École Polytechnique fédérale de Lausanne

Département de Physique

De l'introduction des nombres complexes au théorème fondamental de l'algèbre

De Bombelli à Argand

Projet Science Technique et Société

Patrik Ferrari

Lausanne, 2000

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Équations de troisième degré et introduction des nombres complexes **3**

2.1 Solution du premier cas : $x^3 + px = q$ 3

2.2 Solution des autres deux cas et l'apparition du *casus irreducibilis* 4

2.3 Bombelli et les nombres imaginaires 5

2.3.1 Méthode trigonométrique pour le *casus irriducibilis*. . . 6

2.3.2 Preuve géométrique de l'existence d'une solution positive de $x^3 = px + q$ 7

2.3.3 Introduction du " i " et des règles de calcul 8

3 Interprétation géométrique des nombres complexes **11**

3.1 Survol historique 11

3.2 Argand et l'interprétation géométrique des nombres complexes 12

3.2.1 Les nombres négatifs sont-t-ils imaginaires ? 12

3.2.2 Les nombres complexes et le plan 2-dimensionnel . . . 13

4 Théorème fondamentale de l'algèbre **16**

4.1 Introduction historique 16

4.2 La preuve de Argand 17

Remerciements **20**

Références **21**

Chapitre 1

Introduction

Ce travail sur les nombres complexes s'inscrit dans le contexte de l'histoire des mathématiques. Il représente un travail d'approfondissement suite au cours STS d'histoire des mathématiques I et II que j'ai suivis en III année. Dans ce travail on étudie quelques points essentiels de la découverte des nombres complexes. Remarquons qu'à partir de l'introduction des nombres complexes au XVI$^{\text{ème}}$ siècle par Bombelli, il a fallu plus que 200 ans avant qu'ils soient acceptés complètement par les mathématiciens. Une fois les nombres complexes bien établis ils on été vite utilisés dans des théories physiques (électrodynamique, mécanique quantique) et ensuite dans les domaine qui en découlent (électronique).

Dans la première partie, on part de la description du problème des équations de 3$^{\text{ème}}$ degré[1] pour aboutir à l'introduction d'une "nouvele sorte de racine" avec des règles de calcurs propres, la "$\sqrt{-k}$" avec k positif, par Bombelli (1572).

Dans la deuxième partie on se concentre sur l'interprétation géométrique des nombres complexes par Argand. On va remarquer que les nombres complexes ne sont pas plus "imaginaires" que les nombres négatifs.

Enfin dans la troisième partie on présente une interessante application de l'interprétation de Argand : la preuve la plus simple du théorème fondamental de l'algèbre.

[1]En fait les nombres complexes n'ont pas été introduits pour résoudre les équations du type $x^2 + 1 = 0$, comme on pourrait penser, de même que les nombres négatifs n'ont pas été introduits pour donner une soulution à l'équation $x + 1 = 0$!

Chapitre 2

Équations de troisième degré et introduction des nombres complexes

Depuis le XIV$^{\text{ème}}$ siècle en Italie des tentatifs systématiques pour résoudre l'équation du troisième degré furent entrepris. En partant de l'équation *générale*

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$

après division des coefficients numériques par A on se retrouve avec l'équation dans sa forme *normale* :

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0.$$

Le changement de variable $x \doteqdot y + \frac{a}{3}$ permet d'éliminer le terme quadratique et de trouver sa forme *réduite* :

$$x^3 + px + q = 0.$$

Suivant les signes de p et q on peut distinguer les trois cas suivants :

1. $x^3 + px = q$
2. $x^3 = px + q$
3. $x^3 + q = px$

avec p et q positifs.

L'équation étant de degré impair a toujours une solution réelle, de plus les deux premiers types ont toujours une solution positive, qui au seizième siècle est encore préférée aux solutions négatives (la première solution négative acceptée se trouve dans un traité provençal écrit en 1'435 dans la ville de Pamiers, l'auteur est anonyme).

2.1 Solution du premier cas : $x^3 + px = q$

Peu après 1'500 Scipione Dal Ferro, qui était professeur à l'université de Bologna, résolut l'équation $x^3 + px = q$ avec p, q positifs. A l'époque on n'écrivait pas encore les équations avec les notations algébriques modernes, qui furent introduites que plus tard[1]. Voici la traduction de la méthode établie par Dal Ferro :

> Cube la troisième partie des *choses* (=le coefficient de l'inconnue, p), puis carre la moitié du *nombre* (=le terme constant, q), et ajoute ceci au cube. La racine carrée de cette somme plus la moitié du *nombre* donne un *binôme* ($=\sqrt{\alpha}+\beta$), et la racine cubique de ce *binôme* moins la racine cubique de son *résidu* ($=\sqrt{\alpha}-\beta$) donne la *chose* (=l'inconnue, x).

Traduit en écriture algébrique moderne, ceci correspond à :

$$x^3+px=q \quad\Longrightarrow\quad x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\tfrac{p}{3}\right)^3+\left(\tfrac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\tfrac{p}{3}\right)^3+\left(\tfrac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}}\ .$$

2.2 Solution des autres deux cas et l'apparition du *casus irreducibilis*

En Italie du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, l'obtention d'une place ou d'une bourse dépendait de victoires lors de défis publics. C'est la raison pour laquelle Dal Ferro ne publie pas sa découverte, mais il la confie à l'un de ces étudiants : Antonio Maria Fior. Celui-ci lance un défi à Niccolò Fontana (plus connu sous le nom de Tartaglia) en se servant de cette formule. Mais Tartaglia parvient à la découverte de la formule et l'étend au cas $x^3=px+q$ (de même forme que la précédente). Toutefois Tartaglia n'est jamais allé au-delà de la formule de Dal Ferro, parce qu'il ne connaissait pas, entre autre, les transformations algébriques qui permettent d'éliminer le terme du deuxième degré, de façon à appliquer la formule même dans le cas plus générale.

