

# Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon



## Hinweise zu Übungsblatt 3

Abgabe: Mo 28.10.19

### Zu Aufgabe 1 und 2:

Benutzen Sie die Charakterisierung aus Lemma 1.45 für inf und sup.

(1d) Sie dürfen Aufgabe (4a) verwenden, selbst wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

### Zu Aufgabe 3:

- (a) Konstruieren Sie zunächst eine surjektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Wählen Sie hierzu für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine surjektive Abbildung  $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ .
- (b) Zeigen Sie zuerst, dass die Mengen  $A_n := \{X \subset \mathbb{N} \mid \#X \leq n\}$  alle abzählbar oder endlich sind.
- (c\*) Führen Sie die Existenz einer surjektiven Abbildung  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$  zum Widerspruch. Betrachten Sie dazu die Menge  $M := \{n \in \mathbb{N} : n \notin \varphi(n)\}$ . Da  $\varphi$  surjektiv ist, muss  $M = \varphi(m)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  sein.

### Zu Aufgabe 4:

- (a) Verwenden Sie Satz 1.42.
- (b) Verwenden Sie, dass  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist.
- (c) Konstruieren Sie zwei nichtleere Mengen  $A \subset \mathbb{Q}$ ,  $B \subset \mathbb{Q}$  so, dass  $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq b$  gilt, aber kein  $x \in \mathbb{Q}$  existiert mit  $a \in A, b \in B \Rightarrow a \leq x \leq b$ . Verfahren Sie für  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ähnlich.