Wintersemester 2017/18 Universität Bonn
Analysis 3 Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 12 Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2018-01-18

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{S}$ mit $\mu(E) < \infty$. Für eine messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$d(f) := \inf\big\{r \in [0, \infty) \;\big|\; \mu(\{x \in E \mid |f(x)| > r\}) \le r\big\}$$

und $d(f, g) := d(f - g)$. Zeigen Sie dass

(a) d eine Halbmetrik auf der Menge der messbaren Funktionen ist,

(b) $d(f, g) = 0$ genau dann wenn $f = g$ fast überall,

(c) eine Folge von messbaren Funktionen $(f_k)_k$ konvergiert gegen f im Maß genau dann wenn $d(f_k, f) \to 0$.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$. Seien $1 \le p, q \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie dass

$$\|f\|_p = \sup\Big\{\int_E fg \mathrm{d}\mu \;\Big|\; g \in L_q(E), \|g\|_q \le 1\Big\}.$$

Hinweis: nehmen Sie zunächst $\|f\|_p < \infty$ an.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$. Seien $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, $0 \le \theta \le 1$, und $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Aufgabe 4 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = 0 \quad \text{und} \quad V := \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx < \infty.$$

Wir definieren rekursiv $f_1 := f, f_{k+1} := f_k * f$ sowie $g_k(x) := \sqrt{k} f_k(\sqrt{k}x)$. Zeigen Sie:

(a) $\int_{\mathbb{R}} g_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 1$ für alle $k \ge 1$.

(b) $\widehat{g_k}(\xi) = \widehat{f_k}(\xi/\sqrt{k})$.

(c) $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\widehat{f}(0) = 1$, $(\widehat{f})'(0) = 0$ und $(\widehat{f})''(0) = -V$.

(d) $\lim_{k\to\infty} \widehat{g_k}(\xi) = \exp(-V\xi^2/2)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (Minkowski-Integralungleichung)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ messbar und $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie

$$\Big(\int \big(\int f(x, y)\mathrm{d}x\big)^p \mathrm{d}y\Big)^{1/p} \le \int \Big(\int (f(x, y))^p \mathrm{d}y\Big)^{1/p} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6. Seien $0 < r < R < \infty$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^3\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in B((0, R), r)\} = 2\pi^2 R r^2.$$