Wintersemester 2017/18 | Universität Bonn
Analysis 3 | Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 8 | Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-12-07

In allen Aufgaben ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.

Aufgabe 1. (a) Finden Sie eine Folge von beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf $[0,1]$ für die in der Aussage des Lemmas von Fatou keine Gleichheit gilt. (2 Pkt.)

(b) Sei $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie dass die Menge

$$\{x \in X : \text{die Folge } (f_j(x))_j \text{ konvergiert}\} \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

messbar ist.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Wir definieren $\nu(A) := \int_A f \mathrm{d}\mu$ für $A \in \mathcal{S}$.

(a) Zeigen Sie dass $(X, \mathcal{S}, \nu)$ ebenfalls ein Maßraum ist. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ für $A \in \mathcal{S}$. (1 Pkt.)

(c) Man nehme an dass $f(X) \subset (0, \infty]$. Zeigen Sie $\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$ für $A \in \mathcal{S}$. (1 Pkt.)

(d) Man nehme an dass $f(X) \subset (0, \infty)$. Zeigen Sie $\mu(A) = \int_A \frac{1}{f} \mathrm{d}\nu$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Hinweis: zeigen Sie für jedes $b > 1$ und $A \in \mathcal{S}$ die Ungleichungen

$$\frac{1}{b}\mu(A) \leq \int_A \frac{1}{f} \mathrm{d}\nu \leq b\mu(A).$$

Betrachten Sie zu diesem Zweck zunächst den Fall $a \leq \inf f(A) \leq \sup f(A) \leq ba$ mit $0 < a < \infty$. (6 Pkt.)

Aufgabe 3. Man nehme an dass $(X, \mathcal{S}, \mu)$ σ-endlich ist. Für eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ definiert man die *Verteilungsfunktion*

$$\sigma_f(\lambda) := \mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}), \quad 0 < \lambda < \infty,$$

und die *fallende Umordnung*

$$f^*(t) := \inf\{\lambda : \sigma_f(\lambda) \leq t\}, \quad 0 < t < \infty.$$

(a) Zeigen Sie $f \leq g \implies \sigma_f \leq \sigma_g \implies f^* \leq g^*$, wobei $f, g : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen sind und alle Ungleichungen punktweise zu interpretieren sind. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass für jedes f die Verteilungsfunktion σ_f monoton fallend und rechtsseitig stetig ist (d.h. $\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \sigma_f(\lambda + \epsilon) = \sigma_f(\lambda)$). Zeigen Sie dass die fallende Umordnung f^* ebenfalls monoton fallend ist. (3 Pkt.)

(c) Seien $f_j : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen sodass die Folge $(f_j(x))_j$ für jedes $x \in X$ monoton steigend ist und gegen $f(x)$ konvergiert. Zeigen Sie dass die Folge der zugehörigen Verteilungsfunktionen σ_{f_j} ebenfalls monoton gegen σ_f konvergiert. (3 Pkt.)

(d) Zeigen Sie

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} \sigma_f(\lambda) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(\lambda). \qquad \text{(4 Pkt.)}$$

(e) Zeigen Sie $\sigma_{f^*} = \sigma_f$, wobei σ_{f^*} mit Hilfe des Lebesguemaßes $\mathcal{L}^1$ definiert ist. (3 Pkt.)

(f) Zeigen Sie $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} f^*(t) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t)$. (2 Pkt.)

(g) Zeigen Sie $\int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_{(0,\mu(A))} f^*(t) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t)$ für alle $A \in \mathcal{S}$. (3 Pkt.)

(h) Man nehme an dass f integrierbar ist. Zeigen Sie $\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\mu(A) < \epsilon} \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$ indem Sie den Satz über monotone Konvergenz auf die Funktionen $f^* 1_{(\epsilon,\infty)}$ anwenden. (4 Pkt.)