Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

Übungsblatt 5 — Abgabe: Mo 11.11.19

Aufgabe 1 (Konvergenz von Folgen, 4+4 Punkte):

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge und sei $b_n := a_{n+1} - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn die Folge a_n konvergiert, dann konvergiert die Folge b_n gegen Null.

(b) Wenn die Folge b_n gegen Null konvergiert, dann ist die Folge a_n konvergent.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Potenz- und Wurzelfunktionen, 4+4 Punkte):

Sei $k \in \mathbb{N}^*$. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in N$ die gegen $a_* \in \mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(a_n)^k \to (a_*)^k$.

(b) $(a_n)^{1/k} \to (a_*)^{1/k}$.

Aufgabe 3 (Lemma 2.21, 3+3+2+2* Punkte):

Sei $a, b \to \mathbb{R}$ zwei Folgen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

(b) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

(c) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $b_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Beweisen oder widerlegen Sie außerdem die folgende Aussage:

(d)* Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ist, dann gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Aufgabe 4 (Limes inferior und Limes superior, 2+3+3 Punkte):

Es seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Folgen. Man zeige die folgenden Ungleichungen:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ für konvergentes und positives a.

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.