Cardano et son *discipulus* Lodovico Ferrari[2], par contre, ont développé la théorie générale des équations de troisième degré. Il restait un seul cas non résolu, le dite *casus irriducibilis*. Ils ont publié un manuel l'algèbre, c'est pourquoi une formule équivalente à celle trouvée par Dal Ferro est appelée

---

[1] Dans *l'Algebra* Bombelli introduit un symbolisme nouveau : il utilise des parenthèses, des indices pour les radicaux et introduit une représentation des puissances de l'inconnue qui amènera successivement à l'écriture moderne des puissances.

[2] Ferrari a aussi contribué à la résolution des équations de 4ème degré. Il a résolu un problème proposé par Da Coi, qui le pensait impossible, à son maître Cardan. La méthode utilisée est conforme à la résolution générale des équations de 4ème degré.

formule de Cardan :

$$x^3+px+q=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}\ .$$

Soit à nouveau l'équation sous forme réduite : $x^3+px+q=0$. Il se trouve qu'il existent trois cas :

1. Si $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$, alors il y a seulement une solution réelle (et deux complexes, conjuguées).
2. Si $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$, alors il y a trois racines réelles, dont une est double :
$$x_1=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \text{ et } x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$
3. Si $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ alors on a trois racines réelles, mais si on cherche d'appliquer la formule de Cardan, on se retrouve avec une racine carrée négative. C'est le *casus irridducibilis*. Cette situation peut apparaître seulement dans les cas 1. et 2.

Dans la prochaine section on va voir comment le cas irréductible à été abordé et résolu.

2.3 Bombelli et les nombres imaginaires

C'est dans l'*Algebra* de Bombelli[3], parue en 1'572, qu'on trouve les premières considérations sur les nombres complexes. Dans les cas 2. et 3.,

$$x^3 \pm q = px,$$

si le discriminant $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ est négatif on se retrouve dans le cas irréductible, qui correspond au cas de trois racines réelles distinctes. Néanmoins Bombelli avait remarqué que l'application de la formule de Cardan à l'équation $x^3=15x+4$, qui a une solution évidente $x=4$, mène a :

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\ .$$

De plus Bombelli avait démontré géométriquement[4] que le cas $x^3=px+q$ a toujours une solution positive, même si le discriminant est négatif. Tout d'abord Bombelli pensait de pouvoir appliquer les lois de calcul des racines

[3]Dans l'Algebra Bombelli traite de façon complète aussi les équations du 4ème degré et analyse les 42 cas qui peuvent apparaître.

[4]Pour la preuve, voir sous-section 2.3.2

carrées des nombres positifs aussi aux racines des nombres négatifs, mais il s'est aperçu que ces éléments étaient des entités d'une nature spéciale pour lesquelles il fallait des symboles appropriés et un algorithme de calcul différent[5]. Il a introduit un nouveau symbol, appelé *più di meno* $(= +i)$ lorsqu'on le sommait et *men di meno* $(= -i)$ lorsqu'il était soustrait, et il a donné 8 règles de calcul[6].
Pour pouvoir effectuer le calcul, Bombelli a établi une formule qui permet de transformer des racines cubiques en une forme dans laquelle la partie réelle et celle imaginaire sont séparées :

$$\sqrt[3]{m \mp \sqrt{-n}} = u \mp \sqrt{-v} \ .$$

où les nombres u et v doivent satisfaire les équations suivantes :

$$u^2 + v = \sqrt[3]{m^2 + n} \quad \text{et} \quad u^3 - 3uv = m.$$

En utilisant la formule de Cardan, les deux termes avec la racine carrée négative s'éliminent et on trouve un nombre réel. Dans l'exemple ci-dessus, on a : $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$.

L'utilisation des nombres imaginaires a été de fait limitée par deux circumstances :

1. les deux équations donnant u et v en fonction des quantités m et n amènent à un'équation pour u de troisième degré qui est sujette aux mêmes difficultés que l'équation de départ (on retombe sur un cas irréductible).
2. peu après, autour du 1'600, François Viète (1540-1603) développe une méthode trigonométrique qui donne directement les trois solutions réelles et qui s'applique exactement dans le cas irréductible.

2.3.1 Méthode trigonométrique pour le *casus irriducibilis.*

La méthode trigonométrique se base sur l'identité

$$\cos(3\alpha) = 4\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha) \ .$$

En posant $\varphi \doteqdot 3\alpha$ et multipliant le tout par ρ^3 on trouve une équation qui est comparée avec l'équation réduite de troisième degré :

$$\left(\rho\cos(\tfrac{\varphi}{3})\right)^3 - \frac{3}{4}\rho^2\left(\rho\cos(\tfrac{\varphi}{3})\right) - \frac{\rho^3}{4}\cos(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + px + q = 0 \ .$$

[5]Par exemple, on ne peut pas appliquer la règle $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, sinon on aurait $\sqrt{-1}\sqrt{-9} = \sqrt{9} = 3$, mais $\sqrt{-1}\sqrt{-9} = -3$.

[6]Voir sous-section 2.3.3 pour plus de détails liés aux règles de calcul.

