Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

Übungsblatt 12 **Abgabe: Mo 13.1.2020**

Aufgabe 1 (Ableitungen, 2+2+2+2∗+2∗ Punkte):

Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, 5$ alle $x \in \mathbb{R}$, an denen f_i stetig ist und alle $x \in \mathbb{R}$, an denen f_i differenzierbar ist, und bestimmen Sie f_i'.

(a) $f_1(x) := x^2 \sin x$.

(b) $f_2(x) := \begin{cases} |x|^{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

(c) $f_3(x) := \begin{cases} \arcsin x & x \in [-1, 1], \\ 0 & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$

(d∗) $f_4(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$

(e∗) $f_5(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 2 (Differenzenquotienten als Ableitungen, 4+4 Punkte):

Sei $f(x) := x(x-1)(x+1)$.

(a) Finden Sie alle $\xi \in [-2, 2]$, für die $\dfrac{f(2) - f(-2)}{4} = f'(\xi)$ gilt.

(b) Finden Sie alle $\xi \in [0, 4]$, für die $\dfrac{f(4) - f(0)}{4} = f'(\xi)$ gilt.

Aufgabe 3 (Potenzreihen, 3+4+3 Punkte):

Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig in dem Intervall $(-R, R)$.

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $g_k : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen so, dass $g_k \to g^*$ und $g_k' \to h^*$ gleichmässig konvergieren. Dann ist $g^* : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $(g^*)' = h^*$.

(c) f ist stetig differenzierbar in dem Intervall $(-R, R)$ und $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

“f stetig differenzierbar in dem Intervall I” bedeutet, dass f in I differenzierbar ist und die Ableitung f' in I stetig ist.

Aufgabe 4 (Schnell wachsende Funktionen, 8 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(x) > f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) > 0$ ist für alle $x > 0$.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.