

Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon



Übungsblatt 7

Abgabe: Mo 25.11.09

Aufgabe 1 (Cauchyfolgen, 2+2+2+2 Punkte):

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Cauchyfolge, $b : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$. Dann ist b eine Cauchyfolge.
- (b) Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Folge mit $d(a_n, a_{n+1}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Dann ist a eine Cauchyfolge.
- (c) Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Folge so, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_N, a_m) \leq \varepsilon$ für alle $m \geq 2N$. Dann ist a eine Cauchyfolge.
- (d) Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ so, dass die Teilfolgen a_{2n} , a_{2n+1} , und a_{3n} konvergieren. Dann konvergiert a .

Aufgabe 2 (Distanzfunktionen, 3+3+2 Punkte):

Sei $d_* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$d_*(x, y) := \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Zeigen Sie:

- (a) (\mathbb{R}, d_*) ist ein metrischer Raum.
- (b) Eine Folge $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gegen $x^* \in \mathbb{R}$ in $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ genau dann, wenn x gegen x^* in (\mathbb{R}, d_*) konvergiert.
- (c) (\mathbb{R}, d_*) ist nicht vollständig.

Aufgabe 3 (Mengen, 2+2+2+2 Punkte):

Überprüfen Sie folgende Teilmengen von \mathbb{R}^2 auf Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit:

- (a) $A := (0, 1)^2$.
- (b) $B := [0, 1]^2$.
- (c) $C := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 - 100(x_1 + x_2) \leq 0\}$.
- (d) $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$.

Aufgabe 4 (Funktionen, 4+4 Punkte):

Sei X eine nichtleere Menge. Definiere $B := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}\}$. Definiere $d : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$ als $d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$. Zeigen Sie:

- (a) (B, d) ist ein vollständiger metrischer Raum.
- (b) Sei $g(x) := 0$ für alle $x \in X$. Der abgeschlossene Ball $D := \{f \in B : d(f, g) \leq 1\}$ ist kompakt genau dann, wenn X endlich ist.

Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 28.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Di. 26.11., Mi. 27.11. und Do 28.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.