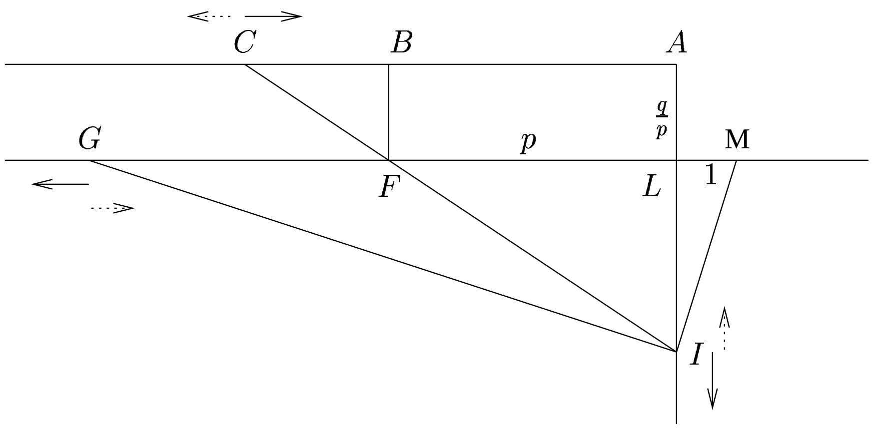


Figure 2.1:

En posant $x = \rho\cos(\frac{\varphi}{3})$, $\rho = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $\cos(\varphi) = \frac{-4q}{\rho^3}$, on peut déterminer ρ grâce à p, puis $\cos(\varphi)$, donc φ et enfin on trouve x. Cette formule est applicable seulement si $p < 0$ (donc cas 2. et 3.) et $\left(\frac{4q}{\rho^3}\right)^2 \leq 1$, c'est-à-dire si le discriminant est négatif. Comme φ est déterminée à 2π près, on trouve trois solutions pour l'argument du cosinus de $\frac{x}{\rho}$: $\alpha_k = \frac{\varphi+k2\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

2.3.2 Preuve géométrique de l'existence d'une solution positive de $x^3 = px + q$

Voici la démarche qui permet de prouver géométriquement l'existence d'une solution positive de $x^3 = px + q$.

1. Soient deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, $FL = p$, $AL = \frac{q}{p}$ et $LM = 1$. Alors l'aire du rectangle $BFLA$ vaut q.
2. Soit une équerre avec son sommet sur AL en I et l'un de ses bras par M fixé, l'autre rencontre LF prolongée en G.
3. Soit une droite passant par F et I, rencontrant AB prolongée et C.
4. Le mouvement de I implique un mouvement de G et C comme dans la figure 2.1, donc existe une situation dans laquelle G et C sont alignés verticalement (voir figure 2.2).
5. Pour le théorème des compléments, l'aire de $GFHJ$ est égale à l'aire de $HBFL$, donc $\text{Aire}(GLIJ) = \text{Aire}(BHIA)$, où $\text{Aire}(GLIJ) = GL \cdot LI$ et $\text{Aire}(BHIA) = AB \cdot AI$. De plus $GL \cdot LM = GL \cdot 1 = LI^2$. Donc en posant $LI = x$ on trouve $x^3 = px + q$.

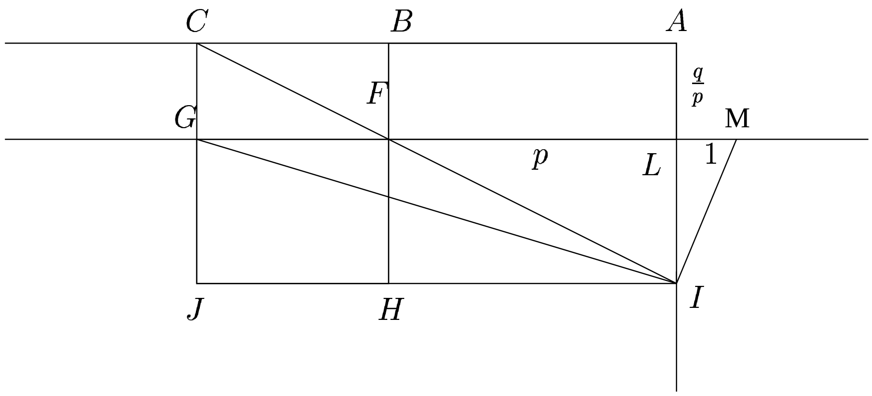


Figure 2.2:

2.3.3 Introduction du " i " et des règles de calcul

On suit le livre de Bombelli, l'Algebra, dans laquelle il a introduit les nombres imaginaires.
On reporte ici les textes originaux avec lequel Bombelli introduit les nombres imaginaires, accompagnés de traductions, des fois simplifiées dans lesquelles il y a l'essentiel.
Il commence on notant qu'il a trouvé un nouveau type de racine :
Ho trovato un'altra sorte di R.c. (=radice cubiche) legate[7] molto differente dall'altra, la qual nasce dal capitolo di cubo eguale a tanti (=coefficiente dell'incognita : p) e numero (=coefficiente costante : q), quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso capitolo si dimostrarà, la qual sorte di R.q. (=radice quadrata) ha nel suo algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome. Perchè, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare nè più, nè meno, però (=perciò) lo chiamerò *più di meno* quando egli si dovrà aggiungere, e, quando si dovrà cavare lo chiamerò *men di meno*, e questa operatione è necessarissima più che le altre R.c.L. per rispetto delli capitoli di potenze di potenze accompagnati con li cubi o tanti o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di radice che quelli dove nasce l'altra la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io sin che ho trovato la sua dimostrazione in linee (come si dimostrarà nella dimostratione del detto capitolo in superficie piana).

