt. $\square$

Folgerung 2.3 (Schauder) *Sei $T\colon M \subseteq X \to M$ kompakt, X ein Banachraum, und sei $M \neq \emptyset$, abgeschlossen, beschränkt und konvex. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei $N = \overline{co(T(M))} \subseteq M$.

(i) Nach Lemma 2.2 ist N kompakt, konvex und nichtleer.

(ii) T ist stetig, denn T ist kompakt.

(iii) $T\colon N \to N$, denn es gilt:

$$N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad T(N) \subseteq T(M) \quad \Rightarrow \quad \overline{co(T(N))} \subseteq \overline{co(T(M))} = N.$$

Damit folgt nach Satz 2.4, daß T einen Fixpunkt besitzt. □

2.5 Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = y_0, \tag{2.9}$$

wobei f nur stetig, nicht wie beim Satz von Picard-Lindelöf Lipschitz–stetig sei.

Satz 2.5 (Peano, 1890) *Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}, a, b > 0$ gegeben. Sei*

$$Q_b = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad |t - t_0| \leq a, |x - y_0| \leq b\}.$$

Die Funktion $f\colon Q_b \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt, d.h.

$$|f(t, x)| \leq K \qquad \forall (t, x) \in Q_b.$$

Dann hat das Anfangswertproblem (2.9) eine stetig differenzierbare Lösung $x(t)$, die im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, mit $c = \min(q, \frac{K}{b})$, definiert ist.

Beweis: Wir schreiben die Differential– in eine Integralgleichung um:

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

und definieren den Operator T durch

$$Tx = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Das Anfangswertproblem (2.9) ist äquivalent zu folgendem Fixpunktproblem:

$$x = Tx\,, \qquad\qquad x \in M \subseteq X\,,$$

mit

$$\begin{aligned} X &= C([t_0 - c, t_0 + c]), \qquad \|x\|_X = \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} |x(t)|, \\ M &= \{x \in X, \|x - y_0\| \le b\}. \end{aligned}$$

M ist nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt. Wie im Beweis vom Satz von Picard-Lindelöf folgt, daß der Operator T die Menge M in sich selbst abbildet.
Es ist noch zu zeigen: T ist kompakt. Dabei verwenden wir den Satz von Arzela–Ascoli:

(i) Gleichmäßige Beschränktheit:
Sei $x \in M$. Dann gilt für alle t und x

$$\begin{aligned} |T(x)(t)| &\le |y_0| + \int_{t}^{t_0} |f(s, x(s))|\, ds \\ &\le |y_0| + cK \le c_0\,, \end{aligned}$$

d.h. $T(M)$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Gleichgradige Stetigkeit:

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))|\, ds \le K|t_2 - t_1|.$$

Mit (i) und (ii) folgt nach dem Satz von Arzela–Ascoli: $T(M)$ ist relativ kompakt in $C([t_0 - c, t_0 + c])$.
T ist stetig: Sei $x_n \to x$ in X. Weil die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm die gleichmäßige Konvergenz ist, bedeutet das:

$$x_n \rightrightarrows x, \text{ d.h. } \forall \varepsilon\ \exists n_0 : |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \qquad \forall t, \forall n \ge n_0\,.$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|Tx_n(t) - Tx(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \, ds \\
&\leq 2c\tilde{\varepsilon}\,, \qquad \text{da } f \text{ stetig ist und } |t - t_0| < \delta\,.
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Schauder (Folgerung 2.3) folgt dann: Es gibt einen Fixpunkt von T, d.h. eine Lösung von (2.9). $\square$

Teil B

Integration und Differentiation in Banachräumen

Bisher kennen wir die Begriffe des Integrals und der Ableitung für Funktionen $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist das Lebesgue–Integral $\int\limits_{\Omega} f_j(x)\,dx$, sowie partielle Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ und das Differential $Df(x)$ bekannt.
Wir möchten nun diese Begriffe für

$$f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to X\,,$$

definieren, wobei X ein reflexiver reeller Banachraum ist. Im Prinzip ist das Vorgehen dabei sehr ähnlich, und wir werden auch ähnliche Sätze kennenlernen wie für reelle Funktionen, aber an manchen Stellen muß man aufpassen!

1 Bochner-Integrale

Der Einfachheit halber betrachten wir nur Funktionen

$$f\colon S \to X$$

mit eindimensionalem Definitionsbereich

$$S \subseteq \mathbb{R}^1,$$

d.h. wir setzen $m = 1$.

Definition 1.1 *Sei $f\colon S \to X$, X ein reeller, reflexiver Banachraum. f heißt* Treppenfunktion, *wenn f sich schreiben läßt als*

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i} x_i$$

mit $x_i \in X$, $B_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$, B_i Lebesgue–meßbar, $m(B_i) < \infty$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die charakteristische Funktion χ_B ist wie folgt definiert:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B, \\ 1, & x \in B\,. \end{cases}$$

Definition 1.2 *Sei f ein Treppenfunktion. Dann definieren wir das Integral durch:*

$$\int_S f(s)\,ds \equiv \sum_{i=1}^{n} m(B_i)x_i \qquad\qquad \in X.$$

Definition 1.3 *Eine Funktion $f\colon S \to X$ heißt* Bochner–meßbar, *falls eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen $f_n\colon S \to X$ existiert, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0 \qquad\qquad \textit{fast überall in } S. \tag{1.1}$$

Genügt eine solche Folge der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X\,ds = 0\,, \tag{1.2}$$

so heißt f Bochner–integrierbar, *und wir definieren das* Bochner–Integral *als*

$$\int_S f(s)\,ds \equiv \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,ds. \tag{1.3}$$

Bemerkung:

- f Bochner–meßbar. $\Rightarrow$ $\|f(.) - f_n(.)\|\colon S \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue–meßbar.

  Beweis: Sei g eine Bochner–meßbare Funktion. Dann gibt es eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen, so daß $\|g_n(.)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ für jedes n eine Treppenfunktion mit Werten im $\mathbb{R}$ ist. Für $n \to \infty$ konvergiert

  $$\|g_n(.)\|_X \to \|g(.)\|_X \qquad \text{für fast alle } s \in S,$$

  also ist $\|g(.)\|_X$ Lebesgue–meßbar. Wenn wir dies auf $g = f - f_n$ anwenden, erhalten wir die Behauptung. □

  Damit ist auch sichergestellt, daß die Bedingung (1.2) Sinn macht.

- Der Grenzwert in (1.3) existiert.

  Beweis:

  $$\begin{aligned}\Big\|\int_S f_n\,ds - \int_S f_k\,ds\Big\| &= \Big\|\int_S f_n - f_k\,ds\Big\| \\ &\le \int_S \|f_n - f_k\|\,ds,\end{aligned}$$

da es sich um eine endliche Summe handelt. Also können wir die rechte Seite abschätzen durch

$$\int_S \|f_n - f\| + \|f - f_k\| \, ds \to 0 \qquad \text{für} \quad n, k \to \infty$$

nach Voraussetzung.
Damit ist gezeigt, daß $\left(\int_S f_n \, ds\right)$ eine Cauchyfolge in X bildet. Wegen der Vollständigkeit von X folgt dann die Behauptung. □

- Der Grenzwert ist außerdem von der gewählten Folge unabhängig, da zwei Folgen zu einer kombiniert werden können.

Satz 1.1 (Pettis, 1938) *Sei X separabel. Dann ist $f : S \to X$ genau dann Bochner–meßbar, wenn für alle $F \in X^*$ die Funktion $\langle F, f(.)\rangle : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–meßbar ist.*

Beweis: $\Rightarrow$:
Sei f Bochner–meßbar. Nach Definition gibt es dann eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen so, daß

$$f_n(s) \to f(s) \text{ in } X \quad \text{für fast alle } s \in S.$$

Da die starke Konvergenz in X die schwache impliziert, folgt damit auch, daß für alle $F \in X^*$:

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle.$$

$\langle F, f_n(s)\rangle : S \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Zusammen mit der obigen Konvergenzaussage folgt dann

$$\langle F, f(s)\rangle : S \to \mathbb{R} \qquad \text{ist Lebesgue–meßbar.}$$

$\Leftarrow$:
Der Beweis dieser Richtung ist sehr technisch und kann in [12, S. 131] nachgelesen werden. □

Folgerung 1.1 *Sei X separabel. Sei $f : S \to X$, und sei (f_n) eine Folge Bochner–meßbarer Funktionen so, daß*

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s) \qquad \textit{für fast alle } s \in S\,.$$

Dann ist f Bochner–meßbar.

Beweis: Nach Voraussetzung sind die f_n Bochner–meßbar. Damit folgt aufgrund von Satz 1.1, daß für alle $F \in X^*$ gilt: $\langle F, f_n(.)\rangle$ ist Lebesgue–meßbar. Eine weitere Voraussetzung des Satzes ist

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s),$$

was nach Definition der schwachen Konvergenz gerade heißt:

$$\langle F, f_n(.)\rangle \to \langle F, f(.)\rangle \qquad \forall F \in X^*.$$

Daraus erhalten wir, daß auch der Grenzwert $\langle F, f(.)\rangle$ Lebesgue–meßbar ist. Nochmalige Anwendung von Satz 1.1 liefert dann, daß f Bochner–meßbar ist. □

Satz 1.2 (Bochner, 1933) *Eine Bochner-meßbare Funktion $f\colon S \to X$ ist genau dann Bochner–integrierbar, wenn die Funktion $\|f(.)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist.*

Beweis: $\Rightarrow$:
Sei f Bochner–integrierbar. Insbesondere ist f also Bochner–meßbar, d.h. es gibt eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, so daß

$$f_n(.) \to f(.) \text{ stark in } X \quad \text{für fast alle } s \in S.$$

$\|f_n(.)\|_X$ ist Lebesgue–meßbar, und weil

$$\|f_n(.)\|_X \to \|f(.)\|_X,$$

ist auch $\|f(.)\|_X$ Lebesgue–meßbar.
$\|f\|_X$ läßt sich abschätzen durch

$$\|f\|_X \leq \|f_n\|_X + \|f - f_n\|_X.$$

Damit ergibt sich für das Integral die Abschätzung

$$\int_S \|f\|_X\, ds \leq \int_S \|f_{n_0}\|_X\, ds + \int_S \|f - f_{n_0}\|_X\, ds < \infty \quad \text{wegen (1.2)}\ .$$

Somit ist $\|f(.)\|$ Lebesgue-integrierbar.

$\Leftarrow$:
Sei f Bochner–meßbar, d.h. es existiert eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen mit

$$f_n(.) \to f(.) \text{ in } X \quad \text{für fast alle } s \in S.$$

Wir definieren

$$g_n(s) := \begin{cases} f_n(s), & \|f_n(s)\| \le \frac{3}{2}\|f(s)\|, \\ 0, & \|f_n(s)\| > \frac{3}{2}\|f(s)\|. \end{cases}$$

g_n ist offensichtlich auch eine Treppenfunktion und erfüllt

$$g_n \to f \qquad \text{für fast alle} \quad s \in S.$$

Außerdem gilt:

$$\|g_n(s) - f(s)\|_X \le \|g_n(s) - f_n(s)\|_X + \|f_n(s) - f(s)\|_X,$$

woraus für $n \to \infty$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(s) - f(s)\|_X = 0.$$

Weiter läßt sich $\|g_n(s)\|$ abschätzen durch

$$\|g_n(s)\| \le \frac{3}{2}\|f\| \qquad \text{für fast alle} \quad s.$$

Somit haben wir mit

$$\|g_n(s) - f(s)\|_X \le \|g_n(s)\|_X + \|f(s)\|_X \le \frac{5}{2}\|f(s)\|_X$$

eine Lebesgue–integrierbare Majorante für den zu betrachtenden Integanden gefunden. Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_s \|g_n(s) - f(s)\|_X \, ds = 0\,,$$

d.h. f ist Bochner–integrierbar. □

Folgerung 1.2 *Sei $f\colon S \to X$ Bochner–integrierbar. Dann gilt:*

(1) $\|\int\limits_S f(s)\,ds\|_X \le \int\limits_S \|f(s)\|_X\,ds.$

(2) Für alle $F \in X^*$ ist

$$\left\langle F, \int\limits_S f(s)\,ds \right\rangle_X = \int\limits_S \langle F, f(s)\rangle_X \, ds.$$

Beweis:

1.

$$
\begin{aligned}
\Big\| \int\limits_S f(s)\,ds \Big\|_X &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \int\limits_S f_n(s)\,ds \Big\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|f_n(s)\|_X\,ds\,, \qquad \text{endliche Summe.} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \Big(\int\limits_S \|f_n(s) - f(s)\|_X\,ds + \int\limits_S \|f(s)\|_X\,ds \Big) \\
&= \int\limits_S \|f(s)\|_X\,ds
\end{aligned}
$$

nach der Definition des Bochner–Integrals.

2. f ist Bochner–meßbar, d.h. es gibt eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen mit:

$$f_n \to f \qquad \text{fast überall.}$$

Es gilt, da die starke Konvergenz die schwache impliziert:

$$
\begin{aligned}
\langle F, \int\limits_S f(s)\rangle\,ds &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle F, \int\limits_S f_n(s) \Big\rangle\,ds \\
&\quad \text{nach Definition des Bochner–Integrals.} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_S \langle F, f_n(s)\rangle\,ds, \\
&\quad \text{da es sich um eine endliche Summe handelt; siehe unten!} \\
&= \int\limits_S \langle F, f(s)\rangle\,ds.
\end{aligned}
$$

Es gilt nämlich

$$\|f_n(s)\| \to \|f(s)\| \qquad \text{fast überall}\,,$$

und, da $\|f_n(s)\| \le \frac{3}{2}\|f(s)\|$ und $\|f(s)\|$ Lebesgue–integrierbar ist, kann man mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz zum Limes übergehen.
Den zweiten Schritt wollen wir explizit nachrechnen:

Nach Definition des Bochner–Integrals für Treppenfunktionen gilt:

$$\begin{aligned}\langle F, \int\limits_S f_n(s)\,ds\rangle &= \langle F, \sum_{i=1}^N m(B_i)x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N m(B_i)\langle F, x_i\rangle \\ &= \int\limits_S \langle F, f_n(s)\rangle_X \,ds.\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- Für $f \in C(\bar{I}, X)$ existiert das Bochner–Integral und es ergibt sich als Limes Riemannscher Summen:

$$\int\limits_I f(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n f(\hat{t_j^n})(t_{j+1}^n - t_j^n)\,,$$

  wobei $\hat{t_j^n} \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$. Wenn f stetig ist, ist $f|_{[t_j^n, t_{j+1}^n]}$ gleichmäßig stetig für jedes kompakte Intervall. Deshalb gilt:

$$\sum_{j=0}^n f(\hat{t_j^n})\chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n]} \to f(s) \qquad \text{fast überall,}$$

  d.h. Treppenfunktionen liegen dicht im Raum der stetigen Funktionen.

- Das Bochner–Integral ist analog zum Lebesgue–Integral definiert. Man kann deshalb einen Großteil der Resultate für Lebesgue–Integrale auf Bochner–Integrale übertragen, wobei die obigen Sätze, die einen Zusammenhang zwischen Bochner– und Lebesgue–Integral herstellen, nützlich sind. Wir wollen dies an einigen Beispielen skizzieren.

Definition 1.4 *Wir bezeichnen mit*

$$L^p(S, X), \qquad 1 \le p < \infty,$$

die Menge aller Bochner–meßbaren Funktionen, für die

$$\int\limits_S \|f(s)\|_X^p \,ds < \infty\,.$$

Die Menge aller Funktionen, für die

$$\|f(s)\|_X \leq M \qquad \text{für fast alle } s \in S,$$

bezeichnen wir mit $L^\infty(S,X)$.

Satz 1.3 *Die Menge* $L^p(S,X), 1 \leq p \leq \infty$, *bildet einen Banachraum bezüglich der Norm*

$$\|f\|_{L^p(S,X)} \equiv \left(\int_S \|f(s)\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

bzw.

$$\|f\|_{L^\infty(S,X)} \equiv \operatorname*{esssup}_S \|f(s)\|_X .$$

Beweis: Die Eigenschaften der Norm sind leicht nachzurechnen.
Wir wollen kurz auf die Vollständigkeit der Räume $L^p(S,X)$ eingehen:
Sei (f_n) eine Cauchy–Folge in $L^p(S,X)$, d.h.:

$$\|f_n - f_k\|_{L^p(S,X)}^p = \int_S \|f_n(s) - f_k(s)\|_X^p \, ds \to 0.$$

Da nach Satz 1.2 $\|f_n(s) - f_k(s)\|_X \in L^p(S,\mathbb{R})$ ist, kann der Beweis ab hier z.B. nachgelesen werden in [5, 2.Teil, S. 35]. □

Satz 1.4 (Hölder–Ungleichung) *Sei* $f \in L^p(S,X)$, $g \in L^{p'}(S,X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Dann ist $\langle f(s), g(s) \rangle \in L^1(S)$, *und es gilt*

$$\int_S \langle f(s), g(s) \rangle_X \, ds \leq \|f\|_{L^p(S,X)} \|g\|_{L^{p'}(S,X^*)} .$$

Beweis: Seien (f_n), (g_n) Folgen von Treppenfunktionen mit

$$f_n \to f \text{ in } X, \quad g_n \to g \text{ in } X^*.$$

Dann ist wegen

$$\langle f_n(s), g_n(s) \rangle_X \to \langle f(s), g(s) \rangle_X$$

$\langle f(s), g(s)\rangle_X$ Lebesgue–integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_S \langle f(s), g(s)\rangle_X \, ds &\le \int\limits_S \|f\|_X \|g\|_{X^*} \, ds \\ &\le \|f\|_{L^p(S,X)} \|g\|_{L^{p'}(S,X^*)}\end{aligned}$$

nach der Hölder–Ungleichung für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. □

Satz 1.5 *Sei X ein reflexiver Banachraum und $1 < p < \infty$. Dann besitzt jedes $f \in (L^p(S,X))^*$ genau eine Darstellung der Form*

$$f(u) = \int\limits_S \langle v(s), u(s)\rangle \, ds \qquad \textit{für alle } u \in L^p(S,X)\,,$$

wobei $v \in L^{p'}(S,X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Beweis: Der sehr technische Beweis verläuft analog zum Beweis im Falle von $f\colon S \to \mathbb{R}$ und liefert keine neuen Erkenntnisse, die über den Fall von reellwertigen Funktionen hinausgehen. Nachlesen kann man den Beweis z.B. in [8, Kap. 4]. □

2 Differentiation von Funktionen mit Werten in Banachräumen

Definition 2.1 *Seien X, Y Banachräume, $f\colon X \to Y$ und $h \in X$, $x_0 \in X$ gegeben. Falls die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to Y$, definiert durch*

$$\varphi(t) := f(x_0 + th),$$

in $t = 0$ differenzierbar ist, d.h.

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} \in Y\,,$$

sagen wir, daß f im Punkt x_0 eine Ableitung in Richtung h *besitzt, die wir mit $\delta f(x_0,h)$ bezeichnen. Falls $\delta f(x_0,h)$ für alle $h \in X$ existiert und die Abbildung*

$$Df(x_0)\colon X \to Y : h \mapsto \delta f(x_0,h)$$

stetig und linear ist, sagen wir, daß f im Punkt x_0 Gâteaux–differenzierbar *ist.*

Bemerkung:

- Die Definition 2.1 stimmt im Fall von $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit derjenigen von der Richtungsableitung überein.
- Insbesondere gilt für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$\delta f(x_0, e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$
- Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert, ist f stetig in Richtung h, d.h. $\lim\limits_{t\to 0} f(x_0 + th) = f(x_0)$.
- Indem wir die Bezeichnung $r(x) = o(\|x\|)$ einführen, können wir die Definition der Gâteaux–Ableitung umschreiben. Wir definieren:
$$r(x) = o(\|x\|) \Leftrightarrow \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \to 0 \qquad \text{für } x \to 0.$$
Damit schreibt sich die Definition wie folgt:
$$f(x_0 + th) - f(x_0) = \varphi'(0)t + o(t).$$
- Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert und $y \in Y^*$ ist, dann gilt:
$$\frac{d}{dt}\langle y, f(x_0 + th)\rangle\Big|_{t=0} = \langle y, \delta f(x_0, h)\rangle.$$

Satz 2.1 (Mittelwertsatz) *Sei $f\colon X \to Y$ für $0 \le t \le 1$ in $f(x_0 + th)$ Gâteaux–differenzierbar, und sei $t \mapsto \delta f(x_0 + th, h)$ stetig. Dann gilt:*
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt\,.$$

Beweis: Sei $y \in Y^*, h \in X$ vorgegeben. Wir definieren die Funktionen g und h durch:
$$\begin{aligned} g(t) &= f(x_0 + th)\colon [0,1] \to Y,\\ h(t) &= \langle y, g(t)\rangle\colon [0,1] \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Wenn wir diese beiden Funktionen nach t ableiten, ergibt sich:
$$\begin{aligned} h'(t) &= \langle y, g'(t)\rangle,\\ g'(t) &= \delta f(x_0 + th, h) \quad \text{nach Definition der Gâteaux–Ableitung.} \end{aligned}$$

Für h gilt nach dem Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$:

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\, dt.$$

Wenn wir nun die Definition von h hierfür einsetzen, erhalten wir

$$\langle y, g(1) - g(0) \rangle = \int_0^1 \langle y, g'(t) \rangle\, dt,$$

was nach Definition von g dasselbe ist wie:

$$\begin{aligned}\langle y, f(x_0 + h) - f(x_0) \rangle &= \int_0^1 \langle y, \delta f(x_0 + th, h) \rangle\, dt \\ &= \langle y, \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt \rangle\end{aligned}$$

nach Folgerung 1.2, Teil (2).

Da $y \in Y^*$ beliebig war, die Aussage also für alle $y \in Y^*$ gilt, folgt (aufgrund einer Folgerung aus dem Satz von Hahn–Banach, z.B. nachzulesen in [6, Teil B, S. 100])

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt,$$

also die Behauptung. □

Definition 2.2 *Seien X und Y Banachräume, $f: X \to Y$. Dann ist f* Fréchet–differenzierbar *im Punkt $x_0 \in X$ genau dann, wenn eine stetige lineare Abbildung $A: X \to Y$ existiert, so daß*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(\|h\|), \qquad h \to 0\,.$$

Wenn diese Abbildung existiert, nennen wir sie Fréchet–Ableitung *von f in x_0 und bezeichnen sie mit $A =: f'(x_0)$.*

Bemerkung:
f ist stetig differenzierbar im Punkt x_0, falls die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ im Punkt x_0 stetig ist.

Satz 2.2 *(1) f sei im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar. Dann ist f in x_0 Gâteaux–differenzierbar.*

(2) f sei Gâteaux–differenzierbar in einer Umgebung $U(x_0)$, und $Df(x)$ sei stetig in x_0. Dann ist f Fréchet–differenzierbar in x_0.

Beweis:

1. folgt sofort, wenn wir in der Definition der Fréchet–Ableitung h als $t\tilde{h}$, $\tilde{h}$ fest aber beliebig, wählen und dann $t \to 0$ gehen lassen.

2. Wir setzen
$$g(\tau) = f(x_0 + \tau h).$$
Dann ist
$$g'(\tau) = \delta f(x_0 + \tau h, h).$$
Nach dem Mittelwertsatz (Satz 2.1) ergibt sich dann
$$\begin{aligned}
\|g(1) - g(0) - g'(0)\| &= \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \delta f(x_0, h)\| \\
&= \left\| \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h) - \delta f(x_0, h)\, dt \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|\delta f(x_0 + th, h) - \delta f(x_0, h)\|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \|(Df(x_0 + th) - Df(x_0))h\|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \|Df(x_0 + th) - Df(x_0)\|\, \|h\|\, dt \\
&= o(\|h\|)\,, \qquad \text{da } Df \text{ stetig in } x_0 \text{ ist.}
\end{aligned}$$
Also ist f im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar. □

Auch Ketten- und Produktregel gelten ähnlich wie im $\mathbb{R}^n$.
Doch wir müssen uns zunächst einmal fragen: Was ist ein Produkt?

Definition 2.3 *Seien X, Y und W Banachräume. Eine Abbildung $B\colon X \times Y \to W$ nennen wir* Produkt, *wenn B folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) B ist bilinear, d.h. linear in beiden Komponenten:

$$\begin{aligned}
&\textit{Für alle } x_0 \in X \textit{ gilt: } B(x_0, \cdot)\colon Y \to W \textit{ ist linear,}\\
&\textit{für alle } y_0 \in Y \textit{ gilt: } B(\cdot, y_0)\colon X \to W \textit{ ist linear.}
\end{aligned}$$

(ii) B ist stetig, d.h.

$$\|B(x,y)\|_W \leq c\|x\|_X\|y\|_Y$$

für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ mit einer Konstante c.

Satz 2.3 (Produkt–, Kettenregel) *Seien X, Y, W, Z Banachräume.*

1. *Seien $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offen, $f \in C^1(U,Y)$, $g \in C^1(V,Z), f(U) \subseteq V$.*
   Dann ist $g \circ f \in C^1(U,Z)$, und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

2. *Sei $U \subseteq X$ offen. Die Funktionen $f\colon U \to Y$ und $g\colon U \to Z$ seien in U Fréchet–differenzierbar, $B\colon Y \times Z \to W$ sei ein Produkt.*
   Dann ist $h\colon x \mapsto B(f(x), g(x))\colon U \to W$ Fréchet–differenzierbar, und es gilt

$$h'(x)y = B(f'(x)y, g(x)) + B(f(x), g'(x)y) \qquad \forall\, y \in X.$$

Beweis:

1. Wir setzen $y = f(x)$.
   Nach Voraussetzung ist g in $f(x)$ Fréchet–differenzierbar, d.h. nach Definition:

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \|k\|r_1(k),$$

wobei $r_1(k) \to 0$ konvergiert für $k \to 0$.
Wir wählen

$$k = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\|r_2(h),$$

wobei $r_2(h) \to 0$ für $h \to 0$. Dies gilt aufgrund der Annahme, daß f in x Fréchet–differenzierbar ist. Insgesamt erhalten wir dann

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \|h\|r(h),$$

wobei

$$\begin{aligned}\|h\|r(h) &= g'(f(x))\|h\|r_2(h) + \|f'(x)h + \|h\|r_2(h)\|\, r_1(k)\\ &\leq \|h\|\big(g'(f(x))r_2(h) + \|f'(x) + r_2(h)\|r_1(k)\big),\end{aligned}$$

d.h. $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Nach Definition der Fréchet–Ableitung haben wir nun das gewünschte Resultat erhalten.

