Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3 **Abgabe: Mo 28.10.19**

Aufgabe 1 (Obere und untere Schranken, 8 Punkte):

Man bestimme jeweils Infimum und Supremum der folgenden Mengen und untersuche, ob diese Mengen Maximum bzw. Minimum besitzen:

a) $M_1 := \{(-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n+1}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;

b) $M_2 := \{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$;

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x + 1 \geq 0\}$;

d) $M_4 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 9\}$.

Aufgabe 2 (Infimum und Supremum, 8 Punkte):

(a) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge. Man zeige, dass die Menge

$$-A := \{-x \,|\, x \in A\}$$

nach unten beschränkt ist und dass $\inf(-A) = -\sup A$ gilt.

(b) Die Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ seien nichtleer und nach oben beschränkt. Man zeige, dass die Menge

$$C := \{y + z \,|\, y \in A,\, z \in B\}$$

nach oben beschränkt ist mit

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

(c) Die Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ seien nichtleer und beschränkt. Beweisen Sie

$$\sup A \cdot \sup B \leq \sup\{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Finden Sie außerdem Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so dass die strikte Ungleichung gilt.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit, 8 Punkte):

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine abzählbare Menge. Beweisen Sie, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine abzählbare Menge ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $E(\mathbb{N})$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

(c*) *(4 Zusatzpunkte)* Zeigen Sie, dass die Menge $P(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 4 (Dichtheit und vollständigkeit, 8 Punkte):

Wir sagen, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ *dicht* in $\mathbb{R}$ ist, falls es für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt mit $a \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht vollständig sind.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.
