Dall'informatica alla geometria ortogonale, passando per l'algebra universale.

Patrik Ferrari

Institut de Physique Théorique*
EPFL - 2000

Indice

*Studente VIII semestre.

1 Introduzione

Il lavoro effettuato ha come origine alcuni problemi di classificazione negli spazi Hermitiani di dimensione infinita. Per cercare di risolvere tali problemi è necessario il calcolo di diversi reticoli che implica un lungo lavoro soprattutto quando effettuato a mano. Per questo motivo in collaborazione con R. Moresi ho creato un programma che permette di calcolare reticoli di vario genere a partire da relazioni iniziali e in seguito di scomporlo nei suoi elementi di base (i fattori sottodiretti irriducibili).
Nell'articolo si presentano dapprima le basi matematiche riguardanti i reticoli e in seguito si spiega brevemente la relazione tra gli spazi vettoriali e l'astrazione nel linguaggio dei reticoli. Dopodiché si espone il programma nelle sue grandi linee e la codificazione utilizzata per rappresentare gli elementi dei reticoli. Infine vengono presentati alcuni dei reticoli calcolati.

2 Basi matematiche

In questa introduzione matematica sono presentate le definizioni di base con alcuni esempi e risultati.

Definizione 1 *Un'*algebra *è una coppia* $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ *in cui* $\mathcal{A}$ *è un insieme e* $\mathcal{V}$ *un insieme di operazioni in* $\mathcal{A}$. *Un'operazione* n*-aria in* $\mathcal{A}$ *è un'applicazione da* $\mathcal{A}^n$ *in* $\mathcal{A}$. *Il* tipo Ω *dell'algebra* $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ *è un elemento* σ *di* $\mathbb{N}^{\mathcal{V}}$*, in cui ad ogni elemento* $v \in \mathcal{V}$ *si ha* $\sigma(v) \doteqdot$ *arità di* v.

Esempio 2 *Un gruppo è un'algebra* $(G, e, (\cdot)^{-1}, \circ)$ *di tipo* $(0,1,2)$ *in cui l'elemento neutro* $e \in G$ *è l'operazione* 0*-aria ,* $(\cdot)^{-1}$ *è l'operazione unaria et* $\circ$ *è l'operazione binaria tali che:*

1. $\circ$ *è associativa:* $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$,
2. $e \circ a = a \quad \forall a \in G$,
3. $a \circ a^{-1} = e \quad \forall a \in G$.

Esempio 3 *Un reticolo*[1] *con* 0 *e* 1 *(i bordi universali) è un'algebra* $(L, 0, 1, \wedge, \vee)$ *di tipo* $(0,0,2,2)$.
Un reticolo Galoisiano è un'algebra $(L, 0, 1, \perp, \wedge, \vee)$ *di tipo* $(0,0,1,2,2)$.

Per definire un reticolo occorre dapprima definire due operazioni binarie su un insieme L:

1. infimo $\wedge : L^2 \to L : a, b \mapsto a \wedge b \doteqdot \inf\{a, b\}$,
2. supremo $\vee : L^2 \to L : a, b \mapsto a \vee b \doteqdot \sup\{a, b\}$.

Queste operazioni binarie soddisfano le proprietà seguenti:

1. indempotenza: $a \wedge a = a$ e $a \vee a = a$,
2. commutatività: $a \wedge b = b \wedge a$ e $a \vee b = b \vee a$,

[1] Vedi le definizioni che seguono.

3. associatività: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ e $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,

4. identità d'assorbimento: $a \wedge (a \vee b) = a$ e $a \vee (a \wedge b) = a$,

in cui a, b, c sono elementi di L. Un reticolo può essere definito come un'algebra:

Definizione 4 (Reticolo) *Un'algebra $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ è detta reticolo se e solo se: L è un insieme non vuoto, $\wedge$ e $\vee$ sono delle operazioni binarie su L che soddisfano l'idempotenza, la commutatività, l'associatività e l'identità d'assorbimento.*

Nel seguito assumiamo che tutti i (semi)reticoli posseggono dei bordi universali 0 e 1. Nel caso in cui si utilizza solo una delle due operazioni binarie allora si hanno semireticoli.

Per descrivere un (semi)reticolo è sufficiente dare la lista delle relazioni minime, cioè la lista delle coppie $(x, y) \in L^2$ tali che $x \leq y$ e che non esiste un elemento $z \in L$ per cui $x < z < y$.

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$$

Introduciamo ora alcune classi di reticoli particolari utilizzati nei calcoli.

Definizione 5 (Reticolo modulare) *Un reticolo L è detto modulare se soddisfa la condizione seguente:*

$$a \leq c \Rightarrow (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c) \quad \forall\, a, b, c \in L$$

Definizione 6 (($\wedge$-semi)reticolo Galoisiano)
Un ($\wedge$-semi)reticolo Galoisiano è un ($\wedge$-semi)reticolo con un'operazione unaria $\perp$, l'ortogonale, che soddisfa le proprietà seguenti:

$$x \leq y \Rightarrow y^{\perp} \leq x^{\perp} \quad e \quad x \leq x^{\perp\perp}.$$

Assumeremo che tutti i (semi)reticoli Galoisiani sono non degenerati nel senso che $1^{\perp} = 0$.

Un elemento x è detto *chiuso* se $x = x^{\perp\perp}$. In particolare tutti gli elementi della forma $x^{\perp}$ sono chiusi.

Nel caso in cui L è un reticolo Galoisiano, si può derivare l'identità seguente:

$$(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}$$

Per simulare la dimensione di uno spazio quoziente si introduce la funzione indice la quale necessita la nozione di intervallo.

Definizione 7 (Intervallo) *Sia L un reticolo e x, y due elementi di L che sono in relazione (con $x \leq y$). L'intervallo y/x è definito come segue:*

$$y/x \doteqdot \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}$$

Definizione 8 (Funzione indice) *Sia L un reticolo, I l'insieme degli intervalli di L e Γ l'insieme dei numeri cardinali $\leq \aleph_0$. L'applicazione $\delta : I \to \Gamma$ è chiamata funzione indice di tipo $\aleph_0$ se le condizioni seguenti sono soddisfatte $\forall\, x, y, z \in L$:*

1. $\delta(x/y) \geq \delta(x \wedge z/y \wedge z)$*,*

2. $\delta(x/y) \geq \delta(x \vee z/y \vee z)$*,*

3. $\delta(x/y) \geq \delta(y^{\perp}/x^{\perp})$*,*

4. $\delta(x/y) + \delta(y/z) = \delta(x/z)$*,*

5. $\delta(x/y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$*.*

L'indice di un intervallo corrisponde alla dimensione dello spazio quoziente degli spazi vettoriali associati.
Ora siamo in grado di definire il reticolo Hermitiano di tipo $\aleph_0$, il genere di reticolo utilizzato per lo studio degli spazi Hermitiani su campi di caratteristica 2.

Definizione 9 (Reticolo Hermitiano di tipo $\aleph_0$) *Une reticolo Hermitiano di tipo* $\aleph_0$ *è una struttura* $\langle L, 0, 1, \wedge, \vee, \perp, b, \delta \rangle$ *tale che:*

1. $\langle L, 0, 1, \wedge, \vee, \perp \rangle$ *è un reticolo Galoisiano con bordi universali* 0 *e* 1*,*

2. $b \in L$ *est un'operazione unaria con*

$$x \wedge x^{\perp} \leq b \quad \forall\, x \in L,$$

3. δ *è una funzione indice di tipo* $\aleph_0$*.*

La struttura indotta di ($\wedge$-semi)reticolo dà il concetto di (semi)reticolo Hermitiano di tipo $\aleph_0$.

Teorema 10 (Birkhoff, 1944) *Ogni algebra che appartiene a una classe equazionale è rappresentabile come prodotto sottodiretto di algebre sottodirettamente irriducibili.*

Cioè, ogni algebra in cui le relazioni possono essere espresse tramite uguaglianze si può rappresentare come un prodotto di "elementi di base". Per i reticoli è il caso, infatti $x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$ ma anche $x \vee y = y$.

Per determinare i fattori sottodiretti irriducibili, si studiano dapprima gli indici determinando quelli uguali, sia finiti che infiniti, e gli indici che devono essere forzatamente infiniti per evitare che l'indice studiato risulti nullo. Il fattore irriducibile legato ad un indice viene determinato mettendo a zero tutti quelli che non implicano la sua nullità. Dunque si annullano gli indici tranne quelli che risultano infiniti quando l'indice studiato è non nullo e quelli a lui maggiori.

Per rendere più chiari il prodotto sottodiretto e l'operazione descritta qui sopra utilizziamo un esempio semplice, sul reticolo detto di Kaplansky. Questo reticolo è rappresentato alla pagina 9 ed è il reticolo modulare Galoisiano generato da un unico elemento, a, tramite le operazioni infimo, supremo e ortogonale.

Esempio 11 (Fattori sottodiretti irriducibili) *L'analisi degli indici del reticolo di Kaplansky mostra che ci sono 7 indici distinti,* $\delta_1, \ldots, \delta_7$*, e dà pure delle informazioni sulle relazioni tra di essi:*

$$\delta_2 < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_7 = 0 \qquad \delta_5 < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_7 = 0$$
$$\delta_1 < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_3 = 0 \qquad \delta_2 < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_4 = 0 \qquad \delta_2 < \aleph_0 \Longrightarrow \delta_6 = 0$$

Con queste relazioni possiamo ora dedurre i fattori sottodiretti irriducibili associati ai sette indici distinti.
Per quanto riguarda i fattori legati agli indici $\delta_1, \delta_2, \delta_5$, non c'è alcuna relazione con gli altri indici, dunque per trovare i fattori è sufficiente porre uguale a zero tutti gli altri indici (cioè identificare gli elementi relativi agli indici, per esempio porre uguale a zero δ_1 corrisponde ad identificare $a \wedge a^\perp$ con 0 e $(a \wedge a^\perp)^\perp$ con 1). Invece per trovare il fattore associato all'indice δ_3 bisogna annullare tutti gli indici a parte δ_1, per quelli di δ_4 e di δ_6 non si annulla δ_2, e per il fattore di δ_7 si mantengono δ_5 e δ_2 non nulli (in effetti sono di cardinalità $\aleph_0$).