2. Sei $y \in X$. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(h), \\ g(x+y) &= g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(h). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} h(x+y) - h(x) &= B(f(x+y), g(x+y)) - B(f(x), g(x)) \\ &\quad \text{nach Definition von } h. \\ &= B\big(f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(x)\big) - B(f(x), g(x)) \\ &= B(f(x), g'(x)y) + \underbrace{B(f(x), r_2(y))\|y\|}_{= o(\|y\|)} \\ &\quad + B(f'(x)y, g(x)) + \underbrace{B\big(f'(x)y, g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big)}_{= o(\|y\|)} \\ &\quad + \underbrace{\|y\| B\big(r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big)}_{= o(\|y\|)} \\ &\quad \text{wegen der Linearität von } B \text{ in beiden Argumenten.} \end{aligned}$$

Beim Nachweis, daß die unterklammerten Terme für $\|y\| \to 0$ verschwinden, wird an einigen Stellen die Stetigkeit der Abbildung B benutzt, z.B. bei der folgenden Abschätzung:

$$\|B\big(f'(x)y, \|y\| r_2(y)\big)\| \leq c\|y\| \, \|f'(x)\| \, \|y\| \, \|r_2(y)\| \to 0 \qquad \text{für } \|y\| \to 0. \qquad \square$$

- **Ableitungen höherer Ordnung:**

$$\begin{aligned} f &\colon D(f) \subseteq X \to Y \\ f' &\colon D(f') \subseteq X \to L(X, Y) \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen erhalten wir analog zu dieser Definition, indem wir sie weiter iterieren, z.B. ist f'' dann eine Abbildung

$$f'' \colon D(f'') \subseteq X \to L(X, L(X, Y)).$$

Wir sehen schon, daß die Bildräume der Ableitungen eine immer kompliziertere Struktur annehmen.

- **Notation:**
Wir schreiben

$$f^{(n)} \colon X \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{–mal}} \to Y : (x, h_1, \ldots, h_n) \mapsto f^{(n)}(x, h_1, \ldots, h_n).$$

Wenn $h_i = h$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, dann schreiben wir

$$f^{(n)}(x)h^n := f^{(n)}(x, \underbrace{h, \ldots, h}_{n-\text{mal}}).$$

- **Partielle Ableitungen:** Seien X, Y und Z Banachräume. Wir betrachten eine Funktion auf $X \times Y$:

$$f\colon X \times Y \to Z : (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Wenn wir $y_0 \in Y$ festhalten, ist $F(.) := f(., y_0)\colon X \to Z$ eine Funktion in einer Variablen $x \in X$.
Die partielle Ableitung von f nach x ist dann analog zu den partiellen Ableitungen von Funktionen im $\mathbb{R}^n$ definiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv F'(x_0).$$

Analog kann man $x_0 \in X$ festhalten und mit Hilfe von $G(.) := f(x_0, .)\colon Y \to Z$ die partielle Ableitung von f nach y definieren:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv G'(y_0).$$

Satz 2.4 (Taylor) *Sei $U \subseteq X$ offen, $f \in C^n(U, Y)$, $x \in U$. Ferner existiere $f^{(n+1)}(x + th)$ für festes $h \in X$ und für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt:*

$$f(x + th) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + R_{n+1}(x, h),$$

wobei $\|R_{n+1}(x, h)\| \leq \sup_{\tau \in (0,1)} \|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \tau h)h^{n+1}\|$.

Beweis: Sei $y^* \in Y^*$, $g(t) = \langle y^*, f(x + th)\rangle\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Der Satz von Taylor in $\mathbb{R}$ liefert:

$$\langle y^*, f(x + th)\rangle = \left\langle y^*, f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + \frac{1}{(n+1)!} f'^{(n+1)}(x + t_1 h) \right\rangle,$$

mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach folgt daraus die Behauptung. $\square$

2.1 Satz über implizite Funktionen

Unser Ziel ist es, eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, den wir für reellwertige Funktionen kennen, zu beweisen.
Sei $F\colon X \times Y \to Z$.
Wir wollen die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ lösen, wobei $F(x_0, y_0) = 0$ gegeben ist, d.h. wir suchen eine Abbildung

$$y\colon x \mapsto y(x)$$

mit $F(x, y(x)) = 0$ und $y(x_0) = y_0$.

Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen eine solche Abbildung existiert.

Satz 2.5 (Satz über implizite Funktionen, Hildebrandt, Graves 1927) *Seien X, Y und Z Banachräume, $U(x_0, y_0) \subseteq X \times Y$ offen. $F\colon X \times Y \to Z$ sei in $U(x_0, y_0)$ definiert, und es sei $F(x_0, y_0) = 0$. Ferner existiere $\frac{\partial F}{\partial y}$ als Fréchet–Ableitung in $U(x_0, y_0)$, und es sei $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\colon Y \to Z$ bijektiv. Außerdem seien F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in (x_0, y_0) stetig.*
Dann existieren $r_0, r > 0$, so daß gilt:
Für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| \le r_0$ existiert genau ein $y(x) \in Y$ mit

$$\|y(x) - y_0\| \le r \text{ und } F(x, y(x)) = 0\,.$$

Beweis: O.B.d.A. seien $x_0 = y_0 = 0$. Wir setzen

$$g(x,y) := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y - F(x,y).$$

Dann ist die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ äquivalent zu folgender Gleichung:

$$y = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} g(x,y) =: T_x y.$$

g hat folgende Eigenschaften:
Seien $\|x\|, \|y\|, \|z\| \le r$.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Für den Punkt $(0,0)$ gilt also:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Da F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig in $(0,0)$ sind, folgt mit der Taylor–Formel für $n = 0$ und $h = y - z$:

$$\begin{aligned}\|g(x,y) - g(x,z)\| &\le \sup_{0<\tau<1} \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, z + \tau(y-z)) \right| \, \|y - z\| \\ &= o(1)\|y - z\|, \qquad r \to 0.\end{aligned}$$

Da $g(0,0) = 0$ und g stetig in $(0,0)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}\|g(x,y)\| &\le \|g(x,y) - g(x,0)\| + \|g(x,0)\| \\ &= o(1)\|y\| + o(1)\,, \qquad r \to 0.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$M := \{y \in Y, \|y\| \le r\}.$$

Aus Obigem erhalten wir für alle $y \in M$ und alle $x \in B_r(0) = \{x \in X, \|x\|_X \le r\}$

$$\begin{aligned}\|T_x y\| &\le \left| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\Big)^{-1} \right| \, \|g(x,y)\| \\ &\le K(o(1)\|y\| + o(1)) \\ &\le r\,,\end{aligned}$$

falls r_0 und r klein genug gewählt wurden. Deshalb bildet T_x die Menge M in sich selbst ab, d.h. es gilt für alle $x \in B_{r_0}(0)$:

$$T_x \colon M \to M\,.$$

Weiter gilt für T_x:

$$\begin{aligned}\|T_x y - T_x z\| &\le \left| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\Big)^{-1} \right| \, \|g(x,y) - g(x,z)\| \\ &\le K o(1)\|y - z\| \\ &\le \frac{1}{2}\|y - z\|,\end{aligned}$$

wobei wir r eventuell noch kleiner als oben wählen. Wir haben also gezeigt, daß T_x k–kontraktiv ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gilt dann: Für alle $x \in X$ mit $\|x\| \le r_0$ gilt:

$$\exists!\, y \in Y \text{ mit } \|y\| \le r: \quad y = T_x y.$$

Dies ist äquivalent dazu, daß die Gleichung

$$F(x, y(x)) = 0$$

eine eindeutige Lösung $y(x) \in Y$ besitzt. $\square$

Folgerung 2.1 *Sei zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.5 F im Punkt (x_0, y_0) Fréchet–differenzierbar. Dann ist $y = y(x)$ in x_0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt:*

$$y'(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist F in (x_0, y_0) Fréchet–differenzierbar, d.h.

$$\begin{aligned} F(x,y) = F(x_0,y_0) &+ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ o(\|x-x_0\| + \|y-y_0\|). \end{aligned}$$

Für $y = y(x)$ ergibt sich wegen $F(x_0, y_0) = 0$ und $F(x, y(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y(x)-y_0) \\ &+ o(\|x-x_0\| + \|y-y_0\|). \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichung nach $y(x)$ auflösen, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} &- \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right) \\ &+ o(\|x-x_0\| + \|y(x)-y(x_0)\|). \end{aligned}$$

Da y stetig in x_0 ist, ist $\|y(x) - y(x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$. Damit können wir zusammmenfassen:

$$o(\|x-x_0\| + \|y(x)-y(x_0)\|) = o(\|x-x_0\|)$$

und erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) &- \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right) \\ &+ o(\|x-x_0\|). \end{aligned}$$

Also ist y im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt nach Definition der Fréchet–Ableitung:

$$y' = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

□

Wenn man die Gleichung

$$f(g(y)) = y$$

nach g auflöst, heißt das, die Inverse von f zu bestimmen, also

$$g(y) = f^{-1}(y)\,.$$

Unter welchen Bedingungen dies möglich ist, zeigt

Satz 2.6 (Satz über die inverse Funktion) *Seien X und Y Banachräume, $U(x_0) \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x_0 \in X$, $f\colon U(x_0) \to Y$. f' existiere in $U(x_0)$, f und f' seien im Punkt x_0 stetig. $f'(x_0)\colon X \to Y$ sei ein Homöomorphismus (bijektiv, stetig, Inverse stetig) auf einer offenen Umgebung $\tilde{V}(0)$.*
Dann gilt: f ist ein lokaler Homöomorphismus einer Umgebung $V(x_0)$ auf eine Umgebung $W(f(x_0))$. Darüber hinaus gilt: Wenn $\|y - f(x_0)\|$ hinreichend klein ist und $y \in W(f(x_0))$, so konvergiert die Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} = x_n + \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - f(x_n))$$

gegen die eindeutige Lösung von $f(x) = y$.

Beweis: Wir setzen $y_0 := f(x_0)$.
Zu $y \in Y$ suchen wir $h \in X$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = y - y_0.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$f'(x_0)h + R(x_0, h) = y - y_0\,, \tag{2.1}$$

wobei

$$R(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(\|h\|).$$

Wir definieren nun die Abbildung

$$\begin{aligned} A\colon B_\varepsilon(0) &\subseteq X \to X\,, \\ Ah &\equiv \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - y_0 - R(x_0, h)). \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, daß A einen Fixpunkt besitzt, d.h.

$$\exists h \text{ mit } Ah = h,$$

haben wir ein h der gesuchten Art gefunden. Die Fixpunktgleichung $Ah = h$ ist nämlich äquivalent zur Gleichung (2.1), was man sieht, wenn man $f'(x_0)$ darauf anwendet. Dies ist möglich, da $f'(x_0)$ ein Homöomorphismus ist.
Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz benutzen und zeigen deshalb zunächst die k–Kontraktivität von A:
Seien $h_1, h_2 \in B_\varepsilon(0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x_0)(Ah_1 - Ah_2) &= R(x_0, h_1) - R(x_0, h_2) \\ &= f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) - f'(x_0)(h_1 - h_2) \\ &\quad \text{nach Definition von } R(x_0, h). \\ &= -\int_0^1 \big(f'(x_0 + \tau h_2 + (1-\tau)h_1) - f'(x_0)\big)(h_1 - h_2)\, d\tau \\ &\quad \text{nach dem Mittelwertsatz.} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $\|Ah_1 - Ah_2\|$:

$$\begin{aligned}\|Ah_1 - Ah_2\| &\leq \|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\| \, \|h_1 - h_2\| \int\limits_0^1 \underbrace{\|f'(x_0 + h_1 + \tau(h_2 - h_1) - f'(x_0)\|}_{\to 0 \text{ für } h_1, h_2 \to 0} \, d\tau \\ &\leq k\|h_1 - h_2\|\end{aligned}$$

mit einem $k \in (0,1)$ für genügend kleines ε, da f' stetig in x_0 ist. Also ist A k–kontraktiv.
Nun überprüfen wir, ob A die Kugel $B_\varepsilon(0)$ in sich selbst abbildet:

$$\begin{aligned}\|Ah\| &\leq \|Ah - A0\| + \|A0\| \\ &\leq k\|h\| + \|\left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - y_0)\| \\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

falls $\|y - y_0\|$ klein genug ist.
Damit können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden; es gilt:

$$\exists! h_0 \in B_\varepsilon(0) \text{ mit } Ah_0 = h_0.$$

Dies ist äquivalent zu folgender Aussage:

$$\exists! h_0 \in B_\varepsilon(0) \text{ mit } f(x_0 + h_0) = y.$$

Also wissen wir, daß in einer Umgebung von y_0 die inverse Abbildung $f^{-1}\colon W(y_0) \to V(x_0)$ existiert.
Weiter können wir zeigen, daß diese Abbildung Lipschitz–stetig ist: Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit zugehörigen Lösungen h_1, h_2 der Gleichung (2.1). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|h_1 - h_2\| &= \|A_{y_1}h_1 - A_{y_2}h_2\| \\ &\leq \|A_{y_1}h_1 - A_{y_1}h_2\| + \|A_{y_1}h_2 - A_{y_2}h_2\| \\ &\quad \text{nach der Dreiecksungleichung.} \\ &\leq k\|h_1 - h_2\| + \|\left(f'(x_0)\right)^{-1}(y_1 - y_0 - R(x, h_2) - y_2 + y_0 + R(x, h_2))\| \\ &\quad \text{wegen der } k\text{–Kontraktivität von } A_{y_1} \text{ und nach Definition von } A_{y_2}. \\ &\leq k\|h_1 - h_2\| + \|\left(f'(x_0)\right)^{-1}(y_1 - y_2)\|.\end{aligned}$$

Auflösen nach $\|h_1 - h_2\|$ ergibt:

$$\|h_1 - h_2\| \leq \frac{1}{1-k}\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\| \, \|y_1 - y_2\|.$$

Damit haben wir gezeigt, daß f^{-1} Lipschitz–stetig ist, denn:

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|.$$

Aus dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes folgt die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= Ah_n, \\ h_0 &= 0, \end{aligned}$$

und deren Konvergenz gegen den eindeutigen Fixpunkt von A.
Also konvergiert auch die Folge

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + h_{n+1} \\ &= x_0 + Ah_n \\ &= x_0 + \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - f(x_0) - R(x_0, h_n)) \\ &= x_0 + \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - f(x_0) - (f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h_n)) \\ &= x_0 + h_n + \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - f(x_0 + h_n)) \\ &= x_n + \left(f'(x_0)\right)^{-1}(y - f(x_n)) \end{aligned}$$

gegen die eindeutige Lösung von $f(x) = y$. □

Folgerung 2.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.6 gilt: f^{-1} ist Fréchet–differenzierbar, und es ist*

$$(f^{-1})'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1} .$$

Beweis: Sei $f(x_0) = y_0$, $f(x_0 + h) = y_0 + w$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(y_0 + w) - f^{-1}(y_0) - \left(f'(x_0)\right)^{-1} w \\ &= x_0 + h - x_0 - f'(x_0)^{-1} w \\ &= h - f'(x_0)^{-1} \underbrace{(f(x_0 + h) - f(x_0))}_{=w} \\ &= -f'(x_0)^{-1}(f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h) \\ &= o(\|h\|), \\ & \text{da } f \text{ an der Stelle } x_0 \text{ Fréchet–differenzierbar ist.} \\ &= o(\|w\|), \end{aligned}$$

denn

$$\frac{1}{\|w\|} = \frac{1}{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|} \leq \frac{1}{c\|h\|},$$

wobei c die Lipschitz–Konstante von $f^{-1}(x_0)$ ist. Damit steht die Definition der Fréchet–Ableitung von f^{-1} an der Stelle y_0 da, und die Behauptung ist bewiesen. □

Teil C

Die Theorie monotoner Operatoren

Die Theorie monotoner Operatoren verallgemeinert folgendes elementare Resultat:

Gegeben sei die reelle Gleichung

$$F(u) = b, \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

wobei F folgende Bedingungen erfülle:

(a) $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

(b) F ist stetig.

(c) $F(u) \to \pm\infty$ falls $u \to \pm\infty$.

Dann gilt

$$\forall b \in \mathbb{R} \qquad \exists u \in \mathbb{R} \quad \text{Lösung von (0.1).}$$

Falls F strikt monoton ist, so ist die Lösung u eindeutig bestimmt. Dieser klassische Existenzsatz folgt aus dem Mittelwertsatz für stetige Funktionen.

Dieses Resultat soll nun auf Gleichungen der Form

$$Au = b, \qquad u \in X \quad \text{mit } X \text{ reflexiver Banachraum,} \tag{0.2}$$

verallgemeinert werden.

Die gesamte Theorie monotoner Operatoren basiert auf ein paar Tricks, die jetzt kurz veranschaulicht werden. Da man sich bei dieser Theorie leicht in technischen Details verlieren kann, stellen wir zunächst die Hauptprinzipien vor, bevor wir auf Details eingehen.

Angenommen

(a) der Operator $A\colon X \to X^*$ ist monoton auf dem separablen reflexiblen Banachraum X, d.h.

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq 0, \qquad \forall u, v \in X,$$

(b) A ist hemistetig, d.h. die Abbildung

$$t \to \langle A(u - tv), w\rangle_X$$

ist stetig in $[0,1]$, für alle $u, v, w \in X$,

(c) A ist koerziv, d.h.

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty,$$

dann gilt der Hauptsatz über monotone Operatoren, der besagt: A ist surjektiv, d.h.

$$\forall b \in X^* \quad \exists \text{ Lösung } u \text{ von } (0.2).$$

Der Beweis besteht aus folgenden Hauptschritten:

1. Galerkin–Approximation: X ist separabel. Daher gibt es eine Basis $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ von X, d.h.

$$X_n = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\},$$
$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}.$$

   Wir approximieren (0.2) durch Probleme in X_n, $\dim X_n < \infty$. Auf diese Probleme ist der Satz von Brouwer anwendbar, der die Existenz einer Lösung u_n für jedes dieser Probleme sichert.

2. A priori Schranken: Wir zeigen, daß die Folge (u_n) beschränkt ist.
   Dies zeigen wir mit folgendem Argument:
   Wenn $A : X \to X^*$ koerziv ist, dann existiert ein $R > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle_X &\geq (1 + 2\|b\|_{X^*})\|u\|_X && \forall u : \|u\|_X > R > 0\\
\Longleftrightarrow \langle Au, u\rangle_X - \langle b, u\rangle_X &\geq (1 + 2\|b\|_{X^*})\|u\|_X - \|b\|_{X^*}\|u\|_X &&\\
\Longleftrightarrow \langle Au, u\rangle_X - \langle b, u\rangle_X &\geq (1 + \|b\|_{X^*})\|u\|_X &&\\
&\geq (1 + \|b\|_{X^*})R && \forall \|u\|_X > R.
\end{aligned}$$

Falls $Au = b$, dann gilt $0 \geq (1+\|b\|_{X^*})R > 0 \quad \forall \|u\|_X > R$. Dies ist aber ein Widerspruch. Daher $\|u\| \leq R$, falls $Au = b$.

3. Schwache Konvergenz: Wir zeigen, daß eine Teilfolge (u_{n_k}) existiert mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ für $n \to \infty$.
   Da X ein reflexiver Banachraum ist, d.h. $X = X^{**}$, folgt dies aus dem Satz von Eberlein–Smuljan, Variante Frehse ([6, Teil B, Satz 2.1, S. 77]), der postuliert
   $$(u_n) \text{ beschränkt } \Rightarrow \exists (u_{n_k}) : u_{n_k} \rightharpoonup u.$$
4. Das so gefundene u ist eine Lösung von $Au = b$. Diese Aussage beweisen wir mithilfe des folgenden Minty–Tricks.

Lemma 0.1 (Minty) *X sei ein reflexiver, reeller Banachraum. $A : X \to X^*$ sei hemistetig und monoton. Dann gilt*

1) Falls A maximal monoton ist, d.h. seien $u \in X$, $b \in X^*$ gegeben, so daß
$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in X,$$
dann folgt $Au = b$.

2) A genügt der Bedingung (M), d.h. aus
$$\begin{array}{rcllr} u_n & \rightharpoonup & u & \text{in } X & \text{für } n \to \infty\,, \\ Au_n & \rightharpoonup & b & \text{in } X^* & \text{für } n \to \infty\,, \\ \langle Au_n, u_n \rangle & \to & \langle b, u \rangle & & \text{für } n \to \infty\,, \end{array}$$
folgt $Au = b$.

3) Aus entweder
$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } X\,, \quad Au_n \to b \text{ in } X^* \text{ für } n \to \infty$$
oder
$$u_n \to u \text{ in } X\,, \quad Au_n \rightharpoonup b \text{ in } X^* \text{ für } n \to \infty$$
folgt $Au = b$.

Beweis:

1) Seien $w, u \in X$ gegeben. Wir setzen $v = u - tw, t \in \mathbb{R}^+$. Dann impliziert

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0, \text{ daß}$$

$$\langle b - A(u - tw), w \rangle \geq 0.$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0$, daß

$$\langle b - Au, w \rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall w \in X.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten die umgekehrte Ungleichung.
Insgesamt gilt also $\langle b - Au, w \rangle = 0$ für alle $w \in X$, d.h. $b = Au$.

2) Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle .$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle b, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle b - Av, v \rangle \\ &= \langle b - Av, u - v \rangle \qquad\qquad \forall v \in X, \end{aligned}$$

d.h. A ist maximal monoton. Aus (1) folgt daher $Au = b$.

3) Dies folgt wie in 2), wenn eine Aussage der Art

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } X, \quad f_n \to f \text{ in } X^* \text{ für } n \to \infty \Rightarrow \langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$$

gelten würde. Denn dann erhalten wir $\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle$. Das folgende Lemma liefert aber die benötigte Aussage. □

Lemma 0.2 (Konvergenzprinzipien) *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann gilt:*

(1) Wenn $x_n \rightharpoonup x$, dann gbit es ein c, so daß $a\|x_n\|_X \leq c$.

(2) Wenn

$$\begin{aligned} x_n &\rightharpoonup x \textit{ in } X \quad \textit{für } n \to \infty, \\ f_n &\to f \textit{ in } X^* \quad \textit{für } n \to \infty, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X$$

(3) *Die Folge (x_n) sei beschränkt. Wenn alle konvergenten Teilfolgen von (x_n) gegen denselben Grenzwert x schwach konvergieren, dann konvergiert die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x.*

Beweis:

(1) Konsequenz aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ([6, Teil B, Satz 3.1, S. 83]).
$(\langle f, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\forall\, f \in X^*$ beschränkt, da $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \in \mathbb{R}$, d.h. $\sup\limits_n |\langle f, x_n\rangle| \leq c(f)$.
Da X reflexiv ist, kann jedes $x_n \in X$ mit einem linearen Operator identifiziert werden, der von X^* nach $\mathbb{R}$ abbildet. Aus $\sup\limits_n |\langle f, x_n\rangle| \leq c(f)$ folgt, daß die Folge der linearen Operatoren x_n punktweise beschränkt ist. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert daher $\sup\limits_n \|x_n\| \leq c$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &= |\langle f_n - f, x_n\rangle| + \langle f, x_n - x\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|f_n - f\| + |\langle f, x_n - x\rangle|\,. \end{aligned}$$

Nun ist $\|x_n\| \leq c$ nach (1), $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$ nach Voraussetzung und $|\langle f, x_n - x\rangle| \to 0$ nach Voraussetzung. Demzufolge gilt $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$ für $n \to \infty$.

(3) Beweis durch Widerspruch. Annahme: x_n konvergiert nicht schwach gegen x. Dann

$$\exists f \in X^*,\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists x_{n_k} : |\langle f, x_{n_k}\rangle - \langle f, x\rangle| \geq \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aber nach Voraussetzung ist die Teilfolge (x_{n_k}) beschränkt, da $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. Daher gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{k'}})$, die konvergiert (vgl. [6, Teil B, Satz 2.1, S. 78]) und zwar nach Voraussetzung gegen x. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt die Behauptung. □

Bemerkung:

Die Aussage von Lemma 0.2 (2) gilt auch umgekehrt:

Wenn

$$\begin{aligned} x_n &\to x \text{ in } X \quad \text{für } n \to \infty, \\ f_n &\rightharpoonup f \text{ in } X^* \quad \text{für } n \to \infty, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n\rangle_X \to \langle f, x\rangle_X\,.$$

Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von Lemma 0.2 (2).

1 Monotone Operatoren

1.1 Der Satz von Browder und Minty

Definition 1.1 *Sei X ein reeller reflexiver Banachraum und sei*

$$A\colon X \to X^* \tag{1.1}$$

ein Operator. Dann heißt A

(1) monoton $\Leftrightarrow$ für alle $u, v \in X$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq 0$.

(2) strikt monoton $\Leftrightarrow$ für alle $u, v \in X, u \neq v$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle_X > 0$.

(3) stark monoton $\Leftrightarrow$ für alle $u, v \in X$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2{}_X$.

(4) koerziv $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_X} = \infty$.

Bemerkung:

(1) A stark monoton $\Rightarrow$ strikt monoton $\Rightarrow$ monoton.

(2) A stark monoton $\Rightarrow$ koerziv, denn:

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle Au - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \\ &\geq c\|u\|_X^2 - \|A(0)\|_{X^*}\|u\|_X.\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der starken Monotonie und der Cauchy–Schwarzschen–Ungleichung. Also

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq c\|u\|_X - \|A(0)\|_{X^*} \to \infty \qquad \text{für } \|u\|_X \to \infty.$$

(3) Beispiel: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten also f als Operator von X nach X^* mit $X = \mathbb{R} = X^*$. In $\mathbb{R}$ gilt

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = (f(u) - f(v))(u - v).$$

Das bedeutet

- $f : X \to X^*$ (strikt) monoton $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (strikt) monoton.
- f koerziv $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{u \to \pm\infty} f(u) = \pm\infty$.

(4) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & u \neq 0 \\ 0 & u = 0. \end{cases}$$

Für f gelten folgende Aussagen:

(i) Für $p > 1$ ist f strikt monoton.

(ii) Für $p = 2$ ist f stark monoton.

