

Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon



Übungsblatt 11

Abgabe: bis zum 23.12.2019 in den Übungen

Aufgabe 1 (Trigonometrische Funktionen, 2+2+2+2 Punkte):

(a) Beweisen Sie: Für $x, y \in \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(0)$ mit $\cos(x+y) \neq 0$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

(b) Beweisen Sie: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(c) Beweisen Sie: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

(d) Für $x \in \mathbb{C}$ berechnen Sie $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x}$.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Funktionenfolgen, 2+2+2+2 Punkte):

Man betrachte die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, die wie folgt definiert ist:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{falls } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{falls } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(a) Konvergiert die Folge f_n punktweise auf \mathbb{R} ?

(b) Konvergiert die Folge f_n gleichmäßig auf \mathbb{R} ?

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(d) Konvergiert die Folge der Partialsummen $S_k := \sum_{n=1}^k f_n$ gleichmäßig auf \mathbb{R} ?

Aufgabe 3* (Konvergenz monotoner Funktionen, 2*+6* Punkte):

Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes f_n monoton wachsend ist und die Folge punktweise gegen eine stetige Funktion $f_* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Man zeige, dass f_* monoton wachsend ist.

(b) Man zeige, dass f_n auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f_* konvergiert.

Hinweise können auf der Webseite der Vorlesung gefunden werden, sodass optional eine Bearbeitung ohne Hilfestellung möglich ist. Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.
