Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

Übungsblatt 2 **Abgabe: Mo 21.10.19**

Aufgabe 1 (Summen, 8 Punkte):

(a) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Beweisen Sie ohne Induktion zu verwenden: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe 2 (Pascalsches Dreieck, 8 Punkte):

Das Pascalsche Dreieck besteht aus aufeinander folgenden Zeilen, wobei unter die letzte Zeile rekursiv in die Zwischenräume die Summe der beiden oberen Zahlen geschrieben wird. Wenn eine der beiden Zahlen fehlt, setzen wir hierfür die Zahl 0 ein. In die erste Zeile schreiben wir eine einzelne 1, so dass die ersten vier Zeilen gegeben sind durch

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1. \end{array}$$

(a) Schreiben Sie die ersten acht Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

(b) Berechnen Sie 101^8.

(c) Ohne den binomischen Lehrsatz, Satz 1.25, zu verwenden, finden Sie Zahlen $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$, so dass $(x+y)^4 = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i y^{4-i}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ gilt: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ und $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$. Geben Sie ohne Beweis an, in welchem Eintrag des Pascalschen Dreiecks $\binom{n}{k}$ zu finden ist.

Aufgabe 3 (Bernoulli-Ungleichung, 8 Punkte):

In der Vorlesung wurde die Bernoullische Ungleichung bewiesen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

(a) Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung für $x \geq 0$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $x \geq 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4} x^2$$

gilt.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage aus (b) in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$.

Aufgabe 4 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, 8 Punkte):

In dieser Aufgabe beweisen wir für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle Zahlen $a_1, \dots, a_n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$ existieren, so dass

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

(b) Zeigen Sie die Ungleichung für die Fälle $n = 1, n = 2$.

(c) Zeigen Sie die Ungleichung für den Fall $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.