(iii) Für $p > 2$ gilt

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle \geq c\,|u - v|^p.$$

Beweis:

a) Für alle $p \in (1, \infty)$ ist zu zeigen, daß

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle > 0 \quad \forall u \neq v \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(v + s(u - v))\, ds \\ &= \int_0^1 f'(v + s(u - v))(u - v)\, ds\,. \\ \Rightarrow \langle f(u) - f(v), u - v\rangle &= \langle \int_0^1 f'(v + s(u - v))(u - v)\, ds, u - v\rangle \\ &= (u - v)^2 \int_0^1 f'(v + s(u - v))\, ds. \end{aligned}$$

Wenn wir nun $f(u) = |u|^{p-2}u$ einsetzen, berechnen wir zunächst

$$f'(u) = (p - 2)|u|^{p-4}u^2 + |u|^{p-2} = (p - 1)|u|^{p-2}$$

und erhalten damit für $p > 1$

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = (p - 1)(u - v)^2 \int_0^1 |v + s(u - v)|^{p-2}\, dx > 0,$$

da $|v - s(u - v)|^{p-2} > 0$ fast überall.

b) Wir betrachten nun den Fall $p \geq 2$.
O.B.d.A. sei $|u| \leq |v|$. Dann gilt $|u-v| \leq 2|v|$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow |v+s(u-v)| &\geq ||v|-s|u-v|| \\ &\geq |v|-s|u-v| \\ &\geq \frac{1}{2}|u-v|-s|u-v| = \left(\frac{1}{2}-s\right)|u-v|.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Rechnung aus a) folgt

$$\begin{aligned}\langle f(u)-f(v), u-v\rangle &\geq (p-1)(u-v)^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}-s\right)|u-v|\right)^{p-2} ds \\ &= |u-v|^p(p-1)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-s\right)^{p-2} ds.\end{aligned}$$

Dies ist Behauptung (iii) für $p > 2$.
Im Fall $p=2$ setzen wir $C(p) := (p-1)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-s\right)^{p-2} ds = \frac{1}{2} > 0$ und erhalten damit

$$\langle f(u)-f(v), u-v\rangle \geq C|u-v|^2.$$

(Vgl. Übungsaufgabe 3, Übungsblatt 5.) □

Definition 1.2 *X sei ein reeller, reflexiver Banachraum, $A\colon X \to X^*$. Dann heißt A:*

(1) demistetig $\Leftrightarrow$

$$u_n \to u \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad Au_n \rightharpoonup Au \textit{ in } X^* \textit{ für } n \to \infty.$$

(2) hemistetig $\Leftrightarrow$ *Die Funktion*

$$t \to \langle A(u+tv), w\rangle$$

ist stetig in $[0,1]$ *für alle* $u, v, w \in X$.

(3) stark stetig $\Leftrightarrow$

$$u_n \rightharpoonup u \textit{ in } X \textit{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad Au_n \to Au \textit{ in } X^* \textit{ für } n \to \infty\,.$$

(4) beschränkt $\Leftrightarrow$ *A bildet beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in X^* ab.*

Zuerst untersuchen wir Eigenschaften von stark stetigen, demistetigen und monotonen Operatoren.

Lemma 1.1 *Sei X ein reflexiver Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

(1) A ist stark stetig. $\Rightarrow$ A ist kompakt.

(2) A ist demistetig. $\Rightarrow$ A ist lokal beschränkt.

(3) A ist monoton. $\Rightarrow$ A ist lokal beschränkt.

(4) A ist monoton und hemistetig. $\Rightarrow$ A ist demistetig.

Beweis:

(1) Wir wollen zeigen, daß A kompakt ist, also daß A beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.
Sei dazu (u_n) eine beschränkte Folge in X. Zu zeigen: Es gibt eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n), so daß $Au_{n_k} \to w$.
Nun ist aber (u_n) beschränkt und X ein reflexiver Banachraum. Daher gilt:

$$\exists u_{n_k} : \quad u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Die starke Stetigkeit von A liefert jetzt die gewünschte Eigenschaft $Au_{n_k} \to Au$.

(2) Beweis durch Widerspruch:
Annahme: A ist nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein $u \in X$ und eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to u$ für $n \to \infty$, so daß $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ für $n \to \infty$.
Da A demistetig ist, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$. Demzufolge ist (Au_n) beschränkt nach Lemma 0.2..
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also ist A lokal beschränkt.

(3) Beweis durch Widerspruch:
Annahme: A ist nicht lokal beschränkt, dann

$$\exists u \in X \,,\ \exists u_n : u_n \to u \text{ und } \|Au_n\|_{X^*} \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

O.E.d.A. $u = 0$. Wir setzen

$$a_n \equiv (1 + \|Au_n\|_{X^*} \, \|u_n\|_X)^{-1}.$$

Die Monotonie von A liefert

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - A(\pm v), u_n - (\pm v)\rangle &\geq 0 \qquad \forall v \in X \\
\Leftrightarrow \pm a_n \langle Au_n, v\rangle &\leq a_n\big(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle A(\pm v), u_n \mp v\rangle\big) \\
&\leq a_n\big(\|Au_n\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|u_n \mp v\|_X\big) \\
&\qquad \text{nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung} \\
&\leq a_n\big(\|Au_n\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|v\|_X\big) \\
&\leq 1 + c(v),
\end{aligned}$$

nach Definiton der a_n und da

$$u_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0 : \quad \|u_n\| \leq 1,$$

und $\|A(v)\|_{X^*}$, $\|v\|_X$ sind Konstanten.
Die Abschätzung impliziert

$$\sup_n |\langle a_n Au_n, v\rangle| \leq c(v) < \infty \qquad \forall v \in X.$$

Wir setzen $B_n \equiv a_n Au_n \in X$, d.h. die B_n sind lineare und stetige Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$, die nach obiger Rechnung punktweise beschränkt sind.
Daher ist das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit anwendbar, demzufolge gilt

$$\sup_n \|a_n Au_n\|_{X^*} \leq c.$$

Wir bezeichnen mit $b_n = \|Au_n\|_{X^*}$. Dann

$$b_n \leq \frac{c}{a_n} = c(1 + b_n\|u_n\|) \quad \Leftrightarrow \quad b_n(1 - c\|u_n\|) \leq c.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt wegen $\|u_n\| \to 0$ für $n \to \infty$

$$b_n \leq c + 1,$$

d.h. die Folge (b_n) ist beschränkt im Widerspruch zur Annahme $\|Au_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$.
Also gilt die Behauptung.

(4) Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Da A monoton ist, ist (Au_n) nach 3) lokal beschränkt. Wegen der Reflexivität von X gibt es u_{n_k}:

$$\begin{aligned}
Au_{n_k} &\rightharpoonup b \\
\overset{\text{Lemma 0.2 (2)}}{\Rightarrow} \quad \langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle &\to \langle b, u\rangle \\
\overset{\text{Lemma 0.1 (3)}}{\Rightarrow} \quad Au &= b\,.
\end{aligned}$$

Alle konvergenten Teilfolgen von (Au_n) konvergieren gegen Au, denn sonst gibt es eine Teilfolge $Au_{n_l} \rightharpoonup c \neq b \overset{\text{Lemma 0.1 (2)}}{\Rightarrow} Au = c$, aber $Au = b$ nach obiger Rechung.

$$\overset{\text{Lemma 0.2 (3)}}{\Rightarrow} \quad Au_n \rightharpoonup b = Au.$$

Dies ist aber gerade die Definition von Demistetigkeit. □

Satz 1.1 (Browder, Minty 1963) *Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum mit einer Basis $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ferner sei $A\colon X \to X^*$ ein monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann gilt:*

(1) Für alle $b \in X^*$ existiert eine Lösung $u \in X$ von

$$Au = b\,. \tag{1.2}$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex.

(2) Falls A strikt monoton ist, ist die Lösung von (1.2) eindeutig.

Beweis:

1) Galerkin–Verfahren: Wir setzen

$$X_n = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

und suchen eine approximative Lösung u_n der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k\,,$$

die das Gleichungssystem

$$g_k((c_k^n)) = g_k(u_n) \equiv \langle Au_n - b, w_k\rangle = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

lösen.

a) Lösbarkeit von (1.3):
(1.3) ist ein nichtlineares System von Gleichungen bezüglich der Zahlen $(c_k^n)_{k=1}^n$. Nach Lemma 1.1 (4) ist A demistetig, da A monoton und hemistetig ist. Daher ist die Abbildung $(c_k^n) \mapsto g_k(c_k^n)$ stetig. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(c_k^n) c_k^n = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle b, u_n\rangle.$$

Da A koerziv ist, d.h. $\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_X} \to \infty$, gibt es ein R, so daß für alle $\|u\| \geq R$:

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle &\geq (1+2\|b\|_{X^*})\|u\|_X \\
&\geq (1+2\|b\|_{X^*})\|u_n\|_X > 0 \quad \forall \|u_n\|_X = R. \quad (*) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} g_k(c_k^n)c_k^n &\geq (1+2\|b\|_{X^*})\|u_n\|_X - \|b\|_{X^*}\|u_n\|_X \\
&= (1+\|b\|_{X^*})\|u_n\|_X > 0 \qquad \forall \|u_n\|_X = R.
\end{aligned}$$

Nach der Folgerung 2.2, Teil A, aus dem Satz von Brouwer gibt es also eine Lösung u_n von (1.3) mit $\|u_n\|_X \leq R$.

b) A priori–Schranke
Zu zeigen: Für alle n gilt: $\|u_n\|_X \leq R$, wobei u_n eine Lösung von (1.3) ist.
Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\exists n_0 : \|u_{n_0}\|_X > R$, aber u_{n_0} Lösung von (1.3), d.h. $g_k(u_{n_0}) = 0$. Daher haben wir

$$0 = \langle Au_{n_0}, u_{n_0}\rangle - \langle b, u_{n_0}\rangle \geq (1+\|b\|_{X^*})\|u_{n_0}\|_X > 0$$

nach derselben Rechnung wie in a). Dies ist aber ein Widerspruch. Also gilt die Annahme nicht.

c) Beschränktheit von (Au_n)
Da A monoton ist, folgt aus Lemma 1.1(3), daß A lokal beschränkt ist, d.h.

$$\exists r, \delta > 0 : \qquad \|v\|_X \leq r \quad \Rightarrow \quad \|Av\|_{X^*} \leq \delta.$$

Die Monotonie von A impliziert weiterhin, daß

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0.$$

u_n löst (1.3), d.h. $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$.

$$\Rightarrow |\langle Au_n, u_n\rangle| \leq \|b\|_{X^*}\|u_n\| \leq \|b\|_{X^*}R \qquad \forall n.$$

Die Definition der Norm von Au_n in X^* liefert zusammen mit der obigen Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|Au_n\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X = r}} \frac{1}{r}|\langle Au_n, v\rangle| \\
&\leq \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|_X = r}} \frac{1}{r}|\langle Av, v\rangle + \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle| \text{ wegen der Monotonie von } A \\
&\leq \frac{1}{r}(\delta r + \|b\|_{X^*}R + \delta R) < \infty\,.
\end{aligned}$$

Also ist (Au_n) beschränkt.

d) Konvergenz des Galerkin–Verfahrens
X ist reflexiv und die Folge (u_n) beschränkt, wie in b) gezeigt. Daher gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \qquad \text{in } X.$$

u_n ist eine Lösung von (1.3), d.h.

$$\begin{aligned} \langle Au_{n_k}, w_l\rangle &= \langle b, w_l\rangle \qquad \forall l = 1, \dots, n_k. \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w\rangle &= \langle b, w\rangle \qquad \forall w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l. \end{aligned}$$

Denn für alle $w \in \bigcup X_n$, gibt es ein n_0 mit $w \in X_{n_0}$. Also haben wir

$$\langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle\,, \qquad \forall n \geq n_0.$$

(Au_n) ist beschränkt in X^* nach c). Daher gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \qquad \text{in } X^*.$$

Aber $c = b$, denn sonst würde für $w \in \bigcup X_n$ einerseits gelten $\langle Au_n, w\rangle \to \langle b, w\rangle$ nach dem oben Gezeigtem; und andererseits $\langle Au_n, w\rangle \to \langle c, w\rangle$ nach der Definition der schwachen Konvergenz.

Dies bedeutet, für alle $w \in \bigcup X_n$ gilt $\langle c - b, w\rangle = 0$. Da $\bigcup X_n$ dicht in X liegt, gibt es zu $v \in X$ eine Folge (v_k) in $\bigcup X_n$ mit $v_k \to v$. Somit gilt

$$\langle b - c, v\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle b - c, v_k\rangle = 0 \qquad \forall v \in X,$$

d.h. $b = c$. Insgesamt daher

$$Au_n \rightharpoonup b \qquad \text{in } X^*.$$

Da u_n eine Lösung von (1.3) ist, gilt $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$. Die Definition der schwachen Konvergenz impliziert nun

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_n\rangle = \langle b, u\rangle.$$

Die Voraussetzungen des Minty–Trickes, Lemma 0.1 (2), sind demnach erfüllt, und wir erhalten $Au = b$, d.h. u ist Lösung der ursprünglichen Operatorgleichung.

e) Wir setzen $S = \{u \in X,\ Au = b\}$ für gegebenes $b \in X$.
Dann hat S folgende Eigenschaften:

- $S \neq \emptyset$ nach a) - d).

– S ist beschränkt.
Dies folgt aus der Koerzivität von A:
Annahme: S ist nicht beschränkt. Dann gibt es ein $u \in S : \|u\| \geq R > 0$. Also

$$0 = \langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle \geq (1 + \|b\|)\|u\| > 0$$

nach derselben Rechnung wie in b). Dies ist aber ein Widerspruch, und wir haben gezeigt, daß $\|u\|_X \leq R$.

– S ist konvex.
Zum Beweis seien $u_1,\ u_2 \in S$, d. h. $Au_i = b$ für $i = 1, 2$.
Für $w = tu_1 + (1-t)u_2$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t + 1 - t)v\rangle \\
&= \langle b - Av, tu_1 - tv\rangle + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v)\rangle \\
&= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v\rangle \\
&\geq 0 \qquad\qquad \forall v \in X
\end{aligned}$$

wegen der Monotonie von A.
Anwendung von Lemma 0.1 (1) liefert $Au = b$, d.h. $u \in S$. Also ist S konvex.

– S ist abgeschlossen.
Denn wenn gilt

$$Av_n = b \quad \forall n \text{ und } v_n \to u \text{ für } n \to \infty,$$

dann

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, u - v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Av, v_n - v\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Av_n - Av, v_n - v\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

wegen der Monotonie von A.
Aus Lemma 0.1 (1) folgt $Au = b$, also $u \in S$.

2) A sei strikt monoton.
Annahme: Es gibt zwei Lösungen $u \neq v$ von (1.2), d.h. $Au = b = Av$.
Dann impliziert die strikte Monotonie von A einerseits $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$. Aber andererseits gilt

$$0 < \langle Au - Av, u - v\rangle = \langle b - b, u - v\rangle = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Gleichung höchstens eine Lösung haben. □

1.2 Der Nemyckii-Operator

Um Satz 1.1 auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir die Eigenschaften, des sogenannten Nemyckii–Operators

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)) \,, \tag{1.4}$$

wobei $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u \colon G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$.

Wir nehmen an:

(1) Carathéodory–Bedingung: $f \colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ G \subset \mathbb{R}^N$ mit

$$x \mapsto f(x, \eta) \text{ ist meßbar auf } G \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}^N,$$
$$\eta \mapsto f(x, \eta) \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } x \in G.$$

(2) Wachstumsbedingung:

$$|f(x, \eta)| \le |a(x)| + b \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^{p_i/q}.$$

Hierbei ist $b > 0$ eine feste Zahl, $a \in L^q(G)\,,\ 1 \le p_i, q < \infty$, $i = 1, \dots n$.

Lemma 1.2 *Unter den obigen Annahmen an f, ist der in (1.4) definierte Nemyckii–Operator*

$$F \colon \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G) \to L^q(G)$$

stetig und beschränkt durch

$$\|Fu\|_{L^q} \le c\Big(\|a\|_{L^q} + \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}}^{p_i/q}\Big) \tag{1.5}$$

für alle $u \in \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G)$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 1, u = u_1, p = p_1$. Der allgemeine Fall folgt analog.

a) Meßbarkeit von Fu:
Da $u \in L^p(G)$, ist die Funktion $x \mapsto u(x)$ meßbar auf G. Also gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit

$$u_n \to u \qquad \text{fast überall in } G.$$

Daher gilt für fast alle $x \in G$

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)),$$

da f nach Annahme (1) stetig in η ist. Die Definition von Treppenfunktionen impliziert

$$\begin{aligned} f(x, u_n(x)) &= f\big(x, \sum_{j=0}^{N} c_j \chi_{G_j}(x)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f(x, c_j)\chi_{G_j}(x) \end{aligned}$$

mit $c_0 = 0$ und $G_0 = G \setminus \bigcup_{i=1}^N G_i$. Somit ist $f(x, u_n(x))$ meßbar, da $f(x, c_j)$ meßbar ist, und die χ_{G_j} als charakteristische Funktionen meßbar sind. Weiterhin ist der Limes meßbarer Funktionen meßbar und demnach auch Fu.

b) Beschränktheit von F:
Es gilt

$$\begin{aligned} \|Fu\|^q_{L^q(G)} &= \int_G |(Fu)(x))|^q \, dx \\ &= \int_G |f(x, u(x))|^q \, dx \\ &\overset{\text{Annahme (2)}}{\leq} \int_G (|a(x)| + b|u(x)|^{p/q})^q \, dx \\ &\leq c\int_G |a(x)|^q + b^q|u(x)|^p \, dx = c\big(\|a\|^q_{L^q(G)} + \|u\|^p_{L^p(G)}\big), \end{aligned}$$

denn folgende Ungleichung gilt für $1 < r < \infty$, $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i\right)^r \leq C \sum_{i=1}^{N} \xi_i^r \tag{1.6}$$

(Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$).
Also ist F beschränkt, denn $\|a\|_{L^q}$ und $\|u\|_{L^p}$ sind $< \infty$ nach den Voraussetzungen an a und u.

c) Stetigkeit von $F\colon L^p \to L^q$:
Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^p(G)$ für $n \to \infty$. Demzufolge gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ fast überall in G. (Das ist ein klassisches Resultat, siehe z.B. [2, Lemma

A 1.10, S. 52].) Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x,u_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|^q &\overset{(1.6)}{\leq} C|f(x,u_{n_k}(x))|^q + |f(x,u(x))|^q \\ &\overset{\text{Bedingung (2)}}{\leq} C|a(x)|^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x,u(x))|^q \\ &=: h_{n_k}(x). \end{aligned}$$

Nach Integration über G folgt

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q(G)} \leq C \int\limits_G h_{n_k}\, dx.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung steht als Integrand eine Folge von Funktion h_{n_k} aus $L^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x) \to h(x) & \qquad \text{fast überall in } G\,, \\ \int\limits_G h_{n_k}(x)\, dx \to \int\limits_G h(x)\, dx, & \end{aligned}$$

da $u_n \to u$ in $L^p(G)$, also $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$. Außerdem gilt $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$ für fast alle $x \in G$, da f stetig ist (Bedingung (1)). Daher ist der verallgemeinerte Satz von der dominanten Konvergenz anwendbar (siehe unten), demzufolge

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q} \to 0.$$

Lemma 0.2 (3) liefert nun $Fu_n \to Fu$ in $L^q(G)$, da die Teilfolge beliebig gewählt war. □

Satz (Verallgemeinerung des Satzes von der dominanten Konvergenz) *f_n und h_n seien Folgen aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, die punktweise gegen f bzw. h, ebenfalls aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, konvergieren, d.h.*

$$f_n \to f \text{ und } h_n \to h \qquad \text{fast überall}\,.$$

Weiterhin gelte $|f_n| \leq h_n$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_n\, dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} h\, dx \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Dann folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\, dx \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Beweis: siehe z.B. [15, Appendix (19a), S. 1015] (Vgl. Übungsaufgabe 1, Übungsblatt 7) □

1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes von Browder und Minty und des Nemyckii–Operators betrachten wir das Randwertproblem für folgende quasilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su = f \qquad & \text{auf } \Omega\,, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dabei sei $1 < p < \infty$, Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ und $s \geq 0$. X sei $W_0^{1,p}(\Omega)$. Für die weiteren Rechnung ist es wichtig zu bemerken, daß die „normale“ Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$, d.h.

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \left(\int |u|^p + |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ äquivalent ist zur Norm $\|\nabla u\|_{L^p}$, wenn Ω beschränkt ist (Beweis siehe z.B. [1, Theorem 6.28, S. 159]).

Bemerkung:

Wir sagen $\partial\Omega \in C^k$, wenn es zu jedem Punkt $x^0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und eine C^k–Funktion $\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß (nach Umbennenung und Reorientierung der Koordinatenachsen, falls nötig) gilt

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$

d.h. $\partial\Omega$ läßt sich lokal durch den Graphen einer C^k–Funktion darstellen.

Problem (1.7) lautet in der schwachen Formulierung:

Für gegebenes $f \in (L^p(\Omega))^*$ suchen wir $u \in X$, so daß

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + su\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx\,, \qquad \forall \varphi \in X.$$

Definiere einen Operator durch

$$\langle Au, \varphi\rangle \equiv \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + su\varphi\, dx, \qquad \forall\, u, \varphi \in X,$$

und eine Abbildung duch

$$\langle b, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx, \qquad \forall\, \varphi \in X\,,\ f \in (L^p(\Omega))^*.$$

Hierbei steht $\langle .,. \rangle$ für das Dualitätsprodukt.

Behauptung 1: Für $p \geq \frac{2n}{n+2}$ ist die schwache Formulierung von (1.7) äquivalent zur Operatorgleichung

$$Au = b, \tag{1.8}$$

wobei A und b wie oben definiert seien. Außerdem gilt $A\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, $b \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Beweis: (Im Folgenden ist mit X immer $W_0^{1,p}(\Omega)$ gemeint.)

1. Wir überprüfen $A : X \to X^*$.
   Es gilt

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi \rangle| &\leq \int_\Omega \big| |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + s u \varphi \big| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \, dx + \int_\Omega s |u \varphi| \, dx \\
&\leq \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p'(p-1)} \, dx \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} + s \Big[\Big(\int_\Omega |u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big] .
\end{aligned}$$

   Die letze Ungleichung folgt aus der Hölderungleichung, einmal mit $p = p' = 2$ und zum anderen mit $p' = \frac{p}{p-1}$. Wir setzen p' in die rechte Seite ein, dann vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$|\langle Au, \varphi \rangle| \leq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L^p} + s \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}.$$

   Für $1 \leq p < n$ gilt $X = W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$ mit $p' \leq \frac{np}{n-p}$. Insbesondere gilt $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \leq \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \geq \frac{2n}{n+2}$. Falls $p = n$ ist, verwenden wir $X = W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q < \infty$. Für $p > n$ benutzen wir $X = W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Also erhalten wir auch für $n \geq p$, daß $X \hookrightarrow L^2$, d.h.

$$\|u\|_{L^2} \leq C_1 \|u\|_X \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in X,\ p \geq \frac{2n}{n+2}.$$

   Insgesamt ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi \rangle| &\leq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L_p} + s \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s \|\nabla u\|_{L_p}) \|\nabla \varphi\|_{L_p} .
\end{aligned}$$

   Aus der Definition der dualen Norm folgt

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|_X \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| \\
&\leq C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s \|\nabla u\|_{L^p}),
\end{aligned}$$

   und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \geq \frac{2n}{n+2}$.

2. Wir überprüfen $b \in X^*$.
   Es gilt nach der Hölderungleichung
   $$\int\limits_\Omega |f||\varphi|\,dx \leq \Big(\int\limits_\Omega |f|^{p'}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$
   mit $p' = \frac{p}{p-1}$, d.h.
   $$\begin{aligned} \|b\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\leq 1}} |\langle b,\varphi\rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\leq 1}} \|f\|_{L^{p'}}\|\varphi\|_{L^p} \\ &\leq C\|f\|_{L^{p'}}, \end{aligned}$$
   da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \leq C\|\varphi\|_X$. Wir erhalten, daß $b \in X^*$, da $(L^p)^* = L^{p'}$.

3. Aus 1), 2) und der Definition von A und b folgt, daß sich die schwache Formulierung von (1.7) umschreiben läßt zu
   $$\langle Au,\varphi\rangle = \langle b,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in X.$$
   Also gilt Behauptung 1. □

Behauptung 2:

Der oben definierte Operator A erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.1.

Beweis:

1. $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein separabler und reflexiver Banachraum.

2. A ist monoton, sogar strikt monoton.
   Zum Beweis seien u, $v \in X$. Dann gilt:
   $$\begin{aligned} \langle Au - Av, u-v\rangle &= \int (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v) + s\int (u-v)^2\,dx \\ &> 0 \qquad \text{für } u \neq v, \end{aligned}$$
   da $s \geq 0$ und nach der Bemerkung nach Definition 1.1 (vgl. auch Übungsaufgabe 3, Übungsblatt 5).

3. A ist koerziv, denn

$$\langle Au, u\rangle = \int |\nabla u|^p + suu\,dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq C\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + \frac{s\|u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty \text{ für } \|\nabla u\|_{L^p} \to \infty\,, \text{ falls } p > 1.$$

4. A ist stetig. Sei dazu (u_n) eine Folge mit

$$u_n \to u \qquad \text{in } X.$$

Dann haben wir auch $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$. Wir setzen $F(u) = |u|^{p-2}u := f(u)$ und erhalten $|F(u)| \leq c|u|^{p-1} = c\|u\|^{\frac{p}{q}}$ für $q = \frac{p}{p-1}$, d.h. F ist ein Nemyckii–Operator, wobei f die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Aus Lemma 1.10 folgt daher, daß $F : L^p \to (L^p)^*$ stetig ist, d.h.

$$F(\nabla u_n) \to F(\nabla u) \qquad \text{in } (L^p)^*$$

für unsere Folge (u_n). Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int (F(\nabla u_n) - F(\nabla u))\nabla\varphi\,dx + \int s(u_n - u)\varphi\,dx \\ &\leq c\|F(\nabla u_n) - F(\nabla u)\|_{(L^p)^*}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\quad \text{nach der Hölderungleichung} \\ &\leq c\big(\|F(\nabla u_n) - F(\nabla u)\|_{(L^p)^*} + \|u_n - u\|_X\big)\|\varphi\|_X\end{aligned}$$

wegen $X \hookrightarrow L^2$. Nach der Definition der Norm im Dualraum gilt dann

$$\begin{aligned}\|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|\leq 1}} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle| \\ &\leq c(\|F(\nabla u_n) - F(\nabla u)\|_{(L^p)^*} + \|u_n - u\|_X).\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, da $u_n \to u$ in X und $F(\nabla u_n) \to F(\nabla u)$ in $(L^p)^*$ für $n \to \infty$. Also ist der Operator A stetig und damit insbesondere hemistetig. □

Behauptung 1 und Behauptung 2 liefern zusammen

Lemma 1.3 *Sei $s \geq 0$, $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$, $f \in (L^p(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ der Gleichung (1.8) (im Sinne der schwachen Lösung).*

Bemerkung:

Lemma 1.3 kann man auf die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x,\nabla u)) &= f\,, && \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0\,, && \text{auf } \Omega\,, \end{aligned}$$

verallgemeinern, falls A folgende Bedingungen erfüllt

1. A ist eine Carathéodory–Funktion.
2. $|A(x,\nabla u)| \le C(g(x) + |\nabla u|^{p-1})$, $\quad g \in L^{p'}$ (Wachstumsbedingung).
3. $(A(x,\nabla u) - A(x,\nabla u))(\nabla(u-v)) \ge 0$ $\quad$ für fast alle x (Monotonie).
4. $A(x,\nabla u)\nabla u \ge c|\nabla u|^p - h(x)$, $\quad h \in L^1$ (Koerzivität).