Esempio 12 (Differanza tra prodotto diretto e prodotto sottodiretto) *Il prodotto diretto tra due fattori è una struttura che contiene al suo interno il prodotto sottodiretto. Se i due fattori (legati agli indici δ_x e δ_y) sono composti dagli elementi x_i e y_j rispettivamente, il loro prodotto diretto è l'insieme delle coppie degli elementi (x_i, y_j), in cui $(x_i, y_j) \leq (x_k, y_l)$ se e solo se $x_i \leq x_k$ e $y_j \leq y_l$. Il prodotto sottodiretto dei due fattori è invece la sottostruttura del reticolo ottenuta annullando tutti gli indici che non rendono nulli ne δ_x ne δ_y. Ecco ad esempio il caso in cui i due fattori sottodiretti irriducibili sono quelli associati a δ_1 e δ_2.*

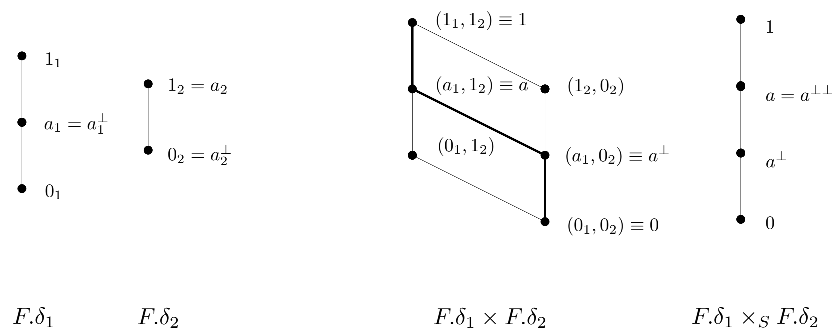

Figura 1: I fattori originari, il loro prodotto diretto a sinistra e sottodiretto a destra. La struttura del prodotto sottodiretto inclusa in quella del prodotto diretto è in grassetto.

3 Relazioni tra spazi vettoriali e l'astrazione reticolare

Per descrivere gli spazi vettoriali utilizziamo una descrizione di reticoli, dunque è importante conoscere a cosa corrispondono dal punto di vista geometrico gli elementi e le operazioni eseguite su di essi.

- 0 corrisponde all'origine: $\{0\}$,
- 1 allo spazio tutto intero: E,

- b al sottospazio dei vettori a valore traccia: E^*,
- a ad un sottospazio di E: F,
- $x^\perp$ al sottospazio ortogonale di X: $X^\perp$,
- $x \wedge y$ all'intersezione dei sottospazi X e Y: $X \cap Y$,
- $x \vee y$ alla somma dei sottospazi X e Y: $X + Y$,

dove X è il sottospazio associato all'elemento del reticolo x, così come Y a quello di y.

Il sottospazio dei vettori a valore traccia, E^*, se il corpo è commutativo è dato da: $E^* = \{x \in E \mid \varphi(x, x) = 0\}$ in cui φ è una forma quadratica su E.

4 Programma e codificazione

Per studiare i reticoli ho creato due programmi. Il primo calcola reticoli a partire da relazioni iniziali, pure con condizioni sugli indici. Infatti molti reticoli possiedono un'infinità di elementi se non si impone la finitezza di alcuni intervalli, ad esempio $\delta(1/b) < \aleph_0$. Il secondo programma scompone il reticolo nei suoi fattori sottodiretti irriducibili, gli elementi di maggior interesse visto che ogni reticolo può essere espresso come prodotto sottodiretto di questi ultimi.

4.1 Codificazione degli elementi del reticolo

I generatori del reticolo sono codificati da lettere minuscole, l'operazione ortogonale da "T", l'infimo da "$<$" e il supremo da "$>$". Un elemento del reticolo è dato da una sequenza di lettere dei generatori e delle operazioni secondo un codice che non necessita l'uso di parentesi. Più precisamente:

1. l'ortogonale di x, $x^\perp$, è dato da Tx,
2. l'infimo tra x e y, $x \wedge y$, è dato da $<xy$ e
3. il supremo tra x e y, $x \vee y$, è dato da $>xy$.

Leggendo da destra a sinistra l'elemento codificato è facile dedurne la forma standard, ad esempio $>bT<aTb$ equivale a $(b^\perp \wedge a)^\perp \vee b$.

Ma a causa dell'associatività, della commutatività e di altre relazioni in funzione del tipo di reticolo, un elemento può essere rappresentato in diversi modi. Ad esempio $a \wedge a^\perp \ = <aTa$ equivale a $a^\perp \wedge a \ = <Taa$. Dunque un elemento corrisponde ad una *classe di parole* e non ad *una* parola unica.

4.2 Struttura del programma

Il programma è strutturato a grandi linee come segue. Dapprima c'è l'inizializzazione in cui si definisce il tipo di reticolo o semireticolo da calcolare e si introducono gli elementi di base e le relazioni tra di essi. In seguito l'utilizzatore sceglie una tra le diverse operazioni effettuabili sull'insieme degli elementi del reticolo: infimo e/o supremo, ortogonale, inserire una struttura già calcolata per un elemento (ad esempio il Kaplanky relativo ad un elemento a scelta).
I programma crea i nuovi elementi e le nuove relazioni in funzione del tipo di

reticolo scelto. Ad esempio, per un reticolo Hermitiano, introduce la condizione di modularità, la condizione $x \wedge x^{\perp} \leq b$, l'associatività e infine la condizione seguente: se calcolo $x \wedge y$ e trovo un $w \geq x$ e uno $z \geq y$ tali che $x \geq w \wedge z$ e $y \geq w \wedge z$, allora $x \wedge y = w \wedge z$, e analogamente per il supremo. In seguito utilizzo pure la proprietà di transitività e cerco di determinare l'uguaglianza di elementi come descritto qui sotto.
Quando l'operazione scelta dall'utilizzatore è stata completata il programma aspetta una nuova istruzione e al momento in cui le tre operazioni non vengono più creati nuovi elementi, allora il reticolo da calcolare è completo.
Un secondo programma permette la scomposizione del reticolo nei suoi fattori sottodiretti irriducibili. Dapprima analizza tutti gli indici, finiti ma anche non definiti, cercandone le eguaglianze e le relazioni. Poi per ogni indice distinto annulla tutti quelli che non implicano la sua nullità come descritto precedentemente.

4.3 Come si ottiene l'uguaglianzaa tra elementi

L'uguaglianza tra due elementi si ottiene in due modi:

1. tramite le relazioni: se trovo la relazione $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$, ad esempio se trovo che $x^{\perp\perp} \leq x$ allora $x = x^{\perp\perp}$ perché si ha sempre $x \leq x^{\perp\perp}$,

2. utilizzando gli indici: se si ottiene un'equazione per indici finiti del tipo $\delta_i = \delta_i + \delta_j$, allora $\delta_j = 0$ e gli elementi corrispondenti sono equivalenti (ad esempio: $\delta_j = \delta(u/v) = 0 \Rightarrow u = v$).

Per il secondo caso, ecco un esempio sul reticolo di Kaplansky.

Esempio 13 *Utilizzando le proprietà della funzione indice e del fatto che* $1 = 0^{\perp}$ *ho:* $\delta_1 = \delta(a \wedge a^{\perp}/0) \geq \delta(1/(a \wedge a^{\perp})^{\perp}) \geq \delta((a \wedge a^{\perp})^{\perp\perp}/0) \geq \delta((a \wedge a^{\perp})^{\perp\perp} \wedge a/0 \wedge a) = \delta(a \wedge a^{\perp}/0) = \delta_1$.
Inoltre: $\delta((a\wedge a^{\perp})^{\perp\perp}/a\wedge a^{\perp}) + \delta(a\wedge a^{\perp}/0) = \delta((a\wedge a^{\perp})^{\perp\perp}/0)$*, cioè:* $\delta_3+\delta_1 = \delta_1$.
Dunque se $\delta_1 < \aleph_0$*, allora* $\delta_3 = \delta((a \wedge a^{\perp})^{\perp\perp}/a \wedge a^{\perp}) = 0$ *che implica l'equivalenza seguente:* $a \wedge a^{\perp} = (a \wedge a^{\perp})^{\perp\perp}$.

5 (Semi)reticoli e alcune scomposizioni in fattori sottodiretti irriducibili calcolati tramite il programma.

In questa ultima sezione presento alcuni reticoli calcolati con il programma. Alcuni di essi sono già conosciuti e sono stati utili al fine di testare il programma, altri invece sono nuovi. Ho scelto i vari (semi)reticoli per illustrare i diversi tipi di reticoli calcolati, alcuni solo con l'operazione binaria supremo, altri solo con l'infimo, altri ancora necessitano la funzione indice. Per il reticolo 3 c'è pure il dettaglio riguardante gli elementi e gli indici finiti.

1. Il primo è il reticolo di Kaplansky, scoperto nel 1950. Come già annunciato è il reticolo modulare Galoisiano generato da un solo elemento, a. Il diagramma è a pagina 9.

2. Il secondo è un semireticolo Hermitiano con infimo che non necessita la funzione indice per essere finito. Questo semireticolo l'ho trovato con il programma, provando una serie di condizioni sugli elementi a e b. Il diagramma è a pagina 10.

3. Il terzo è un semireticolo Hermitiano che R. Moresi aveva precedentemente calcolato in cui si fa uso della funzione indice: si pone $\delta(1/b) < \aleph_0$. Il diagramma è a pagina 12.

4. Il quarto è un semireticolo più generale rispetto al precedente. Si è visto che per rendere finito il semireticolo precedente è sufficiente posse finito un intervallo minore rispetto a $1/b$. Questo, come pure il prossimo sono semireticoli nuovi. Il diagramma è a pagina 14.

5. Il quinto è un semireticolo Hermitiano calcolato a seguito del terzo. Infatti il semireticolo precedente senza condizione di finitezza dell'intervallo $1/b$ è molto robabilmente infinito. Inoltre Moresi aveva trovato una catena che poteva essere infinita: $c_0 \doteqdot b \wedge b^{\perp}$ e $c_n \doteqdot b^{\perp} \wedge \left(a^{\perp} \wedge c_{n-1}^{\perp}\right)^{\perp}$. Abbiamo dunque posto una condizione che bloccasse questa catena (la terza condizione). Il diagramma è a pagina 17. Questo semireticolo è studiato nel dettaglio in [4].

