# Übungen zu Analysis I

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. S. Conti — Dr. P. Gladbach — Dr. T. Simon

UNIVERSITÄT BONN

## Übungsblatt 10 **Abgabe: Mo 16.12.19**

### Aufgabe 1 (Zwischenwertsatz, 3+3+3 Punkte):

(a) Seien $a < b$, $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = x$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \exp(x) + x \exp(-x)$. Zeigen Sie, dass $f$ mindestens eine Nullstelle hat.

(c) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ gibt mit $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

### Aufgabe 2 (Stetigkeit, 3+3+3 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ beschränkt ist

(b) Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} f(y)$ oder $f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f(y)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f$ ist gleichmäßig stetig.

### Aufgabe 3 (Monotone Funktionen, 3+2+3 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(A)$ offen.

(b) Es gibt eine streng monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $f(A)$ nicht offen ist.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(A)$ offen für alle offenen $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f$ streng monoton.

**Aufgabe 4 (Gleichmäßig stetige Funktionen, 3+3+(4+1+1+1)* Punkte):**

(a) Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Man zeige, dass für jede Cauchy-Folge $x : \mathbb{N} \to X$ auch $f \circ x$ eine Cauchy-Folge in $Y$ ist.

(b) Was passiert, wenn man in Teilaufgabe $(a)$ stetig statt gleichmäßig stetig annimmt?

(c) Es sei $E$ eine dichte Tielmenge in $\mathbb{R}^n$. Man zeige, dass es für jede gleichmäßig stetige Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in E$.

(d) Was passiert, wenn man in Aufgabenteil (c) gleichmäßig stetig mit stetig ersetzt?

(e) Was passiert, wenn man in Aufgabenteil (c) Funktionen auf einem beliebigen metrischen Raum $(X, d_X)$ betrachtet (d.h. $E$ ist eine dichte Teilmenge von $X$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$)?

(f) Was passiert, wenn man in Aufgabenteil (c) für den Bildraum der Funktionen einen beliebigen metrischen Raum $(Y, d_Y)$ betrachtet (d.h. $f : E \to Y$ und $g : \mathbb{R}^n \to Y$?

---

Der Zettel kann in Zweiergruppen abgegeben werden unter der Voraussetzung, dass beide Partner das gleiche Tutorium besuchen.

Der Helpdesk zur Analysis 1 findet für alle Studierenden am Dienstag und Donnerstag jeweils von 13-16 Uhr im Raum N1.002 statt. Der Helpdesk speziell für Lehramtsstudierende findet am Montag von 12-14 Uhr und am Mittwoch von 14-16 Uhr im Raum N0.007, sowie am Donnerstag von 14-16 Uhr im Raum N0.008 statt.

Am 16.12.2019 ab 18 c.t. im Lipschitzsaal veranstaltet die Fachschaft Mathematik in Kooperation mit dem HCM ein Treffen für die Teilnehmer*innen der Grundvorlesungen. Es soll im Plenum und in Kleingruppen über den Studieneinstieg und die Tutorien gesprochen und diskutiert werden. Alle Beteiligten freuen sich über ein zahlreiches Erscheinen und eine Vielfalt an Rückmeldungen, um auch künftig an den studienbegleitenden Angeboten zu arbeiten. Für ein paar Snacks wird gesorgt.

---