# Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

## Übungsblatt 13 — Abgabe: Mo 20.1.2020

**Aufgabe 1 (Satz von l'Hôpital, 2+2+2* Punkte):**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \exp x)^{\sin x}$ (mit $x \in (-\infty, 0)$).

(c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$.

**Aufgabe 2 (Taylorpolynome, 2+2+2+2* Punkte):**

Berechnen Sie für folgende offene Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, Punkte $x \in I$ und natürliche Zahlen $k \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $k$-ten Grades von $f$ in $x$.

(a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$.

(b) $I = (-1, 1)$, $f(x) = \arcsin x$, $x = 0$, $k = 2$.

(c) $I = (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $x = 1$, $k = 2$.

(d*) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{2^n}$, $x = 0$, $k = 2$.

**Aufgabe 3 (Konvexität, 6+2 Punkte):**

Sei $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für alle $x, y \in (a, b)$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

(b) Für alle $x, y \in (a, b)$ gilt $f(x) + f'(x)(y - x) \leq f(y)$.

(c) Für alle $x \in (a, b)$ gilt $f''(x) \geq 0$.

Finden Sie zusätzlich mit Hilfe dieser Aussagen einen weiteren Beweis der Bernoullischen Ungleichung, Lemma 1.18.

**Aufgabe 4 (Zweite Ableitungen, 4+4$*$ Punkte):**

(a) Sei $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

für alle $x \in (a, b)$.

(b) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2} = 0,$$

aber $f'$ ist in 0 nicht differenzierbar.

**Aufgabe 5 (Dreiecksungleichung für Integrale, 4+4 Punkte):**

Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $x \in [a, b]$ seien $f_+(x) := \max(f(x), 0)$ und $f_-(x) := \max(-f(x), 0)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktionen $f_+$ und $f_-$ sind Riemann-integrierbar.

(b) Die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

---

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

---