6. Il sesto è un nuovo semireticolo Hermitiano, con le stesse condizioni di base del terzo ma questa volta utilizzo solamente l'operazione supremo e non più l'infimo. Il diagramma è a pagina 20.

7. Il settimo è un semireticolo già conosciuto; è Hermitiano e soggetto ad un'unica condizione $a \leq a^{\perp}$. È interessante visto che elemento del tipo $x \wedge x^{\perp}$ (un radicale) possiede questa proprietà. Il diagramma è a pagina 21.

8. L'ottavo è il semireticolo Hermitiano con $a \leq a^{\perp}$ ma con il supremo unicamente; pure questo è nuovo. Il diagramma è a pagina 22.

9. Il nono ed ultimo è il reticolo Hermitiano con $a \leq a^{\perp}$ e $\delta(1/b)y\aleph_0$. Si può osservare la difficoltà di rappresentare graficamente un reticolo complesso e dunque dell'utilità della scomposizione nei suoi fattori sottodiretti irriducibili. Il diagramma è a pagina 23.

5.1 Reticolo di Kaplanky

Il reticolo di Kaplansky composto da 14 elementi.

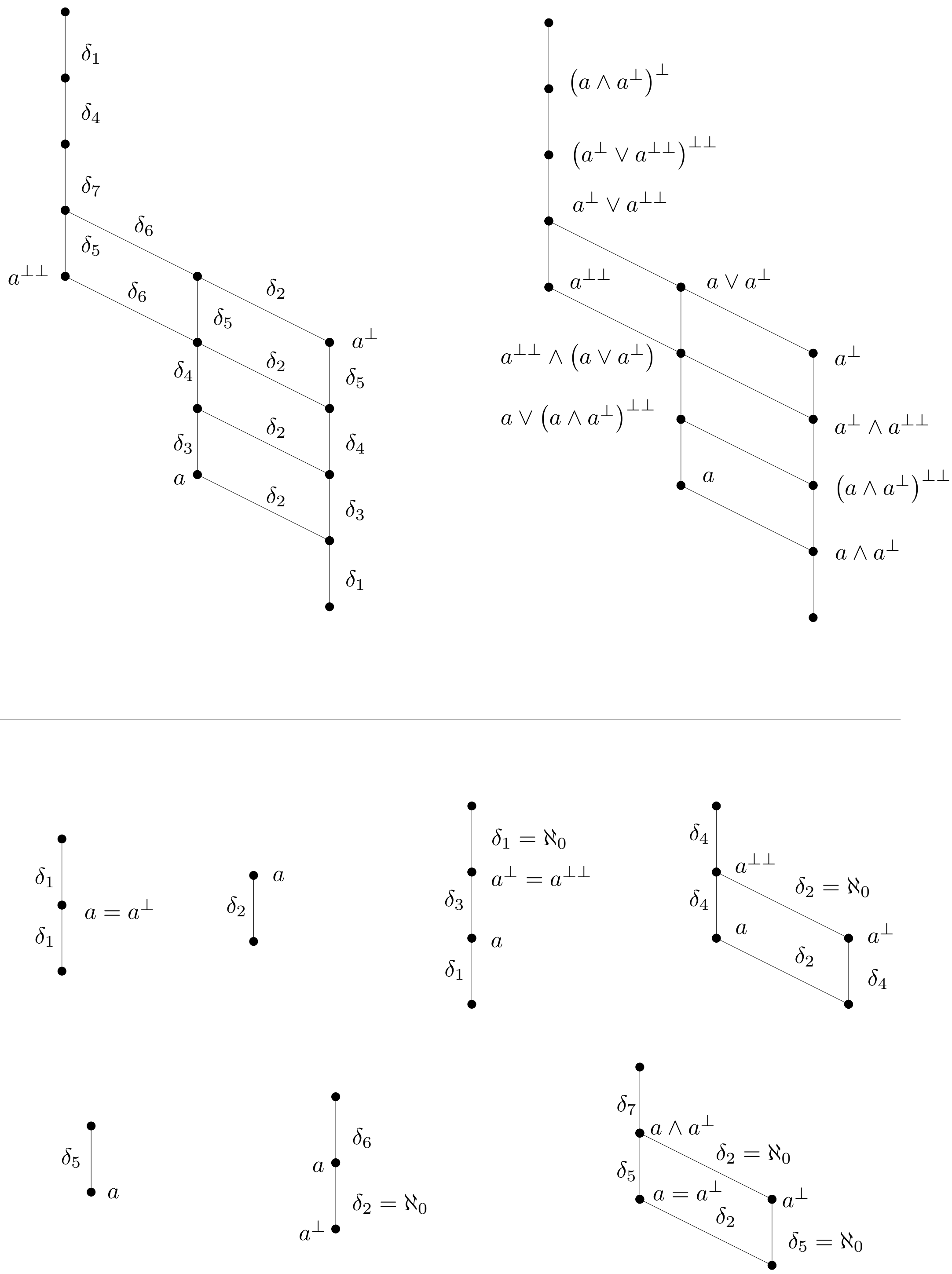

Figura 2: Reticolo di Kaplansky con relativi fattori sottodiretti irriducibili

5.2 Secondo esempio

Semireticolo Hermitiano con infimo generato da a che soddisfa le condizioni seguenti:

1. $b \leq a$,
2. $a = a^{\perp\perp}$,
3. $b = b^{\perp\perp}$.

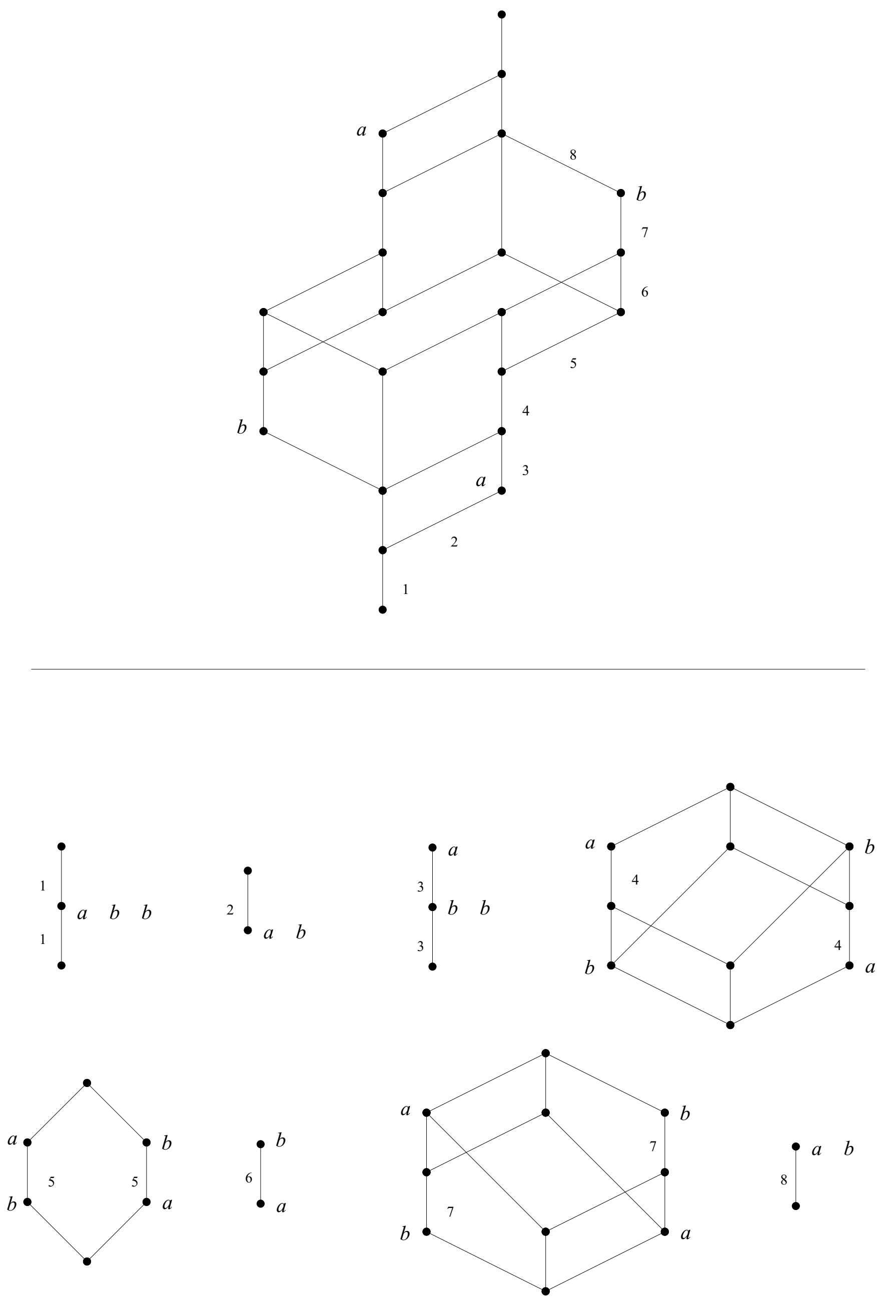

Figura 3: Semireticolo Hermitiano con i relativi fattori sottodiretti irriducibili. Possiede 22 elementi.