[7] Un'expréssion du type $\sqrt[3]{\sqrt{n} \pm m}$.

Traduction : *J'ai trouvé un autre type de racines cubiques liés (voir note 7), qui apparaît lorsque le discriminant est négatif. Vu que le discriminant est négatifs, sa racine n'est ni positive, ni négative, c'est pourquoi je vais l'appeler* più di meno *(=plus de moins) s'il faudra l'ajouter et* men di meno *(=moins de moins) s'il faudra l'enlever. [...] cette sorte de racine semblera plutôt formelle (sophistique) que réelle, et c'est l'opinion que j'avais moi aussi jusqu'à que j'ai trouvé sa démonstration géométriquement*[8].

Il introduit ensuite les huit règles de calcul pour ce nouveau objet :

più via più di meno fa più di meno	$\Longrightarrow$	$+\cdot +i = +i$
meno via più di meno fa meno di meno	$\Longrightarrow$	$-\cdot +i = -i$
più via meno di meno fa meno di meno	$\Longrightarrow$	$+\cdot -i = -i$
meno via meno di meno fa più di meno	$\Longrightarrow$	$-\cdot -i = +i$
più di meno via più di meno fa meno	$\Longrightarrow$	$+i\cdot +i = -$
più di meno via men di meno fa più	$\Longrightarrow$	$+i\cdot +i = +$
meno di meno via più di meno fa più	$\Longrightarrow$	$-i\cdot +i = +$
meno di meno via men di meno fa meno	$\Longrightarrow$	$-i\cdot -i = -$

Mais Bombelli ajoute qu'il faut remarquer que ce type de racines liées apparaîssent que lorsque le binôme et son résidus sont présent contémporanément, de sorte que lorsqu'on les somme la partie imaginaire disparaît. À ce propos il écrit : Si deve avvertire che tal sorte di radici legate non possono intravenire se non accompagnato il Binomio col suo Residuo [...] e avvertiscasi che quando si dice il Residuo di un Binomio, che quello che si chiama più di meno nel Binomio si chiamerà men di meno nel Residuo.

Bombelli donne ensuite plusieurs applications, dont on va en présenter deux, parce que c'est intéressant de voir de quelle façon les mathématiques étaient présentés à l'époque. Bombelli utilise déjà un symbole pour les parenthèses, mais c'est encore très lois de l'écriture algébrique moderne. En effet à cette époque ils ne présentaient pas encore les théories avec des lettres à la place des coefficients numériques (p et q dans le cas présent) mais ils donnaient différents exemples avec des nombres (entiers normalement). De plus ils écrivaient les passages comme aujourd'hui on lit les expressions algébriques.
Voici donc des applications employées par Bombelli pour montrer l'utilisation des nombres imaginaires. Tout d'abord introduisons quelques notations utilisés par Bombelli dans son texte original : "R.c." c'est la racine cubique, "R.q." c'est la racine carrée[9], $\lfloor x \rfloor$ indique la quantité x entre parenthèses.

[8]La démonstration que l'on vient de voir dans la sous-section 2.3.2.
[9]Car en italien racine carrée s'écrit *radice quadrata*.

Dans cette application il montre la méthode pour calculer le carré d'une racine liée :

$$\sqrt[3]{2+i\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1+i\sqrt{48}}\ .$$

Moltiplichisi R.c.$\lfloor 2+di-R.q.3\rfloor$ per R.c.$\lfloor 2+di-R.q.3\rfloor$. Per far questo prima si moltiplichi $+di-R.q.3$ per $+di-R.q.3$, fa -3, poi si moltiplichi 2 via 2 fa 4,che gionto con -3 fa $+1$, fatto questo si moltiplichi 2 via $+di-R.q.3$,fa $+di-R.q.12$, e per l'altra volta fa il medesimo, cioè $+di-R.q.12$, che gionte insieme e poi con il $+1$ fa $1+di-R.q.48$, che di questo toltone la R.c. haveremo R.c.$\lfloor 1+di-R.q.48\rfloor$ per produtto della proposta moltiplicatione.

But : calculer $\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}$. Pour cela commencer par multiplier $i\sqrt{3}$ par $i\sqrt{3}$, donne -3, puis multiplier 2 par 2 que fait 4. Ajoutant ces deux résultats on obtient $+1$. Ensuite multiplier 2 par $i\sqrt{3}$, que donne $i\sqrt{12}$, de même une autre fois, et leur somme donne avec le $+1$ donne $1+i\sqrt{48}$. En prendre la racine cubique et on trouve $\sqrt[3]{1+i\sqrt{48}}$ qui est la solution de la multiplication.

Dans cette deuxième application il montre comment multiplier deux racines liées telles que dans la première il y a un binôme en dans la deuxième son résidu :

$$\sqrt[3]{5+i\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{5-i\sqrt{2}}=3\ .$$

Moltiplichisi R.c.$\lfloor 5+di-R.q.2\rfloor$ per R.c.$\lfloor 5-di-R.q.2\rfloor$, per farlo si moltiplichi $+di-R.q.2$ via $-di-R.q.2$ fa $+2$. Poi si moltiplichi 5 via 5 fa 25, che gionto con $+2$ fa 27. Poi si moltiplichi 5 via $+di-R.q.2$ fa $+di-R.q.50$ et 5 via $-di-R.q.2$ fa $-di-R.q.50$, che gionte insieme fanno nulla, e nulla con 27 fa 27, che la sua R.c. è 3 e 3 è il produtto cercato.