2 Pseudomonotone Operatoren

2.1 Der Satz von Brezis

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es ermöglicht, auch solche quasilinearen elliptischen Gleichungen zu lösen, die einen Term von niedrigerer Ordnung enthalten, der nicht monoton ist. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f & \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u = 0 & \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nicht mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden, da $g(u)\cdot u$ nicht positiv sein muß. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1.1 zeigt aber, daß wir allgemeinere Operatoren zulassen können, nämlich pseudomonotone Operatoren. Typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei $A_1 \colon X \to X^*$ monoton, hemistetig und $A_2 \colon X \to X^*$ stark stetig, also „kompakt“, ist, d.h. die Theorie pseudomonotoner Operatoren vereinigt Monotonie und Kompaktheit. Im Folgenden werden wir zuerst die allgemeine Theorie entwickeln und dann diese auf (2.1) anwenden.

Zunächst führen wir einen neuen Begriff ein:

Definition 2.1 *X sei ein reeller, reflexiver Banachraum, $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Wir sagen, A* genügt der Bedingung (M), *falls aus*

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad Au_n \rightharpoonup b\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_X \le \langle b, u\rangle_X$$

folgt $Au = b$.

Diese Bedingung ist wichtig, weil sie invariant unter „kompakten" Perturbationen ist. Außerdem erfüllen monotone Operatoren diese Bedingung. Genauer gilt:

Lemma 2.1 *X sei ein reeller, reflexiver Banachraum, $A\colon X \to X^*, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt*

(a) A ist monoton und hemistetig. Dann genügt A der Bedingung (M).

(b) Wenn A der Bedingung (M) genügt und B stark stetig ist, dann genügt $A + B$ der Bedingung (M).

Beweis:

a) Minty's Trick Lemma 0.1 (2).

b) Gegeben sei eine Folge (u_n) mit

$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n + Bu_n \rightharpoonup b, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n\rangle_X \le \langle b, u\rangle_X .$$

Da B stark stetig ist, gilt außerdem $Bu_n \to Bu$ und demzufolge $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b - Bu, u\rangle$ und $Au_n \rightharpoonup b - Bu$. Da A der Bedingung (M) genügt, folgt $Au = b - Bu$, d.h. $Au + Bu = b$. □

Definition 2.2 *$A\colon X \to X^*$ sei ein Operator auf dem reellen, reflexiven Banachraum X. Dann heißt A* pseudomonoton, *falls aus*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$$

folgt,

$$\langle Au, u - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \qquad \forall w \in X.$$

Im folgenden Lemma werden einige Beispiele für pseudomonotone Operatoren vorgestellt.

Lemma 2.2 *X sei ein reeller, reflexiver Banachraum, und $A, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt*

a) A ist monoton, hemistetig. $\Rightarrow$ A ist pseudomonoton.

b) A ist stark stetig. $\Rightarrow$ A ist pseudomonoton.

c) A und B sind pseudomonoton. $\Rightarrow$ $A+B$ ist pseudomonoton.

d) A ist pseudomonoton. $\Rightarrow$ A genügt der Bedingung (M).

e) A ist pseudomonoton und lokal beschränkt. $\Rightarrow$ A ist demistetig.

Beweis:

a) Gegeben sei eine Folge (u_n) mit $u_n \rightharpoonup u$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$.
Da A monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle &\ge 0 \\ \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle &\ge \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle = 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0.$$

Wir setzen $z = u + t(w-u)$ mit $t > 0$. Die Monotonie von A impliziert

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Az, u_n - z\rangle &\ge 0 \\ \Rightarrow \quad \langle Au_n - Az, u_n - (u + t(w-u))\rangle &\ge 0 \\ \Rightarrow \quad t\langle Au_n, u - w\rangle &\ge \langle -Au_n, u_n - u\rangle + \langle Az, u_n - u\rangle \\ &\quad + t\langle Az, u - w\rangle \\ \Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - w\rangle &\ge \langle Az, u - w\rangle \qquad \forall w \in X, \end{aligned}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0$, $u_n \rightharpoonup u$ und $t > 0$. Nun verwenden wir die Hemistetigkeit von A und erhalten für $t \to 0$, daß $Az \rightharpoonup Au$ und deshalb

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - w\rangle \ge \langle Au, u - w\rangle \qquad \forall w \in X.$$

b) (u_n) sei eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$. Dann gilt $Au_n \to Au$ nach Definition der starken Stetigkeit. Somit gilt

$$\langle Au, u - w \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \qquad \forall w \in X.$$

c) Wir wählen eine Folge (u_n) mit $u_n \rightharpoonup u$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0.$$

Damit

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0.$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Widerspruch.
Annahme: Es gibt eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n), im Folgenden ebenfalls mit (u_n) bezeichnet, so daß

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle &= a > 0 \\ \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle &\leq -a\,. \end{aligned}$$

Da B pseudomonoton ist, gilt

$$\langle Bu, u - w \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w \rangle \qquad \forall w \in X.$$

Wir setzen $w = u$, dann vereinfachen sich die Ungleichungen zu $0 \leq -a < 0$. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt die Behauptung.
Daher liefert die Pseudomontonie von A und B

$$\begin{aligned} \langle Au, u - w \rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle \\ \langle Bu, u - w \rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w \rangle\,. \end{aligned}$$

Addieren wir beide Ungleichungen ergibt sich

$$\langle Au + Bu, u - v \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w \rangle \qquad \forall w \in X.$$

Also ist $A + B$ pseudomonoton.

d) Gegeben sei eine Folge (u_n) mit

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad Au_n \rightharpoonup b\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle b, u\rangle.$$

Dies impliziert $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$.
Da A pseudomonoton ist, folgt daher

$$\begin{aligned} \langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \\ &\leq \langle b, u\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, u-w\rangle \qquad \forall w \in X. \end{aligned}$$

Wir ersetzen w durch $2u - w$, dann folgt $\langle Au, u-w\rangle = \langle b, u-w\rangle\, \forall w \in X$ und damit $Au = b$.

e) (u_n) sei eine Folge mit $u_n \to u$. Da A lokal beschränkt ist, ist die Folge (Au_n) beschränkt. X ist reflexiv. Daher gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit $Au_{n_k} \rightharpoonup b$, und wir erhalten $\lim_{n\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = 0$. Die Pseudomonotonie von A impliziert

$$\begin{aligned} \langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf_{n_k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - w\rangle \qquad \forall w \in X \\ &= \langle b, u-w\rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$.
Das Konvergenzprinzip Lemma 0.2 (3) liefert, da die Teilfolge beliebig gewählt war

$$Au_n \rightharpoonup b = Au,$$

d.h. A ist demistetig. □

Satz 2.1 (Brezis, 1968) *Sei $A\colon X \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter und koerziver Operator, wobei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum ist.* $\dim X = \infty$. *Dann gilt:*

$$\forall b \in X^* \qquad \exists u \in X: \qquad Au = b\,. \tag{2.2}$$

Beweis: Nach Lemma 2.2 (e) ist A demistetig, da A pseudomonoton und beschränkt ist; nach Lemma 2.2 (d) genügt A der Bedingung (M), da A pseudomonoton ist.
Sei $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von X. Wir verwenden nun das Galerkin–Verfahren genauso wie im Beweis von Satz 1.1, d.h. wir suchen

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k,$$

die das Gleichungssystem

$$g_k(c_k^n) = g_k(u_n) \equiv \langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \qquad \forall k = 1, \dots, n$$

lösen. Die Lösbarkeit diese Gleichungssystemes folgt wie im Beweis des Satzes 1.1 mit Folgerung 2.2, Teil A, aus dem Satz von Brouwer, da A demistetig und koerziv ist. Die Demistetigkeit von A impliziert nämlich, daß die g_k stetig sind, und die Koerzivität von A, daß $\sum g_k(u_n)c_k^n > 0$ für alle $\|u_n\| = R$ (vgl. Beweis von Satz 1.1, Beweisteil b) . Außerdem erhalten wir aus der Koerzivität auch eine A priori–Schranke (vgl. Einleitung), d.h.

$$\|u_n\|_X \leq R \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gibt es eine konvergente Teilfolge $(u_{n'})$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u$. Wir wollen nun zeigen: u löst (2.2). Aus den Gleichungen der Galerkin–Approximation folgt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_{n'} - b, v \rangle = 0 \qquad \forall v \in \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}.$$

Die Beschränktheit von A liefert, daß die Folge $(Au_{n'})$ beschränkt ist und einen schwachen Limes besitzt, d.h.

$$Au_{n'} \rightharpoonup c.$$

Es gilt aber $c = b$ mit denselben Argumenten wie im Beweisteil (d) von Satz 1.1. Aus dem Galerkin–System mit $w = u_n$ und der schwachen Konvergenz der $(u_{n'})$ erhalten wir

$$\langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle = \langle b, u_{n'} \rangle \to \langle b, u \rangle \quad \text{für } n' \to \infty.$$

Daher sind die Voraussetzung für die Bedingung (M) erfüllt, und es folgt

$$Au = b.$$

□

2.2 Anwendungen des Satzes von Brezis

1) Anwendung auf (2.1) Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{auf } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. X sei $W_0^{1,p}(\Omega)$. Wie in Abschnitt 1.3 erwähnt, ist die Norm $\|u\|_X$ äquivalent zur Norm $\|\nabla u\|_{L^p}$.

Wir setzen

$$\begin{aligned}\langle A_1 u, \varphi\rangle &\equiv \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\,dx\\ \langle A_2 u, \varphi\rangle &\equiv \int\limits_\Omega g(u)\varphi\,dx\\ \langle b, \varphi\rangle &\equiv \int\limits_\Omega f\varphi\,dx \qquad \forall\varphi\in X.\end{aligned}$$

Parallel zur Vorgehensweise in Abschnitt 1.3 formulieren wir die

Behauptung:

1. Die Operatorgleichung $A = A_1 + A_2 = b$, mit $A_1,\ A_2,\ b$ definiert wie oben, ist äquivalent zur schwachen Formulierung von (2.1), wobei $A_1,\ A_2\colon X \to X^*$ und $b \in X^*$.
2. Der Operator $A = A_1 + A_2$ erfüllt (unter bestimmten Annahmen an $g(.)$, f und p) die Voraussetzungen von Satz 2.1.

Beweis:

1. a) Der Operater A_1 entspricht dem Operator A aus Abschnitt 1.3 mit $s = 0$, also gilt $A_1\colon X \to X^*$.

   b) $A_2\colon X \to X^*$, denn:

$$|\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le \int\limits_\Omega |g(u)||\varphi|\,dx.$$

   Wenn wir eine Wachstumsbedingung an g stellen,

$$|g(s)| \le c(1+|s|^{r-1}) \qquad \text{mit } \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0,$$

   dann folgt weiter für $q = \frac{np}{n-p}$

$$\begin{aligned}|\langle A_2, \varphi\rangle| &\le \int\limits_\Omega c(1+|u|^{r-1})|\varphi|\,dx\\ &\le c\Big(\int\limits_\Omega (1+|u|^{r-1})^{q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\overset{(1.6)}{\le} \Big(c_1 + c_2\Big(\int\limits_\Omega |u|^{(r-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big)\Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\le \Big(c_1 + c_2\Big(\int\limits_\Omega |u|^{(r-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big)c_3\|\varphi\|_X,\end{aligned}$$

da $X \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $q = \frac{np}{n-p}$, d.h. $\|\varphi\|_{L^q} \le C\|\varphi\|_X$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} |\langle A_2, \varphi\rangle| &\le c_3\|\varphi\|_X(c_1 + c_2\|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}}) \\ &\le c_3\|\varphi\|_X(c_1 + c_4\|u\|^{r-1}_X), \end{aligned} \tag{2.3}$$

sofern $(r-1)q' \le q$, denn $X \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ für $q \ge t$. Die Forderung $(r-1)q' \le q$ läßt sich weiter umformen zu

$$\begin{aligned} && (r-1)\tfrac{1}{q} &\le \tfrac{1}{q'} \\ \Leftrightarrow && (r-1)\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right) &\le \tfrac{1}{q'} = 1 - \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{n} \\ \Leftrightarrow && r\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right) &\le 1 \\ \Leftrightarrow && \tfrac{1}{r} &\ge \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Operatornorm folgt

$$\|A_2u\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|_X\le 1}} |\langle A_2, \varphi\rangle| \le c_3(c_1 + c_4\|u\|^{r-1}_X).$$

und demzufolge $A_2u \in X^*$, d.h. $A_2 \colon X \to X^*$, sofern $\frac{1}{r} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ und g die Wachstumsbedingung erfüllt.

c) Es folgt $b \in X^*$, sofern $f \in (L^p(\Omega))^*$, mit denselben Argumenten wie in Abschnitt 1.3 Behauptung 1.

2. a) X ist ein reflexiver, separabler Banachraum.

b) Wir wissen aus Abschnitt 1.3 Behauptung 2, daß A_1 monoton, koerziv, stetig und beschränkt ist. Insbesondere ist A_1 nach Lemma 2.2 a) pseudomonoton.

c) Aus der im 1. Teil des Beweises gezeigten Abschätzung der Norm von A_2 folgt, daß A_2 beschränkt ist, sofern g und r die geforderten Eigenschaften haben.
Weiterhin behaupten wir, daß A_2 stark stetig ist und damit pseudomonoton nach Lemma 2.2 b).
Zum Beweis erinnern wir uns zunächst daran, daß wir für $n > p$ die folgenden Einbettungen haben: $X \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ und $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ mit $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
Wir wählen nun eine Folge (u_n) mit $u_n \rightharpoonup u$ in X. Für $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ist X kompakt in $L^r(\Omega)$ eingebettet; daher gilt $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$.
Wir setzen $F(u) = g(u)$. Dann ist F ein Nemyckii–Operator. Wenn wir voraussetzen, daß $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, und die Wachstumsbediungung aus dem 1. Teil des Beweises gilt, dann erfüllt g die Carathéodory–Bedingung und die Wachstumsbedingung aus Abschnitt 1.2. Daher ist $F \colon L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ nach Lemma 1.2 stetig und beschränkt, mit $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r}$. (Beachte: $r - 1 = \frac{r}{r'}$). Also gilt

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} |\langle A_2u_n - A_2u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} \int_\Omega |g(u_n)-g(u)||\varphi|\,dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} c\Big(\int_\Omega |g(u_n)-g(u)|^{r'}\,dx\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\int_\Omega |\varphi|^r\,dx\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} \|F(u_n)-F(u)\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r} \to 0 \text{ für } n\to\infty,
\end{aligned}
$$

denn $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$ und damit $\|\varphi\|_{L^r} \le c\|\varphi\|_X \le c$. Damit folgt $A_2u_n \to Au$ in X^*, d.h. A_2 ist stark stetig.

d) Aus b) und c) folgt, daß der Operator $A = A_1 + A_2$ pseudomonoton (vgl. Lemma 2.2 c)) und beschränkt ist. Zu zeigen bleibt noch, daß A koerziv ist.
Aus Abschnitt 1.3 Behauptung 2 wissen wir bereits

$$\langle A_1u, u\rangle = \|\nabla u\|^p_{L^p}.$$

Weiterhin gilt

$$\langle A_2u, u\rangle = \int_\Omega g(u)u\,dx > c_0,$$

sofern $\inf\limits_{s\in\mathbb{R}} g(s)s > -\infty$. (Man beachte, daß c_0 hier nicht positiv sein muß!) Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_X} &= \frac{\langle A_1u,u\rangle}{\|u\|_X} + \frac{\langle Au_2,u\rangle}{\|u\|_X} \\
&\ge c_1\frac{\langle Au_1,u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}} + \frac{c_1c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\
&\ge c_1\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p} + \frac{c_0c_1}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty
\end{aligned}
$$

für $\|u\|_X \to \infty$, falls $p > 1$. Also ist der Operator A koerziv (für $p > 1$). □

Wir haben bewiesen:

Lemma 2.3 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Die Funktion $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $|g(s)| \le c(1+|s|^{r-1})$ für alle $s\in\mathbb{R}$ und $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, sowie $\inf\limits_{s\in\mathbb{R}} g(s)s > -\infty$. Außerdem sei $n > p$. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung von (2.1), d.h. es gibt ein $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, so daß*

$$Au = b$$

.

Bemerkung:

Der Fall $p \geq n$ kann analog behandelt werden. Allerdings muß man bei den Einbettungssätzen Fallunterscheidungen durchführen, die die obigen Rechnungen weiter verkompliziert hätten.

2) Anwendung auf die stationären Navier–Stokes–Gleichungen
Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad & \text{auf } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad & \text{auf } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{u} = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit Ω beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $\mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$.
Wir setzen $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ und $M \equiv \{\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)\,,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$. Wiederum gilt, daß $\|\mathbf{u}\|_X$ äquivalent ist zu $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}$, da dies auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt (vgl. Abschnitt 1.3). Setze für $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi} \in M$

$$\begin{aligned} \langle A_1 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx, \\ \langle A_2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_\Omega \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\varphi}\, dx, \\ \langle A_3 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_\Omega \nabla p \boldsymbol{\varphi}\, dx = -\int p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx = 0, \\ \langle b, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_\Omega \mathbf{f} \boldsymbol{\varphi}\, dx\,. \end{aligned}$$

Wieder überprüfen wir, daß die Operatorgleichung $A_1 + A_2 = b$ äquivalent zur schwachen Formulierung von Problem (2.4) ist, mit A_1, $A_2\colon M \to M^*$, $b \in M^*$, und daß der Operator $A = A_1 + A_2$ die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.

1. M ist ein separabler, reflexiver Banachraum, denn M ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.
   Zum Beweis der Abgeschlossenheit betrachten wir eine Folge $(\mathbf{u}_n) \subseteq M$ mit $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in X. Weiterhin impliziert die Konvergenz in X, daß $\nabla \mathbf{u}_n \to \nabla \mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$. Daher gibt es eine Teilfolge mit $\nabla \mathbf{u}_{n_k} \to \nabla \mathbf{u}$ fast überall. Daraus folgt aber, daß $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u} = 0$.
   Die Abgeschlossenheit von M stellt sicher, daß M ein separabler Banachraum ist. Außerdem ist eine abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven Raumes wieder reflexiv.

2. $A_1\colon X \to X^*$ ist linear, stetig, koerziv, monoton und beschränkt, da der Operator A_1 dem Operator A aus Abschnitt 1.3 mit $s = 0$ und $p = 2$ entspricht. Demzufolge hat $A_1\colon M \to X^* \subseteq M^*$ diesselben Eigenschaften.

3. $A_2\colon X \to X^*$ ist stark stetig.

   a) $A_2\colon X \to X^*$:

$$
\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \quad &\le \quad \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}|\,dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \quad \Big(\int_\Omega (|\mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}|)^2\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\Big)^{\frac12} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \quad \left(\Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|^4\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^4\,dx\Big)^{\frac12}\right)^{\frac12} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} \\
&= \quad \|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} \\
&\le \quad c\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\varphi}\|_X,
\end{aligned}
$$

   denn $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)$ wegen $\frac14 \ge \frac1p - \frac1n = \frac16$. Aus der Abschätzung folgt $A_2\mathbf{u} \in X^*$ und damit $A_2\colon X \to X^*$. Daher gilt auch $A_2\colon M \to M^*$.

   b) A_2 ist stark stetig:
   $(\mathbf{u}_n)$ sei eine Folge mit $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ in X. Da $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)$, gilt $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$.
   Zu zeigen: $\|A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}\|_{X^*} = \sup\limits_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in X\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_X\le 1}} |\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \to 0$ für $n \to \infty$.
   Beweis durch Widerspruch.
   Annahme: $\exists\varepsilon_0 > 0$, $\exists\boldsymbol{\varphi}_n \in X$, $\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_X \le 1$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| \ge \varepsilon_0.$$

   Die Folge der $\boldsymbol{\varphi}_n$ ist beschränkt; daher gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{\varphi}_{n_k})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}$ in X, und damit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$. Für diese Teilfolge, im Folgenden mit $\boldsymbol{\varphi}_n$ bezeichnet, gilt

$$
\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &= \Big|\int_\Omega \mathbf{u}_n\nabla\mathbf{u}_n\boldsymbol{\varphi}_n - \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\boldsymbol{\varphi}_n\,dx\Big| \\
&= \Big|\int_\Omega (\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\nabla\mathbf{u}_n\boldsymbol{\varphi}_n + \mathbf{u}\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})(\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad + \mathbf{u}\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big| \\
&\le \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{L^4} \\
&\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} + \Big|\int_\Omega \mathbf{u}\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big| \\
&\le C_1\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} + C_2\|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\quad + \Big|\int_\Omega \mathbf{u}\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

da $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$, $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.
Damit folgt $A_2\mathbf{u}_n \to A_2\mathbf{u}$, d.h. A_2 ist stark stetig auf X und somit auch auf M sowie insbesondere pseudomonoton.

4. Bisher haben wir gezeigt, daß der Operator $A = A_1 + A_2$, $A\colon M \to M^*$, beschränkt und pseudomonoton ist. Er ist aber auch koerziv auf M:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle A_2\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \mathbf{u}_j \, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \mathbf{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) dx, \\
&\qquad \text{denn } \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) = \frac{1}{2} 2|\mathbf{u}| \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} -\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_j}, dx\,, \text{ denn } \mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) = X \\
&= -\int_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \operatorname{div}\mathbf{u}\, dx = 0 \text{ für } \mathbf{u} \in M.
\end{aligned}$$

Da A_1 koerziv ist, ist also insgesamt A koerziv auf M. (Die Koerzivität ist die einzige Eigenschaft, die nur auf M gilt. Zum Beweis der anderen Eigenschaften benötigen wir nicht, daß $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$.)
A erfüllt damit auf M alle Voraussetzungen von Satz 2.1.

5. $b \in X^* \subseteq M^*$, sofern $f \in L^2(\Omega)$, nach denselben Argumenten wie in Abschnitt 1.3 Behauptung 1.

Wir folgern

Lemma 2.4 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Dann gibt es zu einem beliebigen $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ ein $\mathbf{u} \in M = \{\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega), \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$, so daß $\mathbf{u}$ (2.4) im schwachen Sinne löst.*

Eine weitere Anwendung für den Satz von Brezis ist das Randwertproblem:

$$\begin{aligned}
-\Delta u + \alpha \sin(u) \sum_{i=1}^{3} D_i u &= f \qquad \text{auf } \Omega, \\
u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned}$$

mit einem offenen, beschränkten und glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha > 0$. Dieses Randwertproblem besitzt für alle $f \in L^2(\Omega)$ und kleine α eine Lösung im verallgemeinerten Sinn (vgl. Übungsblatt 8).

3 Maximal monotone Operatoren

3.1 Der Begriff der maximalen Monotonie

Die Theorie maximal monotoner Operatoren ist das Herzstück in der Theorie monotoner Operatoren, da es die Grundideen zur vollen Entfaltung bringt und sehr allgemein ist. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der keine echte monotone Erweiterung besitzt.

Beispiele:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton wachsend, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$
Eine solche Funktion ist maximal monoton.

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, aber unstetig, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$
f ist monoton, aber nicht maximal monoton. Es gibt nämlich eine Erweiterung die monoton ist, z.B.
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ [0,2] & \text{für } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
Allerdings müssen wir für die maximale Monotonie „bezahlen", denn wir müssen „mehrdeutige" Funktionen oder genauer Abbildungen zulassen.

Definition 3.1 *Sei $A : M \to 2^Y$ eine* Abbildung, *d.h. für alle $u \in M$ ist $Au \subseteq Y$, d.h. $Au \in 2^Y$. Dann ist*
$$D(A) = \{u \in M,\ Au \neq \emptyset\}$$

der effektive Definitionsbereich*, ferner*

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$$

der Wertebereich *und*

$$G(A) = \{(u,v) \in M \times Y, u \in D(A), v \in Au\}$$

der Graph *von A. Wir schreiben für $(u,v) \in G(A)$ einfacher $(u,v) \in A$.*

Bemerkungen:

1) A^{-1} existiert immer: $A^{-1}\colon Y \to 2^M$ ist definiert durch

$$A^{-1}(v) = \{u \in M\,, v \in Au\}\,.$$

Offensichtlich gilt $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$ und $(u,v) \in A \Leftrightarrow (v,u) \in A^{-1}$.

2) X, Y seien lineare Räume über $\mathbb{K}$ und $M \subseteq X$. Für gegebene Abbildungen $A, B\colon M \to 2^Y$ und für feste α, $\beta \in \mathbb{K}$ definieren wir die Linearkombination

$$(\alpha A + \beta B)u = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & u \in D(A) \cap D(B) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

3) Jede eindeutige Abbildung $A\colon M \to Y$ kann mit einer mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}\colon M \to 2^Y$ identifizert werden, indem wir

$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & u \in D(A) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Dann gilt

$$D(\bar{A}) = D(A) \qquad \text{und } R(\bar{A}) = R(A).$$

Im Folgenden verwenden wir immer diese Identifizierung und schreiben kürzer A statt $\bar{A}$.

Definition 3.2 *X sei ein reeller, reflexiver Banachraum, $M \subseteq X$ und $A\colon M \to 2^{X^*}$. Die Abbildung A heißt*

1) monoton $\Leftrightarrow$

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \geq 0 \qquad \forall (u,u^*), (v,v^*) \in A.$$

2) maximal monoton $\Leftrightarrow$ *A ist monoton, und aus $(u,u^*) \in M \times X^*$ sowie*

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v,v^*) \in A$$

folgt $(u,u^*) \in A$.

Bemerkung:

Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ wird als mehrdeutige Abbildung $A\colon X \to 2^{X^*}$ aufgefaßt.

1) Daher ist die Definiton der Monotonie in Defintion 1.1 mit der in Defintion 3.2 identisch.