5.3 Esempio 3 con dettagli

Il prossimo semireticolo è corredato dai dettagli relativi agli elementi e agli indici finiti.
Il più generale semireticolo con infimo generato da a sottoposto alle seguenti condizioni:

1. $a \leq b$
2. $b = b^{\perp\perp}$
3. $\delta(1/b) < \aleph_0$

Il reticolo comprende 34 elementi come mostrato nella figura 4 a pagina 12:

1: $\mathbf{0}$
2: $\mathbf{1}$
3: $<TTaT<bT<aTa = a^{\perp\perp} \wedge 24$
4: $<TaT<bTa = a^{\perp} \wedge 27$
5: $<TaTTa = a^{\perp} \wedge a^{\perp\perp}$
6: $<TbTT<aTa = b^{\perp} \wedge 29$
7: $<TbTTa = b^{\perp} \wedge a^{\perp\perp}$
8: $<aTa = a \wedge a^{\perp}$
9: $<aTb = a \wedge b^{\perp}$
10: $<b<TaT<bTa = b \wedge 4$
11: $<bT<aTa = b \wedge 27$
12: $<bT<bT<aTa = b \wedge 26$
13: $<bT<bTa = b \wedge 27$
14: $<bTa = b \wedge a^{\perp}$
15: $<bTb = b \wedge b^{\perp}$
16: $T<TTaT<bT<aTa = 3^{\perp}$
17: $T<TaT<bTa = 4^{\perp}$
18: $T<TaTTa = 5^{\perp}$
19: $T<TbTT<aTa = 6^{\perp}$
20: $T<TbTTa = 7^{\perp}$
21: $T<aTa = 8^{\perp}$
22: $T<aTb = 9^{\perp}$
23: $T<b<TaT<bTa = 1^{\perp}$
24: $T<bT<aTa = 11^{\perp}$
25: $T<bT<bT<aTa = 12^{\perp}$
26: $T<bT<bTa = 13^{\perp}$
27: $T<bTa = 14^{\perp}$
28: $T<bTb = 15^{\perp}$
29: $TT<aTa = 8^{\perp\perp}$
30: $TTa = a^{\perp\perp}$
31: $Ta = a^{\perp}$
32: $Tb = b^{\perp}$
33: a
34: b

Le relazioni tra gli indici degli intervalli sono le seguenti:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\delta_1 & \doteqdot & \delta(\mathbf{1}/22) & = & \delta(9/\mathbf{0}) & & & & \\
\delta_2 & \doteqdot & \delta(22/19) & = & \delta(6/9) & & & & \\
\delta_3 & \doteqdot & \delta(19/20) & = & \delta(21/16) & = & \delta(3/29) & = & \delta(7/6) \\
\delta_4 & \doteqdot & \delta(20/28) & = & \delta(16/25) & = & \delta(18/23) & = & \delta(a^{\perp}/26) \\
 & = & \delta(13/a^{\perp\perp}) & = & \delta(10/5) & = & \delta(12/3) & = & \delta(15/7) \\
\delta_5 & \doteqdot & \delta(28/b) & = & \delta(25/11) & = & \delta(23/17) & = & \delta(26/14) \\
 & = & \delta(27/13) & = & \delta(4/10) & = & \delta(24/12) & = & \delta(b^{\perp}/15)
\end{array}
$$

Ecco gli altri indici non definiti:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\delta_6 & \doteqdot & \delta(8/9) & = & \delta(29/6) & = & \delta(3/7) & = & \delta(12/15) \\
 & = & \delta(24/b^{\perp}) & = & \delta(b/11) & = & \delta(28/25) & = & \delta(20/16) \\
 & = & \delta(19/21) & & & & & & \\
\delta_7 & \doteqdot & \delta(29/8) & & & & & & \\
\delta_8 & \doteqdot & \delta(a/8) & = & \delta(a^{\perp\perp}/5) & = & \delta(13/10) & = & \delta(27/4) \\
 & = & \delta(17/14) & = & \delta(23/26) & = & \delta(18/a^{\perp}) & & \\
\delta_9 & \doteqdot & \delta(a^{\perp\perp}/a) & = & \delta(10/12) & = & \delta(4/24) & = & \delta(11/17) \\
 & = & \delta(25/23) & = & \delta(16/18) & & & & \\
\delta_{10} & \doteqdot & \delta(5/3) & & & & & & \\
\delta_{11} & \doteqdot & \delta(14/4) & = & \delta(26/4) & = & \delta(17/13) & = & \delta(23/27)
\end{array}
$$

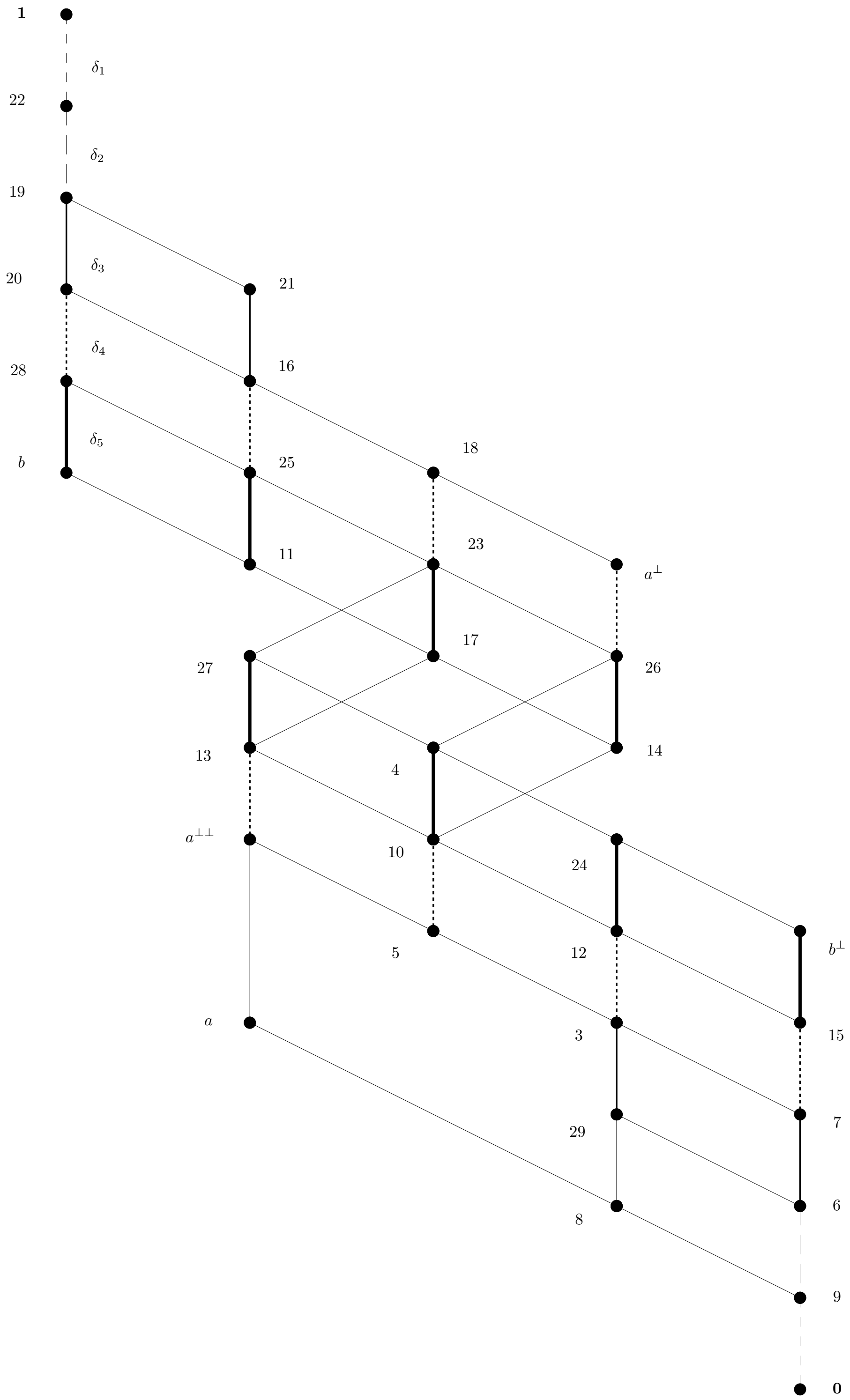

Figura 4: Esempio 3: Semireticolo con infimo, $a \le b$, $b = b^{\perp\perp}$ e $\delta(1/b) < \aleph_0$

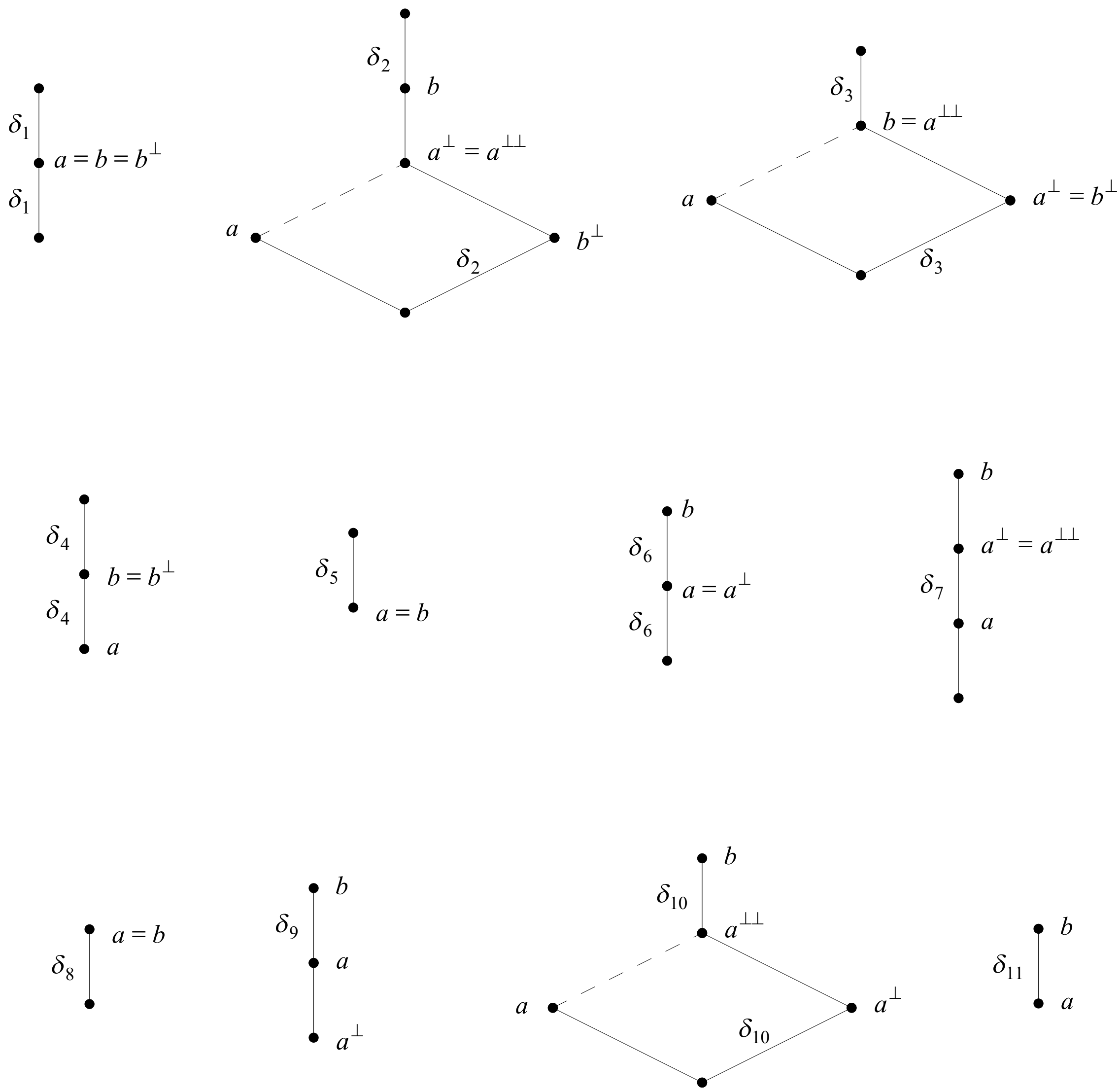

Figura 5: Fattori sottodiretti irriducibili del reticolo precedente.