But : calculer $\sqrt[3]{5+\sqrt{-2}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{-2}}$. Pour le faire, multiplier $i\sqrt{2}$ par $-i\sqrt{2}$, donne $+2$. Puis multiplier 5 par 5 qui est 25, y ajouter 2 et on trouve 27. Puis multiplier 5 par $i\sqrt{2}$, donne $i\sqrt{50}$ et 5 par $-i\sqrt{2}$ qui donne $-i\sqrt{50}$. La somme de ces deux derniers termes donne 0, qui sommé aver 27 donne 27. Prendre enfin sa racine cubique, on a 3, qui est le produit cherché.

Chapitre 3

Interprétation géométrique des nombres complexes

3.1 Survol historique

Les premières vagues notions sur une corréspondance entre les nombres complexes et les points du plan ont étés avancées en 1685 par le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703). Mais ses idées n'étaient pas claires. Puis en 1798 Caspar Wessel (1745-1818), norvégien, dans le but de manipuler des segments de droites orientés dans un plan, a eu l'idée de les représenter par des nombres complexes. Il a introduit un axe imaginaire, orthogonal à l'axe des nombres réels et les vecteurs du plan ont étés interprétés comme des combres complexes.

Jean Robert Argand (1768-1822), un comptable, a donné une inteprétation géométrique nouvelle. En effet il a interprété $\sqrt{-1}$ comme une rotation d'angle droit justifiant ceci par le fait que deux rotations consécutives d'un angle droit donnent l'angle plat, analoguement à $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$. Dans la suite on va s'interesser aux travaux de Argand. Les travaux de Wessel et Argand sont restés sans beaucoup d'influence. Mais il faut remarquer que c'est Argand le premier qui a donné une explication claire de la représentation géométrique des nombres complexes.

Leonhard Euler (1707-1783) a utilisé très bien les nombres complexes ; il a élaboré entre autre un'expression des fonction trigonométriques en terme d'exponentielles, les *formules d'Euler* : $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$. Bien qu'il n'a pas construit une théorie sur la représentation géométrique des nombres complexes, en 1749 il écrit : [...] Dans chaque autre cas le nombre x est imaginaire : pour le montrer, il suffit de considérer un arc g du cercle unité et de déterminer son sinus et son cosinus. Le nombre cherché est alors $x = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g$.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a donné un important contribu à la diffusion dans les domaines scientifiques de l'interprétation des nombres complexes comme paire de nombres réels, donc représentables dans un plan 2-dimensionnel. En 1811 il écrit : [...] On peut imaginer de représenter tout le domaine des grandeurs réelles comme une ligne droite infinie, et de même, on peut visualiser le domaine complet de toutes les grandeurs, nombres réelles ou imaginaires comme un plan infini, dans lequel le point d'ordonnée a et d'abscisse b, représente la grandeur $a + ib$.

3.2 Argand et l'interprétation géométrique des nombres complexes

Avant d'aborder tout de suite le problème des nombres complexes, Argand met l'accent sur le fait que déjà les nombres négatifs peuvent être imaginaires, mais on peut leur donner un sens aussi réel qu'aux nombres positifs. Ensuite il aborde le problème des nombres complexes. Il pose le problème de déterminer la *moyenne proportionnelle géométrique*[1] entre deux quantités de signes opposés. Il exprime les quantités $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ comme des directions orthogonaux aux directions $+1$ et -1. Finalement il considère la relation entre un nombre complexe quelconque, non seulement imaginaire pur ou réel, et les directions des directions dans le plan (les demi-droites orientés).

3.2.1 Les nombres négatifs sont-t-ils imaginaires ?

Soit a une grandeur quelconque. Si on lui ajoute la même grandeur plusieurs fois on obtient la suite $a, 2a, 3a, \ldots$, une suite infinie. Si par contre on considère la suite à rebours, on a : $\ldots, 3a, 2a, a, 0$. Si on cherche de continuer cette suite au-delà du 0, on se rend compte qu'on ne peut pas toujours le faire. Par exemple, si a désigne un poids matériel comme le gramme la suite s'arrête à 0, et les termes qui devraient suivre le 0 ne peuvent exister que dans l'imagination. Ils peuvent par conséquence être appelés *imaginaires*.
Mais il y existe une possibilité de donner un sens aux nombres négatifs même dans ce cas. Considérons une balance avec deux bassins A et B étallonée de façon que l'adjonction d'un poids[2] dans le bassin A fait augmenter la mesure d'une unité, m. Donc si on ajoute successivement des poids dans le bassin A on trouve la première suite (avec le bassin B vide pour le moment). En enlevant les poids on trouve la deuxième suite. Mais la deuxième suite peut être obtenue aussi en ajoutant des poids sur le bassin B et donc la balance à un certain moment mesurera des pesanteurs $-1m, -2m, -3m, \ldots$, donc des poids négatifs. En conclusion, si deux mesures sont de signe opposé, par exemple $5m$ et $-5m$, ils exprimeront deux états de la balance tels que l'ex-

[1] La moyenne proportionnelle géométrique entre deux nombres a et b est la quantité x qui est à a comme b est à elle, i.e. $a : x = x : b$.

[2] En fait on utilise des poids étalons identiques.

trémité qui marque les unités de pesanteur sont également éloignés du point 0. Par conséquence on peut considérer cet éloignement en faisant *abstraction du sens* dans lequel il a lieu et lui donner le nom *d'absolu*.

