Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 9 **Abgabe: Mo 9.12.19**

Aufgabe 1 (Stetigkeit I, 2+2+2+2 Punkte):

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $N_f := \{x \in X \,:\, f(x) = 0\}$ abgeschlossen.

(b) Sei E dicht in X und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(E)$ dicht in $f(X)$.

(c) Sei E dicht in X und $f, g : X \to Y$ zwei stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in E$. Dann ist $f = g$.

(d) Sei E dicht in X und $f : E \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in E$.

Aufgabe 2 (Polynome, 2+2+2+2 Punkte):

Eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $0 \le k \le n$ heißt Polynom. Zeigen Sie:

(a) Jedes Polynom ist stetig.

(b) Es gibt ein Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{p(x)}{(x-2)^2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2, \end{cases}$$

stetig ist. Ist p eindeutig?

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ist stetig.

(d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist f nicht stetig.

Aufgabe 3 (Unstetigkeiten, 4+4 Punkte):

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\min\{q \in \mathbb{N}^* \,:\, qx \in \mathbb{Z}\}} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig ist.

(b) Sei $A := \{(0, y) \,:\, 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt: f ist stetig in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $(x, y) \notin A$.

Aufgabe 4 (Stetigkeit II, 4+4 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei (X, d) metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann ist $h(x) := \max(f(x), g(x))$ stetig.

(b) Sei $f_n : X \to [0, 1]$ eine stetige Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ stetig.

Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.