2) In diesem Fall heißt A maximal monoton $\Leftrightarrow$ A ist monoton, und aus $(u,u^*) \in X \times X^*$ sowie

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in D(A)$$

folgt $u \in D(A)$ sowie $u^* = Au$.

3.2 Beispiele für maximal monotone Operatoren

a) Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend und stetig. Dann ist f maximal monoton.

Beweis: Sei $(u,u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und es gelte

$$(u^* - f(v))(u - v) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Zu zeigen: $u^* = f(u)$. ($u \in \mathbb{R}$ ist klar.)

1.Fall: $u > v$
$\Rightarrow u^* - f(v) \geq 0 \Leftrightarrow u^* \geq f(v)$. Sei insbesondere $v = u_n$, wobei für die Folge (u_n) gilt: $u_n \nearrow u$.

$$\Rightarrow u^* \geq f(u_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Stetigkeit von f impliziert $u^* \geq f(u)$.

2.Fall: $u < v$
$\Rightarrow u^* \leq f(v)$. Dies gilt insbesondere für $v = u_n$, wobei (u_n) eine Folge ist mit $u_n \searrow u$. Die Stetigkeit von f liefert $u^* \leq f(u)$.

Da die Ungleichung $(u^* - f(v))(u - v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$ gelten soll, folgt $u^* = f(u)$. $\square$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases},$$

d.h. f ist monoton wachsend, aber nicht stetig. Dann ist f nicht maximal monoton.

Beweis: Wir wählen $(u, u^*) = (\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es gilt

$$-\big(\frac{1}{2} - f(v)\big)v \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}, \text{ denn}$$

1. Fall: $v > 0$
$\Rightarrow -(\frac{1}{2} - (v+1))v = (v + \frac{1}{2})v \geq 0\,.$

2. Fall: $v \leq 0$
$\Rightarrow (v - \frac{1}{2})v \geq 0\,.$

Aus beiden Fällen folgt insgesamt $-(\frac{1}{2} - f(v))v \geq 0$, aber $\frac{1}{2} \neq f(0)$. □

b) Monotone Operatoren

Lemma 3.1 *X sei ein reflexiver Banachraum, $A : X \to X^*$ sei ein monotoner und hemistetiger Operator. Dann ist $A : X \to X^*$ maximal monoton.*

Beweis: Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$ und es gelte

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in X.$$

Wir setzen $v = u \pm tw$, $w \in X$ und $t > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \langle u^* - A(u \pm tw), \mp tw\rangle \geq 0 \quad \forall w \in X \\ \Rightarrow \quad & \mp t\langle u^* - A(u \pm tw), w\rangle \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} \langle u^* - A(u+tw), w\rangle \leq 0, \\ \langle u^* - A(u-tw), w\rangle \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0$

$$\langle u^* - Au, w\rangle = 0 \quad \forall w \in X \quad \Rightarrow u^* = Au.$$

□

Bemerkung:

Die inverse Abbildung $A^{-1}\colon X^* \to 2^X$ einer maximal monotonen Abbildung $A\colon X \to 2^{X^*}$ auf einem reflexiven Banachraum X ist wieder maximal monoton, denn

$$G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X : (u, u^*) \in G(A)\}$$

und $\langle u^*, u\rangle_X = \langle u, u^*\rangle_{X^*}$ für alle $(u, u^*) \in X \times X^*$, da X reflexiv ist.

c) Subgradienten

Subgradienten verallgemeinern den klassischen Begriff der Ableitung.

Definition 3.3 *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X. Ein Element $u^* \in X^*$ heißt* Subgradient *von f an der Stelle u genau dann, wenn $f(u) \neq \pm\infty$ und*

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u\rangle \qquad \forall v \in X\,.$$

Die Menge aller Subgradienten von f in u heißt Subdifferential $\partial f(u)$. *Falls kein Subgradient existiert, setzen wir $\partial f(u) = \emptyset$.*

Beispiel:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\partial f(u)$ die Menge aller Anstiege von Geraden, die durch $(u, f(u))$ gehen und vollständig unter dem Graphen von f liegen.

Sei z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -bx & \text{für } x \leq 0\,, \\ ax & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

$a,\, b \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $\partial f(0) = [-b, a]$. Denn wenn wir die Ungleichung $f(v) \geq u^* v$ betrachten, so bemerken wir:

1. Für $v > 0$ gilt: $av \geq u^* v \Longrightarrow a \geq u^*$.
2. Für $v < 0$ gilt: $-bv \geq u^* v \Longrightarrow -b \leq u^*$.

Also kann $f(v) \geq u^*$ für alle $v \in \mathbb{R}$ nur gelten, wenn $u^* \in [-b, a]$.

Falls $f'(u)$ und $\partial f(0)$ existieren, so ist $\partial f(u) = \{f'(u)\}$. Dieser Tatbestand gilt nicht nur für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sondern auch für reellwertige Funktionen auf Banachräumen.

Im Zusamenhang mit dem Begriff der maximalen Monotonie ist es besonders fruchtbar, konvexe Funktionen zu betrachten. Denn aus der reellen Analysis wissen wir, daß f' monoton wachsend ist, sofern $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und C^1.

Die letzten beiden Beobachtungen wollen wir nun genauer untersuchen.

Lemma 3.2 *Sei $f : X \to \mathbb{R}$, X ein reeller Banachraum. Dann gilt:*

1) Falls f konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $Df(u)$ im Punkt u besitzt, dann gilt:

$$\partial f(u) = \{Df(u)\}. \tag{3.1}$$

2) Umgekehrt, falls $\partial f(u)$ eindeutig und hemistetig ist, dann ist f Gâteaux–differenzierbar und (3.1) gilt für alle $u \in X$.

Beweis:

1. a) Wir setzen $\varphi(t) = f(u+th)$, $t \neq 0$. Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und φ ist konvex, denn

$$\begin{aligned} \varphi((1-\tau)t+\tau s) &= f((1+(1-\tau))u+(1-\tau)th+\tau sh) \\ &\overset{\text{f konvex}}{\leq} (1-\tau)f(u+th)+\tau f(u+sh) \\ &= (1-\tau)\varphi(t)+\tau\varphi(s) \end{aligned}$$

Da f Gâteaux–differenzierbar ist, existiert $\varphi'(0)$. Daher gilt

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$$

(vgl. z.B. [9, S. 165]). Setzen wir die Definition von φ und der Gâteaux–Differenzierbarkeit ein, ergibt sich

$$f(u+th) - f(u) \geq \langle Df(u), h\rangle \qquad \forall t \neq 0,$$

und nach Definition des Subgradienten also $Df(u) \in \partial f(u)$.

b) Sei $u^* \in \partial f(u)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(u+th) - f(u) \geq \langle u^*, th\rangle \qquad \forall h \in X,\ t > 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{f(u+th)-f(u)}{t} \geq \langle u^*, h\rangle \qquad \forall h \in X. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $t \to 0$ folgt

$$\langle Df(u), h\rangle \geq \langle u^*, h\rangle,$$

da f Gâteaux–differenzierbar ist. Wir ersetzen h durch $-h$, dann folgt insgesamt $\langle Df(u), h\rangle = \langle u^*, h\rangle$, d.h. wir haben gezeigt $Df(u) = u^*$.
Zusammen mit a) folgt daher $\partial f(u) = \{Df(u)\}$.

2. Sei $t > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(u+th) - f(u) &\geq \langle \partial f(u), th\rangle \qquad \text{und} \\ f(u) - f(u+th) &\geq -\langle \partial f(u+th), th\rangle. \end{aligned}$$

Demzufolge

$$\begin{aligned} \langle \partial f(u), h\rangle &\leq \liminf_{t\to 0} \frac{f(u+th)-f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t\to 0} \frac{f(u+th)-f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t\to 0} \langle \partial f(u+th), h\rangle \\ &= \langle \partial f(u), h\rangle, \end{aligned}$$

da $\partial f(u)$ hemistetig ist. Also sind alle Ungleichheitszeichen Gleichheitszeichen. Daher existiert $Df(u)$ und (3.1) gilt. □

Lemma 3.3 *Sei $f : X \to (-\infty, \infty]$ ein Funktional auf einem Banachraum X mit $f \not\equiv \infty$. Dann gilt: u ist eine Lösung des Minimierungsproblems*

$$f(u) = \min_{v\in X} f(v), \qquad u \in X\,,$$

genau dann, wenn $0 \in \partial f(u)$.

Beweis: „$\Leftarrow$“
Sei $0 \in \partial f(u)$. Nach Definition des Subgradienten gilt für alle $v \in X$

$$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v-u\rangle = 0,$$

da wir für $u^* = 0$ einsetzen können.
„$\Rightarrow$“
Es gelte $f(u) \leq f(v)$ für alle $v \in X$. Dann

$$f(v) - f(u) \geq 0 = \langle 0, v-u\rangle \quad \forall v \in X,$$

d.h. $0 \in \partial f(u)$. □

Beispiel:

X sei ein Banachraum und $C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex mit der *Indikatorfunktion*:

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & u \in C, \\ \infty & u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Unter einem *Trägerfunktional* von C im Punkt u verstehen wir ein Funktional $u^* \in X^*$, so daß

$$\langle u^*, u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

• Falls $u \in \operatorname{int} C$, dann ist $u^* = 0$. Denn zu $u \in \operatorname{int} C$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(u) \subseteq C$. Wir haben also für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$, daß $v := u + \frac{r}{2} w \in C$. Die obige Ungleichung schreibt sich dann

$$0 \leq \langle u^*, u - (u + \frac{r}{2} w) \rangle = \frac{r}{2} \langle u^*, w \rangle \,.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten $0 \leq -\frac{r}{2} \langle u^*, w \rangle$. Insgesamt folgt daher $0 = \langle u^*, w \rangle$ für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$ und deshalb gilt $u^* = 0$.

• Im Allgemeinen beschreibt die Gleichung

$$\langle u^*, u - v \rangle = 0 \qquad \forall v \in X$$

eine abgeschlossene Hyperebene H in X durch den Punkt u, d.h. obige Bedingung besagt, daß C auf einer Seite der Hyperebene H liegt.

• Gemäß Definition 3.3 folgt

$$\partial \chi(u) = \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & u \in C \\ \emptyset & u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Die Ungleichung $\chi(v) \geq \chi(u) + \langle u^*, v - u \rangle$ wird, falls $u \in C$, nämlich zu

1. $0 \leq \langle u^*, u - v \rangle$, falls $v \in C$,
2. $\infty \leq \langle u^*, u - v \rangle$, falls $v \in X \setminus C$.

Demzufolge ist nach Definition u^* ein Trägerfunktional. Falls dagegen $u \in X \setminus C$, dann ist $\chi(u) = \infty$ und damit $\partial f(u) = \emptyset$ nach Definition 3.3.

• Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{int} C \quad &\Rightarrow \quad \partial \chi(u) = \{0\} \,, \\ u \in C \quad &\Rightarrow \quad 0 \in \partial \chi(u) \qquad \text{(siehe oben)}, \end{aligned}$$

denn die Ungleichung $0 \leq \langle u^*, u - v \rangle$ für alle $v \in X$ ist für $u^* \equiv 0$ erfüllt.

Lemma 3.4 $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ *ist maximal monoton.*

Beweis:

1. $\partial\chi$ ist monoton:
   Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial\chi$, dann gilt
   $$\langle u^*, u - w\rangle \geq 0 \qquad \forall w \in C,$$
   $$\langle v^*, v - w\rangle \geq 0 \qquad \forall w \in C.$$
   und somit
   $$\langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^*, u - v\rangle + \langle v^*, v - u\rangle \geq 0\,,$$
   d.h. $\partial\chi$ ist monoton.

2. $\partial\chi$ ist maximal monoton:
   Sei $(u, u^*) \in C \times X^*$, und es gelte
   $$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in \partial\chi,\ \text{d.h. für } \forall v \in C,\ \forall v^* \in \partial\chi(v).$$
   Nun ist aber aber $0 \in \partial\chi(v)$. Für $v^* = 0$ schreibt sich die Ungleichung
   $$\langle u^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad u^* \in \partial\chi(u).$$
   □

Die Frage ist, ob $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ ebenfalls maximal monoton ist. Das folgt aber aus dem folgendem Satz:

Satz 3.1 (Rockafellar, 1966) *Sei* $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ *konvex und unterhalbstetig auf dem reflexiven Banachraum* X *und sei* $f \not\equiv +\infty$. *Dann ist* $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ *maximal monoton.*

Beweis:

1. ∂f ist monoton.
   Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial f$, d.h. $u^* \in \partial f(u)$, $v^* \in \partial f(v)$. Dann gilt nach Definition des Subdifferentials
   $$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v - u\rangle \qquad \forall v \in X\,,$$
   $$f(u) - f(v) \geq \langle v^*, u - v\rangle \qquad \forall u \in X\,.$$
   Eine Addition beider Ungleichungen ergibt
   $$0 \geq \langle u^* - v^*, v - u\rangle \Leftrightarrow 0 \leq \langle u^* - v^*, u - v\rangle.$$

2. ∂f ist maximal monoton.
   Sei $(u_0, u_0^*) \in X \times X^*$ so, daß

$$\langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle \geq 0 \qquad \forall (u, u^*) \in \partial f. \tag{3.2}$$

   Zu zeigen ist jetzt, daß daraus $u_0^* \in \partial f(u_0)$ folgt, denn dann ist ∂f maximal monoton. Um dies zu beweisen benötigen wir

Lemma 3.5 *Es existiert ein strikt monotoner Operator $J\colon X \to X^*$, so daß $R(J + \partial f) = X^*$.*

„Beweis“:
Der Beweis des Lemmas benutzt tiefe Zusammenhänge zwischen Konvexitätseigenschaften von X und Glattheitseigenschaften der Norm auf X. Unter anderen benötigen wir für den Beweis, daß die Abbildung $u \mapsto \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ in $X \setminus \{0\}$ Fréchet–differenzierbar ist. Dies ist nicht selbstverständlich. Zum Beispiel ist die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^2$ nicht überall differenzierbar. Das sieht man leicht, wenn man die Formel $\|z\|_\infty = \max(|x|, |y|) = \frac{1}{2}(x + y + |y - x|)$ für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ verwendet. Der Gradient der Funktion $z \mapsto \|z\|_\infty$ schreibt sich dann nämlich $\frac{1}{2}(\frac{x}{|x|}(1 + \frac{|y|-|x|}{||y|-|x||}), \frac{y}{|y|}(1 + \frac{|y|-|x|}{||y|-|x||}))$. In den Punkten $(0, 0)$, $(|y|, |y|)$ und $(-|y|, |y|)$ existiert die Ableitung nicht.
Der genaue Beweis des Lemmas würde den Rahmen der Vorlesung sprengen, deshalb beschreiben wir im Folgenden nur das formale Vorgehen. Ein genauerer Beweis findet sich in [16, S. 397].

Betrachte das Minimierungsproblem

$$\inf_{u \in X} \varphi(u) = \beta$$

mit $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + f(u) - \langle u^*, u\rangle$, wobei $u^* \in X^*$ beliebig gewählt ist. Dann ist
$\partial\varphi(u) = J(u) + \partial f(u) - u^*$ mit $J(u) = (\frac{1}{2}\|u\|_X^2)'$ (Fréchet–Ableitung). (In diesem Schritt wird eine Summenregel für das Subdifferential angewandt, die wir nicht beweisen wollen. Der Beweis findet sich in [16, S. 389].)

φ hat folgende Eigenschaften:

a) $\varphi(u)$ ist koerziv, d.h. $\varphi(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$. Diesen Beweis lassen wir ebenfalls aus, Genaueres siehe [16, S. 382].

b) φ ist unterhalbstetig und konvex, da es die Summme von Funktionalen mit diesen Eigenschaften ist.

Aus [6, Beispiel, S. 120] folgt, daß das Minimierungsproblem eine Lösung besitzt. Nach Lemma 3.3 ist daher $0 \in \partial f(u)$. Somit gilt

$u^* = J(u) + \partial f(u)$, d.h. $R(J + \partial f) = X^*$, da u^* beliebig gewählt war. Außerdem ist J strikt monoton (Beweis siehe [16, s. 247]). Ende des „Beweises".

Wir fahren nun fort mit dem Beweis, daß ∂f maximal monoton ist. Dazu benutzen wir den Operator J aus dem Lemma. Wir wissen, daß $J(u_0) + u_0^* \in X^*$ ist. Da $R(J + \partial f) = X^*$ gilt, erhalten wir

$$\exists (u, u^*) \in \partial f : \quad J(u) + u^* = J(u_0) + u_0^* \quad \Leftrightarrow \quad u_0^* - u^* = J(u) - J(u_0). \tag{3.3}$$

(3.2) liefert

$$\begin{aligned} \langle J(u) - J(u_0), u_0 - u\rangle &= \langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle \geq 0 \\ \Rightarrow \langle J(u_0) - J(u), u_0 - u\rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

J ist aber strikt monoton, d.h. es muß gelten $\langle J(u_0) - J(u), u_0 - u\rangle > 0$ für $u_0 \neq u$. Deshalb folgt $u = u_0$, und (3.3) impliziert, daß

$$u^* = u_0^* \in \partial f(u) = \partial f(u_0),$$

d.h. ∂f ist maximal monoton. □

Satz 3.1 verwenden wir nun, um unsere Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi \colon X \to 2^{X^*}$ zu beantworten.

Lemma 3.6 $\partial\chi \colon X \to 2^{X^*}$ *ist maximal monoton.*

Beweis:

1. $\chi \colon X \to (-\infty, \infty]$.
2. χ ist konvex, denn
   a) $\chi((1-t)u+tv) = 0 = 0+0 = (1-t)\chi(u)+t\chi(v)$, da $(1-t)u+tv \in C$, falls u, $v \in C$, denn C ist nach Voraussetzung konvex.
   b) $\chi((1-t)u + tv) \leq \infty = (1-t)\chi(u) + t\chi(v)$, falls $u \notin C$ und/oder $v \notin C$.
3. χ ist unterhalbstetig.
   Die Unterhalbstetigkeit ist nämlich äquivalent zur Bedingung, daß $\chi^{-1}((-\infty, r])$ für alle $r \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$\chi^{-1}((-\infty, r]) = \{u, \chi(u) \leq r\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } r < 0, \\ C, & \text{falls } r \geq 0. \end{cases}$$

   $\emptyset$ ist abgeschlossen und C ebenfalls nach Voraussetzung; also ist χ unterhalbstetig.

4. χ erfüllt die Vorraussetzungen von Satz 3.1. Daher ist $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.

$\square$

d) Zeitableitungen

In der modernen Mathematik werden bei der Untersuchung von parabolischen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen die Ort– und Zeitvariablen unterschiedlich behandelt. Was heißt das?

In Gleichungen dieser Art ist die Unbekannte eine Funktion $u \in X$, wobei X ein Funktionenraum ist, mit $u\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$. Nun kann man u mit einer Abbildung $\mathbf{u}\colon I \to X$, assoziieren, die definiert ist durch $[\mathbf{u}(t)](x) := u(x,t)$. Somit können wir also $\mathbf{u}(t)\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(t,x)$, als ein Element eines Funktionenraumes interpretieren. Damit haben wir zwei Sichtweisen für u: Einmal kann man u als Funktion in Ort und Zeit betrachten, andererseits als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum. Im Weiteren werden wir die zweite Sichtweise benutzen.

Sei z.B. $u \in L^p(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\infty > \|u\|_{L^p(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} |u(t,x)|^p \, dz = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |u(t,x)|^p \, dx \, dt = \int\limits_0^T \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \, dt.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt daher, daß für fast alle $t \in (0,T]$

$$\int\limits_\Omega |u(t,x)|^p \, dx < \infty \,,$$

d.h. $\mathbf{u}(t) \in L^p(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in L^p(0,T,L^p(\Omega))$ mit $\|\mathbf{u}\|^p_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} = \int\limits_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \, dt$.

Die Definition von verallgemeinerten Zeitableitungen kann man ähnlich wie die Definition von verallgemeinerten Ableitungen abstrakt aufbauen (siehe z.B. [8, Kapitel 4]). Hier beschränken wir uns auf einen Spezialfall.

Sei V ein Banachraum und H ein Hilbertraum mit $V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^*$. Außerdem sei V dicht in H, d.h. $\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H$. Ein solches Tripel (V,H,V^*) heißt *Gelfand–Tripel.* Zum Beispiel ist $(W^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega))$ ein Gelfand–Tripel.

Wenn V Teil eines Gelfand–Tripels ist, dann gilt $\langle v,w\rangle_V = \langle w,v\rangle_V$ für alle v, $w \in V$, denn $v \in V \subseteq H \cong H^*$. Daher läßt sich v, ebenso wie w, als ein Funktional auf H auffassen. Damit gilt $\langle v,w\rangle = (v,w)_H = (w,v)_H = \langle w,v\rangle$.

Definition 3.4 *Sei* $u \in L^p(0,T,V), 1 < p < \infty$ *und* (V, H, V^*) *ein Gelfand–Tripel. Dann definieren wir die* verallgemeinerte Zeitableitung $\frac{du}{dt}$ *als ein Element des Raumes* $L^{p'}(0,T,V^*)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, *für das gilt:*

$$\int_0^T \langle \frac{du}{dt}(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\,dt \quad \forall v \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T;\mathbb{R})\,.$$

Bemerkung:

Im allgemeinen ist $\frac{du}{dt}$ nicht mit der distributionellen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ identisch. Die distributionelle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist nämlich auf Q_T definiert durch

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi\,dx\,dt = -\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Beide Ableitungen stimmen jedoch überein, falls $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in V liegt.

Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} W &= \left\{ u \in L^p(I,V)\,;\ \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I,V^*) \right\}, \\ \|u\|_W &= \|u\|_{L^p(I,V)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p'}(I,V^*)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

W ist ein Banachraum. Dieser ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$ und V reflexiv ist.

Lemma 3.7 *Es gilt*

(1) $W \hookrightarrow C(I,H)$.

(2) $\int_s^t \langle \frac{du}{dt}(t)\,,\ u(t)\rangle_V\,dt = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 \qquad \forall s,t \in I\,,\ \forall\, u \in W.$

Beweis:

1. Der Beweis ist technisch und benutzt viele Approximationsargumente. Er findet sich z.B. in [8, S. 147] oder in [14, S. 422].

2. Das Resultat ist das Analogon zur folgenden Rechnung:

$$\int_s^t u'(t)u(t)\,dt = \int_s^t \frac{1}{2}(u^2(t))'\,dt = \frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2$$

für $u\colon I \to \mathbb{R}$ (siehe z.B. [8, S. 147] oder [14, S. 422]). $\square$

Lemma 3.8 *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel, und sei der Raum W definiert wie in (3.4). Ferner sei $L\colon D(L) \subseteq L^p(I,V) \to L^{p'}(I,V^*)$, $I = (0,T)$ definiert durch*

$$Lu = \frac{du}{dt},$$
$$D(L) = \{u \in W\,,\ u(0) = 0\}\,.$$

Dann ist L ein linearer maximal monotoner Operator auf $D(L)$.

Beweis:

1. L ist nach Definition linear.

2. L ist monoton.
   Seien u, $v \in D(L)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Lu - Lv, u - v\rangle_{L^p(I,V)} &= \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_{L^p(I,V)} \\
&= \int_0^T \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_V \, dt \\
&\overset{\text{Lemma 3.7}}{=} \frac{1}{2}\|(u-v)(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u-v)(0)\|_H^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

   da u, $v \in D(L)$.

3. L ist maximal monoton.
   Sei $v \in L^p(I,V)$, $w \in L^{p'}(I,V^*)$, und es gelte

$$\langle w - Lu, v - u\rangle_{L^p(I,V)} = \int_0^T \langle w - Lu, v - u\rangle_V \, dt \geq 0 \qquad \forall u \in D(L).$$

   Zu zeigen: $v \in D(L)$ und $w = \frac{dv}{dt}$.
   Wir wählen dazu $u = \varphi(t)z \in L^p(I,V)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R})$, $z \in V$. Es gilt $u(0) = 0$ und $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)z \in L^{p'}(I,V^*)$, da $\varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R})$, und damit $u \in D(L)$. Außerdem erhalten wir

$$\langle Lu, u\rangle = \int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u\Big\rangle \, dt = \frac{1}{2}(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2) = 0,$$

   da $\varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R})$. Wenn wir u in die obige Ungleichung einsetzen und das letzte Resultat benutzen, erhalten wir

$$0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle w, \varphi z\rangle_V - \langle \varphi' z, v\rangle_V \, dt + 0.$$

Nun gilt aber $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall v,\, w \in V$.

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle \varphi' v + \varphi w, z\rangle_V \, dt.$$

z war aber beliebig gewählt, d.h. die Ungleichung gilt auch für $-z$ und für λz, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig groß werden kann, und $\langle w, v\rangle$ ist unabhängig von z. Damit die Ungleichung für alle z richtig ist, muß daher gelten

$$\int_0^T \varphi\langle w, z\rangle + \varphi'(v, z)_H \, dt = 0 \qquad \forall z \in v\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T; \mathbb{R}).$$

$\Rightarrow w = \frac{dv}{dt} \Rightarrow w \in L^{p'}(I, V^*)$, d.h. $v \in W$.
Zu zeigen bleibt, daß $v \in D(L)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $u \in D(L)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Lv - Lu, v - u\rangle_{L^p(I,V)} &= \int_0^T \left\langle \frac{d(v-u)}{dt}, v - u \right\rangle_V dt \\ &= \frac{1}{2}(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2, \end{aligned}$$

da $v \in W$. Wir wählen nun eine Folge $(a_n) \in V$ mit $a_n T \to v(T)$ in H für $n \to \infty$. Wir definieren $u_n(t) = a_n t$, $u_n \in D(L)$ und setzen u_n in obige Ungleichung ein, dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}(\|v(T) - u_n(T)\|_H^2 - \|v(0) - u_n(0)\|_H^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|v(T) - a_n T\|_H^2 - \|v(0)\|_H^2)\,. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus

$$0 \leq -\frac{1}{2}\|v(0)\|_H^2 \qquad \Rightarrow \qquad v(0) = 0$$

und somit $v \in D(L)$. □

e) Die Dualitätsabbildung

Definition 3.5 *Sei X ein reeller reflexiver Banachraum und $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2$. Dann ist die* Dualitätsabbildung *$J : X \to 2^{X^*}$ definiert durch*

$$J(u) = \partial\varphi(u)\,.$$

Beispiel:
Sei H ein Hilbertraum und J die Dualitätsabbildung $J\colon H \to 2^{H^*}$. Dann bildet J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon H \to H^*$ aufgefaßt werden. Weiterhin ist J charakterisiert durch $\langle J(u), v\rangle_H = (u,v)_H$.