C'est ce concept de considérer les nombres comme grandeurs absolues associées à des *directions* qui va être utilisé pour la représentation des nombres complexes dans le plan.

3.2.2 Les nombres complexes et le plan 2-dimensionnel

Si on regarde le rapport des directions des nombres réels, on a seulement deux cas :

$$+1 : +1 = -1 : -1$$
$$+1 : -1 = -1 : +1$$

On voit immédiatement que les termes moyens (i.e. les deux les plus proches du signe =) sont de même signe si les extrêmes (i.e. les deux autres termes) le sont aussi, et sont de signe opposé si les extrêmes le sont. Jusqu'ici rien de particulièrement surprenant, étant les éléments considérés réels.
Si par contre on cherche de déterminer la *moyenne proportionnelle géométrique* entre deux quantités de signes différents[3], c'est-à-dire chercher x telle que :

$$+1 : x = x : -1,$$

alors on est bloqué car il n'existe pas de nombres réels avec cette propriété, comme on vient de le remarquer.

Argand se demande si c'est possible d'opérer comme dans le cas des nombres négatifs en reprenant l'idée d'associer à ce x une grandeur réelle et une direction, naturellement différente de $+1$ et -1. Il écrit à ce propos :

> En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but[a] si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel put s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que *la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.*
>
> [a]Le but est de trouver ce x.

Après cette remarque il indique comment construire cette nouvelle direction pour les nombres.

[3]La moyenne géométrique de $+1$ et -1 dans l'exemple

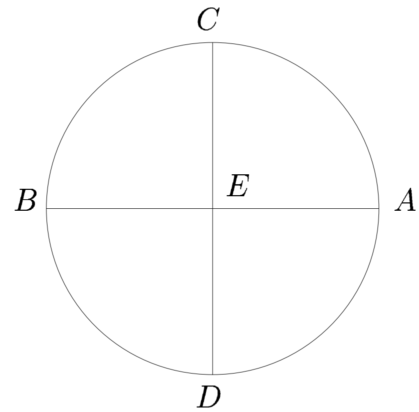


Figure 3.1: Construction géométrique de $\sqrt{-1}$ et de $-\sqrt{-1}$.

Prenons un point fixe E, comme dans la figure 3.1 et considérons comme unité positive la ligne $\overline{EA}$[4], par conséquence l'unité négative est $\overline{EC}$. La condition qui détermine la direction cherchée, c'est-à-dire qui doit être à $\overline{EA}$ comme elle est à $\overline{EC}$, est satisfaite par les directions $\overline{EB}$ et $\overline{ED}$. Ces deux quantités sont bien entre $+1$ et -1. De plus elles sont ce qu'on exprime normalement par $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. C'est bien ce qu'on devait établir, car le point de départ était de trouver une quantité x telle que $1 : x = x : -1$, que peut se récrire par l'équation $x^2 = -1$, dont les solutions sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Argand ajoute que les relations établies ne nécessitent pas que les directions partent d'un point unique fixé E, mais qu'elles sont encore vraie si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{EA}$ désigne en général une grandeur égale à EA et prise dans la même direction, même si le point de départ n'est pas le même.

Finalement il considère la situation avec des directions quelconque : [...] on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive ($\overline{EA}$) est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

[4]Notations : XY signifie la grandeur de la direction $\overline{XY}$.

Et il conclu en disant :

> Mais ces lignes sont des quantités *tout aussi réelles* que *l'unité primitive* ; elles en dérivent par combinaison de l'idée de la direction avec l'idée de grandeur, et elles sont, à cet égard, ce qu'est la ligne négative, qui n'est nullement regardée comme imaginaire.

Donc Argand montre que les nombres complexes ne sont pas seulement des quantités imaginaires, mais qu'on peut même leur donner un sens aussi réel que les nombres positifs (et négatifs).
Argand a introduit la notation des lignes dirigées, mais il n'a poussé plus loin son travail. En particulier il n'a pas complété le développement algébrique. Il remarque quand même que serait possible de le faire. En effet il termine en écrivant :

> Il semble que, pour y parvenir[a], il faudrait rapprocher l'expression des imaginaires de la notation des lignes dirigées, en écrivant, par exemple,
>
> $$\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right] \quad \text{pour } a+b\sqrt{-1}\ .$$
>
> $\sqrt{a^2+b^2}$ pourrait être appelé le *module* de $a+b\sqrt{-1}$, et représenterait la *grandeur absolue* de la ligne $a+b\sqrt{-1}$, tandis que l'autre facteur, dont le module est l'unité, en représenterait la *direction.* On prouverait seulement 1° que *le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités*, ce qui revient à dire que la ligne AF n'est pas plus grande que la somme des lignes $AB, BC, \dots, EF$; 2° que *le module du produit est égal au produit des modules de ces quantités.* Je dois laisser le soin de suivre ce rapprochement à des calculateurs plus habiles.
>
> [a] À une traduction dans le langage ordinaire de l'analyse

Chapitre 4

Théorème fondamental de l'algèbre

4.1 Introduction historique

Le théorème fondamental de l'algèbre, affirmant qu'un polynôme de degré n possède n solutions (comptées avec leur multiplicité) dans le corps $\mathbb{C}$, a été un défi resolu correctement que vers la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Pour les polynômes réels de degré 1 à 4 on peut donner une procédure explicite pour en trouver les solutions explicites, mais pour les polynômes de degré supérieurs ou égaux à 5 c'est impossible d'obtenir une telle procédure dans le cas général. Cette impossibilité a été demontrée en 1826 par N.H. Abel. En 1629 Albert Girard (1595-1632) énonce une thèse qui correspond grosso-modo à celle du théorème fondamental de l'algèbre, mais il ne donne pas une demonstration, c'est plutôt une conjecture.

