Prof. Dr. Barbara Niethammer
Jens Scholten

Fourier Analysis

S1G1 - Seminar, Sommersemester 2025
Übersicht

Inhalt

Ausgehend von der präzisen Untersuchung einer vibrierenden Seite, eröffnet sich quasi natürlicher Weise ein faszinierender Teilbereich der Analysis. In diesem Seminar wollen wir, ausgehend von der historischen Motivation einen Einblick in die Fourier Analysis geben. Ausgehend von dem Versuch eine Funktion in ihre (harmonischen) Eigenschwingungen zu zerlegen, werden wir Fourier Reihen studieren. Anschließend betrachten wir einige Anwendungen auf andere Teilgebiete der Mathematik, z.B. lassen sich Fragen in der Geometrie (Beweis der Isoperimetrischen Ungleichung) oder Zahlentheorie (Weyls Gleichverteilungstheorem) beantworten. Danach wollen wir zur Fourier Transformation über gehen. Intuitiv ersetzt man – in der Hoffnung auch nicht periodische Funktionen abbilden zu können – die Summen der Fourier Reihen durch Integrale. Die daraus resultierenden Veränderungen und Zugewinne wollen wir genauer untersuchen. Auch hier werden wir wieder Anwendungen der Theorie thematisieren, beispielsweise Lösungen der Wärmeleitungsgleichung oder die Heisenbergsche Unschärferelation. Zum Abschluss des Seminars, wollen wir Fourier Analysis über endlichen Gruppen kennen lernen; Insbesondere die Fast Fourier Transform (FFT), welche sicherlich als einer der bedeutsamsten Algorithmen der modernen Zeit angesehen werden kann. Wir werden uns hauptsächlich am Buch [1] orientieren.

Vorgehen

Jeder Teilnehmende wird einen Vortrag ausarbeiten, vorbereiten und halten. Die Themen (siehe unten) werden noch in der vorlesungsfreien Zeit zugeteilt. Ein schriftlicher Entwurf des Vortrags muss bis spätestens zwei Wochen vor dem eigentlichen Vortragstermin an uns gemailt werden. Bis spätestens eine Woche vor dem eigentlichen Vortragstermin treffen wir uns dann, um den Entwurf zu besprechen. Ein Vortrag sollte ungefähr 60-75 Minuten dauern.

Eine Vorbesprechung findet am Montag den 03.02. im Raum 2.040 um 16 Uhr statt. Wir beginnen mit den Vorträgen in der zweiten Semesterwoche (also am 14.04.) und treffen uns dann wöchentlich, immer montags um 16 Uhr in 2.040.

Vorträge

1. Motivation ([1] Seiten 2-18)

- Definition/Notation: Partielle Ableitung
- Herleitung der Wellengleichung
- Lösen der Wellengleichung via
  - Wanderwellen
  - Überlagerung von stehenden Wellen

- Daraus die Frage der Darstellbarkeit

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx)$$

herleiten.

- Äquivalenz der Lösungsansätze für eine gezupfte Seite

2. Grundlagen der Fourier Reihen ([1] Seiten 34-43)

- Definitionen: Fourier Koeffizienten/Reihe, Partialsummen
- Beispiele (auch grafisch)
- Eindeutigkeit der Fourier Reihe und Korollare

3. Faltung und ein erstes Konvergenzresultat ([1] Seiten 44-54)

- Faltung
- „Gute“ Kerne
- Dirichletkern ist kein guter Kern
- Cesàro Summation
- Fejér's Theorem und Folgerung, dass trigonometrische Polynome eine Basis von C^0 sind.

4. Anwendung auf Wärmeleitungsgleichung und Grundlagen zu Hilberträumen ([1] Seiten 18-21, 54-57 und Seiten 71-74)

- Herleitung der stationären Wärmeleitungsgleichung auf der Einheitsscheibe
- Abel Summation
- Lösen der stationären Wärmeleitungsgleichung durch Faltung mit dem Poissonkern (ohne Eindeutigkeit)
- Hilberträume, Orthogonalität und l^2

5. L^2 Konvergenz ([1] Seiten 75-83)

- Der Prä-Hilbertraum L^2
- Beste Approximation
- Parsevalsche Gleichung
- L^2 -Konvergenz
- Riemann-Lebesgue Lemma
- Punktweise Konvergenz an differenzierbaren Stellen
- Lokalität der Fourierreihe

6. Anwendungen ([1] Seiten 100-113)

- Isoperimetrische Ungleichung (Formulierung und Beweis)
- Weyls Gleichverteilungstheorem

7. Fourier Transformation ([1] Seiten 134-144)

- Schwartzraum
- Fourier Transformation + Eigenschaften
- Gaußkern
- Fourier Inversion
- Plancherel

8. Anwendungen ([1] Seiten 145-147 und 153-155 und 158-161 + Aufgabe 22)

- Lösen der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$
- Poissonsche Summationsformel
- Heisenbergsche Unschärferelation

9. Signalverarbeitung ([2] Seiten 22-24 + 63-64 und 143-145 und 149-162)

- Gibbs Phenomenon (numerische Untersuchung der Reihe und analytische Untersuchung durch Fourier Transformation)
- Shanons Sampling Theorem
- Oversampling

10. Diskrete Fourier Transformation ([1] Seiten 219-226 und [2] Seiten 101-104)

- Die Gruppe $\mathbb{Z}(N)$
- Fourier Inversion und Plancherel auf $\mathbb{Z}(N)$
- Fast Fourier Transformation
- Anwendung auf diskrete Faltung

Literatur

[1] Stein, Elias M, and Rami Shakarchi. Fourier Analysis: An Introduction. 1st ed. vol. 1. New Jersey: Princeton University Press, 2009. Print.

[2] Olsen, Tim. Applied Fourier Analysis: From Signal Processing to Medical Imaging. 1st ed. New York: Springer Nature, 2017. Print.

Bewertung

Ziel des Seminares ist es, dass alle Teilnehmenden in allen Vortragen etwas lernen können. Die Hauptsächliche Bewertungsgrundlage ist deshalb ihr Vortrag. Dieser sollte mathematisch korrekt, verständlich und ansprechend sein. Dafür ist ein ordentliches und geordnetes Tafelbild, sowie Kontakt zu den Zuhörern unabdingbar. Insbesondere sollten Sie nicht den gesamten Vortrag von einem Zettel aus ablesen. Erfahrungsgemäß ist es sehr hilfreich den Vortrag (vor Kommilitonen oder Freunden) so lange zu proben, bis er Ihnen flüssig von der Hand geht.