Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

Übungsblatt 8 — Abgabe: Mo 2.12.09

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen I, 2+2+2+2+2 Punkte):

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6k^2-1}{3k^4+10}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+(-1)^k}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-2)}{k^2}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^4}{(2k^2+5)3^k}$, (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-2}{2k-1}\right)^{3k}$.

Aufgabe 2 (Potenzreihen, 2+2+2+2 Punkte):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?
Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergieren sie absolut?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} n^n x^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 9^n x^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(10-\frac{1}{n}\right)^n x^n$,

Aufgabe 3 (Konvergenz von Reihen II, 2+2+2+2* Punkte):

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gelte zusätzlich $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

(c) Es gelte zusätzlich $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

(d*) Es gelte $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere. Dann gibt es eine Folge $c : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n < \infty$.

Aufgabe 4 (Kleinster Abstand zweier Mengen, 2+2+2+2 Punkte):

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A, B \subseteq X$ definieren wir den kleinsten Abstand

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

(a) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $r, s > 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{dist}(\overline{B_r(x)}, \overline{B_s(y)})$.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(b) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $z \in X \setminus A$ und $B := \{z\}$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

(c) Sei A eine abgeschlossene und B eine kompakte Teilmenge von X sodass $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

(d) Seien A, B abgeschlossene Teilmengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 28.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Di. 26.11., Mi. 27.11. und Do 28.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.