Beweis: Nach Lemma 3.2 ist $\partial\varphi(u)$ einelementig, falls φ konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $D\varphi(u)$ besitzt.

1. φ ist konvex:
   Sei $t \in [0,1]$. Dann gilt für $u,\ v \in H$
   $$\begin{aligned} \varphi(tu+(1-t)v) &= \frac{1}{2}\|tu+(1-t)v\|_X^2 \\ &\le \frac{1}{2}(t\|u\|_X + (1-t)\|v\|_X)^2 \\ &\le \frac{1}{2}t^2\|u\|_X^2 + \frac{1}{2}(1-t)^2\|v\|_X^2 + t(1-t)\Big(\frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \frac{1}{2}\|v\|_X^2\Big) \\ &\le \frac{1}{2}t\|u\|_X^2 + \frac{1}{2}(1-t)\|v\|_X^2 = t\varphi(u) + (1-t)\varphi v, \end{aligned}$$
   da $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.
2. φ besitzt eine Gâteaux–Ableitung:
   Sei $v \in H$, dann erhalten wir
   $$\begin{aligned} \partial_t\varphi(u+tv) &= \partial_t\Big(\frac{1}{2}\|u+tv\|_H^2\Big) \\ &= \partial_t\Big(\frac{1}{2}(u,u)_H + \frac{1}{2}t(v,u)_H + \frac{1}{2}t(u,v)_H + \frac{1}{2}t^2(v,v)_H\Big) \\ &\overset{H \text{ reell}}{=} \partial_t\Big(\frac{1}{2}(u,u)_H + t(u,v)_H + \frac{1}{2}t^2(v,v)_H\Big) \\ &= (u,v)_H + t(v,v)_H. \end{aligned}$$
   Damit folgt, daß $\partial_t\varphi(u+tv)|_{t=0} = (u,v)_H$ und die Gâteaux–Ableitung existiert.

Die Charakterisierung von J folgt aus der Gleichungskette
$$\langle J(u), v\rangle_H = \langle\partial\varphi(u), v\rangle_H = \langle D\varphi(u), v\rangle_H = \partial_t(\varphi(u+tv)|_{t=0} = (u,v)_H.$$

(Vgl. Übungsaufgabe 1, Übungsblatt 9.) □

Lemma 3.9 *Sei X ein reller, reflexiver Banachraum. Dann ist die Dualitätsabbildung $J\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis: Nach Satz 3.1 ist J maximal monoton, wenn $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig sowie $\varphi \not\equiv \infty$.

1. $\varphi \not\equiv \infty$ und $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty]$ ist klar.
2. Die Konvexität von φ wurde bereits im obigen Beweis gezeigt.
3. φ ist unterhalb stetig, da φ stetig ist.

(Vgl. Übungsaufgabe 2, Übungsblatt 9.) $\square$

3.3 Der Satz von Browder

Ähnlich wie in den vorangegangenen Sektionen wollen wir die Lösbarkeit von

$$b \in Au + Bu\,, \qquad u \in C\,, \tag{3.5}$$

untersuchen, wobei $A\colon C \subseteq X \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und $B\colon C \to X^*$ pseudomonoton.

(3.5) bedeutet, wenn A, B mehrdeutige Abbildung sind, daß wir für gegebenes $b \in X^*$ ein $u \in C$ suchen, so daß

$$b = v + w\,, \qquad \text{wobei } v \in Au\,,\ w \in Bu.$$

Wenn A und B Operatoren sind, dann ist (3.5) äquivalent zu

$$b = Au + Bu, \qquad u \in C.$$

Satz 3.2 (Browder, 1968) *Sei $C \subseteq X$ eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X. Sei $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton und $B\colon C \to X^*$ pseudomonoton, beschränkt und demistetig. Falls C unbeschränkt ist, sei B koerziv bezüglich A und eines festen Elements $b \in X^*$, d.h.*

$$\exists u_0 \in C, \exists r > 0\ :\ \forall u \in C = D(A)\ \text{mit}\ \|u\| > r\ :$$
$$\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle$$

Dann existiert für dieses $b \in X^*$ eine Lösung $u \in C$ des Problems (3.5).

Beweis: Die Strategie, die diesem Beweis zugrunde liegt, ist folgende:

1. Galerkin–Approximation; aber diesesmal führen wir sie nicht mit Gleichungen sondern mit Ungleichungen durch.

2. Lösbarkeit der Galerkin–Ungleichungen; hierzu verwenden wir ein Abschneide–Argument.
3. A priori–Schranken für die Lösung der Galerkin–Ungleichungen; diese folgen aus der Koerzivität von B.
4. Konvergenz der Galerkin–Methode; diese basiert auf der Pseudomonotonie von B.

Da $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und $C \neq \emptyset$, ist der Graph von A ist nicht leer. (Denn: Angenommen er ist leer, dann ist die Bedingung

$$\langle 0 - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A$$

für $(u^*, u) = (0, u) \in C \times X^*$ keine wirkliche Bedingung, da der Graph von A leer ist; also gilt sie. Daraus folgt $(u, 0) \in A$, da A maximal monoton ist. Also existiert $(u_0, u_0^*) \in A$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.)
O.E.d.A. sei $u_0 = 0$ und $u_0^* = 0$, d.h.$(0, 0) \in A$. Ansonsten gehen wir vom Problem

$$b \in Au + Bu, \qquad\qquad u \in C\,,$$

über zu

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v, \qquad\qquad v \in C - u_0,$$

wobei wir $\bar{A}v = A(v + u_0)$ und $\bar{B}v = B(v + u_0) - u_0^*$ setzen. Damit erüllen $\bar{A}$, $\bar{B}$ auch die Voraussetzungen des Satzes.

1) Äquivalente Variationsungleichung
Wir suchen ein $u \in C$ mit:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle_X \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A. \tag{3.6}$$

Dieses Problem ist äquivalent zu unserem ursprünglichen Problem (3.5). Wenn nämlich $u \in C$ die Ungleichung löst, dann folgt aus der maximalen Monotonie von A, daß
$b - Bu \in Au \Leftrightarrow b \in Au + Bu$.
Falls umgekehrt u eine Lösung von (3.5) ist, dann ist $b - Bu \in Au$ und die Ungleichung gilt wegen der Monotonie von A.

2) A priori–Schranke
Sei $u \in C$ eine Lösung (3.6) und $(0, 0) \in A$. Dann gilt

$$\langle b - Bu, u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Bu - b, u\rangle \leq 0.$$

Andererseits ist B koerziv bezüglich A und b mit $u_0 = 0$. Daher gibt es ein r mit $\langle Bu - b, u\rangle > 0$ für alle $\|u\| > r$. Diese und die obige Ungleichung liefern $\|u\| \leq r$, falls $u \in C$ eine Lösung von (3.6) ist.

3) Galerkin–Ungleichung
Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller endlichdimensionalen linearen Unterräume Y von X.
Wir wählen ein festes $Y \in \mathcal{L}$. Anstelle von (3.6) betrachten wir das approximative Problem: Wir suchen $u_Y \in C \cap Y$, daß die Ungleichung

$$\langle b - Bu_Y - v^* \, , \; u_Y - v \rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \qquad \text{mit } v \in C \cap Y \tag{3.7}$$

löst. Beachte in diesem Zusammenhang, daß aus $Y \subseteq X$ die Relation $X^* \subseteq Y^*$ folgt. Dies ist so zu verstehen, daß für $v^* \in X^*$ die Einschränkung auf $Y \subseteq X$ sofort ein Element aus Y^* liefert, d.h. die Dualitätsprodukte auf beiden Räumen werden miteinander identifiziert, und es gilt $\langle v^*, v \rangle_Y := \langle v^*, v \rangle_X$ für alle $v \in Y$.

4) Lösung von (3.7)

a) Lösung des abgeschnittenen Problems
Sei

$$K_R = \{ v \in C \cap Y : \|v\|_X \leq R \} \, ,$$
$$G_R = \{ (v, v^*) \in A \, , \; v \in K_R \} \, .$$

Wir approximieren (3.7) durch das abgeschnittene Problem: Suche $u_R \in K_R$:

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v \rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in G_R. \tag{3.8}$$

Auf das abgeschnittene Problem wollen wir Satz 2.2, Teil A, anwenden. Dazu setzen wir

1. $K = K_R$
K ist kompakt, konvex und $K_R \subseteq Y$, $\dim Y < \infty$.
2. $M = G_R$
A ist monoton, da A maximal monoton ist. Damit ist auch M monoton.
3. $T \colon K \to X^* : \; u \mapsto b - Bu$
T ist stetig, da B demistetig ist, d.h. aus $u_n \to u$ folgt $Bu_n \rightharpoonup Bu$. Wir betrachten aber B eingeschränkt auf Y, d.h. $B \colon Y \to X^* \subseteq Y^*$ mit $\dim Y^* < \infty$. In endlichdimensionalen Räumen impliziert schwache starke Konvergenz, da man den endlichdimensionalen Raum nach Basiswahl mit $\mathbb{K}^n$ identifizieren kann, und damit aus der schwachen Konvergenz die komponentenweise Konvergenz folgt. Also gilt in unserem Fall $Bu_n \to Bu$. Daher ist T stetig.

Nach Satz 2.2, Teil A, hat (3.8) demnach eine Lösung $u_R \in K_R$.

b) Lösung der Galerkin–Ungleichung (3.7)
Wir setzen

$$\mathcal{S}_R = \{ u_R \in K_R, \; u_R \text{ ist eine Lösung von } (3.8) \},$$

d.h. $\mathcal{S}_R \subseteq K_R$ für alle $R > 0$. Aus 2) folgt:

$$\|u_R\| \leq r\,, \qquad \text{wobei } r \text{ unabhängig von } R \text{ und } Y \in \mathcal{L}.$$

$\mathcal{S}_R$ hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathcal{S}_R$ liegt in der kompakten Menge $K_R = \{u \in C \cap Y,\ \|u\| \leq R\}$.
2. $\mathcal{S}_R$ ist abgeschlossen, da B demistetig ist.
3. $\mathcal{S}_{R'} \subseteq \mathcal{S}_R$ für alle R', R mit $R' \geq R \geq r$, da für $R' \geq R \geq r$ gilt: $G_R \subseteq G_{R'}$.

Aus der Charakterisierung kompakter Mengen (siehe nach (3.9)) folgt

$$\exists u_Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{R_n} \qquad \text{mit } R_n \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Hierbei gilt $\|u_Y\| \leq r$. Außerdem ist u_Y eine Lösung von (3.7), denn für $(v, v^*) \in A$ gilt: Es existiert ein R_{n_0}, so daß $\|v\| \leq R_{n_0}$. Damit ist u_Y eine Lösung von (3.8) für R_{n_0}, d.h aber, da v beliebig gewählt war,

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A.$$

5) Konvergenz der Galerkin-Lösung u_Y

Wir wollen erreichen, daß u_Y „$\to$“ u in einem gewissem Sinne, wobei u eine Lösung von (3.6) ist. Hierbei tritt das Problem auf, daß Pseudomonotonie nur über (abzählbare) Folgen definiert ist. $\mathcal{L}$ ist aber überabzählbar. Also ist eine weitere Approximation nötig:

a) Endliches Durchschnittsprinzip

Seien $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) \in C \times X^*\,,\ u_Y \text{ Lösung von (3.7) mit } Y \supseteq Z\}$$

Wir wollen zeigen:Es gibt $(u, u^*) \in \bigcap_{Z\in\mathcal{L}} \overline{M}_Z^w$, wobei $\overline{M}_Z^w$ der Abschluß von M_Z in $X \times X^*$ bezüglich der schwachen Topologie sei. Dieses u wird die gesuchte Lösung sein.

Wir beweisen nun die Existenz eines solchen Paare (u, u^*).

Da $\|u_Y\| \leq r$ für alle $Y \in \mathcal{L}$ und $B\colon X \to X^*$ beschränkt und daher $B(B_r)$ beschränkt ist, gibt es einen abgeschlossenen Ball $K \subseteq X \times X^*$, so daß

$$\bigcup_{Z\in\mathcal{L}} M_Z \subseteq K.$$

Da X reflexiv ist, sind es auch X^* und $X \times X^*$. Da K stark abgeschlossen und konvex ist, ist es auch schwach abgeschlossen (vgl. [2, Satz 5.10, S. 166]). Daher folgt insgesamt, daß K schwach kompakt ist, denn K ist genau dann schwach kompakt, wenn jede Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt (vgl. [2, Satz 5.7, S. 162]). Nun ist aber für alle $Z \in \mathcal{L}$ die Menge $\overline{M}_Z^w$ schwach abgeschlossen und $\overline{M}_Z^w \subseteq K$. Demzufolge ist $\overline{M}_Z^w$ schwach kompakt, und

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w \subseteq K.$$

Seien nun $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen $S = \operatorname{span}\{Y, Z\}$ und erhalten $M_Y \cap M_Z \supseteq M_S$. Denn sei $(u_S, Bu_S) \in M_S$. Dann ist u_S eine Lösung von (3.7) in einem Raum $U \supseteq S = \operatorname{span}\{Y, Z\} \supseteq Y$ und $U \supseteq S \supseteq Z$. Das bedeutet aber $(u_S, Bu_S) \in M_Z \cap M_Y$. Wiederholen wir diesen Vorgang endlich oft, erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{N} \overline{M}_{Y_i}^w \neq \emptyset \qquad \forall N\,,\ \forall Y_i \in \mathcal{L}.$$

Aus einer allgemeineren Charakterisierung kompakter Mengen folgt

$$\exists (u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w. \tag{3.9}$$

(Die allgemeinere Charakterisierung lautet: M ist genau dann kompakt, wenn gilt: Für alle A_i, die in M abgeschlossen sind und für die $\bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i \neq \emptyset$ folgt, daß $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Der Beweis funktioniert analog zu Übungsaufgabe 1, Übungsblatt 4 oder [13, S. 756].)

b) Konstruktion eines speziellen Paares $(v_0, v_0^*) \in A$
Behauptung: $\exists (v_0, v_0^*) \in A$:

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle_X \leq 0. \tag{3.10}$$

Beweis durch Widerspruch:
Annahme: $\forall (v, v^*) \in A$ gilt

$$\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle_X > 0.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $b - u^* \in Au$. Wir können nun speziell $v = u$ und $v^* = b - u^*$ wählen und erhalten $\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle_X = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt die Behauptung.

c) Spezielle Approximation

Lemma 3.10 *Sei $M \subseteq X$ reflexiver Banachraum, M beschränkt. Dann gilt:*

$$\forall u \in \overline{M}^w\ \exists u_n \in M : \quad u_n \rightharpoonup u.$$

Beweis: Der Beweis benutzt einige Tatsachen aus der Theorie topologischer Räume. Eine Anleitung zum Beweis findet sich in [15, S. 911]. □

Wir wählen nun $Y \in \mathcal{L}$ fest: $\overline{M_Y}^w$ ist schwach abgeschlossen in $X \times X^*$, und $(u, u^*) \in \overline{M_Y}^w$ wegen (3.9). Nach obigem Lemma gibt es $(u_n, u_n^*) \in M_Y$: $(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ in $X \times X^*$. Nach Konstruktion von M_Y ist $u_n^* = Bu_n$ und insbesondere $u_n \in C$. Die Menge C ist abgeschlossen, konvex, also schwach abgeschlossen, daher ist auch $u \in C$. Demnach gibt es eine Folge (u_n) in C, so daß

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X\,, \\ Bu_n &\rightharpoonup u^* && \text{in } X^* \end{aligned} \qquad \text{für } n \to \infty \tag{3.11}$$

und

$$\langle b - Bu_n - v^*\,,\ u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C, \tag{3.12}$$

denn die u_n sind in M_Y, und Elemente von M_Y sind Lösungen von (3.7).

d) Pseudomonotonie von B
Wir wollen zeigen, daß gilt

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \langle v^* - b, v - u\rangle \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C,$$

denn damit haben wir gezeigt, daß (3.6) und damit auch (3.5) für alle $v \in Y \cap C$ gilt. Wir beschränken uns dazu auf solche $Y \in \mathcal{L}$ mit $v_0 \in Y$, wobei v_0 das Element aus 5b) ist. Es gilt:

$$\bigcup_{\substack{Y \in \mathcal{L} \\ v_0 \in Y}} Y = X.$$

Wir wählen ein festes beliebiges Y. Aus (3.12) folgt für alle $w \in C$, $(v, v^*) \in A$, $v \in Y \cap C$, und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Bu_n, u_n - w\rangle \leq \langle b - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle.$$

Wir wählen insbesondere $w = v$. (Dies ist möglich, da $A \colon C \to 2^{X^*}$.) Dann liest sich die Ungleichung

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n\rangle \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C. \tag{3.13}$$

Nun wählen wir $w = u\,,\ v = v_0$ und $v^* = v_0^*$, dann wird die Ungleichung zu

$$\begin{aligned} &\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle v_0^* - b, v_0 - u_n\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle \\ \Rightarrow &\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u\rangle \overset{(3.10)}{\leq} 0\,, \end{aligned}$$

d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le 0$.
Da B pseudomonoton ist und $u_n \rightharpoonup u$, folgt

$$\begin{aligned}\langle Bu, u-v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \qquad \forall v \in C\\ &\overset{(3.13)}{\le} \langle v^* - b, v - u\rangle \qquad \forall (v, v^*) \in A, \quad v \in Y \cap C\end{aligned}$$

d.h. $\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A, \quad v \in Y \cap C.$

Zu beliebigem $(v, v^*) \in A$ gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $v \in Y$, denn $\bigcup\limits_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$. Damit haben wir

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A\,,$$

d.h. $u \in C$ ist eine Lösung von (3.6). □

Bemerkung:
Die Voraussetzung von Satz 3.2 ist für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls B (bezüglich A) koerziv ist, d.h.

$$\exists u_0 \in C = D(A) : \qquad \lim_{\substack{\|u\|\to\infty\\ u\in C}} \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} = \infty,$$

d.h. dann gilt $\forall\, b \in X^* : \exists$ eine Lösung von (3.6), d.h. $R(A + B) = X^*$. Denn

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu - b, u - u_0\rangle}{\|u\|} &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\|\,\|u - u_0\|}{\|u\|}\\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \|b\|\frac{\|u\| - \|u_0\|}{\|u\|}\\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - 2\|b\| \text{ für } \|u\| > \|u_0\|.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\| \to \infty$. Somit gilt
$\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle\ \forall \|u\| \ge r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes sind für alle $b \in X^*$ erfüllt.

Anwendungen:

a) **Variationsungleichungen:**

Gegeben sei $A\colon C \to X^*$, $C \subseteq X$ konvex, abgeschlossen und $b \in X^*$. Wir suchen ein $u \in C$, so daß

$$\langle b - Au, u - v\rangle \ge 0 \qquad\qquad \forall v \in C. \tag{3.14}$$

Eine äquivalente Formulierung von (3.14) ist:

Suche ein $u \in C$, so daß

$$b \in \partial\chi(u) + Au \qquad \forall u \in C, \tag{3.15}$$

wobei χ die Indikatorfunktion aus Abschnitt 3.2.c) ist, d.h.

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & u \in C \\ \infty & u \in X \setminus C, \end{cases}$$

mit

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \{u^* \in X^*, \langle u^*, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\} & u \in C \\ \emptyset & u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Daher bedeutet $b \in \partial\chi(u) + Au$, daß $b - Au \in \partial\chi(u)$ und damit $\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0$.

Falls $X = C$, so ist (3.14) äqivalent zu $Au = b$.

Satz 3.3 *Sei $C \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge des reflexiven Banachraumes X. Sei $A\colon C \to X^*$ pseudomonoton, demistetig und beschränkt. Falls C unbeschränkt ist, existiere ein $u_0 \in C$, so daß*

$$\frac{\langle Au, u - u_0\rangle}{\|u\|} \to \infty \qquad \text{für } \|u\| \to \infty\,, \qquad u \in C\,.$$

Dann gilt:

(a) Für alle $b \in X$ gibt es eine Lösung u von (3.14).

(b) Falls $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist die Lösungsmenge von (3.14) abgeschlossen und konvex.

(c) Falls $A\colon C \to X^*$ strikt monoton ist, ist (3.14) eindeutig lösbar.

Beweis:

(a) C ist konvex und abgeschlossen und daher ist χ konvex und unterhalbstetig (vgl. Abschnitt 3.2 b)). Lemma 3.6 liefert dann, daß $\partial\chi : C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. Außerdem gilt $\partial\chi(u_0) \neq \emptyset$. In Satz 3.2 und in der Bemerkung nach diesem Satz wählen wir $A = \partial\chi$ und $B = A$. Dann gilt:

$$\exists u \in C, \text{ so daß } b \in \partial\chi(u) + Au,$$

d.h. es gibt eine Lösung von (3.14).

(b) 1. Falls $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist (3.14) äquivalent zu:
Suche $u \in C$, so daß

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C. \tag{3.16}$$

Denn: Sei u eine Lösung von (3.14), dann haben wir

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle &= \langle Au, v-u\rangle + \langle Av - Au, v-u\rangle \\ &\overset{A \text{ monoton}}{\geq} \langle Au, v-u\rangle \overset{(3.14)}{\geq} \langle b, v-u\rangle,\end{aligned}$$

d.h. u ist eine Lösung von (3.16).
Sei umgekehrt u eine Lösung von (3.16).
Wir setzen $v = (1-t)u + tw$, $w \in C$, $0 < t < 1$. Da C konvex ist, folgt $v \in C$.
(3.16) impliziert daher

$$\begin{aligned}\langle b - A((1-t)u + tw)), u - w\rangle t &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle b - A((1-t)u + tw), u - w\rangle &\geq 0.\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $t \to 0$ folgt, da A demistetig ist,

$$\langle b - Au, u - w\rangle \geq 0.$$

Das ist aber gerade (3.14).

2. Sei S die Lösungsmenge von (3.14). Seien $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt für $w = (1-t)u + t\bar{u}$:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, (1-t)u + t\bar{u} - ((1-t)v + tv)\rangle \\ &= (1-t)\langle b - Av, u - v\rangle + t(\langle b - Av, \bar{u} - v\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

da $u, \bar{u} \in S$, d.h. S ist konvex.

3. Sei (u_n) eine Folge in S mit $u_n \to u$. Dann gilt

$$\langle b - Av, u_n - v\rangle \geq 0.$$

Für $n \to \infty$ folgt $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0$ und damit $u \in S$. Also ist S abgeschlossen.

(c) Seien $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle b - Au, u - v\rangle &\geq 0\,, \qquad & v &= \bar{u}\,, \\ \langle b - A\bar{u}, \bar{u} - v\rangle &\geq 0\,, \qquad & v &= u\,.\end{aligned}$$

Wir setzen $v = \bar{u}$ in die 1. Ungleichung ein, $v = u$ in die 2. Ungleichung und addieren dann beide Ungleichungen. Diese Rechnung ergibt

$$\langle -Au + A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle Au - A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \leq 0\,.$$

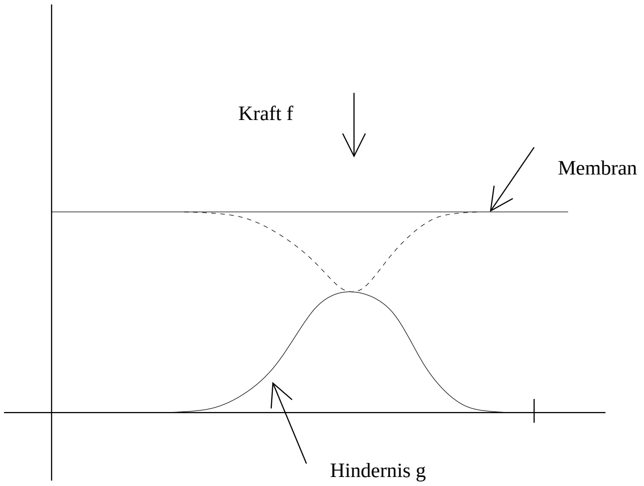
Falls A strikt monoton ist, folgt daraus $u = \bar{u}$. $\square$

Beispiel (Hindernisproblem):

Gesucht ist ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so daß

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &\geq g \qquad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

wobei f, g gegebene Funktionen sind. Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer elastischen Membran unter dem Einfluß einer Kraft f, falls die Bewegung durch ein Hindernis g beeinflußt wird.



Wir setzen

$$\begin{aligned} C &= \{u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ u \geq g\}, \\ \langle Au, v\rangle &= \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx, \\ \langle b, v\rangle &= \int_\Omega f v\, dx. \end{aligned}$$

C ist konvex und abgeschlossen.

Wir betrachten folgende Variationsungleichung: Suche ein $u \in C$ mit

$$\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0,$$

d.h. suche ein $u \in C$ mit

$$\int_\Omega f(u-v)\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla (u-v)\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Nach Satz 3.3 gibt es genau ein $u \in C$, das die Variationsungleichung löst, denn der Operator A ist stetig, strikt monoton und koerziv, wie wir in Abschnitt 1.3 gezeigt haben (mit $p = 2$, $s = 0$).

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Lösung der Variationsungleichung und der Lösung unseres ursprünglichen Problems?

Falls die Lösung u und die Daten f, g glatt sind, dann erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} O &=& \{x \in \Omega, u(x) > g(x)\} & \text{offen und} \\ C &=& \{x \in \Omega, u(x) = g(x)\} & \text{abgeschlossen.} \end{array}$$

Wir setzen $v = u + \tau\varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(O)$ und $|\tau|$ klein. Dann ist $v \in C$, und es folgt

$$-\tau \int_\Omega f\varphi\, dx + \tau \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\, dx = \tau \int_O \nabla u \nabla \varphi - f\varphi\, dx \geq 0.$$

Wir ersetzen τ durch $-\tau$, dann folgt insgesamt

$$\int_O f\varphi\, dx - \int_O \nabla u \nabla \varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(O).$$

Partielle Integration dieser Gleichug liefert

$$\int_O (f + \Delta u)\varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(O),$$

d.h. $-\Delta u = f$ in O.

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $0 < \tau \leq 1$. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$. Dann ist $v \in C$ und es gilt

$$\tau \int_\Omega f\varphi\, dx - \tau \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx \geq 0.$$

Partielle Integration der Gleichung ergibt

$$\int_\Omega (f + \Delta u)\varphi\, dx \geq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0,$$

d.h. $-\Delta u \geq f$ in Ω.