5.4 Esempio 4: Caso più generale dell'esempio 3

Il più generale semireticolo con infimo generato da a sottoposto alle seguenti condizioni:

1. $a \leq b$
2. $b = b^{\perp\perp}$
3. $\delta(b \wedge (b \wedge a^{\perp})^{\perp}/a^{\perp\perp}) < \aleph_0$

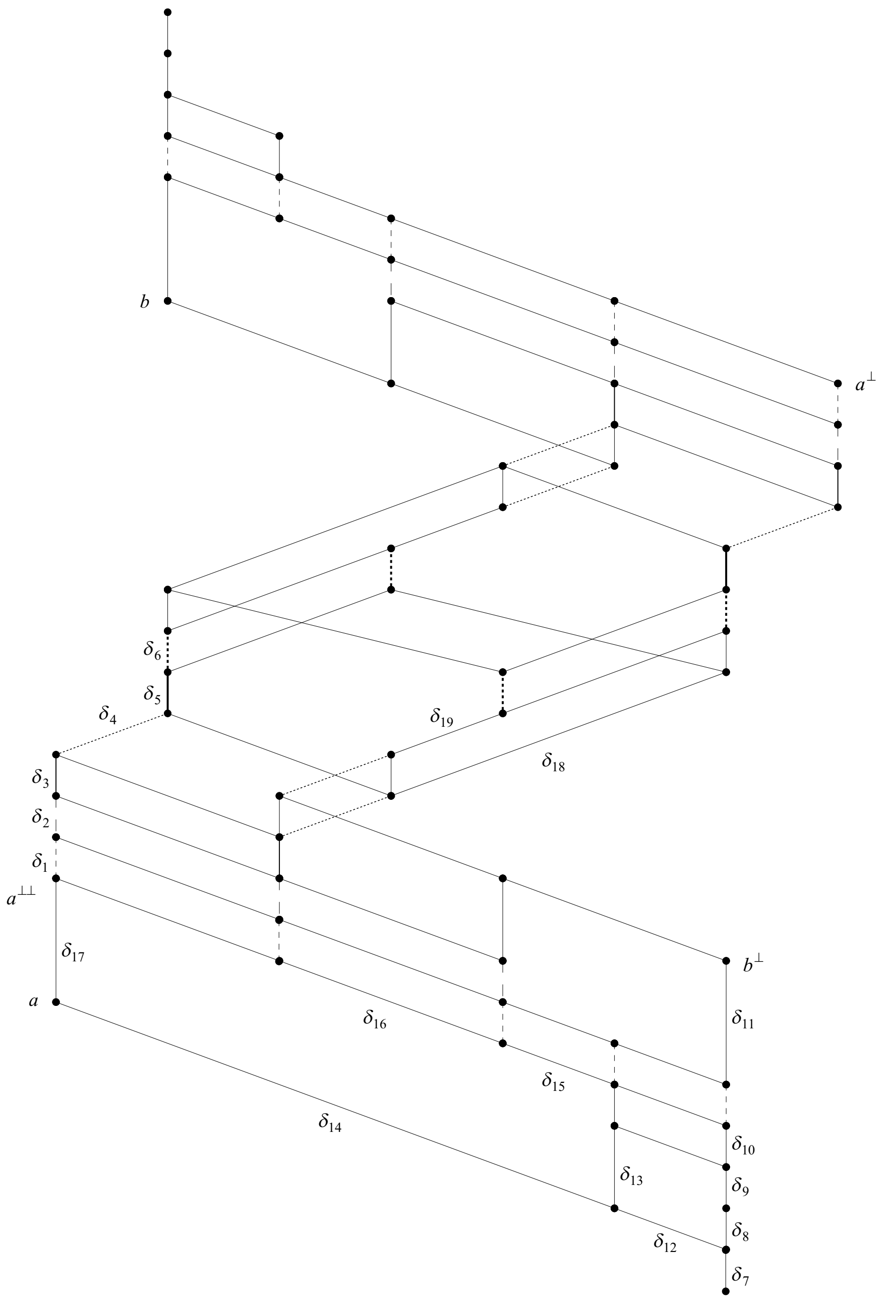

Figura 6: Semireticolo con infimo, $a \leq b$, $b = b^{\perp\perp}$ e $\delta(b \wedge (b \wedge a^{\perp})^{\perp}/a^{\perp\perp}) < \aleph_0$. Diagramma relativo all'esempio 4.

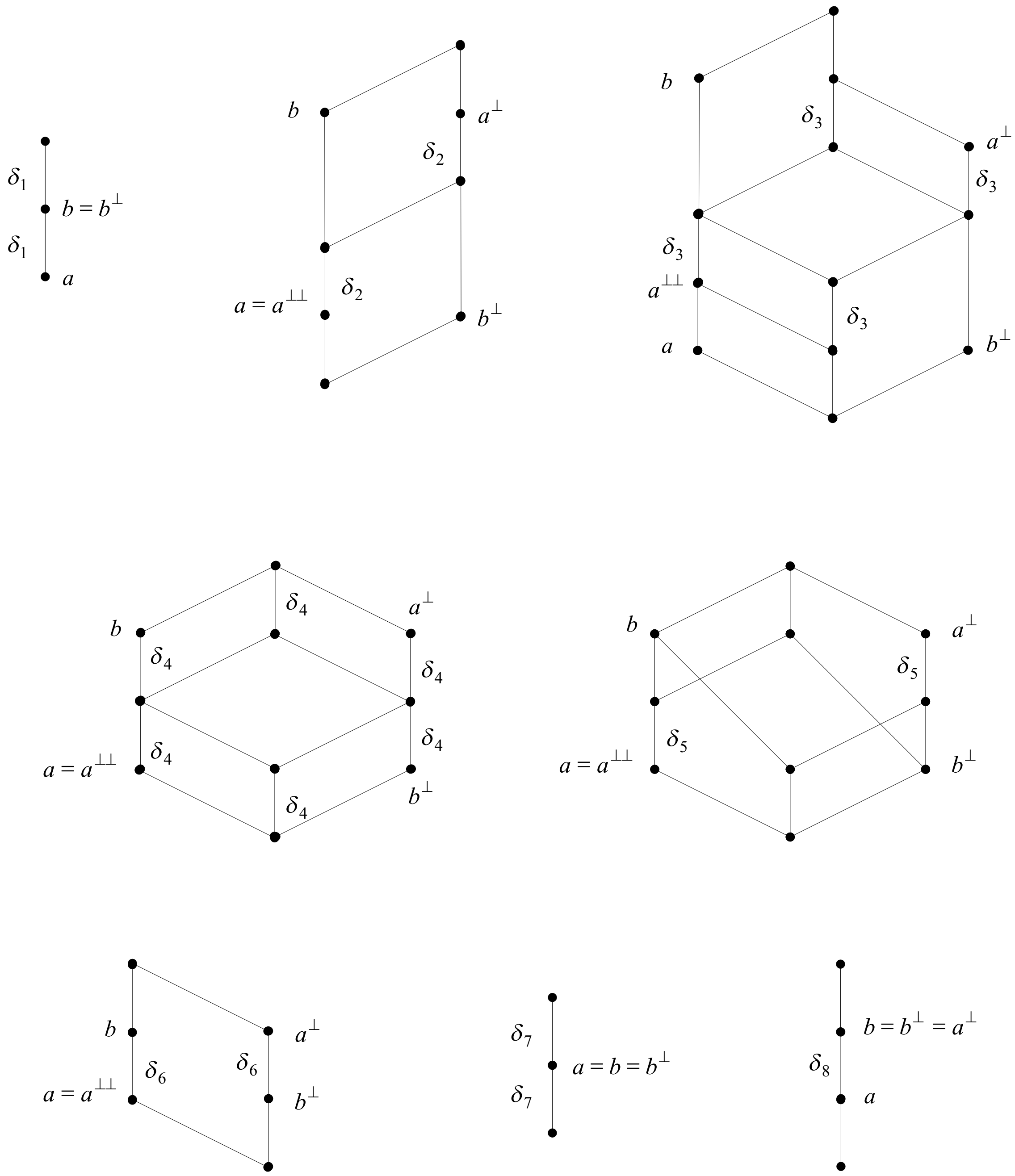

Figura 7: Fattori sottodiretti irriducibili del reticolo precedente, parte 1.