Dans une lettre adressée à N. Bernoulli, Euler énonce le théorème fondamental pour les polynômes réels. Euler a prouvé rigoureusemente ce théorème pour les polynômes de degré inférieurs ou égaux à 6. En 1749 il a cherché de resoudre le cas général et deux ans plus tard il donne une démonstration, qui toutefois n'est pas complètement rigoureuse.

En 1746 Jean de Rond D'Alembert (1717-1783) tente de donner une démonstration rigoureuse, sans pourtant y arriver. Il publie en 1748 sa solution, dans laquelle il emploie sans la prouver une proposition démontrée correctement qu'en 1851 par Puiseux. En 1712 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) amélieure la démontration de Euler, mais sa solution n'était pas non plus correcte.

En 1799, à l'age de 22 ans, Gauss publie sa thèse doctorale avec sa première démonstration. Il commence sa thèse avec un examen critique de toutes les tentatives précédentes de prouver le théorème fondamental de l'algèbre. Ensuite il en donne une démonstration correcte. L'objection principale de Gauss était que dans ces preuves on supposait toujours l'existence d'un point où le polynôme s'annule alors que c'était précisement ce que l'on voulait démontrer.

Gauss a donné en tout quatre démonstrations. L'apport fondamental de la première preuve de Gauss est qu'il a cherché à prouver l'existence d'une racine et non à la calculer. Cette démonstration est topologique. En 1816 il donne une autre preuve presque complètement algébrique, et dans la même année il donne sa troisième démonstration basée encore sur la topologie, mais différente de la première. Ces trois premières démonstrations étaient valables que pour les polynômes réels. Finalement, en 1849, il a donné une démonstration correcte aussi valable pour les polynômes à coefficients complexes. Elle est en fait une variante de la preuve donnée 50 ans avant.

La plus simple de toutes les preuve du théorème fondamental de l'algèbre a été donné par Argand (1768-1822) en 1814. Au débout sa preuve n'a pas été acceptée parce qu'il ne dit rien pour justifier l'existence d'un minimum. En fait il a fallu l'introduction du concept de borne inférieure, l'infimum, pour que sa preuve devienne correcte au cent pour cent. Toutefois la preuve de Argand reste la plus simple, c'est la raison pour laquelle on la presente ci-dessous.

4.2 La preuve de Argand

On reporte dans cette section la preuve du théorème fondamental de l'Algèbre donnée par Argand dans[2]. Argand veut démontrer notamment que

tout polynôme $x^n + ax^{n-1} + \cdots$ est décomposable
en facteurs du premier ou du second degré.

Ce résultat s'établie soit en résolvant le polynôme considéré en facteurs réels du premier et du second degré, soit en montrant l'existence d'une quantité de la forme $a+b\sqrt{-1}$ qui prise pour x rend nul le polynôme. C'est cette méthode qui est appliquée par Argand. Dans la preuve de Argand qui va suivre j'ai remplacé la variable i, qui ne correspond pas à $\sqrt{-1}$ dans sa preuve, par t, et j'ai remplacé le prime qu'il a utilisé pour symboliser le module par $|\cdot|$. Passons donc à la preuve de Argand, qui est une preuve par contradiction. Pour suivre la démostration regarder la figure 4.1.

Soit donc le polynôme proposé

$$y_x = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + fx + g,$$

n étant un nombre entier ; $a, b, \cdots, f, g$ peuvent être de la forme $m + n\sqrt{-1}$. Il s'agit de prouver qu'on peut toujours trouver une quantité de cette même forme qui, prise pour x, rende $y_x = 0$.

Pour une valeur quelconque de x, le polynôme peut être construit par les règles précédentes[1]. En prenant K pour point initial, et nommant P le point final, ce

[1]Argand avait précédentement donné la règle géométrique permennant de dessiner le produit de deux nombres complexes (on somme les angles des directions et on multiplie

polynôme sera exprimé par $\overline{KP}$, et il faut montrer qu'on peut déterminer x de manière que le point P coincide avec K.

Or si, dans l'infinité de valeurs dont x est susceptible, il n'y en avait aucune qui donnât lieu à cette coincidence, la ligne $\overline{KP}$ ne pourrait jamais devenir nulle ; et, de toutes les valeurs de KP, il y en aurait nécessairement une qui serait plus petite que toutes les autres. Nommons donc z la valeur de x qui donnerait ce minimum[2] ; on ne pourrait pas avoir

$$| y_{(z+t)} |<| y_z |$$

quelle que fût la quantité t.

