Wintersemester 2017/18 Universität Bonn
Analysis 3 Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 9 Dr. Pavel Zorin-Kranich

---

**Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-12-14**

---

Für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine messbare Funktion $f : A \to [0, \infty]$ schreiben wir

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x := \int_A f(x)\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x).$$

**Aufgabe 1.** Seien $f : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ und $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie dass

(a) die Funktion $F(x, y) = f(x)g(y)$ auf $\mathbb{R}^{m+n}$ messbar ist und (5 Pkt.)

(b)
$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} F(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathrm{d}x\big)\big(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\mathrm{d}y\big).$$ (5 Pkt.)

**Aufgabe 2.** Sei $L_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine Folge von Lipschitzfunktionen mit Lipschitzkonstante höchstens $1/2$ sodass $\lim_{n\to\infty} L_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Sei $f : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x) - f(x + L_n(x))|\mathrm{d}x = 0$$

in folgenden Fällen:

(a) $f = \chi_Q$, wobei $Q$ ein Quader ist. (4 Pkt.)

(b) $f = \chi_A$, wobei $A \subset \mathbb{R}^m$ eine messbare Teilmenge ist. (4 Pkt.)

(c) $f$ ist eine allgemeine messbare Funktion. (2 Pkt.)

Hinweis zu Teilaufgabe (a): um zu verstehen was passieren kann betrachten Sie die Folgen $L_n(x) = \frac{1}{n}y$ ($y \in \mathbb{R}^m$ fest), $L_n(x) = \frac{1}{n}x$, $L_n(x) = -\frac{1}{n}x$.

**Aufgabe 3.** De *Faltung* zweier messbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ist die Funktion

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie dass $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass $f * g$ eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist. (2 Pkt.)

(c) Zeigen Sie $\int_{\mathbb{R}^n}(f * g)(x)\mathrm{d}x \le (\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x)(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x)$, wobei wie üblich $\infty \cdot 0 = 0$. (3 Pkt.)

(d) Man nehme an dass $g$ beschränkt und $f$ integrierbar ist. Zeigen Sie dass $f * g$ stetig ist. (2 Pkt.)

**Aufgabe 4.** Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie dass die Funktion $F(x, y) = \frac{1}{1+|x|^a+|y|^b}$ auf $\mathbb{R}^2$ genau dann integrierbar ist wenn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$. (10 Pkt.)