Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-12-21

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie den Satz 3.40 (über die Vertauschung von Integral und Ableitung) aus dem Skript. (2 × 2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \sqrt{\pi}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Hinweis: berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x,y)$ mithilfe von Polarkoordinaten.

(c) Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: betrachten Sie $\int e^{-\alpha x^2/2}$. (5 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ integrierbar. Man definiere $F(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\xi x) \mathrm{d}x$.

(a) Zeigen Sie dass die Funktion F stetig ist. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie

$$\lim_{|\xi| \to \infty} F(\xi) = 0. \qquad \text{(4 Pkt.)}$$

Hinweis: verwenden Sie ein Ergebnis vom Blatt 9.

Aufgabe 3. Sei $B_1^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_j x_j^2 < 1\}$ die N-dimensionale Einheitskugel.

(a) Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^N(B_1^N) = \frac{2\pi}{N} \mathcal{L}^{N-2}(B_1^{N-2}), \quad N \in \mathbb{N}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\int_{B_1^3} (x_1^2 + x_2^2) \mathrm{d}\mathcal{L}^3(x). \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Aufgabe 4. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine beliebige Funktion und

$$N := \{x \in [0,1] \mid f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}.$$

Zeigen Sie

(a) $\mathcal{L}^1(N) = 0 \implies f$ ist Riemann-integrierbar. Hinweis: benutzen Sie die äußere Regularität des Lebesguemaßes und Überdeckungskompaktheit von $[0,1]$. (6 Pkt.)

(b) f ist Riemann-integrierbar $\implies \mathcal{L}^1(N) = 0$. Hinweis: Seien $\phi \le f \le \psi$ einfache Funktionen mit $\int \psi - \int \phi \le \epsilon^2$. Benutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung für $\psi - \phi$. (4 Pkt.)

Analoge Aussagen gelten für beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und können auf den Spezialfall $f : [0,1] \to [0,1]$ zurückgeführt werden.