Or, par le développement, on a

$$\begin{aligned} y_{(z+t)} &= y_z + (nz^{n-1} + (n-1)az^{n-2} + \cdots + f)t \\ &+ (n\tfrac{n-1}{2}z^{n-2} + \cdots)t^2 + \cdots + (nz+a)t^{n-1} + t^n \ . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Comme les coefficients des diverses puissances de t peuvent être nuls, et que ce cas demanderait des condisérations particulières, il conviendra de traiter la question d'une manière générale, en représentant l'équation précédente par

$$y_{(z+t)} = y_z + Rt^r + St^s + \cdots + Vt^v + t^n \tag{4.2}$$

de manière qu'aucun des coefficients $R, S, \cdots, V$ ne soit nul, et que les exposants $r, s, \cdots, v, n$ aillent en augmentant. Il faut remarquer que, si tous les coefficients de (4.1) étaient nuls, l'équation (4.2) se réduirait à

$$y_{(z+t)} = y_z + t^n \ .$$

Faisant donc $t = \sqrt[n]{-y_z}$, on aurait $y_{(z+t)} = 0$, et le théorème serait démontré pour ce cas, dont on peut, par conséquent, faire abstraction dans ce qui va suivre. Ainsi nous supposerons que le second membre de (4.2) a au moins trois termes.

Cela posé, que l'on construise $y_{(z+t)}$, en prenant

$$\overline{KP} = y_z, \overline{PA} = Rt^r, \overline{AB} = St^s, \cdots, \overline{FG} = Vt^v, \overline{GH} = t^n$$

on aura

$$| y_z |= KP, | R || t^r |= PA, \cdots, | V || t^v |= FG, | t^n |= GH$$

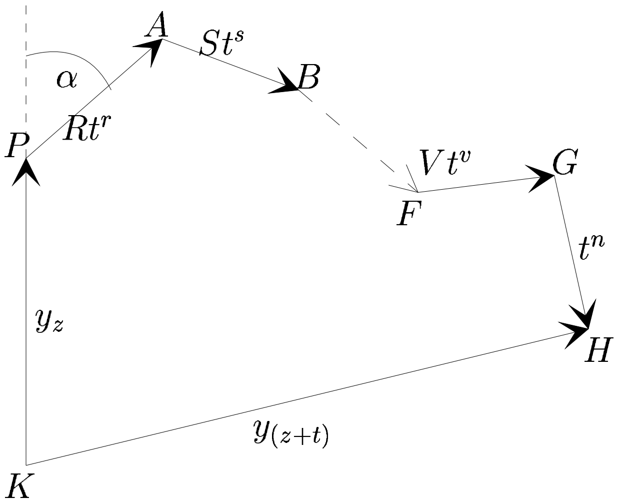
car il est visible qu'en général $| p || q |=| pq |$.

$\overline{y_{(z+t)}}$ sera représenté par la ligne brisée ou droite $\overline{KPAB \ldots FGH}$, ou par $\overline{KH}$; et il faut prouver qu'on peut avoir $KH < KP$.

---

les modules).

[2]En fait c'est pas le minimum, mais l'infimum.



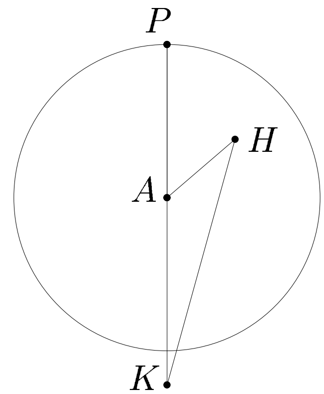


Figure 4.1: À gauche la situation générale et à droite la cas auquel elle peut être ramenée après les changements en direction et en grandeur adéquates de t.

Or la quantité t peut varier de deux manières :

1. En *direction* ; et il est évident que, si elle varie d'un angle α, sa puissance t^r variera d'un angle $r\alpha$. Soit donc α l'angle dont $\overline{PA} = Rt^r$ surpasse $\overline{KP} = y_z$. Si l'on fait varier t de l'angle $\frac{\pi-\alpha}{r}$, $\overline{PA}$ variera de l'angle $\pi - \alpha$, c'est-à-dire que la direction de $\overline{PA}$ deviendra opposée à celle de $\overline{KP}$; en sorte que le point A se trouvera sur la ligne PK, prolongée, s'il le faut, par son extrémité K.
2. La direction de t étant supposée fixée, on peut, en second lieu, la faire varier de *grandeur* ; et d'abord, si $PA > KP$, on pourra diminuer t jusqu'à ce que $PA < KP$, de manière que le point A tombe entre K et P.

Ensuite, si la grandeur de t, ainsi réduite, n'est pas telle que l'on ait

$$| Rt^r | > | St^s + \cdots + Vt^v + t^n |,$$

on peut, en la diminuant encore, obtenir que cette inégalité ait lieu, car les exposants $s, \ldots, v, n$ sont tous plus grands que r.

Or cette inégalité revient à

$$PA > AB + \cdots + FG + GH;$$

la distance AH sera donc plus petite que PA, et, par conséquent, si l'on trace un cercle du centre A et du rayon AP, le point H sera dedans de ce cercle, et il suit des premiers éléments de Géométrie que, K étant sur le prolongement du rayon PA, du côté du centre A, on a $KH < KP$.

Argand prouve ansi l'existence d'un z^* de la forme $a + b\sqrt{-1}$ qui annule le polynôme considéré. En divisant le polynôme de départ par $z - z^*$ on obtient un polynôme de degré inférieur. En reiterant ceci on décompose le polynôme de degré n en un produit de n monomes de degré 1.

Remerciements

Je remercie J. Sesiano pour sa disponibilité, en particulier pour les références qui ont étés très utiles.

Références

[1] Ebbinghaus et al., *Les nombres. Leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles*, Ed. Vuibert, 1998.

[2] R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1971.

[3] R. Bombelli, *L'ALGEBRA, opera di Rafael Bombelli da Bologna*, prima edizione integrale, Eq. Feltrinelli, Milano, 1966.

[4] Notes du cours d'*Histoire des mathématiques II.*