Wintersemester 2017/18 | Universität Bonn
Analysis 3 | Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 11 | Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2018-01-11
Dies ist das letzte zulassungsrelevante Übungsblatt. Frohe Feiertage und guten Rutsch!

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\phi \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$, wobei

$$C_b^k(\mathbb{R}^n) = \{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid D^\alpha g \text{ ist eine beschränkte stetige Funktion für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}^n_{\leq k}\}$$

und $\mathbb{N}^n_{\leq k} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leq k\}$. Zeigen Sie dass $f * \phi \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ und

$$D^\alpha(f * \phi) = f * D^\alpha \phi \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n_{\leq k}.$$ (10 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < z^2 < x < 2\}.$$

Entscheiden Sie ob das Lebesgueintegral

$$\int_A z e^{x+y} \mathrm{d}\mathcal{L}^3(x, y, z)$$

existiert und berechnen Sie ggf. seinen Wert. (10 Pkt.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie

(a) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, (5 Pkt.)

(b) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$. (5 Pkt.)

Hinweis: $1/(1-\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^n$ falls $|\lambda| < 1$.

Aufgabe 4. Sei $\Phi_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$ der Gausskern auf $\mathbb{R}^n$, $t > 0$. Sei weiterhin $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie

(a) $\Phi_t * \Phi_s = \Phi_{t+s}$, $t, s > 0$, (3 Pkt.)

(b) Φ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung $\nabla^2 \Phi_t = \partial_t \Phi_t$, wobei $\nabla^2 = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$, (3 Pkt.)

(c) Die Funktion $F(x, t) = f * \Phi_t(x)$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung $\nabla_x^2 F(x, t) = \partial_t F(x, t)$. (3 Pkt.)

(d) $\lim_{t \to 0} \|f * \Phi_t - f\|_1 = 0$. (3 Pkt.)

Sei nun $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit $\operatorname{supp} g \subset B(0, R)$ für ein $R < \infty$. Zeigen Sie

(e) $\lim_{t \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x) - g * \Phi_t(x)| = 0$. (4 Pkt.)

(f) Es existiert eine Folge von Polynomen in n Variablen p_m mit $\lim_{m \to \infty} \sup_{x \in B(0,R)} |g(x) - p_m(x)| = 0$.
Hinweis: schneiden Sie die Potenzreihenetwicklung der Exponentialfunktion nach endlich vielen Gliedern ab. (4 Pkt.)

Aufgabe 5 (Bonus)**.** Für $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ definieren wir die Mengen der Intervalle

$$\mathcal{D}_k^\alpha := \{2^k([n, n+1) + \alpha(-1)^k/3), n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{D}^\alpha := \cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k^\alpha.$$

Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ definieren wir

$$M_\alpha f(x) := \sup_{x \in I \in \mathcal{D}^\alpha} |f|_I, \quad |f|_I = \operatorname{Vol}(I)^{-1} \int_I |f| \mathrm{d}\mathcal{L}^1.$$

(a) Zeigen Sie dass jedes $I \in \mathcal{D}_{k+1}^\alpha$ eine disjunkte Vereinigung von 2 Intervallen in $\mathcal{D}_k^\alpha$ ist. (2 Pkt.)

(b) Für jedes endliche Intervall $J \subset \mathbb{R}$ existieren α und $I \in \mathcal{D}^\alpha$ mit $J \subset I$ und $\operatorname{Vol}(I) \leq 3 \operatorname{Vol}(J)$. (2 Pkt.)

(c) Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie dass die Funktion

$$Mf(x) := \sup_{t>0} \left| \frac{1}{t} \int_x^{x+t} f(x) \mathrm{d}x \right|$$

messbar ist. (3 Pkt.)

(d) Zeigen Sie

$$Mf(x) \leq 3 \sup_{\alpha=-1,0,1} M_\alpha f(x). \qquad \text{(2 Pkt.)}$$

(e) Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, und $\mathcal{I}^\alpha = \{I \in \mathcal{D}^\alpha \mid |f|_I > \lambda\}$. Zeigen Sie dass für jede Teilmenge $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}^\alpha$ die aus paarweise disjunkten Intervallen besteht $\sum_{J \in \mathcal{J}} \mathrm{Vol}(J) \leq \lambda^{-1} \|f\|_1$ gilt. (3 Pkt.)

(f) Seien f, λ wie zuvor. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^{1*}(\{x \in \mathbb{R} \mid Mf > \lambda\}) \leq 9\lambda^{-1} \|f\|_1. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

(g) Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $F(x) := \int_{-\infty}^x f(y) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(y)$. Zeigen Sie dass die Menge

$$N = \{x \in \mathbb{R} \mid \limsup_{t \to 0, t>0} |f(x) - (F(x+t) - F(x))/t| > 0\}$$

eine Nullmenge ist. Hinweis: ersetzen Sie f zunächst durch $f * \Phi_s$ mit einem Gausskern Φ_s. (5 Pkt.)