

# Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon



## Übungsblatt 14

Abgabe: Mo 27.1.2020

### Aufgabe 1 (Integrale, 12 Punkte):

Bestimmen Sie die folgenden Integrale, bzw. Mengen von Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_2^4 e^{\sqrt{2x+1}} dx. & \text{(b)} \quad & \int_1^{e^2} \ln(x) dx. & \text{(c)} \quad & \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx. \\ \text{(d)} \quad & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. & \text{(e)} \quad & \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx. & \text{(f)} \quad & \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} dx. \end{aligned}$$

### Aufgabe 2 (Bestimmung von Extremstellen, 6 Punkte):

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktion  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \frac{5}{2} \ln x + (x - 3)^2.$$

### Aufgabe 3 (Integrale und Integrierbarkeit, 3+3+3\* Punkte):

- (a) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  stetig und sei  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Dann gilt  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ .
- (b) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn die Funktion  $f^2$  integrierbar ist, dann ist  $f$  integrierbar.
- (c\*) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn die Funktion  $f^3$  integrierbar ist, dann ist  $f$  integrierbar.

### Aufgabe 4 (Quantitative Approximation von Integralen, 4+4 Punkte):

- (a) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $N \in \mathbb{N}^*$ . Dann ist

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{i}{N}\right) \right| \leq \frac{\max_{y \in [0,1]} |f'(y)|}{2N}.$$

- (b) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar,  $N \in \mathbb{N}^*$ . Dann ist

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{i + \frac{1}{2}}{N}\right) \right| \leq \frac{\max_{y \in [0,1]} |f''(y)|}{24N^2}.$$

---

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

Zusätzliche Helpdesk-Termine für die Klausurvorbereitung im Februar und März können Sie auf der Vorlesungswebsite finden.

---