

Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon



Übungsblatt 1

Abgabe: Mo 14.10.19

Aufgabe 1 (Bemerkung 1.3, 8 Punkte):

Sei \mathbb{K} ein Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen. Geben Sie dabei in **jedem** Beweisschritt an, welches Körperaxiom Sie verwendet haben.

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{K}$, sodass $a + x = b$.
- (b) Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{K}$, sodass $a \cdot x = b$.

Aufgabe 2 (Bemerkung 1.4, 8 Punkte):

Sei \mathbb{K} ein Körper. Seien $a, b \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie mittels der Körperaxiome, dass folgende Rechenregeln gelten. Geben Sie dabei in **jedem** Beweisschritt an, welches Körperaxiom Sie verwendet haben. Orientieren Sie sich an dem Beweis von Bemerkung 1.4.

- (a) Das 1 Element ist eindeutig, d.h. falls $1 \in \mathbb{K}$ und $1' \in \mathbb{K}$ beide die Eigenschaft $a \cdot 1 = a$ bzw. $a \cdot 1' = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$ haben, dann ist $1 = 1'$.
- (b) $-(-a) = a$.
- (c) $(-a) + (-b) = -(a + b)$.
- (d) $a(-b) = -(ab)$.

Aufgabe 3 (Bemerkung 1.6, 8 Punkte):

Sei \mathbb{K} ein geordneter Körper. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie dabei in **jedem** Beweisschritt an, welches Axiom oder welche Aussage Sie verwendet haben. Sie dürfen alles verwenden bis einschließlich Definition 1.5.

- (a) Wenn $a < b$, dann ist $-b < -a$.
- (b) Wenn $a < b$ und $b < c$, dann ist $a < c$.
- (c) Wenn $a < b$ und $c \geq 0$, dann ist $ac \leq bc$.
- (d) $ab > 0$ genau dann wenn $(a > 0$ und $b > 0)$ oder $(a < 0$ und $b < 0)$.
- (e) Wenn $a < b$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{K}$ sodass $a < c < b$.
- (f) Wenn $a, b \geq 0$ und $a^2 < b^2$, dann ist $a < b$.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion.

- (a) (Lemma 1.14) Wenn $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$, dann ist $n - m \in \mathbb{N}$.
- (b) (Lemma 1.15) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der zwei Bedingungen:
- (i) $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.
 - (ii) $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist.

Bitte verwenden Sie für Ihre Abgaben folgenden Header:

Name:

Übungsgruppe:

Geben Sie Ihre Bearbeitung der Übungsblätter bitte unbedingt getackert und in sauberer Ausarbeitung ab. Ausnahmsweise muss dieser Zettel in Einzelausarbeitung abgegeben werden.