Also löst unser u, Lösung der Variationsungleichung, das Problem

$$\begin{array}{rclcrcll} -\Delta u &\geq& f, & u &\geq& g & \text{in } \Omega, \\ -\Delta u &=& f, & u &>& g & \text{in } O. \end{array}$$

b) **Evolutionsgleichungen:**

Betrachte für alle $t \in I = (0,T)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= b(t)\,, \\ u(0) &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

mit $u\colon I \to V$. L sei definiert durch $Lu = \frac{du}{dt}$ mit

$$\begin{aligned} D(L) &= \{u \in W,\ u(0) = 0\},\ \text{wobei} \\ W &= \{u \in L^p(I,V), \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I,V^*)\} \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Mithilfe von L schreibt sich (3.17) als

$$Lu + Au = b, \qquad u \in D(L). \tag{3.18}$$

Satz 3.4 *Sei (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel, und sei $X = L^p(I,V), 1 < p < \infty$, $I = (0,T)$, $T < \infty$. Sei $A\colon X \to X^*$ pseudomonoton, koerziv, demistetig und beschränkt. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung von (3.17). Falls A strikt monoton ist, ist diese eindeutig bestimmt.*

Beweis:

1. Existenz einer Lösung
   Nach Lemma 3.8 ist L maximal monoton auf $D(L)$. Weiterhin ist $D(L)$ konvex und abgeschlossen in der Norm von W. Mit $C = D(L)$, $u_0 = 0$, $A = L$ und $B = A$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.2 und der Bemerkung danach erfüllt. Daher gibt es ein $u \in D(L)$, das (3.18) löst.

2. Eindeutigkeit der Lösung
   Seien u_1, $u_2 \in D(L)$ Lösungen von (3.18). Dann gilt

   $$\begin{aligned} Lu_1 + Au_1 &= b \\ Lu_2 + Au_2 &= b. \end{aligned}$$

   Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, folgt

   $$\begin{aligned} 0 &= \langle L(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \\ &\overset{\text{Lemma 3.7}}{=} \frac{1}{2}\Big(\|(u_1 - u_2)(T)\|_H^2 - \|(u_1 - u_2)(0)\|_H^2\Big) + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \\ &\geq \langle Au_1 - A_2, u_1 - u_2\rangle. \end{aligned}$$

   Falls A strikt monoton ist, folgt daraus $u_1 = u_2$. □

Beispiel (parabolischer p–Laplace):

Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{auf } \Omega \times I, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times I, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx, \\ \langle A_2 u, v\rangle &= \int_\Omega g(u) v \, dx. \end{aligned}$$

Wie wir in Abschnitt 2.2, Anwendung 1), gezeigt haben, ist der Operator A_1 „im stationären Fall“ stetig, monoton, beschränkt und koerziv. Weiterhin wissen wir aus Abschnitt 2.2, Anwendung 1), daß der Operator A_2 beschränkt und stark stetig ist, sofern g die dortigen Bedingungen erfüllt. Wie ebenfalls dort gezeigt, ist der Operator $A = A_1 + A_2$ pseudomonoton, koerziv, stetig und beschränkt.

Im hier vorliegenden „instationären Fall“ müssen wir noch zeigen, daß $A\colon X \to X^*$, d.h. $A\colon L^p(I, W^{1,p}(\Omega)) \to (L^p(I, W^{1,p}(\Omega)))^* = L^{p'}(I, (W^{1,p}(\Omega))^*)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Die übrigen Rechnungen lassen sich ohne Probleme vom „stationären“ auf den „instationären Fall“ übertragen.

1. $A_1\colon X \to X^*$:
   Aus Abschnitt 1.3 erhalten wir für u, $v \in X$ die Abschätzung
   $$\int_I |\langle A_1 u, v\rangle| \, dt \le C \int_I \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p} \, dt \le \Big(\int_I \|\nabla u\|_{L^p}^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_I \|\nabla v\|_{L^p}^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
   Damit folgt $A_1\colon X \to X^*$.

2. $A_2\colon X \to X^*$:
   Aus Abschnitt 2.2, Anwendung 1) wissen wir
   $$\int_I \langle A_2 u, v\rangle \, dt \le C \int_I \|u\|_{W^{1,p}}^{r-1} \|v\|_{W^{1,p}} \, dt$$
   mit $\frac{1}{r} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.Wenn wir auf diese Ungleichung die Hölder–Ungleichung anwenden, ergibt sich
   $$\int_I \langle A_2 u, v\rangle \, dt \;\; \le \;\; C\Big(\int_I \|u\|_{W^{1,p}}^{(r-1)p'} \, dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_I \|\varphi\|_{W^{1,p}}^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Also folgt $A_2\colon X \to X^*$, falls

$$(r-1)p' = (r-1)\frac{p}{p-1} \leq p \Leftrightarrow\ r \leq p.$$

Daher gibt es nach Satz 3.4 gibt eine Lösung u des obigen Problems (im schwachen Sinne), sofern g die in Abschnitt 2.2, Anwendung 1), geforderten Bedingungen erfüllt und zusätzlich $r \leq p$ gilt.

Teil D

Der Abbildungsgrad

Der Abbildungsgrad ist nützlich, um die Lösbarkeit von Gleichungen der Art

$$f(x) = y$$

mit Hilfe topologischer Überlegungen zu zeigen. Grob gesagt gibt der Abbildungsgrad die Anzahl der Lösungen an. Der Abbildungsgrad kann definiert werden für Funktionen

a) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe dieses Begriffes des Abbildungsgrades können wir den Satz von Brouwer, Satz 2.1, Teil A, einfach beweisen.

b) $f\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist. In diesem Fall finden wir einen einfachen Beweis für den Satz von Schauder, Satz 2.4, Teil A.

1 Der Abbildungsgrad von Brouwer

Im Folgenden sei immer $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, beschränkt, offen.

Ziel dieses Kapitels ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1.1 (Brouwer 1912, Nagumo 1951) *Sei $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Dann existiert eine ganze Zahl $d(f, \Omega, p)$, der* Abbildungsgrad*, mit folgenden Eigenschaften:*

1) Falls $d(f, \Omega, p) \neq 0$, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$, so daß

$$f(x_0) = p\,.$$

(Existenz)

2) Falls $f(x,t)\colon \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq f(x,t)$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$, dann gilt:

$$d(f(.,0), \Omega, p) = d(f(.,1), \Omega, p)\,.$$

(Invarianz unter Homotopien)

3) Sei $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ *,* Ω_i *offen, disjunkt, beschränkt,* $\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$*. Dann gilt für alle* $p \notin f(\partial\Omega)$*:*

$$d(f, \Omega, p) = \sum_i d(f, \Omega_i, p)\,.$$

(Zerlegungseigenschaft)

Bemerkung:

Seien $a \in \mathbb{C}$, Γ eine C^1–Kurve. Die *Umlaufzahl* $n(\Gamma, a)$ von Γ bezüglich a ist definiert durch

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - a} \quad .$$

Wir setzen

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Dabei sei f eine meromorphe Funktion mit $f \neq 0$ auf Γ und Γ eine nullhomologe C^1–Kurve. Dann ist

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \sum_{z \in N} k(z) n(\Gamma, z),$$

wobei N die Menge der Nullstellen von f bezeichne und $k(z) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z \in N$ (Argument–Prinzip, siehe [4, S. 162]).

Satz 1.1 verallgemeinert dieses Prinzip von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ stimmen beide Konzepte überein.

1.1 Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer

Sei $f\colon \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

$J(f(x))$ bezeichne die Determinante der Jacobi-Matrix von f im Punkte $x \in \Omega$,

$$J(f(x)) = \det(\nabla f(x)).$$

Ferner setzen wir für $p \in \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}(p) = \{x \in \Omega\,,\ f(x) = p\}.$$

Der Punkt $x \in f^{-1}(p)$ heißt *regulär*, wenn $J(f(x)) \neq 0$.

Lemma 1.1 *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $p \in f(\overline{\Omega}) \setminus f(\partial\Omega)$, und sei jeder Punkt der Menge $f^{-1}(p)$ regulär. Dann ist $f^{-1}(p)$ endlich.*

Beweis: Beweis durch Widerspruch.
Annahme: $f^{-1}(p)$ ist nicht endlich. Dann gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n \in f^{-1}(p)$. Da Ω beschränkt ist, ist auch die Folge (x_n) beschränkt. Daher gibt es ein $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $x_{n_k} \to x_0$ für eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n). Für diese Teilfolge gilt

$$f(x_{n_k}) = p.$$

und somit $f(x_0) = p$, da f stetig ist. Nach Voraussetzung haben wir also $x_0 \notin \partial\Omega$ und $x_0 \in f^{-1}(p)$.
Das impliziert aber $J(f(x_0)) \neq 0$, d.h. der Rang von $\nabla f(x_0)$ ist n. Demzufolge ist $\nabla f(x_0)$ ein Homöomorphismus. Nach dem Satz über die inverse Funktion, Satz 4.6, Teil B, folgt, daß $f\,|_{U(x_0)}$ ebenfalls ein Homöomorphismus und insbesondere eineindeutig ist. Dies ist ein Widerspruch, denn

$$f(x_0) = p \text{ und } \exists\, x_{n_0} \in U(x_0) \text{ mit } f(x_{n_0}) = p, \text{ da } x_n \to x_0.$$

□

Definition 1.1 *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ derart, daß alle Punkte in $f^{-1}(p)$ regulär sind. Dann definieren wir den* Abbildungsgrad

$$d(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J(f(x))\,.$$

Bemerkung:

- Aus Lemma 1.1 folgt, daß die Summe in der Definition endlich ist. Daher macht die Definition Sinn.
- Offensichtlich ist $d(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$.
- Falls $f^{-1}(p) = \emptyset$, definieren wir $d(f, \Omega, p) \equiv 0$.

Wir wollen nun die Definition auf solche Fälle verallgemeinern, bei denen

a) $f^{-1}(p)$ nichtreguläre Punkte enthält,

b) $f \in C(\overline{\Omega})$.

In beiden Fällen benutzen wir dazu Approximationsargumente. Genauer werden wir dabei wie folgt vorgehen:

a) Sei $B = \{x \in \Omega,\ J(f(x)) = 0\}$ und sei $p \in f(B) \setminus f(\partial\Omega)$.
Der Satz von Sard wird liefern, daß $m(f(B)) = 0$, wobei m das Lebesgue–Maß bezeichne. Daher hat $f(B)$ keine inneren Punkte. Deshalb gibt es eine Folge (p_n) in $\mathbb{R}^n$ mit

$$p_n \notin f(B),\ p_n \notin f(\partial\Omega) \text{ und } p_n \to p. \tag{1.1}$$

Wir werden zeigen, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$$

existiert und zwar unabhängig von der Wahl der Folge (p_n).
Daher können wir für$f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ definieren

$$d(f, \Omega, p) \equiv \lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n).$$

b) Zu $f \in C(\overline{\Omega})$ gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstraß (siehe z.B. [9, S. 338]) eine Folge von Polynomen (f_n), so daß

$$\begin{aligned} &f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ &f_n \rightrightarrows f \qquad \text{auf } \overline{\Omega} \text{ und} \\ &p \notin f_n(\partial\Omega) \qquad \forall n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wir werden beweisen, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$$

existert und unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) ist. Danach können wir für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$

$$d(f, \Omega, p) \equiv \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$$

definieren.

1.2 Technische Hilfsmittel

Es folgen nun einige technische Lemmata, die uns die gewünschten Ergebnisse liefern.

Satz 1.2 (Sard) *Sei $f \in C^1(\Omega)$ und sei G offen, so daß $\overline{G} \subset \Omega$. Dann gilt*

$$m\big(f(G \cap \{x \in \Omega\,,\ J(f(x)) = 0\})\big) = 0.$$

Beweis: Ω ist beschränkt. $\Rightarrow$ $\Omega \subseteq R = [-L, L]^n$.
Wir überdecken R mit Würfeln r_i mit Seitenlänge $l < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(\overline{G}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dann ist $\overline{G} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} r_i$, $N < \infty$, $r_i \subseteq \Omega$.
Wir zeigen, daß das Bild der Menge aller krititschen Punkte (d.h. aller Punkte mit $J(f(x)) = 0$) in $\bigcup\limits_{i=1}^{N} r_i$ eine Lebesgue–Nullmenge ist.
Sei dazu r_i einer der Würfel mit Seitenlänge l. $\nabla f \in C(\Omega)$ ist auf G gleichmäßig stetig und beschränkt, d.h.

1. $\exists L : |\nabla f| \leq L \qquad \forall x \in \overline{G}$.
2. $\forall \varepsilon > 0\; \exists m \in \mathbb{N} : |\nabla f(p_1) - \nabla f(p_2)| \leq \varepsilon \quad \forall p_1, p_2$ mit $|p_1 - p_2| < \frac{l}{m}\sqrt{n} =: \delta$.

Demzufolge gilt nach dem Mittelwertsatz für alle p_1, p_2 mit $|p_1 - p_2| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(p_1) - f(p_2) - \nabla f(p_2)(p_1 - p_2)| &\leq \int\limits_0^1 |\nabla f(p_2 + t(p_1 - p_2)) - \nabla f(p_2)|\, |p_1 - p_2|\, dt \\ &\leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta. \end{aligned}$$

Nun zerlegen wir r_i in m^n Würfel r_{ij} der Seitenlänge $\frac{l}{m} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ und wählen ein festes r_{ij}.
Für alle $p_1, p_2 \in r_{ij}$ gilt nach obiger Rechnung

$$f(p_1) = f(p_2) + \nabla f(p_2)(p_1 - p_2) + R(p_2, p_1)$$

mit $|R(p_2, p_1)| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta$.
Sei nun $p_2 \in r_{ij}$ ein kritischer Punkt und sei $r_{ij} - p_2 := \{x \in \mathbb{R}^n; x = -p_2 + y, y \in r_{ij}\}$. Wir definieren für $p \in r_{ij} - p_2$ eine Abbildung $T\colon r_{ij} - p_2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} T(p) &= f(p_2 + p) - f(p_2) \\ &= \nabla f(p_2)p + \tilde{R}(p), \end{aligned}$$

mit $\tilde{R}(p) = R(p_2, p + p_2)$, d.h. $|\tilde{R}(p)| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta$, wenn wir $p + p_2$ statt p_1 in obige Gleichung einsetzen. Da p_2 ein kritischer Punkt ist, gilt $\det(\nabla f(p_2)) = 0$, d.h. der Rang von $\nabla f(p_2)$ ist höchstens $n-1$. Also ist da Bild von $r_{ij} - p_2$ unter $\nabla f(p_2)$ in einem $(n-1)$–dimensionalem Raum enthalten. Deshalb gilt:

$$\exists b_1 \in \mathbb{R}^n : |b_1| = 1,\ (b, y) = 0 \quad \forall y \in (\nabla f(p_2))(r_{ij} - p_2),$$

wobei $(.,.)$ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ steht. Wir ergänzen b_1 durch $b_2, \ldots, b_n$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann können wir schreiben

$$T(p) = \sum_i (T(p), b_i) b_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|(T(p), b_1)| &\leq |(\nabla f(p_2)p, b_1)| + |(\tilde{R}(p), b_1)| \\
&\leq 0 + \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta \text{ und} \\
|(T(p), b_i)| &\leq |(\nabla f(p_2)p, b_i)| + |(\tilde{R}(p), b_i)| \qquad i = 2, \ldots, n \\
&\leq L|p|\ |b_1| + |\tilde{R}(p)|b_i| \\
&\quad \text{wegen der Beschränktheit von } \nabla f \\
&\leq L\frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n} \\
&\leq L\delta + \varepsilon\delta,
\end{aligned}$$

da $p \in r_{ij} - p_2$, d.h. $|p| \leq \frac{l}{m}\sqrt{n}$. Nach Definiton von $T(.)$ gilt: $T(r_{ij} - p_2) = f(r_{ij}) + f(p_2)$. Da das Lebesgue–Maß invariant gegenüber Verschiebungen ist, erhalten wir also

$$m(f(r_{ij})) = m(T(r_{ij} - p_2)) \leq (L\frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n})^{n-1}\varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}
m(f(r_i)) &\leq \sum_{j=1}^{m^n} m(f(r_{ij})) \\
&\leq m^n \frac{1}{m^n}(Ll\sqrt{n} + \varepsilon l\sqrt{n})^{n-1}\varepsilon l\sqrt{n} \leq c\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt $m(f(r_i)) = 0$, falls r_i einen kritischen Punkt enthält. Somit haben wir für $B = \{x \in \Omega; J(f(x)) = 0\}$, daß $m(f(G \cap B)) = 0$, da die r_i die Menge G überdecken. □

Bemerkung:

Wir wollen nun erreichen, daß $m(f(\Omega \cap B)) = 0$.

Dazu wählen wir $G_n = \{x \in \Omega, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) \geq \frac{1}{n}\}$. Dann gilt $\overline{G}_n \subseteq \Omega$ und $\Omega \subseteq \bigcup\limits_n G_n$. Aus den Eigenschaften des Lebesgue–Maßes folgt also

$$m(f(\Omega \cap B)) \leq \sum_n m(f(G_n \cap B)) = 0.$$

Sei nun $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Die Menge $f^{-1}(p)$ enthalte nur reguläre Punkte. Dann ist diese Menge endlich, d.h.

$$f^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Nach dem Beweis von Lemma 1.1 gibt es zu jedem x_i, $i = 1, \dots, k$, eine Umgebung $U(x_i)$, so daß

$$\begin{aligned}
&1)\ U(x_i) \subseteq \Omega,\\
&2)\ U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset,\\
&3)\ J(f(y)) \neq 0 \quad \forall y \in \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i),\\
&4)\ f\ |_{U(x_i)} \ \text{ ist ein Homöomorphismus, d.h. eineindeutig.}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Wir setzen $\varphi(y) = f(y) - p$. Dann ist $\varphi(U(x_i))$ eine Umgebung von 0. Demzufolge existiert ein $\eta > 0$:

$$\bigcap_{i=1}^{k} \varphi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0).$$

Nach (1.3) gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\|\varphi(y)\| \geq \delta \qquad \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i),$$

denn für $y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ ist $\|\varphi(y)\| > 0$. Außerdem ist $y \mapsto \|\varphi(y)\|$ stetig und nimmt daher auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ ein Minimum an, d.h. es existiert ein δ so, daß $\|\varphi(y)\| \geq \delta > 0$.

Lemma 1.2 *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $f^{-1}(p)$ regulär und $\phi \in C([0,\infty)) \cap C^\infty(0,\infty)$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)\, dx = 1$$

und $\operatorname{supp} \phi \subseteq [0, \min(\delta, \eta))$. *Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \phi(\|f(x) - p\|) J(f(x))\, dx = d(f, \Omega, p)\,. \tag{1.4}$$

Beweis: Offensichtlich ist

$$J(f(x)) = J(\varphi(x)),$$

denn $\varphi = f - p$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(\|f(x)-p\|)J(f(x))\,dx &= \int_\Omega \phi(\|\varphi(x)\|)J(\varphi(x))\,dx \\
&= \sum_i \int_{U(x_i)} \phi(\|\varphi(x)\|)J(\varphi(x))\,dx, \\
&\quad \text{denn außerhalb von } U(x_i) \text{ ist } \phi = 0, \text{ da dann } \|\varphi(x)\| \geq \delta. \\
&= \sum_i \operatorname{sgn} J(\varphi(x_i)) \int_{U(x_i)} \phi(\|\varphi(x)\|)|J(\varphi(x))|\,dx \\
&= \sum_i \operatorname{sgn} J(\varphi(x_i)) \int_{\varphi(U(x_i))} \phi(\|x\|)\,dx, \\
&\quad \text{nach dem Transformationssatz.} \\
&= \sum_i \operatorname{sgn} J(\varphi(x_i)), \text{ denn } \varphi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0) \supset \operatorname{supp}\phi. \\
&= \sum_i \operatorname{sgn} J(f(x_i)) \\
&= \sum_{f^{-1}(p)} J(f(x)) = d(f,\Omega,p).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Die rechte Seite von Formel (1.4) gilt unabhängig von der Wahl von ϕ mit den in Lemma 1.2 geforderten Eigenschaften. Daher ist auch die linke Seite von Formel (1.4) unabhängig von der Wahl von ϕ.

Lemma 1.3 *Seien $p \in \mathbb{R}^n$, $f_i \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $f_i \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1,2$. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug, so daß*

$$\begin{aligned}
\|f_i(x)-p\| &\geq 7\varepsilon \qquad \text{für } i=1,2 \text{ und } x \in \partial\Omega, \text{ sowie} \\
\|f_1(x)-f_2(x)\| &< \varepsilon \qquad \text{für } x \in \overline{\Omega}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Ferner seien $f_i^{-1}(p)$, $i = 1,2$, regulär. Dann gilt

$$d(f_1,\Omega,p) = d(f_2,\Omega,p)\,. \tag{1.6}$$

Beweis: O.B.d.A. sei $p = 0$. Sei $\gamma : [0,\infty) \to [0,1]$ mit $\gamma \in C^1([0,\infty))$, so daß

$$\begin{cases} \gamma(r) = 1, & \text{falls } 0 \leq r \leq 2\varepsilon, \\ \gamma(r) = 0, & \text{falls } 3\varepsilon \leq r. \end{cases}$$

Wir definieren

$$f_3(x) = \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x).$$

Dann ist $f_3 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Darüber hinaus gilt für $x \in \overline{\Omega},\ i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - f_3(x)\| &= \|\big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_i(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_i(x) - \\ &\quad \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) - \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x)\| \\ &\le \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) \|f_i(x) - f_1(x)\| + \gamma(\|f_1(x)\|) \|f_i(x) - f_2(x)\| \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir

$$\|f_3(x)\| > 6\varepsilon \qquad \text{für } x \in \partial\Omega,$$

da $7\varepsilon \le \|f_1(x)\| \le \|f_1(x) - f_3(x)\| + \|f_3(x)\| \le \varepsilon + \|f_3(x)\|$, und

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x)\,, \qquad \text{falls } \|f_1(x)\| > 3\varepsilon\,, \\ f_3(x) &= f_2(x)\,, \qquad \text{falls } \|f_1(x)\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Wir wählen ϕ_1, ϕ_2 mit denselben Eigenschaften wie ϕ aus Lemma 1.2 sowie mit

$$\begin{aligned} \phi_1(r) &= 0 \qquad \text{für } r \in [0, 4\varepsilon] \cup [5\varepsilon, \infty) \text{ und} \\ \phi_2(r) &= 0 \qquad \text{für } r \in [\varepsilon, \infty). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\phi_1(\|f_3(x)\|) J(f_3(x)) = \phi_1(\|f_1(x)\|) J(f_1(x)),$$

da für $\|f_3\| > 4\varepsilon$ gilt $\|f_1\| \ge \|f_3\| - \|f_1 - f_3\| > 4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon$, und deshalb $f_1 = f_3$. Weiterhin folgt

$$\phi_2(\|f_3(x)\|) J(f_3(x)) = \phi_2(\|f_2(x)\|) J(f_2(x)),$$

denn ϕ_2 ist nur ungleich 0, falls $\|f_3\| \le \varepsilon$. Dann gilt aber $\|f_2\| \le \|f_2 - f_3\| + \|f_3\| \le \varepsilon + \varepsilon \le 2\varepsilon$, und somit $f_3 = f_2$. Nach obiger Bemerkung und Lemma 1.2 folgt daher

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, p) &= \int_\Omega \phi_1(\|f_1(x)\|) J(f_1(x))\, dx \\ &= \int_\Omega \phi_1(\|f_3(x)\|) J(f_3(x))\, dx \\ &= \int_\Omega \phi_2(\|f_3(\|x\|)\|) J(f_3(x))\, dx \\ &= \int_\Omega \phi_2(\|f_2(x)\|) J(f_2(x))\, dx \;=\; d(f_2, \Omega, p). \end{aligned}$$

□

Lemma 1.4 *Seien $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $z_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Weiterhin nehmen wir an, daß*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - z_j\| &\geq 7\varepsilon \qquad \text{für } i,j = 1,2,\ x \in \partial\Omega, \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon \qquad \text{für } x \in \overline{\Omega} \text{ und} \\ \|z_1 - z_2\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Seien alle Punkte von $f_i^{-1}(z_j)$, $i,j = 1,2$, regulär. Dann gilt

$$d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)\,.$$

Beweis: Nach Lemma 1.3 gilt $d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_1)$.
Wir setzen

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_2(x), \\ g_2(x) &= f_2(x) + (z_1 - z_2). \end{aligned}$$

g_1 und g_2 erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.3:

$$\begin{aligned} \|g_1(x) - z_1\| &= \|f_2(x) - z_1\| \geq 7\varepsilon, \\ \|g_2(x) - z_1\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - z_1\| \geq 7\varepsilon \text{ und} \\ \|g_2(x) - g_1(x)\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - f_2(x)\| < \varepsilon \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Lemma 1.3 liefert also $d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1)$.
Ferner gilt $d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)$, da

$$\begin{aligned} g_2^{-1}(z_1) &= \{x \in \Omega,\ g_2(x) = z_1\} = \{x \in \Omega,\ f_2(x) + z_1 - z_2 = z_1\} = \{x \in \Omega\,, f_2(x) = z_2\} \\ &= f_2^{-1}(z_2). \end{aligned}$$

Außerdem haben wir die Gleichheit

$$\nabla f_2 = \nabla g_2 \ \Rightarrow \sum \operatorname{sgn} J(f_2(x)) = \sum \operatorname{sgn} J(g_2(x)).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, z_1) &= d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) \\ &= d(f_2, \Omega, z_2). \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen

Nun können wir die Idee zur Konstruktion von $d(f, \Omega, p)$ für nichtreguläres $p \in \mathbb{R}^n$ rigoros ausführen:

Sei $p \in f(B) \setminus f(\partial\Omega)$, wobei $B = \{x \in \Omega, J(f(x)) = 0\}$ die Menge aller irregulären Punkte ist.

Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt. Dann ist

$$\|f(x) - p\| > 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

und somit gibt es ein ε : $\|f(x) - p\| \geq 8\varepsilon$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Wir haben im Satz von Sard bewiesen, daß $m(f(B)) = 0$ ist, also hat $f(B)$ hat keine inneren Punkte. Daher gibt es eine Folge (p_n) mit

$$p_n \to p \text{ für } n \to \infty,\ p_n \notin f(\partial\Omega),\ p_n \notin f(B). \tag{1.7}$$

Außerdem gibt es ein $n_0 : \forall n,\ k \geq n_0 : \|p_k - p_n\| < \varepsilon$. Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert, daß dann auch für alle $n \leq n_0$ gilt: $\|p - p_n\| \leq \varepsilon$. Dies hat zur Folge, daß

$$\|f(x) - p_n\| \geq \|f(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Lemma 1.4 impliziert daher, daß für alle $n,\ k \geq n_0$

$$d(f, \Omega, p_k) = d(f, \Omega, p_n)$$

gilt.