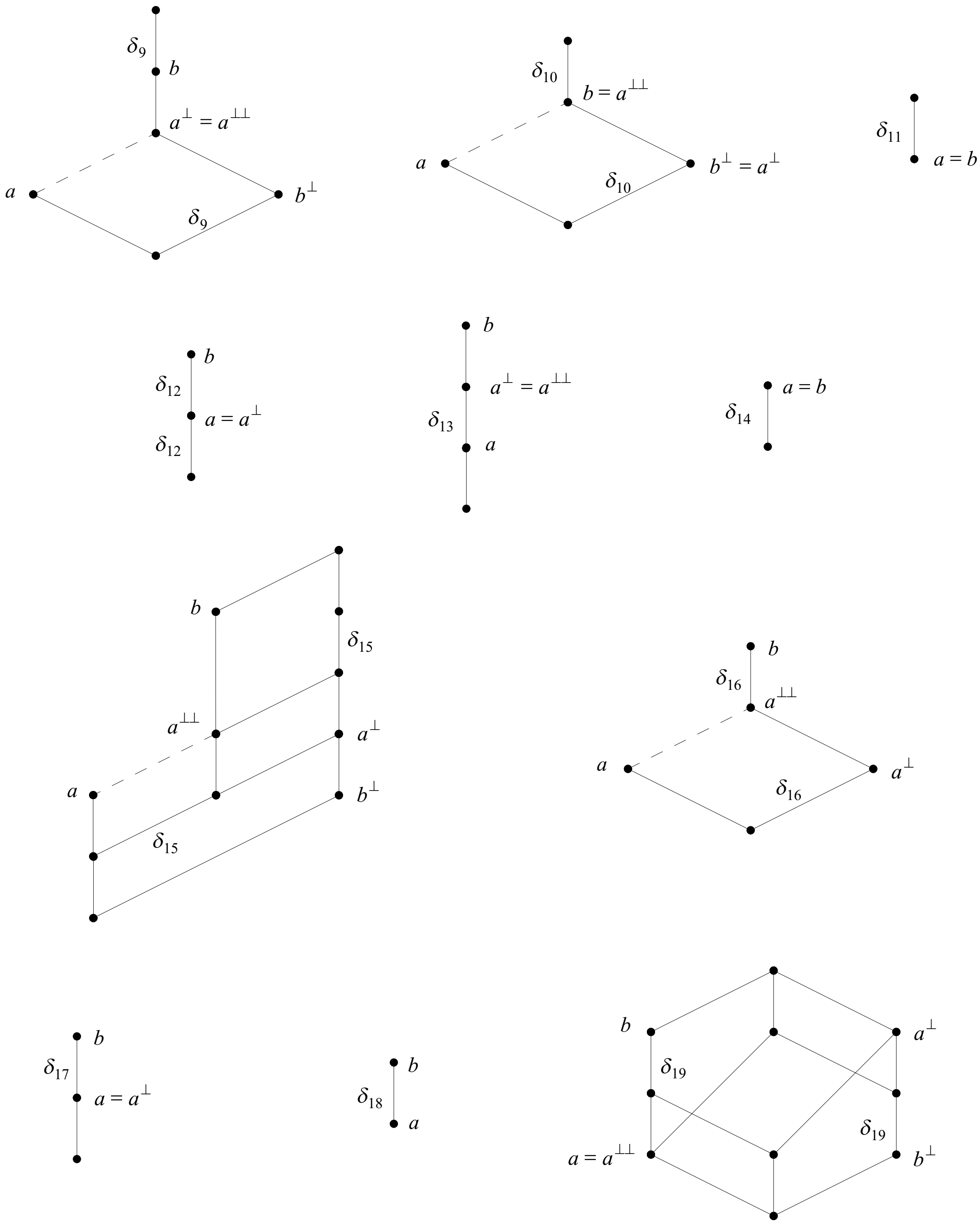

Figura 8: Fattori sottodiretti irriducibili del reticolo precedente, parte 2.

5.5 Esempio 5: Semireticolo studiato in [4]

Il più generale semireticolo con infimo generato da a sottoposto alle seguenti condizioni:

1. $a \leq b$
2. $b = b^{\perp\perp}$
3. $b \wedge \left(b \wedge a^{\perp}\right)^{\perp} = \left(a^{\perp} \wedge \left(b \wedge b^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$

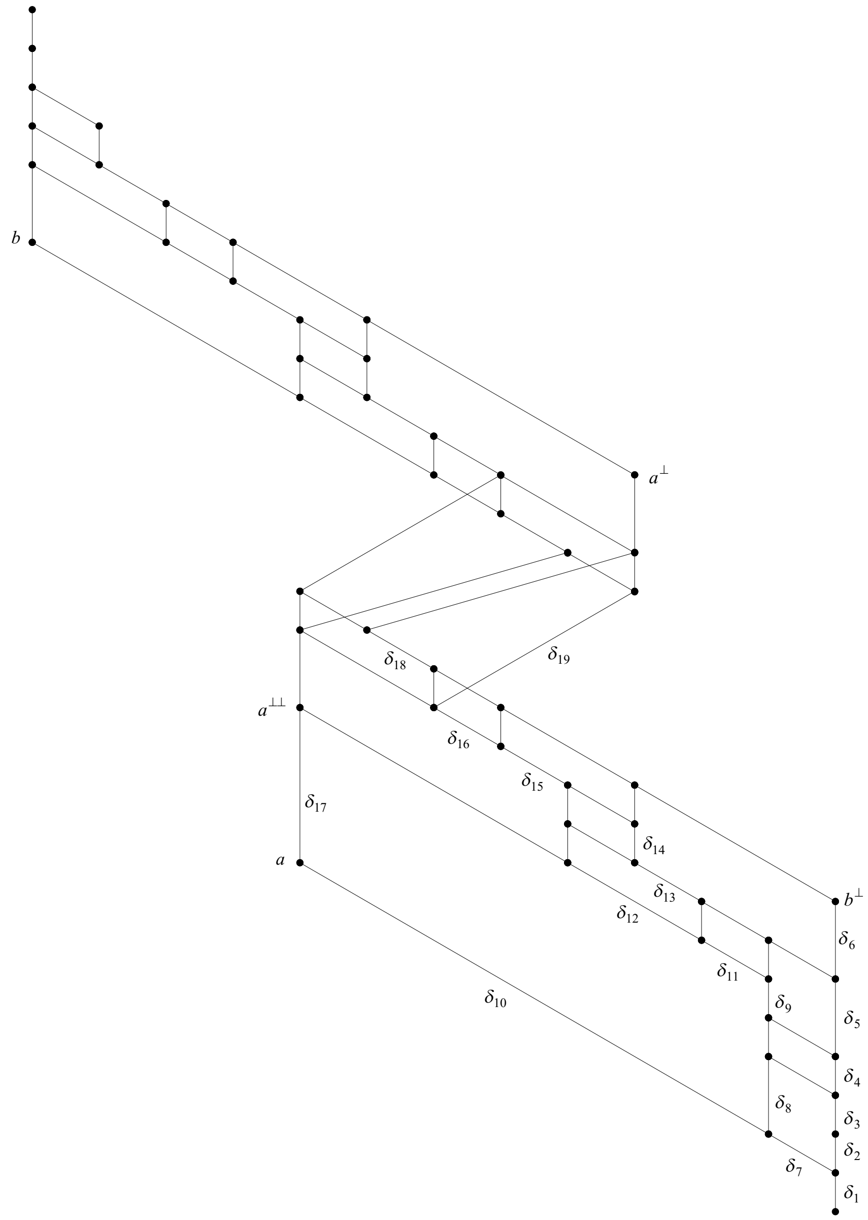

Figura 9: Semireticolo con infimo, $a \leq b$, $b = b^{\perp\perp}$ e $b \wedge \left(b \wedge a^{\perp}\right)^{\perp} = \left(a^{\perp} \wedge \left(b \wedge b^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$. Diagramma relativo all'esempio 5.

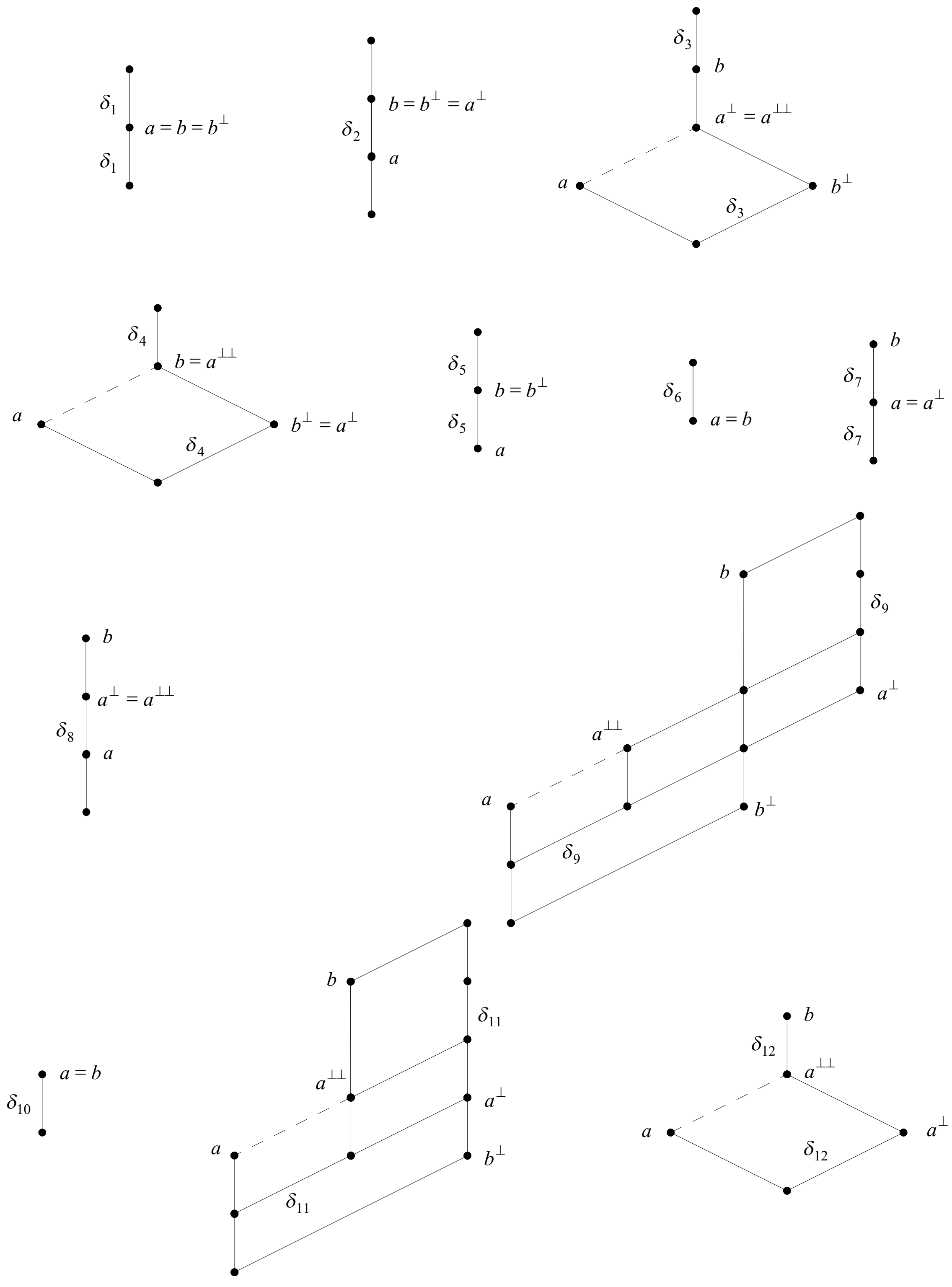

Figura 10: Fattori sottodiretti irriducibili del reticolo precedente, parte 1.

