# Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

## Übungsblatt 6          Abgabe: Mo 18.11.09

### Aufgabe 1 (Metrische Räume, 3+3+4 Punkte):

(a) Sei $X$ eine Menge, und $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $\delta(x,y) := \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$ definiert.
Man bestimme die durch $\delta$ induzierten offenen und abgeschlossenen Mengen.

(b) Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d_1(x,y) := \min\{d_X(x,y), 1\}$ definiert. Man beweise oder widerlege: $d_1$ ist eine Metrik auf $X$.

(c) Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ zwei metrische Räume. Finden Sie eine Metrik $d_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle Folgen $x : \mathbb{N} \to X$ und $y : \mathbb{N} \to Y$ und alle $x^* \in X$ und $y^* \in Y$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*) \iff \left( \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y^* \right).$$

### Aufgabe 2 (Teilfolgenkriterium, 8 Punkte):

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei $x : \mathbb{N} \to X$ eine Folge und $x^* \in X$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ genau dann, wenn für jede Teilfolge $x \circ n$ eine Teilfolge $(x \circ n) \circ k$ existiert, so dass $\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = x^*$.

### Aufgabe 3 (Inneres, Abschluss, Rand, 2+2+3+3 Punkte):

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $M \subseteq X$. Man beweise:

(a) $M^\circ = \bigcup\{O \subseteq X :\ O \text{ ist offen und } O \subseteq M\}$.

(b) $\overline{M} = \bigcap\{C \subseteq X :\ C \text{ ist abgeschlossen und } M \subseteq C\}$.

Man beweise oder widerlege:

(c) Wenn $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, $M \neq \emptyset$ und $M \neq \mathbb{R}^n$, dann ist $\partial M \neq \emptyset$.

(d) $\partial \left( \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\partial A_i)$, wobei $A_i \subseteq X$ für $i \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4 (Häufungspunkte, 2+2+(2+2+2+2)$^*$ Punkte):**

Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Zu einer Folge $x : \mathbb{N} \to X$ definiere man die Menge der Häufungspunkte

$$H_x := \left\{ x^* \in X : \text{ es gibt eine Teilfolge } x \circ n \text{ von } x \text{ so dass } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^* \right\}.$$

Man beweise oder widerlege: Für $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ gibt es eine Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass

(a) $H_x = \emptyset$.

(b) $H_x = \{0,1,2\}$.

(c*) $H_x = \mathbb{N}$.

(d*) $H_x = \mathbb{R}$.

(e*) $H_x = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Außerdem beweise man für einen beliebigen metrischen Raum die Darstellung

(f*) $H_x = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}$.

---

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

---