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$ existiert also, und wir setzen

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n) =: d(f, \Omega, p).$$

Es verbleibt zu zeigen, daß der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge (p_n) ist.

Sei dazu (q_n) eine Folge mit $q_n \to p$, die (1.7) erfüllt. Dann gilt nach Lemma 1.4t

$$\exists n_1 : \ \forall n \geq n_1 : \ d(f, \Omega, q_n) = d(f, \Omega, p_n),$$

denn $\|p_n - q_n\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_1$.

Damit können wir nun $d(f, \Omega, p)$ für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ eindeutig definieren.

Im letzten Schritt wollen wir den Abbildungsgrad auf Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$ verallgemeinern.

Lemma 1.5 *Seien* $f_i \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, *und* $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. $\varepsilon > 0$ *sei klein genug. Angenommen,*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - p\| &\geq 8\varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ i = 1, 2 \text{ und} \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &\leq \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p).$$

Beweis:

1. Falls p regulär ist, folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.
2. Falls p irregulär ist, wählen wir eine Folge (p_n), die (1.7) erfüllt. Dann gilt:

$$\|f_i(x) - p_n\| \geq \|f_i(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon \quad \forall n \geq n_0,\ i = 1, 2.$$

   Aus Lemma 1.3 folgt daher die Gleichheit $d(f_1, \Omega, p_n) = d(f_2, \Omega, p_n)$. Im Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p).$$

□

Sei jetzt $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es eine Folge von Funktionen mit

$$f_n \rightrightarrows f \text{ in } \overline{\Omega},\ f_n \in C^1(\Omega) \text{ und } p \notin f_n(\partial\Omega)\ \forall n. \tag{1.8}$$

Da $p \notin f(\partial\Omega)$ und $\partial\Omega$ abgeschlossen und beschränkt ist, folgt: Es gibt ein ε, so daß

$$\|f(x) - p\| \geq 9\varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Ferner existiert ein n_0, so daß

$$\|f_n(x) - f_k(x)\| < \varepsilon \quad \forall n, k \geq n_0,\ x \in \overline{\Omega},$$

wegen $f_n \rightrightarrows f$ auf $\overline{\Omega}$. Deshalb gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq 8\varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega,\ \forall n \geq n_0.$$

Nach Lemma 1.5 gilt also $d(f_k, \Omega, p) = d(f_n, \Omega, p)$ für alle $n,\, k \geq n_0$ und daher existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$, und er ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n), denn wenn (g_n) eine weitere Folge ist, die (1.8) erfüllt, dann gilt für ein geeignetes n_1

$$\|g_n(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_1,\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Wir setzen

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p).$$

Für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ ist damit der Abbildungsgrad definiert.

1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer

Satz 1.3 *Seien $\Omega_1,\, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkt, beschränkt und offen, $f\colon \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^n$ stetig und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \notin f(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$. Dann gilt:*

$$d(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p).$$

Beweis:

1. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und p regulär. Dann gilt

   $$\sum_{\substack{x\in f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2}} J(f(x)) = \sum_{\substack{f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_1}} J(f(x)) + \sum_{\substack{f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_2}} J(f(x))$$

   wegen der Disjunktheit der Mengen Ω_1 und Ω_2.

2. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und p irregulär. Wir wählen eine Folge (p_n), die (1.7) erfüllt. Nach 1. gilt die Behauptung für jedes p_n. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daher die Behauptung für p.

3. Sei $f \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. Wir wählen eine Folge (f_n), die (1.8) erfüllt. 2. liefert die Behauptung für jedes f_n. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das Gewünschte. □

Satz 1.4 *Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Falls $d(f, \Omega, p) \neq 0$ ist, existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = p$.*

Beweis: Beweis durch Widerspruch.
Annahme: Für alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt $f(x) \neq p$. Damit haben wir $\|f(x) - p\| > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und, da f und die Norm stetig sind, existiert ein $\varepsilon > 0 : \|f(x) - p\| \geq 2\varepsilon$.
Sei (f_n) eine Folge, die (1.8) erfüllt mit $f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gibt es ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Somit gilt $\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq \varepsilon$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $n \geq n_0$.
Also ist $f_n^{-1}(p) = \emptyset$ und p also regulär. Jetzt können wir die Bemerkung nach Definition 1.1 anwenden, die besagt, daß

$$d(f_n, \Omega, p) = 0.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $d(f, \Omega, p) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt die Behauptung. □

Satz 1.5 *Sei $f(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f(x,t) \neq p$ für alle $x \in \partial\Omega$, und alle $t \in [a,b]$. Dann ist $d(f(.,t), \Omega, p)$ konstant auf $[a,b]$.*

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert:

$$\|f(x,t) - p\| \geq 9\varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [a,b].$$

Außerdem ist $f(x,t)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega} \times [a,b]$, d.h.

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall t_1,\, t_2 \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta \quad |f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Wir fixieren zwei solcher t_1, t_2 und wählen zwei Folgen (f_{1n}) und (f_{2n}), die (1.8) erfüllen mit

$$f_{1n} \rightrightarrows f(x,t_1) \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ und } f_{2n} \rightrightarrows f(x,t_2) \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Dann existiert ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\|f(x,t_i) - f_{in}\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ i = 1,\, 2,$$

und wir erhalten $\|f_{in} - p\| \geq \|p - f(x,t_i)\| - \|f_{in} - f(x,t_i)\| \geq 8\varepsilon$.
Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.3 erfüllt, was

$$d(f_{1n}, \Omega, p) = d(f_{2n}, \Omega, p)$$

impliziert. Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt

$$d(f(.,t_1), \Omega, p) = d(f(.,t_2), \Omega, p) \quad \forall t_1,\, t_2 \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Eine endliche Überdeckung von $[a, b]$ mit Intervallen der Länge kleiner δ liefert sofort, daß $d(f(.,t), \Omega, p)$ konstant ist. □

Bemerkung:

Falls $f = \mathrm{id}$, dann ist

$$d(\mathrm{id}, \Omega, p) = \begin{cases} 0 & p \notin \overline{\Omega}, \\ 1 & p \in \Omega. \end{cases}$$

Der folgende Satz liefert nichttriviale Beispiele für Funktionen deren Abbildungsgrad nicht identisch Null ist.

Satz 1.6 (Borsuk) *Sei Ω ein symmetrisches (d.h. $x \in \Omega \Rightarrow -x \in \Omega$), offenes beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Sei $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ eine ungerade Funktion auf $\partial\Omega$ (d.h. $f(x) = -f(-x) \, \forall x \in \partial\Omega$). Dann ist $d(f, \Omega, 0)$ eine ungerade Zahl.*

Beweis: : siehe [7, S. 24]. □

Beispiel: $\Omega = B_1(0)$, $f(x) = x^3$.

Im folgenden Satz verschärfen wir die Ausage von Lemma 1.3.

Satz 1.7 *Seien $f_i \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, stetig und sei*

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x) - p\| \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p).$$

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung

$$\|f_1(x) - p\| > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Außerdem erhalten wir

$$\|f_2(x) - p\| \geq -\|f_1(x) - f_2(x)\| + \|f_1(x) - p\| > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Wir setzen $f(x,t) = f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x))$ für $0 \le t \le 1$. Die Funktion $f(x,t)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.5, und somit gilt

$$d(f(x,t),\Omega,p) = d(f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x)),\Omega,p) = C \text{ für } 0 \le t \le 1,\ C \in \mathbb{Z} \text{ konstant.}$$

Diese Gleichung impliziert, wenn wir $t = 0$ und $t = 1$ einsetzen,

$$d(f_1(x),\Omega,p) = C = d(f_2(x),\Omega,p).$$

□

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir, wie angekündigt, den Satz von Brouwer auf eine andere Weise als im Teil A beweisen.

Satz 1.8 (Brouwer) *Sei $f\colon \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0)$ stetig. Dann existiert ein Fixpunkt in $\overline{B}_1(0)$, d.h.*

$$\exists x_0 \in \overline{B}_1(0) :\ f(x_0) = x_0.$$

Beweis: Beweis durch Widerspruch.
Annahme: $\forall x \in \overline{B}_1(0)$ gelte: $f(x) \neq x$.
Wir setzen $F(x,t) = x - tf(x)$ für $x \in \overline{B}_1(0)$, $0 \le t \le 1$. Unsere Annahme impliziert, daß

$$\begin{aligned} \|F(x,t)\| = \|x - tf(x)\| \ge \|x\| - t\|f(x)\| &\ge 1 - t && \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1]\,, \\ &> 0 && \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1), \end{aligned}$$

d.h. $0 \notin F(\partial B_1(0),t)$, $0 \le t < 1$. Für $t = 1$ folgt $\|F(x,1)\| > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ nach unserer Annahme.
Demnach sind die Vorausetzungen von Satz 1.5 für $p = 0$ erfüllt und damit erhalten wir

$$d(F(.,0),B_1(0),0) = d(F(.,1),B_1(0),0).$$

Nun ist aber $F(.,0) = \mathrm{id}$ und damit $d(F(.,0),B_1(0),0) = 1$. Nach Satz 1.4 gilt daher

$$\exists x_0 :\ x_0 - f(x_0) = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also besitzt f einen Fixpunkt. □

2 Der Abbildungsgrad von Leray-Schauder

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff des Abbildungsgrades auf unendlich-dimensionale Räume ausweiten. Bei diesem Schritt können jedoch Probleme auftreten. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß die Einheitskugel in unendlich-dimensionalen Räumen nicht kompakt ist - im Gegensatz zu endlich-dimensionalen Räumen. In Teil A haben wir aus dem Gegenbeispiel von Kakutani bereits gelernt, daß im Allgemeinen eine stetige Funktion auf einem Banachraum keinen Fixpunkt haben muß. Dieses Gegenbeispiel zeigt auch, daß es unmöglich ist, einen Abbildungsgrad für nur stetige Funktionen auf Banachräumen zu definieren, der dieselben Eigenschaften hat wie in endlich-dimensionalen Räumen. Diese Eigenschaften implizieren nämlich die Existenz eines Fixpunktes von stetigen Abbildungen, die die Einheitskugel auf sich selber abbilden.

Die Grundidee bei Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray-Schauder ist, die betrachteten Operatoren durch Operatoren mit endlich-dimensionalem Wertebereich zu approximieren. Dazu erinnern wir uns an Satz 2.3, Teil A. Dieser besagt:

$$\begin{gathered} T\colon M \subseteq X \to X \text{ kompakt, } M \text{ beschränkt und abgeschlossen.} \\ \Rightarrow \exists P_n\colon M \to X \text{ kompakt mit } \dim R(P_n) < \infty\ \forall n \text{ und} \\ \|Tx - P_n x\| \le \tfrac{1}{n} \quad \forall x \in M. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Daher ist es sinnvoll, für kompakte Operatoren einen Abbildungsgrad zu definieren. Im Weiteren werden wir mit den im Beweis von Satz 2.3, Teil A, konstruierten „Schauder"–Operatoren arbeiten.

2.1 Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume

Bisher haben wir einen Abbildungsgrad auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Jetzt wollen wir dies auf beliebige endlich–dimensionale normierte Vektorräme verallgemeinern. Sei nun X ein normierter Vektorraum mit $\dim X < \infty$. Dann gibt es ein n und einen isometrischen Isomorphismus $h\colon X \to \mathbb{R}^n$, d.h. $\|h(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_X$.

Sei $f\colon \Omega \subseteq X \to X$ eine stetige Abbidlung, Ω offen und beschränkt, $p \notin f(\partial\Omega)$. Wir definieren den Abbildungsgrad der Abbildung f bezüglich Ω und p durch

$$d_X(f, \Omega, p) \equiv d_{\mathbb{R}^n}(h \circ f \circ h^{-1}, h(\Omega), h(p)). \tag{2.2}$$

Lemma 2.1 *Die Definition (2.2) ist unabhängig von der Wahl von h.*

Beweis: Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, p regulär.
O.B.d.A. sei $p \equiv 0$. Dann gilt auf Grund der Eigenschaften der Isometrie h und der Substitu-

tionsregel

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \phi(\|f(x)\|)J(f(x))\,dx &= \int\limits_{\Omega} \phi(\|h\circ f(x)\|)J(h\circ f(x))\,dx \\ &= \int\limits_{h(\Omega)} \phi(\|h\circ f\circ h^{-1}(x)\|)J(h\circ f\circ h^{-1}(x))\,dx,\end{aligned}$$

wobei ϕ die Funktion aus Lemma 1.2 sei. Damit folgt die Behauptung aus der Theorie, die wir im 1. Kapitel entwickelt haben. □

Satz 2.1 (Reduktion) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{R}^m$, $m < n$, ist identifiziert mit dem Teilraum des $\mathbb{R}^n$, für dessen Elemente x gilt*

$$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Sei $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ stetig und $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g(x) = x + f(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}^m$ mit $p \notin g(\partial\Omega)$

$$d_n(g, \Omega, p) = d_m(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p).$$

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß $g(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^m$.
Wir nehmen an, daß $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, und p regulär ist. Wir suchen nun x aus Ω, so daß $g(x) = x + f(x) = p \in \mathbb{R}^m$. Diese Forderung ist äquivalent zu $x = p - f(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $x \in \mathbb{R}^m$, und x ist also im Urbild von p bzgl. $g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$. Somit gilt $g^{-1}(p) = (g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m})^{-1}(p)$.
Zu zeigen ist nun, daß $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x))$. Dazu müssen wir die jeweiligen Gradienten berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\nabla g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x) &= I_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}, \\ \nabla g(x) &= \left(\begin{array}{c|c} I_m + \nabla f & \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \\ \hline 0 & I_{n-m}\end{array}\right), \qquad i = 1,\ldots,m;\ k = m+1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Entwicklung nach der „rechten unteren Ecke" liefert $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x))$. Aus der Theorie des 1. Kapitel folgt daher die Behauptung (vgl z.B. Defintion 1.1). □

2.2 Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray-Schauder

Wir betrachten nun die Abbildung $I-T\colon X \to X$, wobei T kompakt und X ein Banachraum sei. Es sei ferner $0 \in \Omega \subseteq X$ offen und beschränkt, sowie $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$. Wir wollen $d(I-T, \Omega, 0)$ definieren.

Der Einfachheithalber definieren wir den Abbildungsgrad nur für den Punkt 0. Es ist jedoch kein Problem, den Begriff des Abbildungsgrades auf beliebige Punkte $p \in X$ und $0 \notin \Omega$ zu erweitern.
Zuerst zeigen wir, daß eine positive Zahl r existiert, so daß

$$\|x - Tx\| \geq r > 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \in \partial\Omega$, so daß

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Da T kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in X$ und eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet, so daß $Tx_n \to x_0$. Damit folgt

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - x_0\|.$$

Beide Summanden auf der rechten Seite konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0,$$

auf Grund der Stetigkeit von T. Wir haben gezeigt, daß $x_0 - Tx_0 = 0$ mit $x_0 \in \partial\Omega$, da $\partial\Omega$ eine abgeschlossene Menge ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$.

Nun betrachten wir Abbildungen P_n mit $P_n \rightrightarrows T$, die (2.1) erfüllen. Nach (2.1) gibt es eine positive Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\|P_n x - Tx\| \leq \frac{r}{2} \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Ferner erhalten wir, daß $X_n \cap \Omega =: \Omega_n$ offen und beschränkt ist, wobei $X_n := R(P_n)$ ein linearer, endlich-dimensionaler Unterraum von X ist; sowie $\partial\Omega_n \subseteq \partial\Omega$.

Da $(I - P_n)(\Omega_n) \subseteq X_n$ und

$$\inf_{x\in\partial\Omega} \|x - P_n x\| \geq \inf_{x\in\partial\Omega} \Big(\|x - Tx\| - \|Tx - P_n x\|\Big) \overset{(2.3)}{\geq} r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0,$$

können wir $d_{X_n}(I - P_n, \Omega_n, 0)$ wie in (2.2) definieren.

Den Leray-Schauder Abbildungsgrad von $I - T$ bezüglich Ω und 0 können wir nun definieren als

$$d_X(I - T, \Omega, 0) := \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(I - P_n, \Omega_n, 0).$$

Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, daß der Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der P_n ist:

Seien dazu P_{n_1} und P_{n_2} zwei Abbildungen mit

$$\|P_{n_i}x - Tx\| \le \frac{r}{2} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ i = 1, 2.$$

Außerdem seien X_{n_i} die zugehörigen linearen, endlich-dimensionalen Unterräume von X, $\dim X_{n_i} < \infty$. X_m sei der kleinste lineare Raum, der X_{n_1} und X_{n_2} enthält. Aus Satz 2.1 folgt

$$d(I - P_{n_i}, \Omega_{n_i}, 0) = d(I - P_{n_i}, \Omega_m, 0), \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

wobei $\Omega_{n_i} = X_{n_i} \cap \Omega$ und $\Omega_m = X_m \cap \Omega$.

Wir betrachten die Homotopie $H\colon \Omega_m \times [0, 1] \to X_m$, definiert durch

$$H(x, t) = t(I - P_{n_1})(x) + (1 - t)(I - P_{n_2})(x).$$

Für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned}
\|H(x, t) - (I - T)(x)\| &= \|H(x, t) - (t + (1 - t))(I - T)(x)\| \\
&\le t\|(I - P_{n_1})(x) - (I - T)(x)\| + (1 - t)\|(I - P_{n_2})(x) - (I - T)(x)\| \\
&\le t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für alle $t \in [0, 1]$, $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\|H(x, t)\| &\ge \|(I - T)(x)\| - \|H(x, t) - (I - T)(x)\| \\
&\overset{(2.3)}{\ge} r - \frac{r}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Daher folgt nach Satz 1.5 (Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades), daß $d(H(., t), \Omega_m, 0)$ für alle $t \in [0, 1]$ konstant ist, d.h.

$$d(t_1(I - P_{n_1}) + (1 - t_1)(I - P_{n_1}), \Omega_m, 0) = d(t_2(I - P_{n_2}) + (1 - t_2)(I - P_{n_2}), \Omega_m, 0).$$

Für $t = 0$ und $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$d(I - P_{n_1}, \Omega_m, 0) = d(I - P_{n_2}, \Omega_m, 0).$$

Dies und (2.4) ergeben also

$$d(I - P_{n_1}, \Omega_{n_1}, 0) = d(I - P_{n_2}, \Omega_{n_2}, 0),$$

somit ist die Folge für $n \ge n_0$ konstant, der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der P_n.

2.3 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray-Schauder

Jetzt zeigen wir, daß der Abbildungsgrad von Leray-Schauder diesselben Eigenschaften hat wie der Abbildungsgrad von Brouwer.

Satz 2.2 *Falls $d(I-T,\Omega,0)\neq 0$, dann gibt es ein $x_0\in\Omega$, so daß $Tx_0=x_0$.*

Beweis: Wir wählen P_n, die (2.1) erfüllen. Für diese gilt für alle $n\geq n_0$

$$d(I-P_n,\Omega_n,0)\neq 0.$$

Daher folgt aus Satz 1.4, daß es ein $x_n\in\Omega_n$ gibt mit $P_nx_n=x_n$. Für x_n gilt

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_n\| &\leq \|x_n-P_nx_n\|+\|P_nx_n-Tx_n\|\\ &\leq 0+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Da T kompakt ist und die Folge $(x_n)\subset\Omega$ beschränkt, gibt es eine Teilfolge, wieder mit (x_n) bezeichnet, und einen Punkt $y\in\overline{\Omega}$, so daß $Tx_n\to y$ für $n\to\infty$.
Aus obiger Abschätzung folgt weiter, daß $x_n\to y$ für $n\to\infty$. Da T stetig ist, gilt außerdem $Tx_n\to Ty$ für $n\to\infty$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert dies $Ty=y$. Da $0\notin(I-T)(\partial\Omega)$ ist, gilt also $y\in\overline{\Omega}\setminus\partial\Omega=\Omega$. □

Definition 2.1 *Für $t\in[0,1]$ seien die Operatoren $T(t)\colon M\to X$ kompakt. Dann ist $T\colon t\to T(t)$ genau dann eine* Homotopie, *wenn für alle $\varepsilon>0$ und alle beschränkten Teilmengen $G\subseteq M$ ein $\delta>0$ existiert, so daß für alle $t_1,\ t_2 : |t_1-t_2|<\delta$, und alle $x\in G$ gilt:*

$$\|T(t_1)(x)-T(t_2)(x)\|\leq\varepsilon.$$

Satz 2.3 *Sei T eine Homotopie auf $\overline{\Omega}$, wobei Ω offen und beschränkt sei. Sei ferner $T(t)(x)\neq x$ für alle $t\in[0,1]$ und alle $x\in\partial\Omega$. Dann hat für alle $t\in[0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I-T(t),\Omega,0)$ denselben Wert.*

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß eine Zahl $r>0$ existiert, so daß für alle $t\in[0,1]$ und $x\in\partial\Omega$

$$\|(I-T(t))(x)\|\geq r.$$

Dies beweisen wir durch Widerspruch: Angenommen für alle n existieren $x_n\in\partial\Omega$, $t_n\in[0,1]$, so daß

$$x_n-T(t_n)(x_n)=y_n, \tag{2.5}$$

wobei $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Da die Folge $(x_n) \subset \partial\Omega$, ist die Folge der x_n beschränkt. Weiterhin folgt aus der Tatsache, daß $(t_n) \subset [0,1]$, die Existenz einer Teilfolge, wiederum mit (t_n) bezeichnet, und eines Punktes $t_0 \in [0,1]$ mit $t_n \to t_0$. Da der Operator $T(t_0)$ kompakt ist, folgt auch
$T(t_0)(x_n) \to y \in X$ für $n \to \infty$. Dies impliziert zusammen mit Definition 2.1

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - y\| &\leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - y\| \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Also $T(t_n)(x_n) \to y$ für $n \to \infty$. Wegen (2.5) folgt daraus auch $x_n \to y \in \partial\Omega$ für $n \to \infty$. Die Stetigkeit von $T(t_0)$ liefert $T(t_0)x_n \to T(t_0)y$ für $n \to \infty$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(y)\| &\leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - T(t_0)(y)\| \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

d.h. $T(t_n)(x_n) \to T(t_0)(y)$ für $n \to \infty$. Wenn wir daher in (2.5) zum Grenzwert übergehen, erhalten wir

$$y - T(t_0)(y) = 0,$$

wobei $y \in \partial\Omega$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Wir wählen nun ein $t_1 \in [0,1]$ fest und Abbildungen P_n, die (2.1) erfüllen, d.h. für $n \geq n_0$

$$\|P_n(x) - T(t_1)(x)\| \leq \frac{r}{4} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Da T eine Homotopie ist, gilt für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{4}.$$

Daher haben wir für alle t mit $|t - t_1| < \delta$

$$\|P_n(x) - T(t)(x)\| \leq \|P_n(x) - T(t_1)(x)\| + \|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{2}.$$

Die Definition des Abbildungsgrades von Leray-Schauder impliziert für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und n groß genug

$$d(I - P_n, \Omega_n, 0) = d(I - T(t), \Omega, 0),$$

wobei $\Omega_n = \Omega \cap X_n$ und $X_n = R(P_n)$, d.h. der Abbildungsgrad ist konstant auf dem Intervall $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Nun ist $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_1 \in [0,1]} (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \dots, t_m$ mit $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_j=1}^{m} (t_j - \delta, t_j + \delta)$. Also hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I - T(t), \Omega, 0)$ denselben Wert. $\square$

Satz 2.4 (Schauder) *Sei $\Omega \subseteq X$ offen, konvex, $0 \in \Omega$ und $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit $T(x_0) = x_0$.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 1.8 mit $H(x,t) = x - t\,T(x)$. □

Satz 2.5 (Borsuk) *Sei $\Omega \subseteq X$ beschränkt, offen und symmetrisch, $0 \in \Omega$, $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ ungerade und kompakt. Ferner sei $T(x) \neq x$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann ist $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade.*

Beweis: Sei $v_1, \ldots, v_p$ ein ε–Netz von $\overline{T(\overline{\Omega})}$. Setze $v_{p+1} = -v_1, \ldots, v_{2p} = -v_p$, sowie $v_{2p+1} = v_1, \ldots, v_{3p} = v_p$. Definiere

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))},$$

wobei

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - v_i\| & \text{für } \|x - v_i\| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x - v_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Es gilt: $\dim R(P_n) < \infty$, $\Omega \cap R(P_n)$ ist symmetrisch und $P_n \rightrightarrows T$ (vgl. Beweis von Satz 2.3, Teil A). Außerdem sind die P_n ungerade, denn

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))} = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))}, \tag{2.6}$$

denn $T(x) = -T(-x)$, $v_i = -v_{i+p}$, $i = 1, \ldots 2p$, und

$$m_i(T(x)) = \varepsilon - \|T(x) - v_i\| = \varepsilon - \| - T(-x) - v_i\| = \varepsilon - \|T(-x) - v_{i+p}\| = m_{i+p}(T(-x)).$$

Dies zusammen mit der Definition von $v_{2p+1}, \ldots, v_{3p}$ liefert, daß man $P_n(x)$ auch schreiben kann als

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))},$$

also erhalten wir aus (2.6), daß $P_n(x) = -P_n(-x)$. Mit Satz 1.7 folgt, daß $d(I - P_n, \Omega_n, 0)$ ungerade ist. Demnach ist nach Definition des Abbildungsgrades $d(I - T, \Omega, 0)$ ist ungerade. □

Literatur

[1] Adams, R.A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Alt, H.W.: Lineare Funktionalanalysis, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2. Auflage, 1992.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators Part I, General Theory, Interscience Publishers Inc., New York, 1967.

[4] Fischer, W., Lieb, I.: Funktionentheorie, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 7. Auflage, 1994.

[5] Frehse, J.: Skript zur Vorlesung Infinitesimalrechnung III WS 1997/98.

[6] Frehse, J.: Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis I WS 1998/99.

[7] Fučik, S., Nečas, J., Souček, J., Souček, V.: Spectral Analysis of Nonlinear Operators, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.

[8] Gajewski, H., Gröger, K. and Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialungleichungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[9] Königsberger, K.: Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 3. Auflage, 1995.

[10] Nagumo, M.: Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer. J. Math., 73, S. 497–511, 1951.

[11] Pascali, D., Sburlan, S.: Nonlinear Mappings of Monotone Type, Academiei Bucuresti, 1973.

[12] Yosida, K.: Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 6. Auflage, 1980.

[13] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.

[14] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, 1990.

[15] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, 1990.

[16] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications III, Variational Methods and Optimization, Springer-Verlag, New York, 1985.