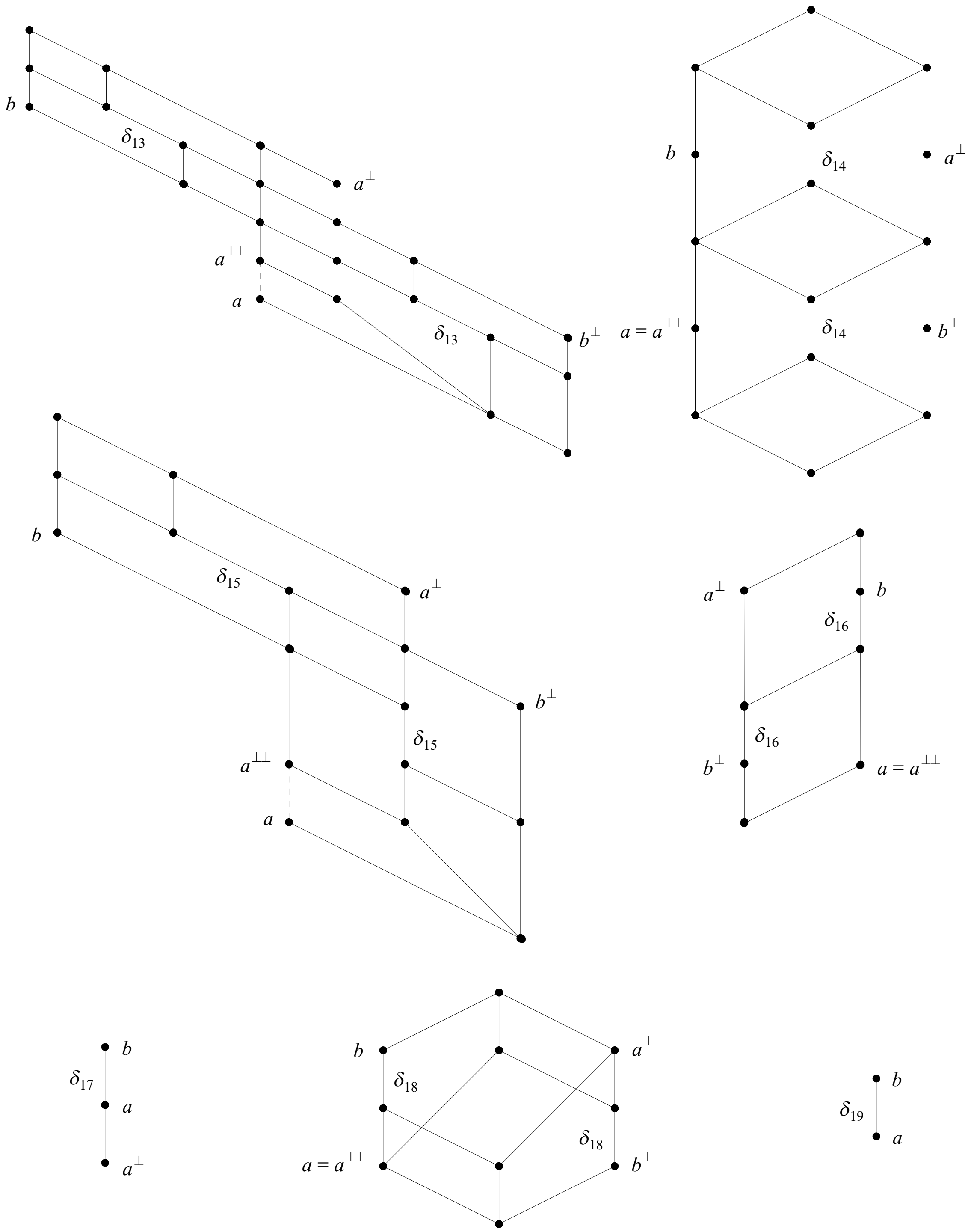

Figura 11: Fattori sottodiretti irriducibili del reticolo precedente, parte 2.

5.6 Esempio 6: Semireticolo Hermitiano con supremo

Semireticolo Hermitiano con supremo generato da a che soddisfa le condizioni seguenti:

1. $a \leq b$,
2. $b = b^{\perp\perp}$,
3. $\delta(1/b) < \aleph_0$.

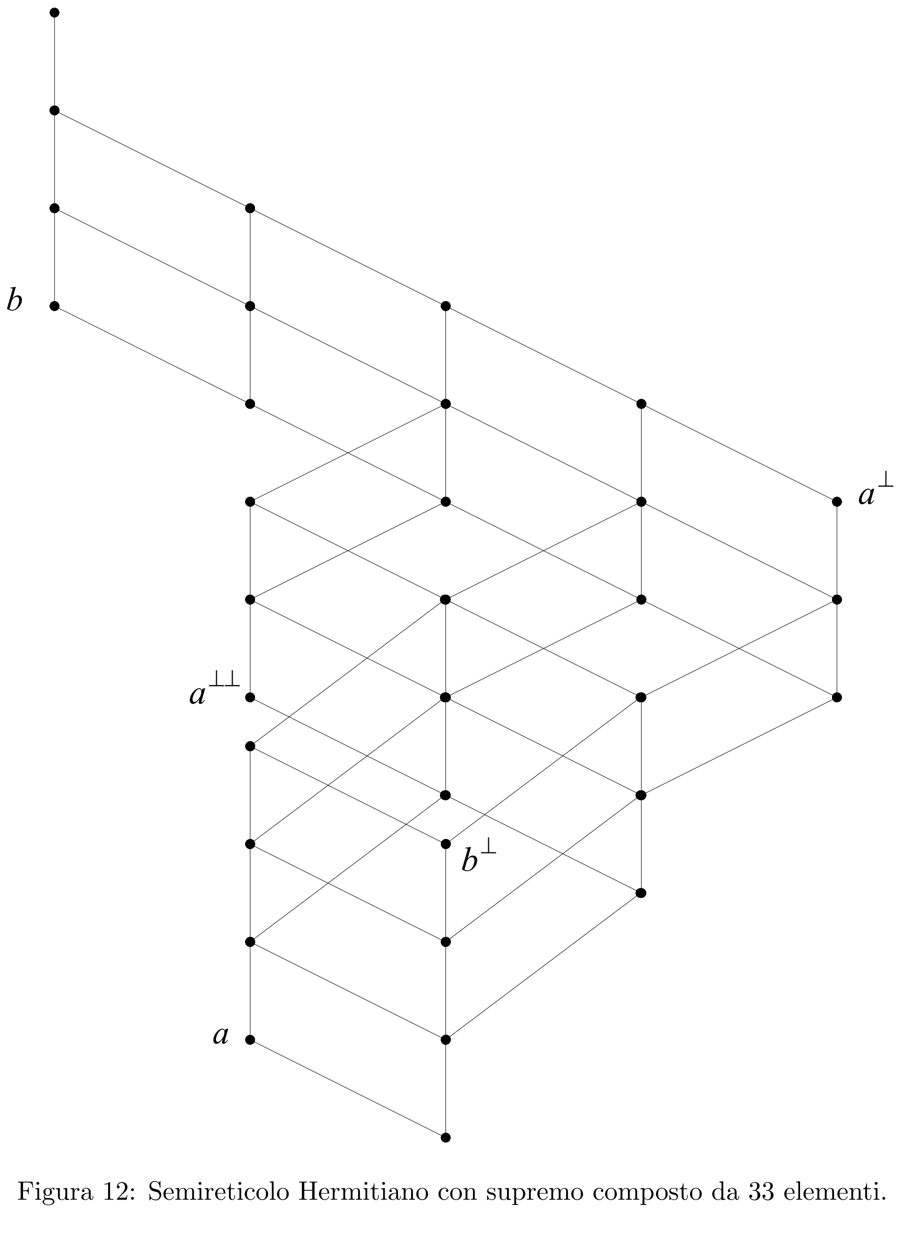

Figura 12: Semireticolo Hermitiano con supremo composto da 33 elementi.

5.7 Esempio 7: Semireticolo con infimo senza funzione indice

Semireticolo Hermitiano con infimo generato da a che soddisfa un'unica condizione: $a \leq a^{\perp}$.

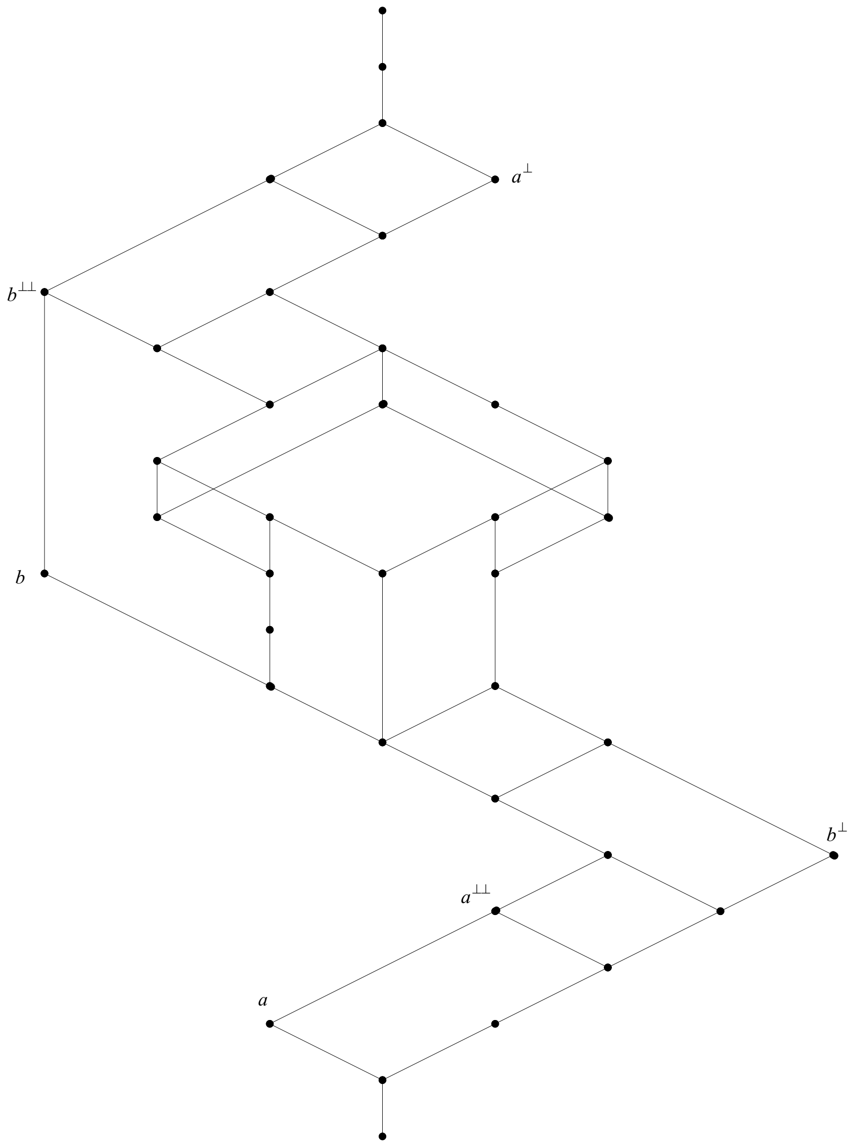

Figura 13: Semireticolo Hermitiano con infimo, struttura presente per ogni radicale. È composto da 38 elementi.

5.8 Esempio 8: Semireticolo con supremo senza funzione indice

Semireticolo Hermitiano con supremo generato da a che soddisfa un'unica condizione: $a \leq a^{\perp}$.

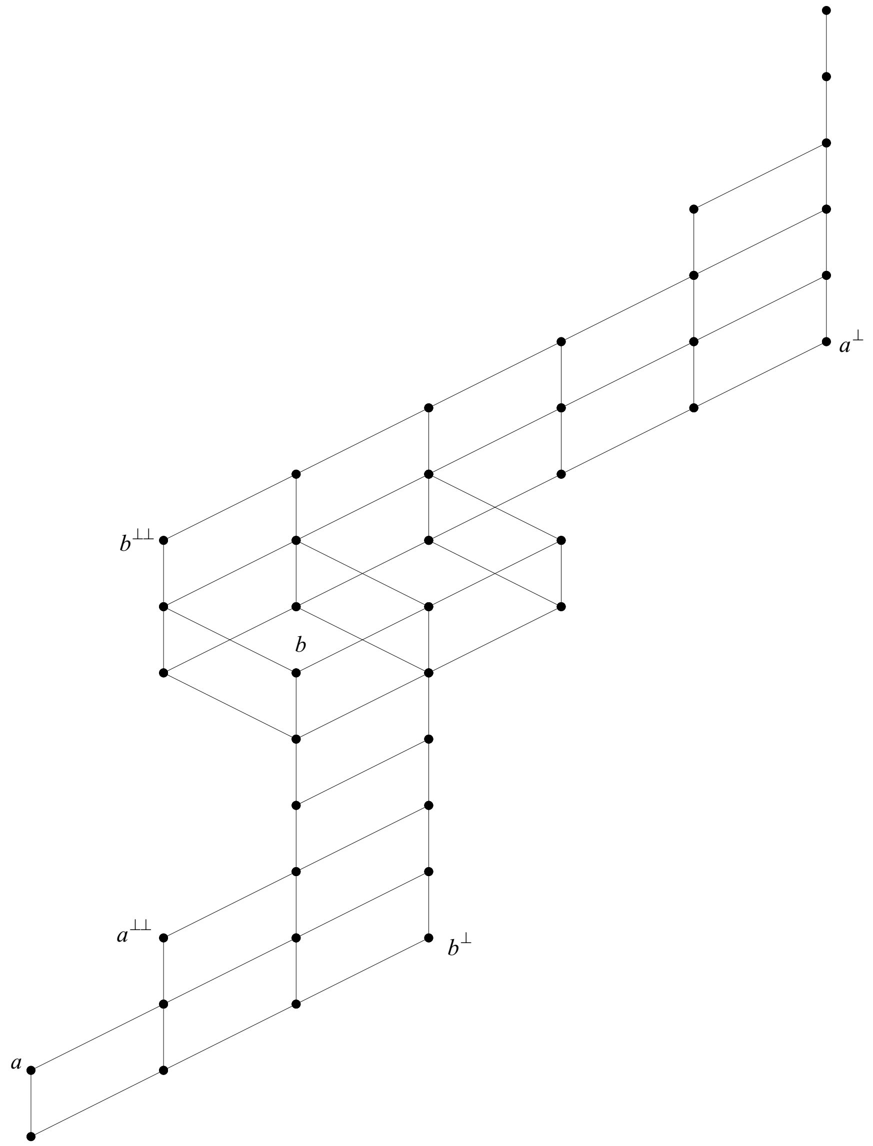

Figura 14: Semireticolo Hermitiano con supremo, struttura presente per ogni radicale. È composto da 41 elementi.

5.9 Esempio 9: Un reticolo completo

Reticolo Hermitiano generato da a che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $a \leq a^{\perp}$,
2. $\delta(1/b) < \aleph_0$.

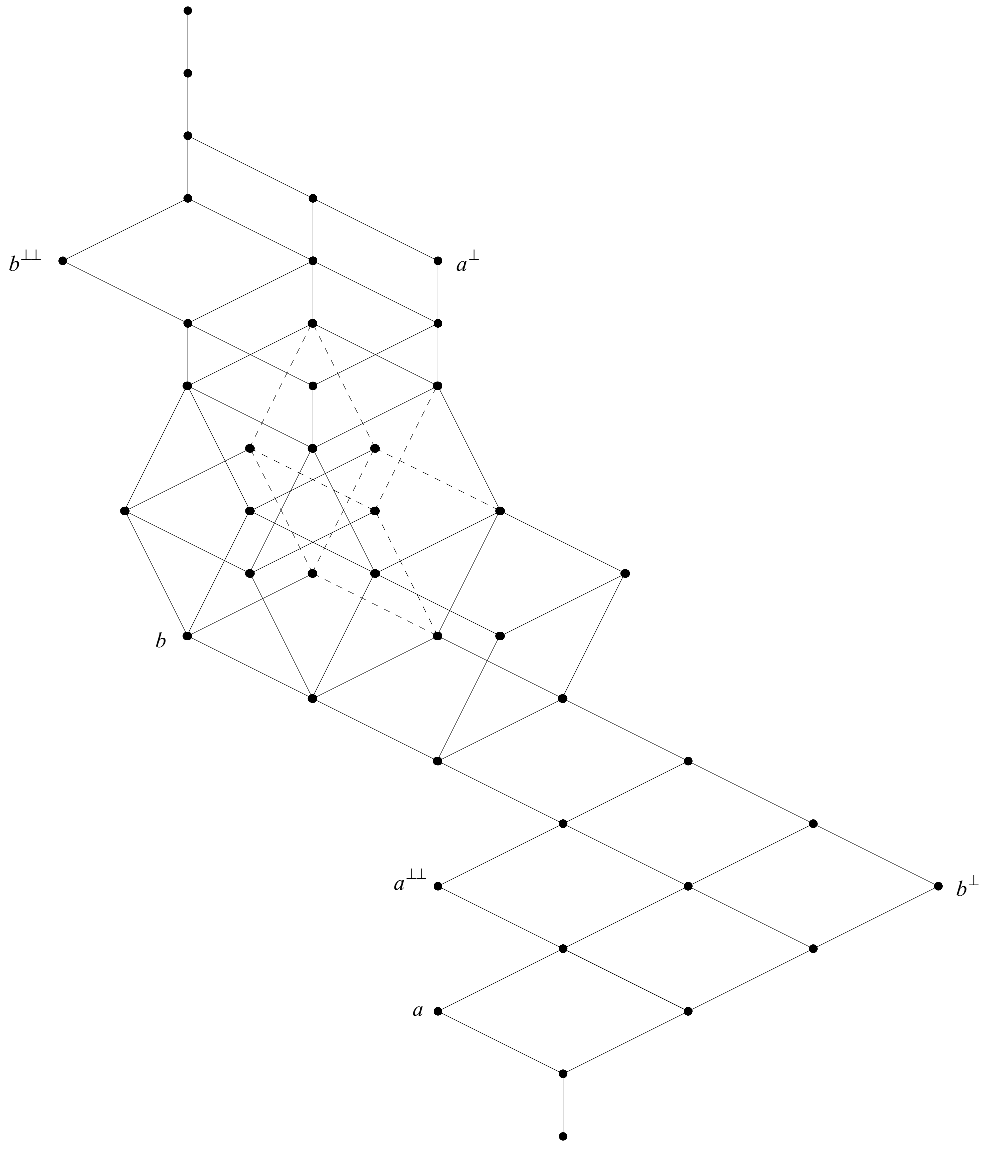

Figura 15: Reticolo Hermitiano con supremo composto da 43 elementi.

Ringraziamenti

Ringrazio Remo Moresi con cui ho collaborato per la creazione del programma in particolare per le spiegazioni della struttura matematica sottogiacente e mio fratello Christian per i suoi consigli e per la rilettura del manoscritto.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Grätzer, *General lattice theory*, Basel Stuttgart Birkhäuser 1978.

[2] Ch. Herrmann, Galois Lattices, *Note di Matematica e Fisica 7*, 229-234, 1994.

[3] H.A. Keller, U.-M. Künzi, M. Wild: *Orthogonal geometry in infinite dimensional vector spaces*, Bayreuther mathematische Schriften, Heft 53, 1998.

[4] R. Moresi, Beispiele Hermitescher Halbverbände, *Note di Matematica e Fisica 10* (atti del processo "Mathematik-Tagung in Memoriam von Herbert Gross (1936-1989)", Locarno 28.-29. 8. 1999).

[5] R. Moresi, Hermitean (semi)lattices with index function, *Note di Matematica e Fisica 7*, 235-242, 1994.